LIM - Obligatorisk Aflevering

Tim Sehested Poulsen - tpw705@alumni.ku.dk

October 5, 2023

Opgave 1

(a) Vis at $\forall A \subseteq \mathbb{N} : \mu(A) = \sum_{n\in A}\mu(\{n\})$

Lad $A \subseteq \mathbb{N}$ være en vilkårlig delmængde, da kan vi skrive A som $A = \bigcup_{n\in A}\{n\}$ hvilket er en tællelig forening af disjunkte mængder eftersom $\#A \leq \#\mathbb{N}$ da det er en delmængde. Derfor kan vi bruge definition 4.1.(M_2) [1] til at konkludere at

$$\mu(A) = \mu(\bigcup\nolimits_{n\in A}\{n\}) = \sum_{n\in A}\mu(\{n\})$$

Vi kan ydermere konkludere at hvis $\mu(\{n\}) = 0$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$, så må vi have at for et arbritrært $A \subseteq \mathbb{N}$ at :

$$\mu(A) = \sum_{n\in A}\mu(\{n\}) = \sum_{n\in A} 0 = 0$$

hvilket præcist vil sige at $\mu(A) = 0$ for alle $A \subseteq \mathbb{N}$.

(b)

For at vise at $\mu(\{n\}) = 2\cdot(\frac{1}{3})^n$ for et $n \in \mathbb{N}$ er et sandsynlighedsmål skal vi vise at $\mu(\mathbb{N}) = 1$. Jeg har givet at μ er et mål derfor kan jeg bruge definition 4.1.(M_2) [1] til at se følgende:

$$\mu(\mathbb{N}) = \mu(\bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}}\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2\cdot(\frac{1}{3})^n = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^n$$

Jeg har fra sætning 2.4 [2] at $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ er en konvergent geometrisk række som konvergerer mod

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Da har vi at $\mu(\mathbb{N}) = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$.

Vi lader $E = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, være mængden af lige tal. Det skrives igen som en tællelig forening af disjunkte mængder, og vi kan derfor bruge definition 4.1.(M_2) [1] til at se følgende:

$$\mu(E) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{2n\}) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{2n\}) = \sum_{n=1}^{\infty}2\cdot(\frac{1}{3})^{2n} = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{9})^n$$

Igen har vi en konvergent geometrisk række som konvergerer mod

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{9})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}$$

Altså er $\mu(E) = 2\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

c)

Vi kan ikke slutte at $\mu = 0$ i dette eksempel. Se bare på målrummet $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ hvor λ er Lebesgue målet på $\mathbb{R}$. Vi har fra sætning 3.7 [1] at $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathfrak{L})$ hvor $\mathfrak{L}$ er mængden af alle lukkede mængder og da ethvert singleton er lukket må det derfor være i Borel σ-algebraen. Vi har da at for $x \in \mathbb{R}$ at

$$\lambda(\{x\}) = \lambda([x,x]) = x - x = 0$$

Så i konklusion har vi at $\forall x \in \mathbb{R} : \{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \wedge \lambda(\{x\}) = 0$ men vi har bestemt ikke at $\lambda = 0$, per definitionen af Lebesgue målet.

Opgave 2

(a)

Fra bemærkning 5.3.(ii) [1] har vi følgende udsagn

$$G \subseteq \sigma(H) \implies \sigma(G) \subseteq \sigma(H)$$
$$H \subseteq \sigma(G) \implies \sigma(H) \subseteq \sigma(G)$$

Derfor vil jeg først vise at $G \subseteq \sigma(H)$.

