

Regelung eines Furuta Pendulums

Thomas SCHILDHAUER

Dustin HORENBURG

Kai HAMANN

8. September 2015

Mechatronics Lab

Summer 2015

Advisor: Dipl.-Ing. Martin Gomse

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	4
2.1	Furuta Pendel	4
2.1.1	Annahmen	5
2.1.2	Formulierung des Problems nach Lagrange	5
3	Identifikation der Parameter	9
4	Design der Controller	10
5	Ergebnisse	11

1 Einleitung

Diese Dokumentation...

2 Theorie

In diesem Abschnitt wird auf die Theorie des sogenannten *Furuta Pendels* eingegangen. Zunächst wird ein Modell des Pendels beschrieben. Im Anschluss wird die Theorie dieses Modells auf ein echtes Furuta Pendel angewandt.

2.1 Furuta Pendel

Bei dem *Furuta Pendel*, auch drehbares invertiertes Pendel genannt, handelt es sich um ein 1992 von Katsuhisa Furuta entwickeltes mechanisches Pendel. Es besteht aus einem angetriebenen Arm, welcher in der horizontalen Ebene rotieren kann. An diesem Arm ist ein Pendelarm befestigt, welcher frei in der zum angetriebenen Arm orthogonalen Ebene rotieren kann. Das Furuta Pendel ist ein Beispiel eines komplexen nichtlinearen Oszillators. Cazzolato and Prime (2011)

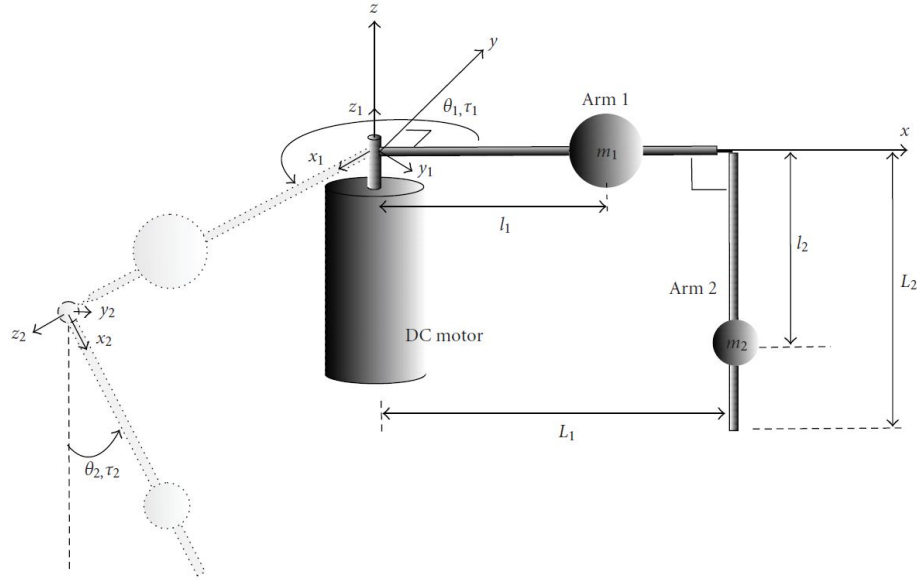


Abbildung 1: Schema des Furuta Pendels nach Cazzolato and Prime (2011).

Abbildung 2.1 zeigt das Schema eines Furuta Pendels, welches von einem DC-Elektromotor angetrieben wird. Mit dem Motor wird ein Drehmoment τ_1 auf Arm 1 des Pendels gebracht. Das Drehmoment τ_2 bezeichnet das Kopplungsmoment zwischen Arm 1 und Arm 2. Die Verbindung zwischen Arm 1 und Arm 2 rotiert frei und ist nicht angetrieben. Die beiden Arme haben Längen L_1 und L_2 sowie Massen m_1 und m_2 . l_1 und l_2 bezeichnen die jeweiligen Abstände der Massenmittelpunkte zum Rotationspunkt der Arme. Die Arme haben Trägheitstensoren J_1 und J_2 um ihren jeweiligen Massenmittelpunkt und ihre Gelenke unterliegen linearer Dämpfung mit Dämpfungskonstanten b_1 und b_2 .

2.1.1 Annahmen

Vor der Aufstellung des Gleichungssystems werden in Cazzolato and Prime (2011) einige Annahmen getroffen, die an dieser Stelle kurz wiederholt werden:

- a. Die Kopplung zwischen Motorachse und Arm 1 wird als ideal starr angenommen.
- b. Die Motorachse und beide Pendelarme werden als ideal starr angenommen.
- c. Die Koordinatensysteme von Arm 1 und Arm 2 sind die Hauptachsensysteme, sodass die Trägheitstensoren diagonal sind.
- d. Die Trägheit des Motors wird vernachlässigt.
- e. Es wird von reiner linearer (viskoser) Dämpfung ausgegangen.

2.1.2 Formulierung des Problems nach Lagrange

Mit den in Abschnitt 2.1.1 getroffenen Annahmen erhalten wir durch den Ansatz von Lagrange'schen Tensoren die nachfolgenden Formeln ?.

