

Regelung eines Furuta Pendels

Thomas SCHILDHAUER

Dustin HORENBURG

Kai HAMANN

10. September 2015

Fachlabor Mechatronik

Sommersemester 2015

Betreuer: Dipl.-Ing. Martin Gomse

Thomas Schildhauer	MEC	21156392
--------------------	-----	----------

Dustin Horenburg	MEC	21153749
------------------	-----	----------

Kai Hamann	MEC	21156059
------------	-----	----------

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	5
2.1	Furuta Pendel	5
2.2	Annahmen	6
2.3	Mathematisches Modell	6
2.4	Linearisierung	8
3	Identifikation der Parameter	11
4	Design der Controller	15
4.1	Pendelidentifikation	15
4.2	Swing-Up-Controller	17
4.3	Zweipunktregler	18
4.4	Catcher	18
4.5	Stabilizer	20
4.6	Soft-Switch	21
5	Ergebnisse	24
5.1	Swing-Up	24
5.2	Stabilizer	24
5.3	Catcher	26
5.4	Resonanzfall	26
6	Fazit	29

1 Einleitung

Dieser Bericht befasst sich mit der Modellierung und der Regelung eines invertierten Pendels, das auch *Furuta-Pendel* genannt wird. Ziel des Labors ist es, einen robusten Regler zu entwerfen der die folgenden drei Aufgaben erfüllt:

- a. Das Pendel aufschwingen, bis der *Schwingarm* durch die grenzstabile aufrechte Lage schwingt.
- b. Den *Schwingarm* in der aufrechten Lage fangen und dort halten.
- c. Den *Dreharm* zurück zur Ausgangslage bringen, ohne dass dabei der *Schwingarm* aus der aufrechten Lage herausfällt.

Im folgenden Bericht wird der *Dreharm* mit Arm 1 und der *Schwingarm* mit Arm 2 bezeichnet. Für weitere Erläuterungen sei auf Abschnitt 2 verwiesen. Der Bericht ist Teil des Fachlabors Mechatronik im Sommersemester 2015 an der Technischen Universität Hamburg-Harburg und stellt die im Zuge dieses Labors durchgeführten Berechnungen, Modellierungen und Versuche dar. Für die mathematische Modellierung und die Auslegung der Regler werden Matlab und Simulink verwendet. Diese Programme stehen den Autoren von der Universität aus zur Verfügung.

Abschnitt 2 befasst sich mit den nötigen theoretischen Grundlagen und der mathematischen Modellierung des Pendels. Dort wird primär auf die Quelle (Cazzolato and Prime, 2011) eingegangen, welche als Vorlage genutzt wurde und vom Betreuer des Labors zur Verfügung gestellt wurde.

In Abschnitt 3 werden die für die Regelung nötigen Parameter aus dem realen Pendel abgeleitet. Gemessene Größen wie Massen und Längen des realen Pendels werden dazu umgeformt und zusammengefasst, um diese auf die Form des mathematischen Modells zu bringen. Es folgt eine Auflistung der auf diese Weise identifizierten Größen, die in das mathematische Modell einfließen und die Grundlage für die Regelung bilden.

Die Auslegung und Implementierung der Regler in Matlab und Simulink wird in Abschnitt 4 behandelt. Es wird auf die verschiedenen Formen von Regelungsalgorithmen eingegangen, die eingesetzt werden, um die oben beschriebenen Anforderungen zu erfüllen, und darauf, wie zwischen diesen je nach Zustand des Pendels gewechselt werden kann. Außerdem wird ein Algorithmus zur Unter-

scheidung zweier unterschiedlicher Pendelarme ausgelegt. Es soll damit möglich sein, automatisch zu identifizieren, welcher der beiden vorgegebenen Pendelarme aktuell montiert ist. Die Pendelarme unterscheiden sich in Masse und Stablänge.

