1.随机事件与概率

1.1.基本概念

- **随机试验**：可重复、结果不唯一、试验前不知道具体结果，但所有可能的结果具有确定性
- **样本空间**：**随机试验**E所有的**基本结果**构成的集合称为E的样本空间，用S表示；**每个基本结果都是样本空间中的一个点**
- **随机事件**：样本空间S的子集，称为E的**随机事件**，简称事件，用A表示；每次实验中，当且仅当这一子集中的一个**样本点（基本结果）出现时，称这一事件发生；称**$\emptyset \subset S$**为不可能事件**，$S \subset S$为**必然事件**

1.2.事件的关系与运算

1.事件的关系

- **包含**：$A \subset B$(A发生则B一定发生)
- **相等**：$A = B$
- **互斥**：$A \cap B = \emptyset$
- **对立**：$A \cap B = \emptyset, A \cup B = S$

2.事件的表示

- **和事件**：A或B发生；$A \cup B$或$A + B$
- **积事件**：A、B同时发生；$A \cap B$或AB
- **差事件**：A发生而B不发生；$A - B = A - AB = A\overline{B}$
- **逆事件**：A不发生，$\overline{A} = S - A$

3.事件的运算

- **交换律**：$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
- **结合律**：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **分配律**：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **德摩根律**：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$(长线变短线，开口换方向)

1.3.概率定义及基本性质

1.3.1.概率的定义

- 随机试验E的样本空间为S，在S上定义一个关于事件的函数P，对E的每一事件A赋予一个实数，称为其概率，记为$P(A)$，并满足：
  - **非负性**：对任意事件A有$0 \leq P(A)$；
  - **归一性**：$P(S) = 1$；
  - **可列可加性**：设$A_1, a_2, ..., A_n, ...$为**两两互斥**的可列事件组，有$P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

1.3.2.概率的基本性质

- $P(\emptyset) = 0$（但$P(A) = 0$不能推出$A = \emptyset$）
- 可列可加性
- $AB \subset A \subset A \cup B$，且$P(AB) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$
- 对任意事件A，$P(A) \leq 1$

1.4.概率的基本公式

- **减法公式**：$P(A - B) = P(A) - P(AB)$
- **加法公式**：$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$；$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
- **求逆公式**：$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

1.5.条件概率

1.5.1.定义

- 设A, B为两个事件，且$P(A) > 0$，称$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$为事件$A$发生的情况下$B$发生的**条件概率**（样本空间由$S$缩小至$A$），且符合：
  - **非负性**：$P(B|A) \leq 0$；
  - **规范性**：对于必然事件S，有$P(S|A) = 1$；
  - **可列可加性**：$P(\cup_{i=1}^{\infty} B_i|A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_i|A)$（$B_i$两两互斥）

1.5.2.乘法定理

- 设$P(A) > 0$，则$P(AB) = P(B|A)P(A)$

1.5.3.全概率公式与贝叶斯公式

- **完备事件组**：若两两互斥的$B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = S$，则称$B_1, B_2, ...B_n$为一组完备事件组
- **全概率公式**：设$B_1, B_2, ...B_n$为一组完备事件组，且$P(B_i) > 0$，则$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$（知道原因$B_i$的概率以及$B_i$导致结果$A$发生的的概率，求结果$A$的概率，**由因求果**）
- **贝叶斯公式**：设$B_1, B_2, ...B_n$为一组完备事件组，且$P(A) > 0$，$P(B_k) > 0$，则$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$（知道结果$A$的概率，求$A$由原因$B_i$导致的概率，**执果索因**）

1.6.事件的独立性

1.6.1.定义

- **独立**：样本空间由S到A不会影响事件发生概率
- **两个事件独立**：$P(AB) = P(A)P(B)$
- **三个事件独立**：

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \\ P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

1.6.2.性质

- 若A, B相互独立，则$P(B|A) = P(B)$，反之亦然
- 事件A, B、$A, \overline{B}$、$\overline{A}, B$、$\overline{A}, \overline{B}$中任一对独立，则其他三对均独立
- 若一组事件独立，则该组事件的部分事件组也独立
- 若$P(A) = 0$或1，则A, B独立
- 若A, B既独立又互斥，则$P(A) = 0$或者$P(B) = 0$

1.7.常见概型

1.7.1.古典概型

- **定义**：基本结果**有限**，且**概率相等**
- **计算公式**：设$A \subset S$，则$P(A) = \frac{k}{n}$，其中n为样本点总数，k为事件A中的样本点个数

- **超几何分布**：设有N件产品，其中D件次品，从中任取n件，恰有k件次品，则概率为$P(X=k)=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$

1.7.2.几何概型

- **定义**：基本结果**无限**，样本空间中取到每点的**概率相等**
- **计算**：设$A\subset\Omega$，则$P(A)=\frac{A\text{的度量}}{\Omega\text{的度量}}$

1.7.3.n重伯努利实验

- **定义**：**两种可能结果**$A,\overline{A}$，且每种结果在每次实验中**概率保持不变**
- **计算**：设$P(A)=p$，$B_k=${n次试验中A出现k次}，则$P(B_k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$