OBS: Alle referencer til sætninger, lemmaer, osv. er fra bogen [CES]

Opgave 1

a)

Da $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ er en positiv, kontinuert og aftagende funktion på intervallet $[1, \infty)$, kan vi bruge sætning 2.20 til at konkludere om rækken $\sum_n = 1^\infty \sin(\frac{1}{n})$ er konvergent eller divergent. Det gør vi ved at undersøge det uegentlige integrale $\int_1^\infty \sin(\frac{1}{x})dx$. Ved brug af sætningen for partiel integration[2, sætning 5.35] får vi først

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \sin(\frac{1}{x})dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \sin(\frac{1}{x})dx\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\sin(\frac{1}{x})x\right]_1^\infty - \int_1^b \frac{-\cos(\frac{1}{x})}{x}dx\\ &= \lim_{b\to 0}\frac{\sin(b)}{b} - \sin(1) - \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{-\cos(\frac{1}{x})}{x}dx\end{aligned}$$

Her kan vi bruge grænseværdien $\lim_{b\to 0}\frac{\sin(b)}{b} = 1$ og sætningen for integration ved substition[2, sætning 5.39] til at få

$$\begin{aligned}&\lim_{b\to 0}\frac{\sin(b)}{b} - \sin(1) - \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{-\cos(\frac{1}{x})}{x}dx\\ &= 1 - \sin(1) - \lim_{b\to\infty}\int_1^{\frac{1}{b}} \frac{\cos(u)}{u}du\\ &= 1 - \sin(1) + \lim_{b\to\infty}\int_{\frac{1}{b}}^1 \frac{\cos(u)}{u}du\end{aligned}$$

Herfra kan vi se at det originale integrale $\int_1^\infty \sin(\frac{1}{x})$ er endeligt hvis og kun hvis $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x}$ er endeligt. Vi undersøger nu denne grænseværdi

$$\begin{aligned}&\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{1}{b}}^1 \frac{\cos(u)}{u}du\\ &\geq \lim_{b\to\infty}\int_{\frac{1}{b}}^1 \frac{\cos(1)}{u}du\\ &= \lim_{b\to\infty}\cos(1)\left[\log(u)\right]_{\frac{1}{b}}^1\\ &= \cos(1)\lim_{b\to\infty}\log(1) - \log(\frac{1}{b}) = \infty\end{aligned}$$

Altså kan vi konkludere at $\int_1^\infty \sin(\frac{1}{x})$ er divergent, og dermed er rækken $\sum_{n=1}^\infty \sin(\frac{1}{n})$ divergent.

b)

Vi kan kigge på rækken som en differens af to rækker hvor den ene består af $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2}$ og den anden består af $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log(n)}$. Fra eksempel 2.23[1] kan vi genkende den først som en konvergent p-række, og med brug af sætning 2.9[1] kan vi se at rækken vi er interesseret i vil divergere/konvergere hvis rækken $-\sum_{n=2}^\infty -\frac{1}{n\log(n)}$ divergerer/konvergerer. Vi undersøger derfor denne række ved brug af integraltesten[1] [1, sætning 2.20], da

[1] Sætningen siger specifikt at den kan bruges for rækker som starter i $n = 1$, men der er intet i beviset der ikke kan generaliseres til en vilkårlig start værdi

$f(x) = \frac{1}{x\log(x)}$ er en positiv, kontinuert og aftagende funktion på intervallet $[2, \infty)$. Vi får det uegentlige integrale ved brug af integration ved substition [2, sætning 5.39] til at være

$$\begin{aligned}
&\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x\log(x)} dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_{\log(2)}^{\log(b)} \frac{1}{x\cdot u} x du \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_{\log(2)}^{\log(b)} \frac{1}{u} du \\
&= \lim_{b\to\infty} [\log(u)]_{\log(2)}^{\log(b)} \\
&= \lim_{b\to\infty} \log\log(b) - \log\log(2) = \infty
\end{aligned}$$

Hvorfra vi kan konkludere at dette integrale divergerer, og dermed divergerer rækken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n\log n}$.

c)

Ved at forkorte udtrykket i den absolutte række kan vi se at

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{(n+c)^2 - (n-c)^2}{n} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(n+c)^2 - (n-c)^2}{n} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^2 + c^2 + 2nc - n^2 - c^2 + 2nc}{n} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{4nc}{n} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |4c|
\end{aligned}$$

Hvorfra vi kan se at den eneste tidspunkt denne række vil konvergere er for $c = 0$.