Ergebnisse verschiedener Messungen an dem realen Furuta-Pendel werden in Abschnitt 5 präsentiert. Dort finden sich verschiedene Versuche zum Testen der Funktion und der Robustheit des Reglers. Es werden jeweils Messergebnisse präsentiert, welche die Funktionalität der verschiedenen Regelungsalgorithmen und deren Zusammenspiel verdeutlichen sollen.

Im letzten Abschnitt folgen Fazit und Ausblick, in denen auf die wesentlichen Erkenntnisse dieses Laborprojekts noch einmal eingegangen wird.

2 Theorie

In diesem Abschnitt wird auf die Theorie des sogenannten *Furuta Pendels* eingegangen. Zunächst wird ein Modell des Pendels beschrieben. Im Anschluss wird die Theorie dieses Modells auf ein echtes Furuta Pendel angewandt.

2.1 Furuta Pendel

Bei dem *Furuta Pendel*, auch drehbares invertiertes Pendel genannt, handelt es sich um ein 1992 von Katsuhisa Furuta entwickeltes mechanisches Pendel. Es besteht aus einem angetriebenen Arm, welcher in der horizontalen Ebene rotieren kann. An diesem Arm ist ein Pendelarm befestigt, welcher frei in der zum angetriebenen Arm orthogonalen Ebene rotiert. Das Furuta Pendel ist ein Beispiel eines komplexen nichtlinearen Oszillators. (Cazzolato and Prime, 2011)

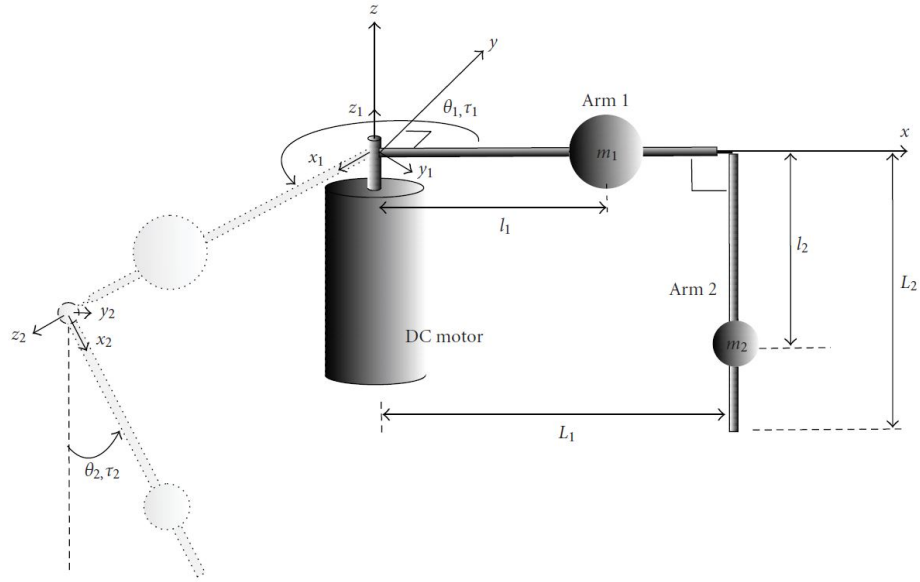


Abbildung 1: Furuta Pendel nach Cazzolato and Prime (2011).

Abbildung 1 zeigt das Schema eines Furuta Pendels, welches von einem DC-Elektromotor angetrieben wird. Mit dem Motor wird ein Drehmoment τ_1 auf Arm 1 des Pendels gebracht. Das Drehmoment τ_2 bezeichnet das Kopplungsmoment zwischen Arm 1 und Arm 2. Die Verbindung zwischen Arm 1 und Arm 2

rotiert frei und ist nicht angetrieben. Die beiden Arme haben die Längen L_1 und L_2 sowie die Massen m_1 und m_2 . l_1 und l_2 bezeichnen die jeweiligen Abstände der Massenmittelpunkte zum Rotationspunkt der Arme. Die Arme besitzen die Trägheitstensoren J_1 und J_2 um ihren jeweiligen Massenmittelpunkt und ihre Gelenke unterliegen linearer Dämpfung mit den Dämpfungskonstanten b_1 und b_2 .

