

音律

- 乐音体系中各音的绝对准确高度及其相互关系叫做**音律**；音律是在长期的音乐实践发展中形成的，并成为确定调式音高的基础

和谐

- **最小整数比原则**：由毕达哥拉斯提出，认为人对声音的频率组合的接受程度与这两个频率的**比值**有关，频率之比越简单，两个声音就越和谐，其中与主音F**最和谐**的就是 $3/2F$ 和 $4/3F$ （除了主音的各个八度之外）
- 值得指出的是，“和谐”**并不等于好听**；很多音乐家抱怨频率为比值1:1或者1:2的声音配合起来比较“空洞”，有些音乐家会在乐曲中故意使用一些更加“不和谐”的音符，以达到一种特殊的效果
- 而所谓的**调式**，就是一组可以互相配合的**声音频率**；作曲家在作曲之前选择一个调式，就像足球教练在比赛前选择一些互相配合默契的球员，球员之间互相传球配合，就像一个调式中的各个音阶各种排列组合，形成旋律

五度相生律

- 建立在**2:3**这个频率比例上的确定音律的方法都可以称为**五度相生律**，在五度相生律中将这个比例称为**纯五度**
- **补全半音方法二**（毕达哥拉斯）：取一基准音，在此以C为例，将其频率 f 乘上 $3/2$ ，即升高完全五度得下一音G；再将G升高完全五度得下一音D，此时D之频为 $(3f/2) \times (3/2) = 9f/4$ ，高于原基准音之倍频，故将其除二，即降八度得 $9f/8$ ；再将D升高完全五度得下一音A，此时A之频为 $(9f/8) \times (3/2) = 27f/16$ ；再将A升高完全五度得下一音E，此时E之频为 $(27f/16) \times (3/2) = 81f/32$ ，高于原基准音之倍频，故将其降八度得 $81f/64$ ；再将E升高完全五度得下一音B，此时B之频为 $(81f/64) \times (3/2) = 243f/128$ ；假设有一音升高完全五度再降八度后为基准音C，可得此音之频为 $4f/3$ ，此即为F
 - 可是 $(3/2)^n$ ，只要 n 是自然数，其结果都不会是整数，更不用说是2的某次方；古人的对策就是“取近似值”，他们注意到 $(3/2)^5 \approx 7.59$ ，和 $2^3 = 8$ 很接近，于是决定这个音就是他们要找的最后一个音，比这个音再高一点就是主音的第三个八度了
 - 这样，从主音F开始，只需把“按 $3/2$ 比例寻找最和谐音”这个过程循环5次，得到了5个音，加上主音和本身和谐的 $4/3F$ ，一共是7个音

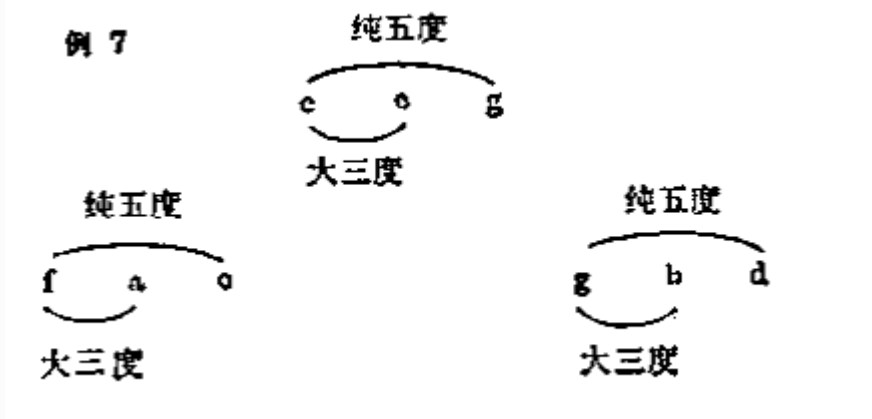
音阶	C	D	E	F	G	A	B	C
与基频之比	1/1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2/1
与前音之比	—	9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243

按照五度音列向上（下）n个音的一般公式如下：（BM=基准音频率，n=相生次数） $\frac{1.5^n}{2^{\lfloor n \log_2 1.5 \rfloor}}$

