

Regelung eines Furuta Pendulums

Thomas SCHILDHAUER

Dustin HORENBURG

Kai HAMANN

9. September 2015

Mechatronics Lab

Summer 2015

Advisor: Dipl.-Ing. Martin Gomse

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	4
2.1	Furuta Pendel	4
2.1.1	Annahmen	5
3	Identifikation der Parameter	9
4	Design der Controller	10
4.1	Signalverarbeitung	10
4.2	Swing-Up-Controller	10
4.3	Zweipunktregler	10
4.4	Catcher	11
4.5	Stabilizer	11
5	Ergebnisse	12

1 Einleitung

Diese Dokumentation...

2 Theorie

In diesem Abschnitt wird auf die Theorie des sogenannten *Furuta Pendels* eingegangen. Zunächst wird ein Modell des Pendels beschrieben. Im Anschluss wird die Theorie dieses Modells auf ein echtes Furuta Pendel angewandt.

2.1 Furuta Pendel

Bei dem *Furuta Pendel*, auch ?drehbares??? invertiertes Pendel genannt, handelt es sich um ein 1992 von Katsuhisa Furuta entwickeltes mechanisches Pendel. Es besteht aus einem angetriebenen Arm, welcher in der horizontalen Ebene rotieren kann. An diesem Arm ist ein Pendelarm befestigt, welcher frei in der zum angetriebenen Arm orthogonalen Ebene rotieren kann. Das Furuta Pendel ist ein Beispiel eines komplexen nichtlinearen Oszillators. ?

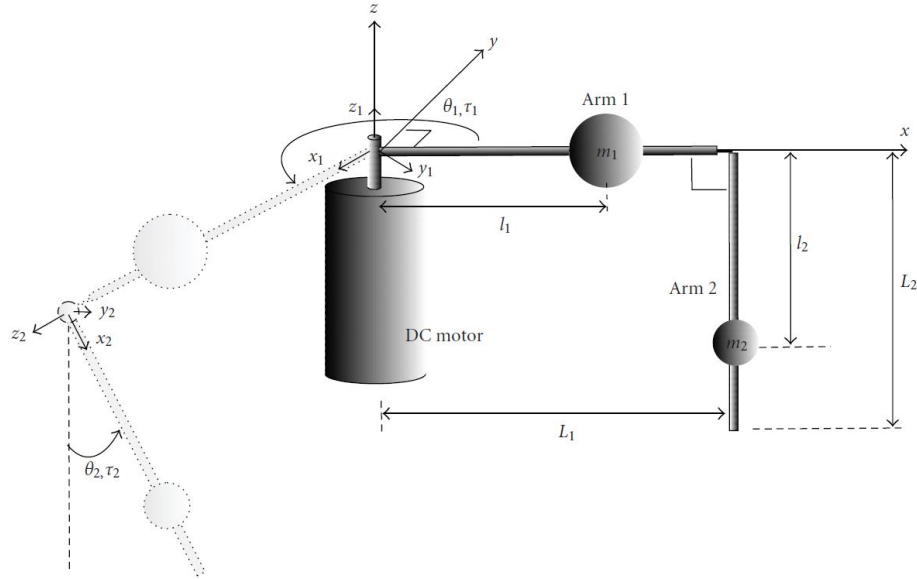


Abbildung 1: Schema des Furuta Pendels nach ?.

Abbildung 2.1 zeigt das Schema eines Furuta Pendels, welches von einem DC-Elektromotor angetrieben wird. Mit dem Motor wird ein Drehmoment τ_1 auf Arm 1 des Pendels gebracht. Das Drehmoment τ_2 bezeichnet das Kopplungsmoment zwischen Arm 1 und Arm 2. Die Verbindung zwischen Arm 1 und Arm 2 rotiert frei und ist nicht angetrieben. Die beiden Arme haben Längen L_1 und L_2 sowie Massen m_1 und m_2 . l_1 und l_2 bezeichnen die jeweiligen Abstände der Massenmittelpunkte zum Rotationspunkt der Arme. Die Arme haben Trägheitstensoren J_1 und J_2 um ihren jeweiligen Massenmittelpunkt und ihre Gelenke unterliegen linearer Dämpfung mit Dämpfungskonstanten b_1 und b_2 .