2.2 Annahmen

Vor der Aufstellung des Gleichungssystems werden in Cazzolato and Prime (2011) einige Annahmen getroffen, die an dieser Stelle kurz wiederholt werden:

- a. Die Kopplung zwischen Motorachse und Arm 1 wird als ideal starr angenommen.
- b. Die Motorachse und beide Pendelarme werden als ideal starr angenommen.
- c. Die Koordinatensysteme von Arm 1 und Arm 2 sind die Hauptachsensysteme, sodass die Trägheitstensoren diagonal sind.
- d. Die Trägheit des Motors wird vernachlässigt.
- e. Es wird von reiner linearer (viskoser) Dämpfung ausgegangen.

2.3 Mathematisches Modell

Mit den in Abschnitt 2.2 getroffenen Annahmen wird in Cazzolato and Prime (2011) ein mathematisches Modell entwickelt, mit dem die Winkelbeschleunigung der beiden Pendelarme in Abhängigkeit der Zustandsvariablen beschrieben werden kann. Zunächst wird die Gleichung für die beiden Drehmomente τ_1 und τ_2 in Abhängigkeit der Trägheitstensoren J_1 und J_2 aufgestellt. (Für nähere Ausführungen sei auf Cazzolato and Prime (2011) verwiesen.)

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1(J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + (J_{2yy} + m_2 l_2^2)) \\ &\times \sin^2(\theta_2) + J_{2xx} \cos^2(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ &- m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \\ &\times (m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx}) + b_1 \dot{\theta}_1 \end{aligned} \right) \\ \left(\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 (m_2 l_2^2 + J_{2zz}) \\ &+ \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \sin(2\theta_2) (-m_2 l_2^2 - J_{2yy} + J_{2xx}) \\ &+ b_2 \dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \right) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Die Trägheitstensoren der beiden Pendelarme können nun unter den Annahmen $J_{xx} \approx 0$ und $J_{yy} \approx J_{zz}$ wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{bmatrix} J_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{J}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_1 \end{bmatrix} \\ J_2 &= \begin{bmatrix} J_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{J}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{J}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Folgende Bezeichnungen werden zur Vereinfachung von Gleichung 1 eingeführt.

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= \bar{J}_1 + m_1 l_1^2 \\ \hat{J}_2 &= \bar{J}_2 + m_2 l_2^2 \\ \hat{J}_0 &= \bar{J}_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 \end{aligned} \quad (3)$$

So lassen sich die Formeln für die beiden Drehmomente τ_1 und τ_2 darstellen als:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1(\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ &- m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) + b_1 \dot{\theta}_1 \end{aligned} \right) \\ \left(\begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 \hat{J}_2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) \\ &+ b_2 \dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \right) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Hieraus ergeben sich die folgenden nichtlinearen Differentialgleichungen für die Bewegung des Pendels. In Cazzolato and Prime (2011) wird bei der Aufstellung dieser ein Vorzeichenfehler gemacht, der an dieser Stelle korrigiert ist und auf den nicht näher eingegangen wird.

Nachfolgend die nichtlinearen Differentialgleichungen für die Winkelbeschleunigung von Arm 1;

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\begin{bmatrix} -\hat{J}_2 b_1 \\ m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) b_2 \\ -\hat{J}_2^2 \sin(2\theta_2) \\ -\frac{1}{2} \hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \sin(2\theta_2) \\ \hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} + \frac{\begin{bmatrix} \hat{J}_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ \frac{1}{2} m_2^2 l_2^2 L_1 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix}}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} \quad (5)$$

und die Winkelbeschleunigung von Arm 2:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\begin{bmatrix} m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) b_1 \\ -b_2 (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \\ m_2 L_1 l_2 \hat{J}_2 \cos(\theta_2) \sin(2\theta_2) \\ \frac{1}{2} \sin(2\theta_2) (\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2)) \\ -\frac{1}{2} m_2^2 L_1^2 l_2^2 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} + \frac{\begin{bmatrix} -m_2 l_2 \cos(\theta_2) \\ \hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2) \\ -m_2 l_2 \sin(\theta_2) (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix}}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} \quad (6)$$

Diese entsprechen den Gleichungen (33) und (34) in Cazzolato and Prime (2011).