- **三分损益法**（《管子》）：任取一根弦作为基准，然后三分损一，得到一根长度为原来三分之二的弦，就可以发出与之前那根弦发出的声音频率比为2:3的声音，然后再对第二根弦三分益一，得到长度为第二根弦三分之四的弦，就可以发出与第二根弦发出的声音频率比为4:3的声音（相当于先乘以二分之三，再乘以2），如此反复四次，就先后得到宫、徵、商、羽、角五个音，对应西方音乐体系中的C、G、D、A、E，其中，1和5、2和6之间的频率比都是2:3
 - 在《吕氏春秋》一书中，将这种方法反复进行十一次，得到十二个频率，上边那一行的六个称为“六律”，下面那一行的六个称为“六吕”；黄钟（即基准音，宫调1）与“三分益一”产生的为阳，六阳律即“律”包括“黄钟（C）、太簇（D）、姑洗（E）、蕤宾（#F）、夷则（#G）、亡射（#A）”；用“三分损一法”产生的六阴律为“吕”，“六吕”包括“林钟（G）、南吕（A）、应钟（B）、大吕（#C）、夹钟（#D）、中吕（F）”。六阴六阳，统称十二律吕
 - 三分损益法进行十二次以后，发现最后生成的一个音频率差不多是基准音的两倍，所以之后的音就可以直接把原来的十二个音的频率乘以二，称为清黄钟、清林钟等，表示频率加倍，用西方乐理学的术语，称为“提高一个八度”
- 巧的是，这两种方法算出来的结果居然**非常接近**
- 根据五度相生律所订出的七个基本音级间的**音高关系**，和十二平均律中七个基本音级的音高关系是**不同的**；虽然EF、BC之间亦为半音，但比十二平均律中的半音要**小**，其余相邻两音级之间虽然亦为全音，但比十二平均律中的全音要**大**

纯律

- **纯律**是于五度相生律用以构成的第二分音和第三分音之外，再加入**第五分音**来作为生律要素，构成和弦形式；“纯律”的发明人是古希腊学者**亚理斯托森努斯**（Aristoxenus of Tarentum）



- 在五度相生律中，相隔四个半音的音律频率之比为 $(8/9)^2 = 64/81$ ，律学家把64:81改成64:80，保证了4:5的比例，CEG**大三和弦**就从1、1.265625、1.5变成了1、1.25、1.5，后者比值恰好是

连续的4:5:6，比前者（64:81:94）要和谐得多

- 然而，纯律是有缺陷的；它保证了**大三和弦的和谐**，但在**小三度**上的比例关系不够协和，**纯五度**也变得不再“纯”，相隔五个字母的音的比例不能保证为3：2

