Opgave 1

a)

For at bestemme konvergensradius for potensrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$ bruger jeg sætning 4.7 [2] og bestemmer $\lim_{n\to\infty} |\frac{2^n}{n^2}|^{\frac{1}{n}}$. Jeg får at

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{2^n}{n^2}|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{\frac{2}{n}}} = 2$$

Hvorfra vi får den sidste ulighed fra at $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}} = 1$ [2, Eks. 1.46] Altså må rækken have konvergensradius $r = \frac{1}{2}$. For at bestemme konvergensområdet for rækken, skal jeg bestemme om rækken konvergerer for $z \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}} := \left\{w \in \mathbb{C} \mid |w| = \frac{1}{2}\right\}$. Jeg kigger nu på den absolutte række $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{2^n}{n^2} z^n|$ for $z \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ og ser at

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{2^n}{n^2} z^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{2^n}{n^2}||z|^n = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{2^n}{n^2}||\frac{1}{2}|^n = \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{1}{n^2}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Hvilket er en konvergent p-række [2, Eks. 2.23]. Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n$ absolut konvergent for $z \in \mathbb{C}_{\frac{1}{2}}$ og derved også konvergent [2, 2.36]. Så konvergensområdet må være $z \in \mathbb{C}$ hvor $|z| \leq \frac{1}{2}$

b)

Jeg bruger først sætning 4.8 [2] til at bestemme konvergensradius. Da skal jeg derfor bestemme $\lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)^2}{n^2}|$

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{(n+1)^2}{n^2}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{n^2+2n+1}{n^2}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1}| = 1$$

Da må konvergensradius være $r = 1$ for rækken. For at bestemme sumfunktionen $s(x)$ for rækken starter jeg med at kigge på den geometriske række $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ som har sumfunktionen $f_0(x) = \frac{1}{1-x}$ for $|x| < 1$. Da kan jeg bruge sætning 4.23 [2] til at bestemme følgende

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ligeledes kan jeg bruge sætning 4.15 [2] til at "gange"x på begge sider og få følgende

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Jeg kan nu igen bruge sætning 4.23 og sætning 4.15 [2] til igen af "differentiere"og "gange"med x og får så

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

Hvilket er præcist den potensrækken vi har, altså er $s(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$, da ingen af disse regneregler har ændret konvergensradien fra 1.

Opgave 2

a)

Jeg omskriver først a_n til

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

Hvorfra det kan ses at det er den alternerende sum $a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Fra eksempel 4.25 [2, s. 151] kan vi faktisk nu konkludere at rækken $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log(2)$, og da må det gælde at følgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergere mod $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log(2)$.

b)

Jeg starter med at definere $c_n := \frac{(-1)^n}{(2n-1)2n}$ for $n \in \mathbb{N}$ og at $c_0 = 0$. Jeg undersøger så om rækken $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ er konvergent ved brug af sætning 4.8 [2] og bestemmer derfor

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \lim_{n\to\infty} |\frac{(2n-1)2n}{(2(n+1)-1)2(n+1)}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{(2n-1)2n}{(2n+1)2(n+1)}|$$
$$= \lim_{n\to\infty} |\frac{2n^2-n}{2n^2+2n+n+1}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}| = 1$$

Altså er potensrækken konvergent med konvergensradius $r = 1$. Derudover vil jeg bemærke at vi hurtigt kan konkludere at den alternerende geometriske række $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ er konvergent med konvergensradius 1 grundet sætning 4.15 [2]. Jeg bruger nu sætning 4.19 [2] og ser at Cauchy multiplikationen af rækkerner er givet ved

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} (c_k \cdot (-1)^{n-k}) \cdot x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} (\frac{(-1)^k}{(2k-1)2k} \cdot (-1)^{n-k}) \cdot x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k} \cdot x^n = \sum_{n=0} (-1)^n a_n x^n$$

per sætning 4.19 har den konvergensradius $r \geq \min\{1,1\} = 1$, da begge rækkerne har konvergensradius 1.

Hvis $x = 1$ har vi rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ hvofra vi ved grundet divergenstesten [2, sætning 2.2] at rækken divergerer eftersom $\lim_{n\to\infty} a_n = \log(2) \neq 0$. Altså må konvergensradiusen være $r \leq 1$ og derfor er $r = 1$.

Derfor kan vi også konkludere at rækken $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^{2n}$ har konvergensradius $1^{\frac{1}{2}} = 1$ grundet sætning 4.15 [2].

c)

Da jeg fra forrige opgave også kan konkludere med sætning 4.19 at $s(x) = f(x^2) \cdot g(x^2)$ hvor $f(x)$ er sum funktionen for $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ som ved brug af regnereglerne fra sætning 4.15 [2] forholsvis hurtigt kan ses til at være $f(x^2) = \frac{1}{1+x^2}$. Altså må $(1+x^2)s(x) = g(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot c_n \cdot x^{2n}$. For at tage hul på højresiden af ligheden, altså $-x\arctan(x) + \frac{\log(1+x^2)}{2}$ vil jeg først genkende fra eksempel 4.25 og eksempel 4.26 [2] at

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \implies \frac{\log(1+x^2)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} x^{2n}$$
$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \implies -x\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2(n+1)}$$

Hvor implikationen kommer fra sætning 4.15 [2]. Jeg vil omskrive disse to rækker til at starte i samme n og derefter føre dem ind i den samme række ved brug af sætning 4.19 [2].

$$\begin{aligned}
&-x\arctan(x) + \frac{\log(1+x^2)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)+1}}{2(n-1)+1} x^{2((n-1)+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n} - \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n x^{2n} \\
&= g(x^2) = (1+x^2)s(x)
\end{aligned}$$

Hvor den sidste lighed kun gælder fordi $c_0 = 0$. Altså har vi vist at $(1+x^2)s(x) = -x\arctan(x) + \frac{\log(1+x^2)}{2}$.