Opgave 2

Da rækken er alternerende kan vi bruge Leibniz' test [1, sætning 2.30] til at se rækken konvergerer, eftersom den absolutte talfølge er monoton aftagende og går mod 0.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n(n+1)} \right| = 0$$

At den er monotont aftagende kommer fra at

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{(n+1)(n+2)} \iff n(n+1) < (n+1)(n+2) \\
&\iff n^2 + n < n^2 + 3n + 2 \\
&\iff n < 3n + 2
\end{aligned}$$

Altså vil rækken konvergere og ved brug af observation 2.31[1] kan vi se at den vil konvergere mod $s \in [s_4, s_5]$, hvor s_4 og s_5 er de delsummer vi får af de først 4 og 5 led i rækken. De er givet ved

$$s_4 = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{11}{30}$$
$$s_5 = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} = \frac{4}{10}$$

Altså konvergerer den mod $s \in [\frac{3}{10}, \frac{4}{10}]$.

Opgave 3

a)

Ved brug af rodtesten [1, sætning 2.26] kan vi undersøge for hvilke $a, b > 0$ at rækken vil konvergere. Vi undersøger derfor følgende grænseværdi[2]

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{an+b}}{(an+b)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{a+\frac{b}{n}}}{an+b}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{a-1}\cdot n^{\frac{b}{n}}}{a+\frac{b}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} n^{a-1}\cdot n^{\frac{b}{n}}}{\lim_{n\to\infty} a+\frac{b}{n}}$$
$$= \frac{\lim_{n\to\infty} n^{a-1}\cdot n^{\frac{b}{n}}}{\lim_{n\to\infty} a+\frac{b}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} n^{a-1}\cdot n^{\frac{b}{n}}}{\lim_{n\to\infty} a+\frac{b}{n}}$$
$$= \frac{\lim_{n\to\infty} n^{a-1}\cdot \lim_{n\to\infty} n^{\frac{b}{n}}}{a} = \frac{\lim_{n\to\infty} n^{a-1}}{a}$$

Herfra kan vi konkludere at når $a < 1$ vil rækken konvergere mod 0 da $n^{a-1} \to 0$. Derudover når $a > 1$ vil rækken divergere mod ∞. Altså kan vi konkludere at den original række vil konvergere for $a < 1$ og et vilkårligt b.

b)

Vi undersøger så tilfældet for $a = 1$, hvor rodtesten er inkonklusiv. Vi kan omskrive udtrykket og se at

$$\frac{n^{n+b}}{(n+b)^n} = \left(\frac{n\cdot n^{\frac{b}{n}}}{n+b}\right)^n = \left(\frac{n^{\frac{b}{n}}}{1+\frac{b}{n}}\right)^n = \frac{n^b}{\left(1+\frac{b}{n}\right)^n}$$

Undersøger man $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{b}{n})^n$ vil man kunne få stærk inspiration fra eksempel 1.47 [1] og se at

$$\log\left((1+\frac{b}{n})^n\right) = n\cdot\log(1+\frac{b}{n}) = \frac{\log(1+\frac{b}{n})}{\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{\log\left(\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}} + \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{b}}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\log\left(\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{b}}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\log\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{n}\right) - \log\left(\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Hvilket er en differenskvotient, som vi ved er $\log'(\frac{1}{b}) = b$ når $n \to \infty$. Altså kan vi konkludere at

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{b}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\log\left((1+\frac{b}{n})^n\right)\right)$$
$$= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\log\left((1+\frac{b}{n})^n\right)\right) = \exp(b)$$

[2] Der bliver brugt adskillige regneregler for grænseværdier, alle er fundet fra [2, kapitel 2.4]

Vi trækker her på kontinuitet af exp og log samt sætning 1.45 [1]. Vi kan hurtigt konkludere at både *exp* og log er kontinuerte funktioner i følgens elementer eftersom $(1+\frac{b}{n})^n > 1$ for $b > 0$ hvor begge funktioner er kontinuerte.

Så til konklusion må vi have at følgen $\left\{\frac{n^{n+b}}{(n+b)^n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ er divergent uanset valget af $b > 0$, og da det er et nødvendigt kriteriere for en talrække at konvergere at følgen skal konvergere mod 0[1, sætning 2.2] må det gælde at talrækken er divergent.

Opgave 4

Litteratur

[1] H. Schlichtkrull S. Eilers, M. Christiandl. *Analyse 1*. 5. udgave edition, 2023.

[2] T. G. Madsen S. Eilers, E. Hansen. *Indledende Matematisk Analyse*. 12. udgave edition, 2021.