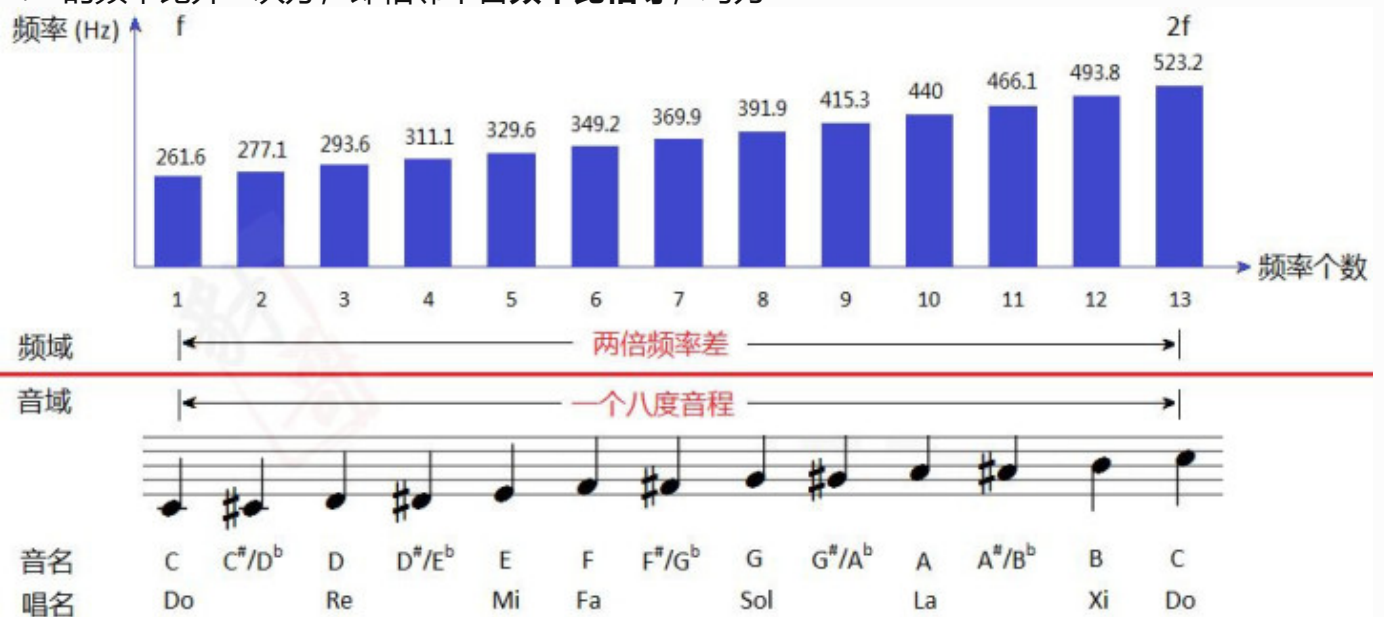
表 4

现代音名 (下有横线者偏低)	c ¹		d ¹		e ¹	f ¹		g ¹		a ¹		b ¹	c ²
各音发音体长度比例即周期比例	1		$\frac{8}{9}$		$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
各音频率比例	1		$\frac{9}{8}$		$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{15}{8}$	2
相邻两音频率比值			$\frac{9}{8}$			$\frac{10}{9}$			$\frac{16}{15}$			$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$
相邻两音音程值 (以音分数表示)			204			182			112			204	112