2.4 Linearisierung

Die korrigierten nichtlinearen Differentialgleichungen aus Abschnitt 2.3 werden in diesem Abschnitt nach dem Vorbild von Cazzolato and Prime (2011) für den

grenzstabilen oberen Gleichgewichtszustand ($\theta_2 = \pi$) linearisiert.

So ergeben sich folgende Zustands-Variablen für den Gleichgewichtszustand:

$$\begin{aligned}\theta_{1e} &= 0 \\ \theta_{2e} &= \pi \\ \dot{\theta}_{1e} &= 0 \\ \dot{\theta}_{2e} &= 0\end{aligned}\tag{7}$$

Nach dem Vorbild von Cazzolato and Prime (2011) kann so ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung aufgestellt werden. Ein solches System ist notwendig, um gängige Theorien für den Entwurf von Reglern zu nutzen (Werner, 2013).

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}\tag{8}$$

Nach dem Einsetzen der Zustands-Variablen im Gleichgewichtszustand erhalten wir die Matrixeinträge in Abhängigkeit der Variablen aus Abschnitt 2.3.

$$\begin{aligned}A_{31} &= 0 \\ A_{32} &= \frac{gm_2^2 l_2^2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{33} &= \frac{-b_1 \hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{34} &= \frac{-b_2 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{41} &= 0 \\ A_{42} &= \frac{gm_2 l_2 \hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{43} &= \frac{-b_1 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\ A_{44} &= \frac{-b_2 \hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}
B_{31} &= \frac{\hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
B_{41} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
B_{32} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
B_{42} &= \frac{\hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}
\end{aligned}
\tag{10}$$

3 Identifikation der Parameter

Das im Theorieteil betrachtete Modell des Furuta-Pendels (siehe Cazzolato and Prime (2011)) unterscheidet sich von dem Modell des zu verwendenden Furuta-Pendels des Institutes wie in Abbildung 2 ersichtlich. Die gegeben bzw. gemessenen Parameter müssen daher an das theoretische Modell angepasst werden. Für die Längen der Pendelarme gilt somit:

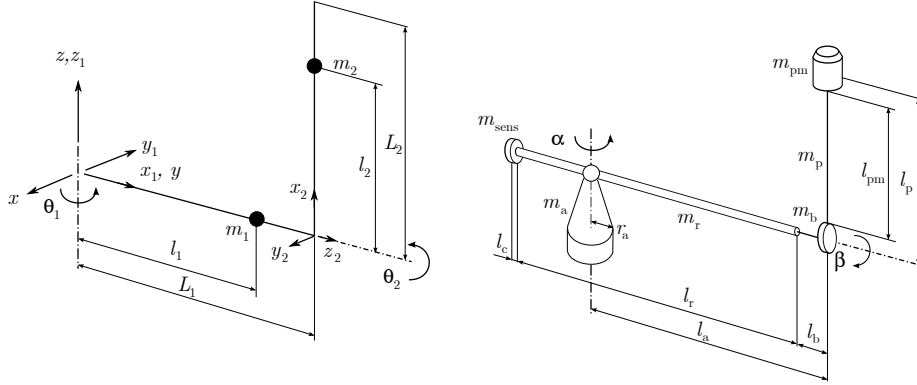


Abbildung 2: Darstellung des Furuta-Pendels. (Zur Verfügung gestellt vom Betreuer des Labors)