Opgave 3

a)

Jeg omskriver udtrykket $x^2 f(x)$ for at se hvad det giver. Jeg bruger adskillige rengeregler fra sætning 4.15, 4.19 og 4.24 [2] og kommer ikke til at referere til præcist hvilke for hver udregning og håber at det er tilstrækkeligt[1].

$$x^2 f(x) = x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} x^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-2}}{(k-2)+2} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k + x$$

Vi kan nu derfor isolere at vi skal tjekke om

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k = -\log(1+x)$$

Hvilket hurtigt kommer fra det faktum at i eksempel 4.25 [2] har vi at

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

Altså har vi at $x^2 f(x) = -\log(1+x) + x$. Og ved at dividere med x^2 på begge sider får vi det ønskede resultat for $x \neq 0$. For $x = 0$ kan det hurtigt ses at rækken er givet ved

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} x^k = \frac{(-1)^0}{0+2} \cdot x^0 = \frac{1}{2}$$

med den konvention at x^0 for $x = 0$ er 1.

[1] Det er altså hårdt arbejde og tager meget plads hvis jeg skulle gøre det

b)

Jeg viser først grænseværdien specielt ved brug af L'Hôpital's regel.

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{-1}{n^2}}{-\frac{2}{n^3}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^3}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2}\cdot\frac{1-1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}$$

Jeg vil nu bemærke at vi har en positiv talrække, grundet udligheden at $\log(x)\leq x-1$ og derfor er

$$\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})\geq\frac{1}{n}-(1+\frac{1}{n}-1)=0$$

Vi kan nu bruge sætning 12.2.8 [1] til at konkludere at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})$ er konvergent eftersom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ både er positiv og konvergent [2, Eks. 2.23] og

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}<\infty$$

c)

Jeg viser ligheden ved et induktionsbevis. Så for $N=1$ er det hurtigt at se at

$$\sum_{n=1}^{1}\log(1+\frac{1}{n})=\log(1+\frac{1}{1})=\log(1+1)$$

Så for induktionsskridtet antag for induktion at $\sum_{n=1}^{N}\log(1+\frac{1}{n})=\log(1+N)$ for et $N\in\mathbb{N}$. Jeg vil nu vise at så må det gælde at $\sum_{n=1}^{N+1}\log(1+\frac{1}{n})=\log(1+N+1)$. Det kan ses ved

$$\sum_{n=1}^{N+1}\log(1+\frac{1}{n})=\sum_{n=1}^{N}\log(1+\frac{1}{n})+\log(1+\frac{1}{N+1})=\log(1+N)+\log(1+\frac{1}{N+1})=\log((1+N)(1+\frac{1}{N+1}))=\log(1+N+1)$$

og så er induktionsskridtet gennemført.

For så at vise konvergens af følgen $\{\gamma_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ omskriver jeg $\log(N)$ med udtrykker lige fundet:

$$\gamma_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log(N)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N-1}\log(1+\frac{1}{n})$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\log(1+\frac{1}{n})+\log(1+\frac{1}{N})=\log(1+\frac{1}{N})+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})$$

Vi kan derfor se γ_N er en sammensat følge af netop følgen af afsnitssummer for rækken $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})$ og følgen $\{\log(1+\frac{1}{N})\}_{N\in\mathbb{N}}$. Da rækken er konvergent og da $\lim_{N\to\infty}\log(1+\frac{1}{N})=\log(1)=0$ må følgen $\{\gamma_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ også være konvergent per sætning 1.39 [2].

Opgave 4

a)

Som en del af opgave a), fandt jeg ud af at

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

med konvergensradius 1. Vi kan nu bruge at rækken her har $f(x)$ som sumfunktion og med sætning 4.29 må vi kunne konkludere at at

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n$$

Hvilket vil sige at $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ er Taylorrækken for $f(x)$. Det er her også essentielt at potensrækker er entydigt bestemt [2, sætning 4.36], da det entydigt bestemmer at dette er Taylorrækken for $f(x)$.

b)

Fra side 163 [2] ved vi at $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ derfor kan vi bruge sætning 4.15 til at sige at

$$e^{2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^{2n}$$

for samme konvergensradius (som er ∞). Dette udtryk kan vi bruge i $g(x)$ og sammen med det bruge observation 4.24 [2] til at sige følgende

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x e^{2t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \left[\frac{1}{2n+1} t^{2n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

Hvor vi definerer

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{når } n \text{ er lige} \\ \frac{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}{(\lfloor n/2 \rfloor)! \cdot n} & \text{når } n \text{ er ulige} \end{cases}$$

da regnereglerne brugt fra sætning 4.23 og 4.15 [2] garanterer konvergens af rækken må det nødvendigvis gælde at rækken er konvergent med $g(x)$ som sumfunktion på hele $\mathbb{R}$. Vi bemærker så at sætning 4.29 siger at det må nødvendigvis gælde at

$$\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = a_n$$

og derfor er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ Taylorrækken for $g(x)$.

Litteratur

[1] T. Lindstrøm. *Kalkulus*. 4. edition, 2016.

[2] H. Schlichtkrull S. Eilers, M. Christiandl. *Analyse 1*. 5. edition, 2023.