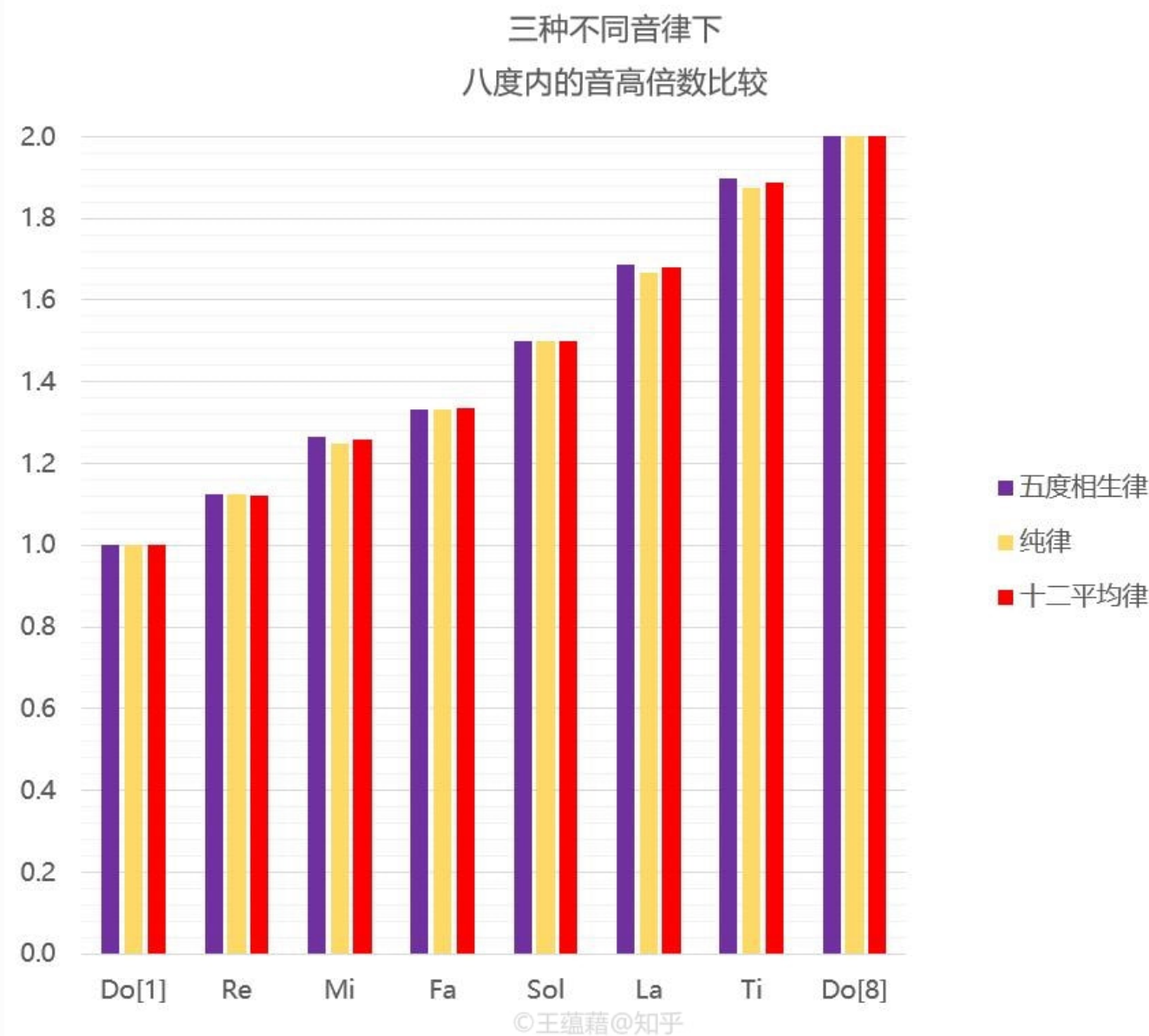
- 根据纯律所订出的基本音级的**音高关系**，又不同于十二平均律和五度相生律中的基本音级间的音高关系；它的EF、BC之间的**半音**比其他两种律制的半音要**大**，全音的情况有两种：CD、FG、AB为**大全音**，和五度相生律中的全音**相等**，比十二平均律中的全音**大**，DE、GA为**小全音**，比其他两种律制的全音都**小**

十二平均律

- 由五度相生律推算出的**第十二个音**，它和起始音高的音程约为**两倍**，而二倍即一八度；可能就是
这个原因，使得当时的人们想到通过把十二个音进行细微的调整来构建八度了
- 将八度分成十二个**均等的部分——半音——**的音律叫做**十二平均律**；十二平均律中，十二个半音将
2：1的频率比开12次方，即相邻半音**频率比相等**，均为 $2^{1/12}$



- 十二平均律早在**古代希腊**时便有人提出了，但由于数学知识的限制（古希腊不会算无理数），迟迟没有被发明出来；世界上最早根据数学来制订十二平均律的，是中国明朝的大音乐家**朱载堉**（1584年）
- 关于十二平均律，我们已知它是将八度分成十二个均等的部分而成，因此，除一度 and 八度外，其他各律的音高与纯律和五度相生律**皆不相同**；这种律制中的音与音之间**并没有正整数倍关系**（除了八度），但是它的十二个音中恰好有七个音，在音高倍数关系上和纯律以及五度相生律中的Do Re Mi Fa Sol La Ti极为接近——以至于如果我们用十二平均律来定义音程的话，耳朵并不会明显地察觉到异样