Die potentielle und die kinetische Energie von Arm 1:

$$E_{p1} = 0 \quad E_{k1} = \frac{1}{2}(v_{1c}^T m_1 v_{1c} + \omega_1^T J_1 \omega_1) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (m_1 l_1 + J_{1zz})$$

Die potentielle und kinetische Energie von Arm 2:

$$E_{p2} = g m_2 l_2 (\cos(\theta_2) - 1)$$

$$\begin{aligned} E_{k2} &= \frac{1}{2}(v_{2c}^T m_2 v_{2c} + \omega_2^T J_2 \omega_2) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (m_2 L_2^2 + (m_2 l_2^2 + J_{2yy}) \sin^2(\theta_2) + J_{2xx} \cos^2(\theta_2)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 (J_{2zz} + m_2 l_2^2) + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

$$L = E_k - E_p \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + b_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 (J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + (J_{2yy} + m_2 l_2^2) \\ &\times \sin^2(\theta_2) + J_{2xx} \cos^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ &- m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \\ &\times (m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx}) + b_1 \dot{\theta}_1 \end{aligned} \right) \\ \left(\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 (m_2 l_2^2 + J_{2zz}) \\ &+ \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \sin(2\theta_2) (-m_2 l_2^2 - J_{2yy} + J_{2xx}) \\ &+ b_2 \dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \right) \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \begin{bmatrix} J_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix} \\
J_2 &= \begin{bmatrix} J_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_1 &= J_1 + m_1 l_1^2 \\
\hat{J}_2 &= J_2 + m_2 l_2^2 \\
\hat{J}_0 &= J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) + b_1 \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 \hat{J}_2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) \\ + b_2 \dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Die folgenden Gleichungen enthalten noch den Fehler, den wir finden sollten.

Ich habe die Lösung gerade nicht parat.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\begin{bmatrix} -\hat{J}_2 b_1 \\ m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) b_2 \\ -\hat{J}_2^2 \sin(2\theta_2) \\ -\frac{1}{2} \hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \sin(2\theta_2) \\ \hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{J}_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ \frac{1}{2} m_2^2 l_2^2 L_1 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix}}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} \tag{7}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\begin{bmatrix} m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) b_1 \\ -b_2 (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \\ m_2 L_1 l_2 \hat{J}_2 \cos(\theta_2) \sin(2\theta_2) \\ -\frac{1}{2} \sin(2\theta_2) (\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2)) \\ -\frac{1}{2} m_2^2 L_1^2 l_2^2 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 l_2 \cos(\theta_2) \\ \hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2) \\ -m_2 l_2 \sin(\theta_2) (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix}}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{1e} &= 0 \\
\theta_{2e} &= \pi \\
\dot{\theta}_{1e} &= 0 \\
\dot{\theta}_{2e} &= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} A_{31} &= 0 \\ A_{32} &= \frac{gm_2^2 l_2^2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{33} &= \frac{-b_1 \hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{34} &= \frac{-b_2 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{41} &= 0 \\ A_{42} &= \frac{gm_2 l_2 \hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{43} &= \frac{-b_1 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{44} &= \frac{-b_2 \hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ B_{31} &= \frac{\hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ B_{41} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ B_{32} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ B_{42} &= \frac{\hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tau = K_m i \quad (12)$$

Herleitung der Parameter (1 zu 1 aus dem Dokument übernommen.. die Herangehensweise muss also noch verändert werden!):

$$\begin{aligned} L_1 &= l_a \\ L_2 &= l_{pm} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} m_1 &= m_b + m_r + m_{sens} \\ m_2 &= m_p + m_{pm} \end{aligned} \quad (14)$$

$$J_{arm} = m_r \frac{l_r^2}{12} + m_r (\frac{1}{2}l_r + l_b - l_a)^2 \quad (15)$$

$$J_{pend1} = m_b l_a^2 \quad (16)$$

$$J_{sens} = m_{sens} (l_a - l_b - l_r - \frac{1}{2}l_c)^2 \quad (17)$$

$$J_{ps} = m_p (r_b + \frac{1}{2}l_p)^2 \quad (18)$$

$$J_{pm} = m_{pm} l_{pm}^2 \quad (19)$$

$$J_{arm} + J_{pend1} + J_{sens} = m_1 l_1^2 J_{pm} + J_{ps} = m_2 l_2^2 \quad (20)$$

$$l_1 = \sqrt{\frac{m_r \frac{l_r^2}{12} + m_r (\frac{1}{2}l_r + l_b - l_a)^2 + m_b l_a^2 + m_{sens} (l_a - l_b - l_r - \frac{1}{2}l_c)^2}{m_1}} \quad (21)$$

$$l_2 = \sqrt{\frac{m_{pm} l_{pm}^2 + m_p (r_b + \frac{1}{2}l_p)^2}{m_2}} \quad (22)$$

... Hier sollten wir gucken, ob wie die Umformungen evtl. anders vornehmen.

$$Listed\, der\, Zahlenwerte \quad (23)$$

$$(24)$$

$$(25)$$

Swing-Up

$$U = n \cdot g \cdot \text{sign}(E - E_0) \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \quad (26)$$

$$E = E_{pot} + E_{kin} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} E_{pot} &= m_2 g l_2 (\cos(\theta_2) - 1) \\ E_{kin} &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 \hat{J}_2 \end{aligned} \quad (28)$$

$$(29)$$

3 Identifikation der Parameter

4 Design der Controller

5 Ergebnisse

Literatur

Cazzolato, B. S. and Prime, Z. (2011). On the dynamics of the furuta pendulum.
Journal of Control Science and Engineering, 2011(6):1–8.