

OBS: Alle referencer til sætninger, lemmaer, osv. er fra bogen [CES]

Opgave 1

a)

Polarformen for et komplekst tal er givet ved $z = |z|e^{i\theta}$, hvor θ er argumentet for z . Så i vores tilfælde svarer det til at $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ og argumentet er det θ som løser

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \frac{-\sqrt{3}}{|z|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \cos(\theta) &= \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Det kan udregnes til at $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Altså er polarformen for $z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$. Vi kan nu udregne

$$\begin{aligned}z^2 &= 2^2 e^{i\frac{10\pi}{3}} = 4e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ z^3 &= 2^3 e^{i\frac{15\pi}{3}} = 8e^{i\pi} = -8 \\ z^6 &= 2^6 e^{i\frac{30\pi}{3}} = 64e^{i2\pi} = 64\end{aligned}$$

b)

Vi kan se at z^n vil være et reelt tal når argumentet er en multiplacitet af π , og da argumentet for z^n er givet ved $n\frac{5\pi}{3}$ vil det ske når $\frac{5n}{3}$ er et heltal, altså for $n = 0, 3, 6, 9, \dots$. Altså 3 tabellen.

c)

Eftersom $|(c \cdot z)^n| = |c \cdot z|^n$ vil den absolutte værdi stige hvis $|c \cdot z| = |c| \cdot |z| > 1$, altså hvis $|c| > \frac{1}{2}$, da vi ved at $|z| = 2$. Altså er følgen ubegrænset for $|c| > \frac{1}{2}$ og da den logiske kontraposition af lemma 1.37 siger at ubegrænsede følger er divergente, kan vi så konkludere at for $c \in \mathbb{C}$ med $|c| > \frac{1}{2}$ er følgen divergent. For $|c| = \frac{1}{2}$ kan vi se at $|(c \cdot z)^n| = (\frac{1}{2} \cdot 2)^n = 1^n = 1$.

Hvis vi så kigger på et $c = \frac{1}{2}e^{i\phi}$, hvor $\phi \in [0, 2\pi)$ kan vi se at $(c \cdot z)^n = e^{n \cdot (\phi + \frac{5\pi}{3})}$, hvor proposition 1.30 siger at hvis er $\frac{\phi + \frac{5\pi}{3}}{2\pi}$ er et rationelt tal, hvor den kan skrives som uforkortelig brøk $\frac{x}{q}$ vil have q fortætningspunkter og hvis argumentet er irrationelt så vil den have uendeligt mange fortætningspunkter. Da vi ved fra lemma 1.35 at en konvergent følge vil have et entydigt fortætningspunkt så kan følgen ikke være konvergent hvis der er adskillige fortætningspunkter. Så i dette tilfælde kan vi sige at følgen kun vil have *et* fortætningspunkt hvis $\frac{\phi + \frac{5\pi}{3}}{2\pi} = \frac{\phi}{2\pi} + \frac{5}{6}$ er et heltal. For et $\phi \in [0, 2\pi)$ kan det kun ske når $\phi = \frac{1}{3}\pi$. Altså har jeg at hvis $|c| = \frac{1}{2}$ kan følgen kun have *et* fortætningspunkt hvis $c = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$. Det kan nu ses at $c \cdot z = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{i2\pi} = 1$. Altså vil $(c \cdot z)^n = 1^n = 1$ definere en konvergent følge med grænseværdi 1.

For $c \in \mathbb{C}$ med $|c| < \frac{1}{2}$ kan man se at $|c \cdot z| < 1$ og da vi ved at for $x \in \mathbb{R}$ med $|x| < 1$ har vi at x^n konvergerer mod 0, altså vil $|c \cdot z|^n$ konvergere mod 0 og den eneste måde det kan ske på er hvis $c \cdot z$ også konvergere mod 0.