Lad $(-a, a) \in G$ for et $a \geq 0$. Jeg definerer derudover $a_n := a - \frac{a}{n+1}$, ret simpelt har vi at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ samt $a_n > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Jeg har da at [1]

$$(-a, a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-a_n, a_n]$$

hvor hver $[-a_n, a_n] \in H \subseteq \sigma(H)$. Fra definition 3.1.($\Sigma_3$) [1] har vi så at

$$(-a, a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-a_n, a_n] \in \sigma(H)$$

Ligeledes kan vi vise at $H \subseteq \sigma(G)$. Lad $[-a, a] \in H$ for et $a \geq 0$. Vi kan da skrive

$$[-a, a] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$$

hvor hver $(-a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \in G \subseteq \sigma(G)$. Da har vi fra properties 3.2.(iii) [1] at

$$[-a, a] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \in \sigma(G)$$

Derfor har vi at $G \subseteq \sigma(H)$ og $H \subseteq \sigma(G)$ og derfor må $\sigma(G) = \sigma(H)$.

(b)

Vi har fra Opgave S2.4 at for $F \subseteq X$ er

$$\Sigma_F := \{A \subseteq X \mid A \cap F = \emptyset \vee A \cap F = F\}$$

en σ-algebra på X. Observer derfor at $\Sigma_{\{-1,1\}}$ er en σ-algebra på $\mathbb{R}$. Specielt kan vi se at

$$[0, 1] \cap \{-1, 1\} = \{1\}$$

hvilket vil sige at $[0, 1] \notin \Sigma_{\{-1,1\}}$. Jeg vil nu vise at $H \subseteq \Sigma_{\{-1,1\}}$. Tag et interval $[-a, a] \in H$ for et $a \geq 0$. Vi kan nu sige at

$$[-a, a] \cap \{-1, 1\} = \begin{cases} \{-1, 1\} & \text{når } a \geq 1 \\ \emptyset & \text{når } 0 \leq a < 1 \end{cases}$$

Altså er $[-a, a] \in \Sigma_{\{-1,1\}}$ for ethvert $a \geq 0$. Derfor kan vi nu konkludere at $H \subseteq \Sigma_{\{-1,1\}}$ og derved også at $\sigma(H) \subseteq \Sigma_{\{-1,1\}}$.
Da $[0, 1] \notin \Sigma_{\{-1,1\}}$ må vi også have at $[0, 1] \notin \sigma(H) = \sigma(G)$. Vi ved at alle lukkede mængder er indeholdt i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ fra sætning 3.7 [1]. Specielt da $[0, 1]$ er lukket må den være i $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, men samtidig er $[0, 1] \notin \sigma(G)$ altså er $\sigma(G) \neq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Opgave 3

(a)

Lad $A \in \mathcal{A}$, vi trivielt at $A \cup A^c = X$ og $A \cap A^c = \emptyset$. Derudover ved vi specielt at $\mu(X) = 1$ da $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er et sandsynlighedsrum. Altså har vi ved brug af proposition 4.3.(i) [1] at

$$\mu(A) + \mu(A^c) = \mu(A \cup A^c) = \mu(X) = 1$$
$$\implies \mu(A^c) = 1 - \mu(A)$$

[1] Det er måske ikke selvindlysende men jeg vil tage for givet at vi har lært det fra Analyse 1.

(b)

Vi har fra proposition 4.3.(viii) og fra forrige opgave at

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k^c) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} 1 - \mu(A_k) = n - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

Ved at bruge uligheden $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) > n - 1$ får vi

$$n - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) < n - (n-1) = 1$$

(c)

Vi har fra delophave a) at

$$\mu(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = 1 - \mu(\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c)$$

Ved brug af De Morgans lov har vi at $\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c$ altså

$$1 - \mu(\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c) = 1 - \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k^c) > 0$$

Hvor den den sidste ulighed kommer delopgave b).

(d)

Lad $A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = X$ for et sandsynlighedsrum $(X, \mathcal{A}, \mu)$. og lad $A_n = \emptyset$. Vi har da at

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu(X) + \mu(\emptyset) = n - 1$$

Eftersom at for et sandsynlighedsrum er $\mu(X) = 1$ og for alle mål vil det gælder at $\mu(\emptyset) = 0$ per definition 4.1.(M_1) [1].

