Regelung eines Furuta Pendulums

Thomas Schildhauer
Dustin Horenburg
Kai Hamann

8. September 2015

Mechatronics Lab
Summer 2015
Advisor: Dipl.-Ing. Martin Gomse

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Dokumentation...

2 Theorie

In diesem Abschnitt wird auf die Theorie des sogenannten *Furuta Pendels* eingegangen. Zunchst wird ein Modell des Pendels beschrieben. Im Anschluss wird die Theorie dieses Modells auf ein echtes Furuta Pendel angewandt.

2.1 Furuta Pendel

Bei dem *Furuta Pendel*, auch ?drehbares??? invertiertes Pendel genannt, handelt es sich um ein 1992 von Katsuhisa Furuta entwickeltes mechanisches Pendel. Es besteht aus einem angetriebenen arm, welcher in der horizontalen Ebene rotieren kann. An diesem Arm ist ein Pendelarm befestigt, welcher frei in der zum angetriebenen Arm orthogonalen Ebene rotieren kann. Das Furuta Pendel ist ein Beispiel eines komplexen nichtlinearen Oszillators. **?**

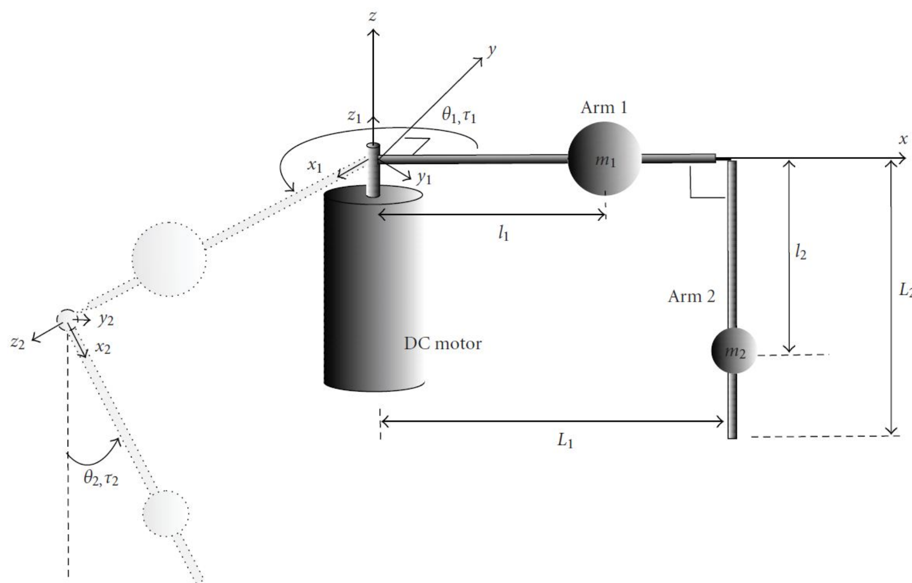

Abbildung 1: Schema des Furuta Pendels nach **?**.

Abbildung 2.1 zeigt das Schema eines Furuta Pendels, welches von einem DC-Elektromotor angetrieben wird. Mit dem Motor wird ein Drehmoment τ_1 auf Arm 1 des Pendels gebracht. Die Verbindung zwischen Arm 1 und Arm 2 rotiert frei und ist nicht angetrieben. Die beiden Arme haben Lngen L_1 und L_2 sowie Massen m_1 und m_2. l_1 und l_2 bezeichnen die jeweiligen Abstnde der Massenmittelpunkte zum Rotationspunkt der Arme. Die Arme haben Trgheitstensoren J_1 und J_2 um ihren jeweiligen Massenmittelpunkt und ihre Gelenke unterliegen linearer Dmpfung mit Dmpfungskonstanten b_1 und b_2.

$$E_{p1} = 0 \tag{1}$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2}(v_{1c}^T m_1 v_{1c} + \omega_1^T J_1 \omega_1) = \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2(m_1 l_1 + J_{1zz}) \tag{2}$$

$$E_{p2} = g m_2 l_2 (\cos(\theta_2) - 1) \tag{3}$$

$$\begin{aligned} E_{k2} &= \frac{1}{2}(v_{2c}^T m_2 v_{2c} + \omega_2^T J_2 \omega_2) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2(m_2 L_2^2 + (m_2 l_2^2 + J_{2yy})\sin^2(\theta_2) + J_{2xx}\cos^2(\theta_2)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2(J_{2zz} + m_2 l_2^2) + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{aligned} \tag{4}$$