Die gegeben bzw. gemessenen Parameter müssen daher an das theoretische Modell angepasst werden. Für die Längen der Pendelarme gilt somit:

$$\begin{aligned} L_1 &= l_a \\ L_2 &= l_{pm} \end{aligned}$$

Zusätzlich lässt sich der Abstand des Sensors von der Drehachse um θ_1 wie folgt berechnen:

$$l_{sens} = l_r + l_b - l_a + \frac{l_c}{2} \quad (11)$$

Die Punktmassen des theoretischen Pendel-Modells ergeben sich bei Beachtung

der Trägheitsachsen zu:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{sens} + m_r + m_a \\ m_2 &= m_p + m_{pm} \end{aligned} \quad (12)$$

Die Massenträgheiten können ebenso zusammengefasst werden und ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} J_{1,norm} &= \frac{J_M + J_{Enc,1} + (m_r \cdot l_r \cdot l_r)}{12 + (m_r(-0.5l_r - l_b + l_a)^2) + (\frac{4}{10})(m_a r_a^2)} \\ J_{2,norm} &= J_{m,b} + J_{Enc2} + \frac{(m_p \cdot l_p^2)}{3} \\ J_0 &= J_{1,norm} + m_1 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot L_1^2 \\ J_2 &= J_{2,norm} + m_2 \cdot l_2^2 \end{aligned}$$

Für die Längen l_1 und l_2 erhält man

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{\frac{(l_{sens}^2 \dot{m}_{sens} + l_b^2 \dot{m}_b)}{m_{sens} + m_b}} \\ l_2 &\cong l_{pm} \end{aligned}$$

und für die einzelnen Trägheitsmomente:

$$\begin{aligned} J_{arm} &= m_r \frac{l_r^2}{12} + m_r (\frac{1}{2}l_r + l_b - l_a)^2 \\ J_{pend,1} &= m_b l_a^2 \\ J_{sens} &= m_{sens} (l_a - l_b - l_r - \frac{1}{2}l_c)^2 \\ J_{ps} &= m_p (r_b + \frac{1}{2}l_p)^2 \\ J_{pm} &= m_{pm} l_{pm}^2 \\ J_{arm} + J_{pend1} + J_{sens} &= m_1 l_1^2 \\ J_{pm} + J_{ps} &= m_2 l_2^2 \end{aligned}$$

Die folgenden Werte sind im Zuge des Labors zur Verfügung gestellt worden oder wurden durch rudimentäre Messungen gewonnen. Sie werden an dieser Stelle der Vollständigkeit halber aufgeführt.

$$\begin{array}{ll}
b_1 = 1 \times 10^{-4} \text{ N m s} & b_2 = 2.8 \times 10^{-4} \text{ N m s} \\
g = 9.81 \text{ m s}^{-2} & k_{1,phi} = 0.5 \\
R_a = 10 \Omega & J_M = 6.75 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2 \\
J_{Enc1} = 6 \times 10^{-14} \text{ kg m}^2 & J_{Enc2} = 0.1 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2 \\
J_{m,b} = 3.98125 \times 10^{-6} \text{ kg m}^2 & m_{sens} = 0.084 \text{ kg} \\
l_c = 0.01 \text{ m} & m_{horzArm} = 0.284 \text{ m} \\
m_b = 0.025 \text{ m} & m_a = 0.190 \text{ m} \\
r_a = 0.015 \text{ m} & r_b = 0.0176 \text{ m} \\
l_r = 0.29 \text{ m} & m_r = m_{horzArm} - m_{sens} \\
l_a = 0.175 \text{ m} & l_b = 0.01 \text{ m} \\
m_{pm} = 0.0379 \text{ kg} & m_p = 0.0157 \text{ kg} \\
l_{pm} = 0.229 \text{ m} & l_p = 0.262 \text{ m}
\end{array}$$

Die Gleichung des DC-Motors, der den Pendelarm und somit direkt θ_2 antreibt, kann aus dem Research Articles der University of Adelaide, entnommen werden (Cazzolato and Prime, 2011):

$$V = L_m \cdot \dot{i} + R_m \cdot i + K_m \cdot \theta_1 \quad (13)$$

Umgestellt nach \dot{i} ergibt sich folgende Gleichung:

$$\dot{i} = \frac{V \cdot R_m \cdot i - K_m \cdot \theta_1}{L_m} \quad (14)$$

Für das Drehmoment des Motors gilt:

$$\tau = K_m \cdot i \quad (15)$$

Auch die Parameter des DC-Motors wurden aus dem Dokument entnommen.