I konklusion kan vi altså sige at følge $\{(c \cdot z)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vil konvergere for et hvert $c \in K_1 := \left\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \frac{1}{2} \vee w = \frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}$

c)

Da lemma 1.65 siger at enhver delfølge af en konvergent følge vil også være konvergent, kan vi bruge vores resultat fra delopgave c) til at sige at for alle $c \in K_1$ vil alle delfølger af $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergere. Jævnfør lemma

1.30 kan vi også sige at for et hvert $c \in \mathbb{C}$ hvor $|c| = \frac{1}{2}$ vil der også være mindst et fortætningspunkt, og lemma 1.63 siger at for hvert fortætningspunkt for en følge vil der være en delfølge der konvergerer mod det fortætningspunkt. Altså vil der for et hvert $c \in K_2 := \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq \frac{1}{2}\}$ være en delfølge som konvergerer. Og som tidligere argumenteret vil følgen være ubegrænset hvis $|c| > \frac{1}{2}$, da kan vi også konkludere at enhver delfølge også vil være ubegrænset eftersom $|a_n| < |a_{n+i}|$ for $i \in \mathbb{N}$. Så vi kan konkludere at hvis $|c| > \frac{1}{2}$ vil der ikke være nogen delfølge der konvergerer, da de alle er ubegrænsede, og K_2 vil være mængden af alle komplekse tal hvorom der findes en delfølge af $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ der konvergerer.

Opgave 2

a)

Hvis vi ser på $a_n = \frac{1}{2}(n + \frac{8}{n})$ som funktionen $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{8}{x})$, kan vi hurtigt se at denne funktion er differentiabel og at $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{8}{x^2})$. Vi kan så lave en ekstremums undersøgelse af f for at finde hvor den er mindst, hvis den er nedad begrænset. Jeg løser $f'(x) = 0$ og får

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 - \frac{8}{x^2}) = 0 &\iff 1 - \frac{8}{x^2} = 0 \\ \iff 1 = \frac{8}{x^2} &\iff x^2 = 8 \iff x = \pm\sqrt{8} \end{aligned}$$

og da $x > 0$ har vi at $x = \sqrt{8}$. Ydermere da \sqrt{x} er en strengt voksende funktion, kan vi bruge at $2 = \sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3$, og finde hældningen på begge sider af ekstremumpunktet $x = \sqrt{8}$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= -\frac{1}{2} < 0 \\ f'(3) &= \frac{1}{18} > 0 \end{aligned}$$

altså antager f et globalt minimum i $x = \sqrt{8}$. Da vi ikke kan evaluere a_n for $n = \sqrt{8}$ må den mindste værdi være for enten $n = 2$ eller $n = 3$, og da $a_2 = 3$ og $a_3 = \frac{17}{6} < \frac{18}{6} = 3$, kan vi konkludere at a_n er mindst for $n = 3$.

b)

Det kan ses at følgen $\{a_n - \lfloor a_n \rfloor\}_{n \in \mathbb{N}}$ vil bestå af elementer i intervallet $[0, 1)$ og kigger man på de lige indekser (større end 4), altså delfølgen af $n_k = 2(k+2)$ for $k \in \mathbb{N}$ vil man se at elementerne i delfølgen er givet ved

$$a_{n_k} - \lfloor a_{n_k} \rfloor = \frac{1}{2}(2(k+2) + \frac{8}{2(k+2)}) - \left\lfloor \frac{1}{2}(2(k+2) + \frac{8}{2(k+2)}) \right\rfloor = \frac{2}{k+2} - \left\lfloor \frac{2}{k+2} \right\rfloor = \frac{2}{k+2}$$

Vi kan bruge sætning 1.39 til at se at delfølgen her vil konvergere mod grænseværdien for produktet af følgerne $\{2\}_{n \in \mathbb{N}}$ og $\{\frac{1}{n+2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ hvilket har 2 og 0 som grænseværdier, så delfølgen konvergerer mod 0.

c)

Hvis jeg kigger på delfølgen af alle de ulige indekser (større end 8), vil jeg se at $n_k = 2(k+3) + 1$ for $k \in \mathbb{N}$, og at

$$\begin{aligned} a_{n_k} - \lfloor a_{n_k} \rfloor &= \frac{1}{2}(2(k+3) + 1 + \frac{8}{2(k+3)+1}) - \left\lfloor \frac{1}{2}(2(k+3) + 1 + \frac{8}{2(k+3)+1}) \right\rfloor \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{2(k+3)+1} - \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{4}{2(k+3)+1} \right\rfloor = \frac{1}{2} + \frac{4}{2k+7} \end{aligned}$$