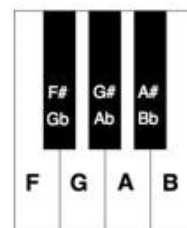
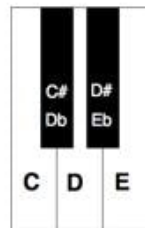
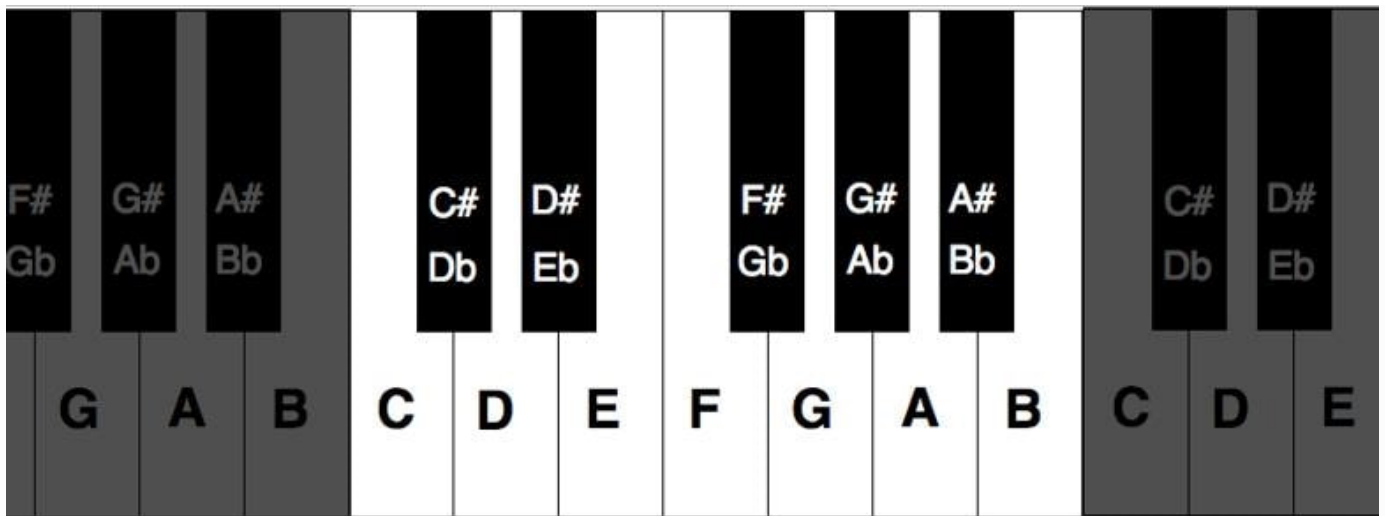
- 平均律虽然轻微地牺牲了遵循**简单整数倍**这个让音程听着协和的自然规律，使每个音都稍稍变得**不纯**，但却换得了极大的好处
 - 首先，它使得音程不再会在**纯五度音程**上出现**不协和**的问题
 - 其次，平均律保证了音程倍数关系永远是**固定值**；因此，使用平均律的乐器可以轻松地完成**转调**的工作，而不需要每次为不同的调来调整音高的设置了

度数	1	2	3	4	5	6	7	8
五度相生律	0 大全音	204 大全音	408 大全音	498 小半音	702 大全音	906 大全音	1110 大全音	1200 小半音
十二平均律	0 全音	200 全音	400 全音	500 半音	700 全音	900 全音	1100 全音	1200 半音
纯律	0 大全音	204 小全音	386 大半音	498 大全音	702 小全音	881 大全音	1088 大半音	1200 小半音

- 十二平均律中的十二音本来应该**平等**，拥有自己独立的音名与对应唱名；然而**基于大调的唱名**在公元1000年左右就由**圭多·达莱佐**发明了，因此十二平均律中的非大调音只能和大调**共享已有的唱名与音名字母**，所以基本音级依然只有C、D、E、F、G、A、B七个，而其他音则必须用**升降号**表示
- 三种律制在实际的应用上各有长处
 - 五度相生律**是根据纯五度定律的，因此在音的先后结合上自然协调，适用于**单音音乐**
 - 纯律**是根据自然三和弦而定律，因此在和弦音的同时结合上纯正而和谐，适用于**多声音乐**；但随着多声部音乐的发展，转调的频繁，加上键盘乐器在演奏纯律上的困难，因而受到很多限制
 - 十二平均律**在音的先后结合和同时结合上都不是那么纯正自然，但由于它**转调方便**，在键盘乐器的演奏和制造上有着许多优点，因此近年来被广泛采用

