OBS: Alle referencer til sætninger, lemmaer, osv. er fra bogen [CES]

Opgave 1

a)

Da $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ er en positiv, kontinuert og aftagende funktion på intervallet $[1, \infty)$, kan vi bruge sætning 2.20 til at konkludere om rækken $\sum_n = 1^\infty \sin(\frac{1}{n})$ er konvergent eller divergent. Det gør vi ved at undersøge det uegentlige integrale $\int_1^\infty \sin(\frac{1}{x})dx$. Ved brug af sætningen for partiel integration[1, sætning 5.35] får vi først

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \sin(\frac{1}{x})dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \sin(\frac{1}{x})dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\sin(\frac{1}{x})x\right]_1^\infty - \int_1^b \frac{-\cos(\frac{1}{x})}{x}dx \\
&= \lim_{b\to 0} \frac{\sin(b)}{b} - \sin(1) - \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{-\cos(\frac{1}{x})}{x}dx
\end{aligned}$$

Her kan vi bruge grænseværdien $\lim_{b\to 0} \frac{\sin(b)}{b} = 1$ og sætningen for integration ved substition[1, sætning 5.39] til at få

$$\begin{aligned}
&\lim_{b\to 0} \frac{\sin(b)}{b} - \sin(1) - \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{-\cos(\frac{1}{x})}{x}dx \\
&= 1 - \sin(1) - \lim_{b\to\infty} \int_1^{\frac{1}{b}} \frac{\cos(u)}{u}du \\
&= 1 - \sin(1) + \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{1}{b}}^1 \frac{\cos(u)}{u}du
\end{aligned}$$

Herfra kan vi se at det originale integrale $\int_1^\infty \sin(\frac{1}{x})$ er endeligt hvis og kun hvis $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x}$ er endeligt. Vi undersøger nu denne grænseværdi

$$\begin{aligned}
&\lim_{b\to\infty} \int_{\frac{1}{b}}^1 \frac{\cos(u)}{u}du \\
&\geq \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{1}{b}}^1 \frac{\cos(1)}{u}du \\
&= \lim_{b\to\infty} \cos(1) \left[\log(u)\right]_{\frac{1}{b}}^1 \\
&= \cos(1) \lim_{b\to\infty} \log(1) - \log(\frac{1}{b}) = \infty
\end{aligned}$$

Altså kan vi konkludere at $\int_1^\infty \sin(\frac{1}{x})$ er divergent, og dermed er rækken $\sum_{n=1}^\infty \sin(\frac{1}{n})$ divergent.

b)

c)

Opgave 2

Opgave 3

Opgave 4

Opgave 5

Litteratur

[1] T. G. Madsen S. Eilers, E. Hansen. *Indledende Matematisk Analyse*. 12. udgave edition, 2021.