Opgave 4

(a)

Ved at dele mængden op i de to tilfælde givet i definitionen af u ser jeg at

$$\begin{aligned}
\{u \geq a\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \geq a\} \\
&= \{x \in (-\infty, 0] \mid u(x) \geq a\} \cup \{x \in (0, \infty) \mid u(x) \geq a\} \\
&= \{x \in (-\infty, 0] \mid -1 \geq a\} \cup \{x \in (0, \infty) \mid x \geq \frac{a}{2} + 1\}
\end{aligned}$$

Det kan også skrive som intervaller på tuborgform som

$$\{u \geq a\} = \begin{cases} (-\infty, 0] \cup [\frac{a}{2} + 1, \infty) & \text{hvis } a \leq -1 \\ (0, \infty) \cap [\frac{a}{2} + 1, \infty) & \text{hvis } a > -1 \end{cases}$$

Vi kan nu observere at både $(-\infty, 0], (0, \infty), [\frac{a}{2} + 1, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ fra remark 3.9 [1]. Fra properties 3.2 ved vi at en σ-algebra er lukket under tællelige mange foreninger og tællelige mange snit. Altså må $\{u \geq a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ uanset hvad $a \in \mathbb{R}$ er. Fra lemma 8.1 [1] kan vi da konkludere at da $\{u \geq a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ for alle $a \in \mathbb{R}$ er u $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-målelig.

(b)

Da $u(\lambda) := \lambda \circ u^{-1}$ og u er en Borel funktion, og λ er et mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ved vi fra sætning 7.6 [1] at $u(\lambda)$ et mål på $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Jeg kan nu udregne

$$u(\lambda)(\{-1\}) = \lambda(u^{-1}(\{-1\})) = \lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) = -1\})$$

Her kan jeg bruge definitionen af u til at se at

$$\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) = -1\} = (-\infty, 0] \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 2 = -1\} = (-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{2}\}$$

Så vi har at

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) = -1\}) = \lambda((-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{2}\}) = \lambda((-\infty, 0]) + \lambda(\{\frac{1}{2}\}) = \infty + 0 = \infty$$

Hvor jeg kan dele målet op i to eftersom mængderne er disjunkte. På tilsvarende vis kan jeg udregne

$$u(\lambda)([0,1]) = \lambda(u^{-1}([0,1])) = \lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq u(x) \leq 1]\}) = \lambda([1, \frac{3}{2}]) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Opgave 5

Vi observerer først at

$$\forall i, j \in \mathbb{N} : A_i \cap A_j = \emptyset \text{ hvis } i \neq j$$

derudover har vi at for ethvert $m \in \mathbb{N}$ så er $u_m := \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} \cdot 1_{A_n} \in \mathcal{M}^+_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ grundet eksempel 8.5.(ii) [1]. Fra korollar 9.9 [1] har vi at at $lim_{m\to\infty} u_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot 1_{A_n}$ er målelige. Altså er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot 1_{A_n} \in \mathcal{M}^+_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Jeg bestemmer nu integralet, igen ved brug af korollar 9.9, og properties 9.8.(ii) [1]:

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot 1_{A_n} d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} \cdot 1_{A_n} d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} 1_{A_n} d\lambda$$

Her kan vi bruge properties 9.8.(i) til at sige at

$$\int_{\mathbb{R}} 1_{A_n} d\lambda = \lambda(A_n) = \lambda([n, n + \frac{1}{n+1}]) = n + \frac{1}{n+1} - n = \frac{1}{n+1}$$

Altså får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} 1_{A_n} d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

ved brug af integraltesten, sætning 2.20 [2] kan vi konkludere at denne række konvergerer mod 1. Så i konklusion er $\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot 1_{A_n} d\lambda = 1$.