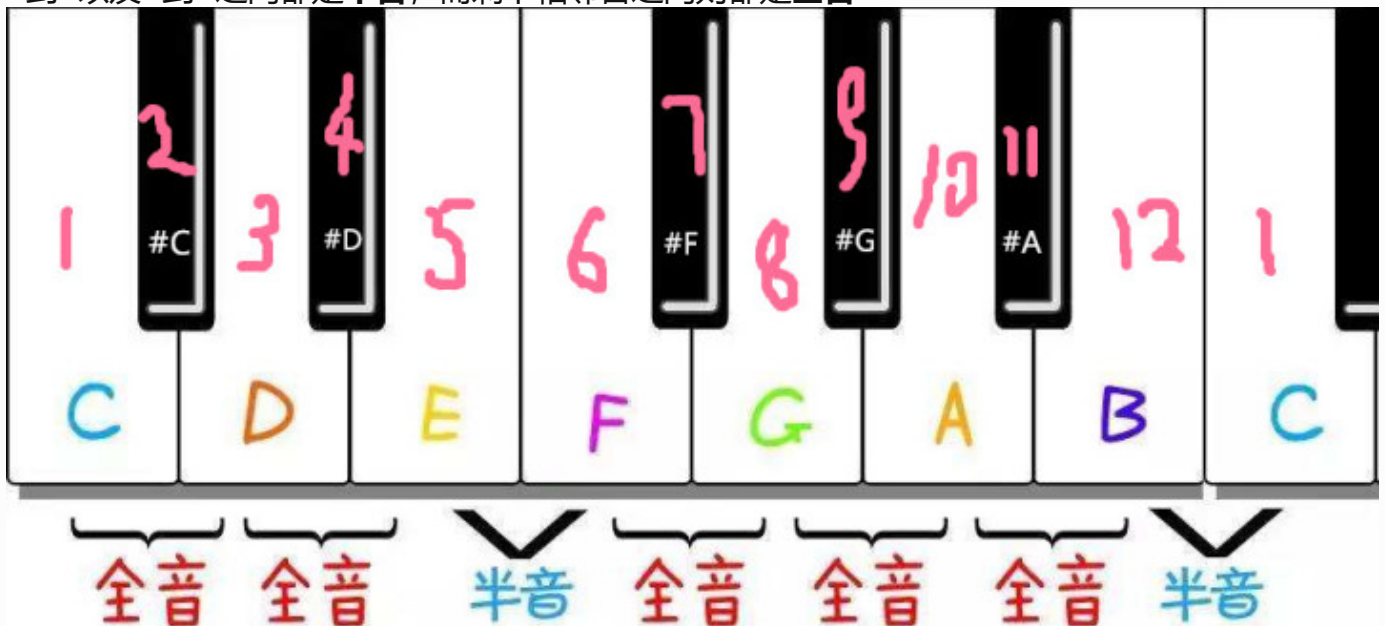
半音与全音

- 正因为十二平均律的等比关系使音阶变得“平均”，我们从此再也不需用**倍数**去演算音程了，而是改为直接用**整数刻度**来衡量音程的“距离”，故全音和半音也从**区分不同音程的泛指**演变为了**标准的距离**
- 我们把平均律的十二个音中，相邻的两个音之间的音程距离（ $2^{1/12}$ 倍）叫做半音程，简称**半音**；半音是现代音乐中衡量音程的最小刻度，也就是钢琴上相邻键的音程



©王蕴藉@知乎

- 因此，我们可以重新定义**八度**，八度就是相差**十二个半音**的音之间的音程；同样，**五度**的定义就是**七个半音程**，而此前频率比的定义大多数时候**并不适用于十二平均律**
- 知道了半音这个音程概念，我们可以将之前**所有的音以半音为刻度**来度量，比如说C到D之间的**大二度**，是由两个半音组成的；C到G之间的**纯五度**，是由七个半音组成的；E到B之间差了11减4也是七个半音，因此它们之间也是**纯五度**的关系
- 比半音大一点单位叫全音程或**全音**，全音是由**两个半音程**叠加组成的，等价于**大二度**
- **基本音级**C、D、E、F、G、A、B相邻两个音之间音程只有两种关系，一种是**全音**，一种是**半音**；E到F以及A到B之间都是**半音**，而剩下相邻音之间则都是**全音**