2.1.1 Annahmen

Vor der Aufstellung des Gleichungssystems werden in ? einige Annahmen getroffen, die an dieser Stelle kurz wiederholt werden:

- (i) Die Kopplung zwischen Motorachse und Arm 1 wird als ideal starr angenommen.
- (ii) Die Motorachse und beide Pendelarme werden als ideal starr angenommen.
- (iii) Die Koordinatensysteme von Arm 1 und Arm 2 sind die Hauptachsensysteme, sodass die Trgheitstensoren diagonal sind.
- (iv) Die Trgheit des Motors wird vernachlässigt.
- (v) Es wird von reiner linearer (viskoser) Dmpfung ausgegangen.

$$E_{p1} = 0 \quad (1)$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2}(v_{1c}^T m_1 v_{1c} + \omega_1^T J_1 \omega_1) = \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2(m_1 l_1 + J_{1zz}) \quad (2)$$

$$E_{p2} = gm_2 l_2 (\cos(\theta_2) - 1) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} E_{k2} &= \frac{1}{2}(v_{2c}^T m_2 v_{2c} + \omega_2^T J_2 \omega_2) \\ &= \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2(m_2 L_2^2 + (m_2 l_2^2 + J_{2yy}) \sin^2(\theta_2) + J_{2xx} \cos^2(\theta_2)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2(J_{2zz} + m_2 l_2^2) + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$L = E_k - E_p \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + b_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 (J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + (J_{2yy} + m_2 l_2^2) \\ &\times \sin^2(\theta_2) + J_{2xx} \cos^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ &- m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \\ &\times (m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx}) + b_1 \dot{\theta}_1 \end{aligned} \right) \\ \left(\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 (m_2 l_2^2 + J_{2zz}) \\ &+ \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \sin(2\theta_2) (-m_2 l_2^2 - J_{2yy} + J_{2xx}) \\ &+ b_2 \dot{\theta}_2 + gm_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \right) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \begin{bmatrix} J_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix} \\
J_2 &= \begin{bmatrix} J_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\hat{J}_1 &= J_1 + m_1 l_1^2 \\
\hat{J}_2 &= J_2 + m_2 l_2^2 \\
\hat{J}_0 &= J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) + b_1 \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 \hat{J}_2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) \\ + b_2 \dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix} \tag{10}$$

Die folgenden Gleichungen enthalten noch den Fehler, den wir finden sollten.

Ich habe die Lsung gerade nicht parat.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\begin{bmatrix} -\hat{J}_2 b_1 \\ m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) b_2 \\ -\hat{J}_2^2 \sin(2\theta_2) \\ -\frac{1}{2} \hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \sin(2\theta_2) \\ \hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{J}_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ \frac{1}{2} m_2^2 l_2^2 L_1 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix}}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} \tag{11}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\begin{bmatrix} m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) b_1 \\ -b_2 (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \\ m_2 L_1 l_2 \hat{J}_2 \cos(\theta_2) \sin(2\theta_2) \\ -\frac{1}{2} \sin(2\theta_2) (\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2)) \\ -\frac{1}{2} m_2^2 L_1^2 l_2^2 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 l_2 \cos(\theta_2) \\ \hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2) \\ -m_2 l_2 \sin(\theta_2) (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix}}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{1e} &= 0 \\
\theta_{2e} &= \pi \\
\dot{\theta}_{1e} &= 0 \\
\dot{\theta}_{2e} &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} A_{31} &= 0 \\ A_{32} &= \frac{gm_2^2 l_2^2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{33} &= \frac{-b_1 \hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{34} &= \frac{-b_2 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{41} &= 0 \\ A_{42} &= \frac{gm_2 l_2 \hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{43} &= \frac{-b_1 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{44} &= \frac{-b_2 \hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ B_{31} &= \frac{\hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ B_{41} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ B_{32} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ B_{42} &= \frac{\hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tau = K_m i \quad (16)$$

Herleitung der Parameter (1 zu 1 aus dem Dokument bernommen.. die Herangehensweise muss also noch verndert werden!):

$$\begin{aligned} L_1 &= l_a \\ L_2 &= l_{pm} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} m_1 &= m_b + m_r + m_{sens} \\ m_2 &= m_p + m_{pm} \end{aligned} \quad (18)$$

$$J_{arm} = m_r \frac{l_r^2}{12} + m_r (\frac{1}{2}l_r + l_b - l_a)^2 \quad (19)$$

$$J_{pend1} = m_b l_a^2 \quad (20)$$

$$J_{sens} = m_{sens} (l_a - l_b - l_r - \frac{1}{2}l_c)^2 \quad (21)$$

$$J_{ps} = m_p (r_b + \frac{1}{2}l_p)^2 \quad (22)$$

$$J_{pm} = m_{pm} l_{pm}^2 \quad (23)$$

$$J_{arm} + J_{pend1} + J_{sens} = m_1 l_1^2 J_{pm} + J_{ps} = m_2 l_2^2 \quad (24)$$

$$l_1 = \sqrt{\frac{m_r \frac{l_r^2}{12} + m_r (\frac{1}{2}l_r + l_b - l_a)^2 + m_b l_a^2 + m_{sens} (l_a - l_b - l_r - \frac{1}{2}l_c)^2}{m_1}} \quad (25)$$

$$l_2 = \sqrt{\frac{m_{pm} l_{pm}^2 + m_p (r_b + \frac{1}{2}l_p)^2}{m_2}} \quad (26)$$