$$L = E_k - E_p \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) + b_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1(J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + (J_{2yy} + m_2 l_2^2) \\ \times \sin^2(\theta_2) + J_{2xx} cos^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \\ \times(m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx}) + b_1\dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2(m_2 l_2^2 + J_{2zz}) \\ +\frac{1}{2}\dot{\theta}_1 \sin(2\theta_2)(-m_2 l_2^2 - J_{2yy} + J_{2xx}) \\ +b_2\dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{bmatrix} J_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix} \\ J_2 &= \begin{bmatrix} J_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= J_1 + m_1 l_1^2 \\ \hat{J}_2 &= J_2 + m_2 l_2^2 \\ \hat{J}_0 &= J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1(\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) + b_1\dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 \hat{J}_2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) \\ +b_2\dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Die folgenden Gleichungen enthalten noch den Fehler, den wir finden sollten.
Ich habe die Lsung gerade nicht parat.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\begin{bmatrix} -\hat{J}_2 b_1 \\ m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) b_2 \\ -\hat{J}_2^2 \sin(2\theta_2) \\ -\frac{1}{2}\hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2)\sin(2\theta_2) \\ \hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{J}_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ \frac{1}{2} m_2^2 l_2^2 L_1 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix}}{\hat{J}_0\hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} \tag{11}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\begin{bmatrix} m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) b_1 \\ -b_2(\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \\ m_2 L_1 l_2 \hat{J}_2 \cos(\theta_2)\sin(2\theta_2) \\ -\frac{1}{2}\sin(2\theta_2)(\hat{J}_0\hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2)) \\ -\frac{1}{2} m_2^2 L_1^2 l_2^2 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 l_2 \cos(\theta_2) \\ \hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2) \\ -m_2 l_2 \sin(\theta_2)(\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix}}{\hat{J}_0\hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \theta_{1e} &= 0 \\ \theta_{2e} &= \pi \\ \dot{\theta}_{1e} &= 0 \\ \dot{\theta}_{2e} &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$
\begin{aligned}
A_{31} &= 0 \\
A_{32} &= \frac{g m_2^2 l_2^2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
A_{33} &= \frac{-b_1 \hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
A_{34} &= \frac{-b_2 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
A_{41} &= 0 \\
A_{42} &= \frac{g m_2 l_2 \hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
A_{43} &= \frac{-b_1 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
A_{44} &= \frac{-b_2 \hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
B_{31} &= \frac{\hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
B_{41} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
B_{32} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
B_{42} &= \frac{\hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\tau = K_m i \tag{16}
$$

Herleitung der Parameter (1 zu 1 aus dem Dokument bernommen.. die Herangehensweise muss also noch verndert werden!):

$$
\begin{aligned}
L_1 &= l_a \\
L_2 &= l_{pm}
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
m_1 &= m_b + m_r + m_{sens} \\
m_2 &= m_p + m_{pm}
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
J_{arm} = m_r \frac{l_r^2}{12} + m_r (\frac{1}{2} l_r + l_b - l_a)^2 \tag{19}
$$

$$J_{pend1} = m_b l_a^2 \tag{20}$$

$$J_{sens} = m_{sens}(l_a - l_b - l_r - \frac{1}{2} l_c)^2 \tag{21}$$

$$J_{ps} = m_p(r_b + \frac{1}{2} l_p)^2 \tag{22}$$

$$J_{pm} = m_{pm} l_{pm}^2 \tag{23}$$

$$J_{arm} + J_{pend1} + J_{sens} = m_1 l_1^2 J_{pm} + J_{ps} = m_2 l_2^2 \tag{24}$$

$$l_1 = \sqrt{\frac{m_r \frac{l_r^2}{12} + m_r(\frac{1}{2} l_r + l_b - l_a)^2 + m_b l_a^2 + m_{sens}(l_a - l_b - l_r - \frac{1}{2} l_c)^2}{m_1}} \tag{25}$$

$$l_2 = \sqrt{\frac{m_{pm} l_{pm}^2 + m_p(r_b + \frac{1}{2} l_p)^2}{m_2}} \tag{26}$$

... Hier sollten wir gucken, ob wie die Umformungen evtl. anders vornehmen.

$$ListederZahlenwerte \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

$$\tag{29}$$

Swing-Up

$$U = n \cdot g \cdot sign(E - E_0)\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \tag{30}$$

$$E = E_{pot} + E_{kin} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} E_{pot} &= m_2 g l_2 (\cos(\theta_2) - 1) \\ E_{kin} &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 \hat{J}_2 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

3 Identifikation der Parameter

4 Design der Controller

5 Ergebnisse