hvilket kan ses eftersom $0 < \frac{4}{2(k+3)+1} < \frac{1}{2}$. Igen kan vi bruge sætning 1.39 til at genkende dette som summen af to konvergente følger, nemlig $\{\frac{1}{2}\}_{k \in \mathbb{N}}$ og $\{\frac{4}{2k+7}\}_{k \in \mathbb{N}}$ som hver især har grænseværdierne $\frac{1}{2}$ og 0, derfor vil denne delfølge konvergere mod $\frac{1}{2}$. Vi kan nu bruge lemma 1.63 til at konkludere at der må være minimum 2 fortætningspunkter for $\{a_n - \lfloor a_n \rfloor\}_{n \in \mathbb{N}}$ og derfor kan vi sige at følgen er divergent da lemma 1.35 siger at en konvergent følge vil have et entydigt fortætningspunkt.

Opgave 3

Vi kan omskrive udtrykket

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{kn}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}$$

Hvor kan genkende at for alle $1 \leq k \leq n$ vil vi have at $0 < \frac{k}{n} \leq 1$, og vi kan derfor se at S_n er en middelsum for integralet $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$. Derfor vil vi have at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t} \right]_0^1 = 2$$

Så vi kan konkludere at følgen er konvergent med grænseværdien 2.

Opgave 4

Jeg starter med at omskrive a_n til

$$a_n = \log(n + \cos(n)) - \log(n) = \log\left(\frac{n + \cos(n)}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{\cos(n)}{n}\right)$$

Da $1 + \frac{\cos(n)}{n} \in (0, \infty)$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og da \log er kontinuert i $(0, \infty)$ kan vi bruge sætning 1.45 til at sige $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \log(\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{\cos(n)}{n}))$, hvis og kun hvis følgen $\{1 + \frac{\cos(n)}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ er konvergent.

Grundet sætning 1.39, behøver vi kun at kigge på følgen $\{\frac{\cos(n)}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Da $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$ vil vi have at $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = 0$, kan vi konkludere at $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} = 0$ ud fra sætning 1.42. Altså har vi i konklusion at følgen $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ er konvergent med grænseværdi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \log(\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{\cos(n)}{n})) = \log(1 + 0) = 0$.

Opgave 5

Eftersom $a \cdot r = 1$ har vi altså at $a = r^{-1}$ og vi kan omskrive rækken til

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot r^n = a + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-1} \cdot r^n = a + \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = a + \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

Så herfra kan vi konkludere at S vil konvergere hvis og kun hvis $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ konvergerer ud fra sætning 2.9¹. Da vi kan genkende $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ som en geometrisk række, kan vi bruge sætning 2.4 til at sige at $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ konvergerer hvis og kun hvis $|r| < 1$. Altså vil S konvergere hvis og kun hvis $|r| < 1$. I disse tilfælde vil vi have at

$$S = a + \frac{1}{1-r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{1-r} = \frac{1}{r-r^2}$$

for $0 < r < 1$ kan vi finde den mindste værdi af S ved at finde ekstremumpunkterne for $S = \frac{1}{r-r^2}$, da dette kan ses som en differentiabel funktion i intervallet $(0, 1)$. Vi får at

$$\begin{aligned} S' &= \left(\frac{1}{r-r^2} \right)' = -\frac{1}{(r-r^2)^2} \cdot (1-2r) = \frac{2r}{(r-r^2)^2} - \frac{1}{(r-r^2)^2} \\ S' &= 0 \\ \iff \frac{2r}{(r-r^2)^2} - \frac{1}{(r-r^2)^2} &= 0 \\ \iff \frac{2r-1}{(r-r^2)^2} &= 0 \iff 2r-1 = 0 \\ \iff r &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

¹Måske mest ved brug af korollar 2.11

Og evaluerer jeg S' med $r = \frac{3}{4}$ og $r = \frac{1}{4}$ får jeg at

$$-\frac{1}{\left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^2} \cdot \left(1 - 2\frac{1}{4}\right) = -\frac{128}{9} < 0$$

$$-\frac{1}{\left(\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^2} \cdot \left(1 - 2\frac{3}{4}\right) = \frac{128}{9} > 0$$

Altså må $r = \frac{1}{2}$ være den værdi for som gør S mindst. Hvilket er

$$\frac{1}{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$