Opgave 1

a)

For at bestemme konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$ bruger jeg sætning 4.7 [1] og bestemmer $\lim_{n\to\infty} |\frac{2^n}{n^2}|^{\frac{1}{n}}$. Jeg får at

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{2^n}{n^2}|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{\frac{2}{n}}} = 2$$

Hvorfra vi får den sidste ulighed fra at $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} = 1$ [1, Eks.] **To do** (??). Altså må rækken have konvergensradius $r = \frac{1}{2}$. For at bestemme konvergensområdet for rækken, skal jeg bestemme om rækken konvergerer for $z \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} := \left\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = \frac{1}{2}\right\}$. Jeg kigger nu på den absolutte række $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{2^n}{n^2} z^n|$ for $z \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ og ser at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{2^n}{n^2} z^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{2^n}{n^2}||z|^n = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{2^n}{n^2}||\frac{1}{2}|^n = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^2}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Hvilket er en konvergent p-række. Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$ absolut konvergent for $z \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ og derved også konvergent. Så konvergensområdet må være $z \in \mathbb{C}$ hvor $|z| \leq \frac{1}{2}$

b)

Jeg bruger først sætning 4.8 [1] til at bestemme konvergensradius. Da skal jeg derfor bestemme $\lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)^2}{n^2}|$

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)^2}{n^2}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n^2+2n+1}{n^2}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1}| = 1$$

Da må konvergensradius være $r = 1$ for rækken. For at bestemme sumfunktionen $s(x)$ for rækken starter jeg med at kigge på den geometriske række $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ som har sumfunktionen $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ for $|x| < 1$. Da kan jeg bruge sætning 4.23 [1] til at bestemme følgende

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ligeledes kan jeg bruge sætning 4.15 [1] til at "gange"x på begge sider og få følgende

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Jeg kan nu igen bruge sætning 4.23 og sætning 4.15 [1] til igen af "differentiere"og "gange"med x og får så

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

Hvilket er præcist den potensrækken vi har, altså er $s(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$.

Opgave 2

a)

Jeg omskriver først a_n til

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

Hvorfra det kan ses at det er den alternerende sum $a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Fra eksempel 4.25 [1, s. 151] kan vi faktisk nu konkludere at rækken $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log(2)$, og da må det gælde at følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergere mod $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log(2)$.

b)

Jeg starter med at definere $c_n := \frac{(-1)^n}{(2n-1)2n}$ for $n \in \mathbb{N}$ og at $c_0 = 0$. Jeg undersøger så om rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er konvergent ved brug af sætning 4.8 [1] og bestemmer derfor

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \lim_{n\to\infty} |\frac{(2n-1)2n}{(2(n+1)-1)2(n+1)}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)2(n+1)}|$$
$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{2n^2-n}{2n^2+2n+n+1}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}| = 1$$

Altså er potensrækken konvergent med konvergensradius $r = 1$. Derudover vil jeg bemærke at vi ved at den (næsten) geometriske række $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ er konvergent med konvergensradius 1. Jeg bruger nu sætning 4.19 [1] og ser at Cauchy multiplikationen af rækkerner er givet ved

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(c_k \cdot (-1)^{n-k}) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(\frac{(-1)^k}{(2k-1)2k} \cdot (-1)^{n-k}) \cdot x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k} \cdot x^n = \sum_{n=0}(-1)^n a_n x^n$$

per sætning 4.19 har den konvergensradius $r \geq \min\{1,1\} = 1$, da begge rækkerne har konvergensradius 1.

Hvis $x = 1$ har vi rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hvofra vi ved grundet divergenstesten [1, sætning 2.2] at rækken divergerer eftersom $\lim_{n\to\infty} a_n = \log(2) \neq 0$. Altså må konvergensradiusen være $r \leq 1$ og derfor er $r = 1$.

Derfor kan vi også konkludere at rækken $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^{2n}$ har konvergensradius $1^{\frac{1}{2}} = 1$ grundet sætning 4.15 [1].

c)

Da jeg fra forrige opgave også kan konkludere med sætning 4.19 at $s(x) = f(x^2) \cdot g(x^2)$ hvor $f(x)$ er sum funktionen for $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ som ved brug af regnereglerne fra sætning 4.15 [1] forholsvis hurtigt kan se er $f(x^2) = \frac{1}{1+x^2}$. Altå må $(1+x^2)s(x) = g(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot c_n \cdot x^{2n}$. For at tage hul på højresiden af ligheden, altså $-x\arctan(x) + \frac{\log(1+x^2)}{2}$ vil jeg først genkende fra eksempel 4.25 og eksempel 4.26 [1] at

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \implies \frac{\log(1+x^2)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} x^{2n}$$
$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \implies -x\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2(n+1)}$$

Hvor implikationen kommer fra sætning 4.15 [1]. Jeg vil omskrive disse to rækker til at starte i samme n og derefter føre dem ind i den samme række ved brug af sætning 4.19 [1].

$$\begin{aligned}
&-x\arctan(x) + \frac{\log(1+x^2)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)+1}}{2(n-1)+1} x^{2((n-1)+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n} - \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n x^{2n} \\
&= g(x^2) = (1+x^2)s(x)
\end{aligned}$$

Altså har vi vist at $(1+x^2)s(x) = -x\arctan(x) + \frac{\log(1+x^2)}{2}$.

1 Opgave 3

a)

Så jeg omskriver udtrykket $x^2 f(x)$ for at se hvad det giver. Jeg bruger adskillige rengeregler fra sætning 4.15, 4.19 og 4.24 [1] og kommer ikke til at referere til præcist hvilke for hver udregning og håber at tilstrækkeligt[1].

$$x^2 f(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} x^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-2}}{(k-2)+2} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k + x$$

Vi kan nu derfor isolere at vi skal tjekke om

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k = -\log(1+x)$$

Hvilket hurtigt kommer fra det faktum at i eksempel 4.25 [1] har vi at

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Altså har vi at $x^2 f(x) = -\log(1+x) + x$. Og ved at dividere med x^2 på begge sider får vi det ønskede resultat for $x \neq 0$. For $x = 0$ kan det hurtigt ses at rækken er givet ved

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} x^k = \frac{(-1)^0}{0+2} \cdot x^0 = \frac{1}{2}$$

med den konvention at x^0 for $x = 0$ er 1.

[1] Det er altså hårdt arbejde og tager meget plads hvis jeg skulle gøre det

b)

Jeg viser først grænseværdien specielt ved brug af L'Hôpital's regel.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n} - \log(1+\frac{1}{n})\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{-1}{n^2}}{-\frac{2}{n^3}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n^3}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2} \cdot \frac{1-1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}$$

Litteratur

[1] H. Schlichtkrull S. Eilers, M. Christiandl. *Analyse 1*. 5. udgave edition, 2023.