- Do Re Mi Fa Sol La Ti Do即为音程关系与**基本音级**相同的**唱名系统**；在变调时，所有唱名的音高都可以跟随Do一同平移任意个半音

- 另外一种讨论音程的单位是**度**，度用来描述比半音和全音要**大**的音程时更加方便；纯五度，大三度，这些都是度数

音分

- **音分** (cent) 是一个用于度量音程的**对数标度单位**；在十二平均律中，将一个八度音程分为12个半音，每一个半音的音程（相当于相邻钢琴键间的音程）等于**100音分**
- **1200音分**等于一个八度音程，**频率比**为2:1，等程半音（相当于相邻钢琴键间的音程）等于100音分；这意味着1音分正好等于 $2^{1/1200}$ ，即 $\sqrt[1200]{2}$ ，近似1.0005777895
- 如果知道两个音a和b的**频率**，两个音相距的**音分值n**可用下列公式计算（类似分贝定义式的形式，目的是为了使指数形式的物理单位线性化，使其化为对数）

$$n = 1200 \log_2 \left(\frac{a}{b} \right) \approx 3986 \log_{10} \left(\frac{a}{b} \right)$$

- 为了比较不同的**调律系统**，会把不同的音程差距用音分表示；例如在**纯律**中，**大三度**用频率比表示为5:4，使用上面的公式可算出其约为386音分，在十二平均律钢琴的等分音程中则为400音分
- 这14音分的差距，大约是一个半度的1/7，是**很容易听出来的**；人类的最小可觉差大约是6音分，某些听力较好的人可以达到4~5音分

自然半音和自然全音 变化半音和变化全音

- 由两个**相邻的音级**构成的半音叫做**自然半音**；自然半音可以由基本音级形成，也可以由变化音级形成，或由基本音级与变化音级形成

例 9 e-f, $\sharp e-\sharp f$, $\flat g-a$, $a-\flat b$, $\times f-\sharp g$ 等。

- 由**相邻的两个音级**形成的全音叫做**自然全音**；自然全音和自然半音一样，可以由基本音级形成，也可以由变化音级形成，或由基本音级和变化音级形成

例 10 c-d, $\sharp c-\sharp d$, e- $\sharp f$, $\flat b-c$, $\flat a-\flat b$ 等。

- 由**同一音级**的两种不同形式所构成的半音，叫做**变化半音**；变化半音可以由基本音级和变化音级形成，也可以由变化音级形成

例 11 c- $\sharp c$, d- $\flat d$, $\sharp c-\times c$, $\flat \flat b-\flat b$ 等。

- 由**同一音级**的两种不同形式或**隔开一个音级**所构成的全音，叫做**变化全音**；变化全音可以由基本音级和变化音级形成，也可以由变化音级与变化音级形成

例 12 c-^xc, b-^bb, be-^be, ^xc-^be 等。

等音

- 音高相同而意义和记法不同的音，叫做**等音**；等音是根据**十二平均律**而来的，而在五度相生律、纯律中都没有这个现象，因为只有在**半音相等**的情况下才有可能产生等音
- 除去#G和bA两个音级外，其他每个基本音级和变化音级都可能有**两个等音**，连它本来的共有三个；而bA和G只有一个等音，连它本身共有两个

例 13

$\sharp C$ $\flat D$ $\times B$			$\sharp D$ $\flat E$ $\flat\flat F$			$\sharp F$ $\flat G$ $\times E$		
						$\sharp G$ $\flat A$		
						$\sharp A$ $\flat B$ $\flat\flat C$		
C	D	E	F	G	A	B		
$\sharp B$	$\times C$	$\times D$	$\sharp E$	$\times F$	$\times G$	$\times A$		
$\flat\flat D$	$\flat\flat E$	$\flat F$	$\flat\flat G$	$\flat\flat A$	$\flat\flat B$	$\flat C$		