Opgave 6

(a)

Korollar 8.10 siger at for en følge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^+_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$ som konvergerer mod $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ så vil $u \in \mathcal{M}^+_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{A})$. Da vi har konvergens har vi altså fra properties A.1.(v) [1] at

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \liminf_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n = u$$

Så ved brug af sætning 9.11 [1] har vi at

$$\int_X u d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} u_n d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} u_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X u_n d\mu$$

Eftersom $\int_X u_n d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2023$ har vi konvergens af integralet og derfor bruges properties A.1.(v) [1] igen til at sige at

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X u_n d\mu = \lim \int_X u_n d\mu = 2023$$

Sammensætter vi det hele ser vi at $\int_X u d\mu \leq 2023$.

(b)

Hvis vi ved at $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \ldots$ kan vi først konstatere, ved brug af observation 1.56 [2], at $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim_{n\to\infty} u_n = u$. Ligeledes kan vi bruge observation 1.56 [2] på integralet da properties 9.8.(iv) siger at

$$u_n \leq u_{n+1} \implies \int_X u_n d\mu \leq \int_X u_{n+1} d\mu$$

altså har vi for integralet $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X u_n = \lim_{n\to\infty} \int_X u_n = 2023$. Vi kan til sidst konkludere at

$$\int_X ud\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} u_n d\mu = \int_X \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X u_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X u_n = 2023$$

(c)

Ved igen at bruge properties 9.8.(iv) (monotonicitet af integralet) [1] har vi altså at

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u \implies \int_X u_n d\mu \leq \int_X ud\mu$$

Da grænseværdier respekterer monotonicitet har vi da at

$$2023 = \lim_{n\to\infty} \int_X u_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X ud\mu = \int_X ud\mu$$

Kombinerer vi dette med resultatet fra delopgave a) ser vi at

$$2023 \leq \int_X ud\mu \leq 2023 \implies \int_X ud\mu = 2023$$

(d)

Jeg definerer

$$\begin{aligned} &u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &u_n(x) := 2000n \cdot 1_{(0,\frac{1}{n})}(x) + 23 \cdot 1_{[1,2]}(x) \end{aligned}$$

Hvorfra jeg kan se at det er simpel funktion fra definition 8.6 [1] og $\forall x \in \mathbb{R} : u_n(x) \geq 0$, så med konklusionen fra eksempel 8.5.(iii) har jeg altså også at $u_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Ved brug af egenskaberne fra properties 9.8 [1] har jeg altså at

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u_n d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} 2000n \cdot 1_{(0,\frac{1}{n})}(x) + 23 \cdot 1_{[1,2]}(x) d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2000n \cdot 1_{(0,\frac{1}{n})}(x) d\lambda + \int_{\mathbb{R}} 23 \cdot 1_{[1,2]}(x) d\lambda \\ &= 2000n \cdot \int_{\mathbb{R}} 1_{(0,\frac{1}{n})}(x) d\lambda + 23 \cdot \int_{\mathbb{R}} 1_{[1,2]}(x) d\lambda \\ &= 2000n \cdot \lambda((0, \frac{1}{n})) + 23 \cdot \lambda([1,2]) \\ &= 2000n \cdot \frac{1}{n} + 23 \cdot (2-1) = 2023 \end{aligned}$$

Jeg vil samtidig også have at $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{pkt.vis} u$ hvor

$$u(x) := 23 \cdot 1_{[1,2]}(x)$$

Hvor det af samme argumenter som før kan ses at $u \in \mathcal{M}^+(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ og $\int_X ud\mu = 23$.

References

[1] Blower, G. Schilling, r. measures, integrals and martingales (cambridge university press, 2005), xi+ 352 pp., 0 521 61525 9 (paperback),£ 24.99, 0 521 85015 0 (hardback),£ 50. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 49*, 3 (2006), 761–762.

[2] Matthias Christandl, Søren Eilers, H. S. *Analyse 1*, 5 ed. Københavns Universitet, 2023.