... Hier sollten wir gucken, ob wie die Umformungen evtl. anders vornehmen.

$$Listed der Zahlenwerte \quad (27)$$

$$(28)$$

$$(29)$$

Swing-Up

$$U = n \cdot g \cdot \text{sign}(E - E_0) \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \quad (30)$$

$$E = E_{pot} + E_{kin} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} E_{pot} &= m_2 g l_2 (\cos(\theta_2) - 1) \\ E_{kin} &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 \hat{J}_2 \end{aligned} \quad (32)$$

$$(33)$$

3 Identifikation der Parameter

4 Design der Controller

4.1 Signalverarbeitung

Das Ausgangssignal der Inkrementalgeber wird zunächst auf Radiant-Werte umgerechnet

4.2 Swing-Up-Controller

Der Swing-Up-Controller soll dem Aufschwingen des Pendels dienen und im Bereich zwischen circa $20^\circ < |\theta_2| < 90^\circ$ und basiert auf der Lyapunov-Funktion. Diese führt dazu, dass sich bei der Wahl von $\theta_2 = 0$ in der aufrechten Position des Pendels ein Regler ergibt, welche die Energie des Pendels minimiert:

$$U = n \cdot g \cdot \text{sign}(E - E_0) \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \quad (34)$$

Der Term E_0 beschreibt die gewünschte, minimale Energie des Systems. Die Energie des Pendels E setzt sich aus der potentiellen Energie E_{pot} und der kinetischen Energie E_{kin} zusammen. Die potentielle Energie lässt sich aufgrund der Referenz im höchsten Punkt des Pendels wie folgt berechnen:

$$E_{pot} = m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot (\cos(\theta_2) - 1) \quad (35)$$

Die kinetische Energie ergibt sich zu:

$$E_{kin} = \frac{J_0}{2} \cdot \dot{\theta}_2^2 \quad (36)$$

Die Umsetzung des Reglers in Simulink ist in ABB zu sehen.

Abbildung 2: Swing-Up-Controller

4.3 Zweipunktregler

Für den Bereich zwischen circa $20^\circ < |\theta_2| < 90^\circ$ soll der Zweipunktregler (eng. Bang-bang control) das invertierte Pendel regeln. Dieser schaltet die maximale positive oder negative Spannung auf den Motor, abhängig von θ_2 und $\dot{\theta}_2$, daraus folgt Übertragungsfunktion:

$$U = -10 \cdot \text{sign}(\theta_2 \cdot \cos(\dot{\theta}_2)) \quad (37)$$

Das entsprechende Simulink-Modell in Abb. zu sehen.

Abbildung 3: Swing-Up-Controller

4.4 Catcher

Der Catcher dient der genaueren Regelung des Pendels nahe des oberen Equilibriums von θ_2 . Um in dem Bereich optimal und robust zu Regeln, wird ein LQ-Regler verwendet. Dieser basiert auf der Minimierung der Cost-Function, welche folgenden Form besitzt:

$$V = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (38)$$

Erhöht man die Diagonalwerte der Q-Matrix, werden die Fehler stärker gewichtet, allerdings steigt auch der Aufwand der Regelung. Die Matrix lässt sich über die Controllability-Matrix C und den linken Eigenvektor q der Matrix A wie folgt berechnen:

$$Q = C' \cdot q'^T \cdot q^T \cdot C \quad (39)$$

Für den Vektor q wurden folgenden Werte angenommen:

$$q = \begin{bmatrix} 180/\pi/180 \\ 0 \\ 0 \\ 180/\pi/0.1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Die Diagonalwerte der Matrix R der Cost-Funktion beeinflussen die Geschwindigkeit der Regelung und wurden zunächst für den Catcher auf eins gesetzt. Zusammen mit den Eingangs- und Ausgangsmatrizen A und B lässt sich mithilfe des Matlab-Befehls $F = \text{lqr}(A, B, Q, R)$ der LQR-Controller generieren. Das Simulink-Modell ist in Abb zu sehen.

4.5 Stabilizer

Zur Rückführung des Pendels auf die Ausgangswinkel von θ_1 und Beibehaltung der oberen Equilibrium-Position wird auch eine LQ-Regelung verwendet, welche sich nur durch die dreifache Einheitsmatrix für R und folgenden q -Vektor von dem Catcher unterscheidet:

$$q = \begin{bmatrix} 180/\pi/1 \\ 0 \\ 0 \\ 180/\pi/0.1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

5 Ergebnisse