Folgende Parameter sind gegeben:

$$K_m = 0,09 \frac{Nm}{A} \quad (16)$$

$$R_m = 7,8 \, \Omega \quad (17)$$

$$L_m = 0,005 \, H \quad (18)$$

4 Design der Controller

4.1 Pendelidentifikation

Beim Starten des Programmes zur Regelung des Pendels wird zunächst identifiziert, um welchen Pendelaufbau es sich handelt. Es wird dabei zwischen zwei zuvor definierten Pendelkonfigurationen unterschieden. Für die Identifikation wird, nach einem kurzen Impuls durch den Motor, das Pendel frei schwingen gelassen, während der Controller den Verlauf von θ_2 aufzeichnet. Im Anschluss daran ist es möglich, aus den erhobenen Daten die Periodendauer von θ_2 zu berechnen. Da sich die Periodendauern der Pendelkonfigurationen unterscheiden, kann das Programm so die entsprechenden Modelldaten laden und für die Regelung verwenden. In Abbildung 3 ist dieser Vorgang in den ersten fünf Sekunden zu erkennen.

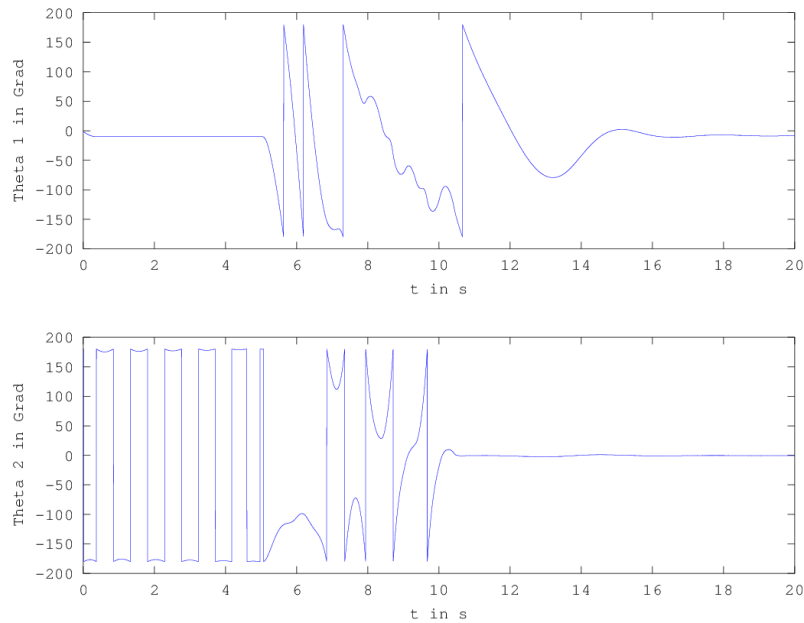


Abbildung 3: Initiale Pendelidentifikation

Für die Berechnung der Periodendauer müssen die Daten, die Matlab von dem Steuerprogramm dSpace erhält (“theta2_data”), interpretiert werden. Im ersten

Schritt werden die lokalen Extrema gesucht. Dazu wurde die im Internet frei verfügbare Matlab Funktion “extrema.m” in das Projekt eingebunden und wie folgt verwendet:

```
[XMAX,IMAX,XMIN,IMIN] = extrema(theta2_data);
```

Der nächste Schritt besteht darin, die Extrema nach ihren Auftrittszeitpunkten zu sortieren:

```
tmp = sort([IMAX; IMIN]);
```

Anschließend wird der Mittelwert der zeitlichen Abstände zwischen den Extrema berechnet. Da sich sowohl die Werte für Maxima als auch für Minima in “tmp” befinden, wird der gefundene Mittelwert noch verdoppelt und entsprechend skaliert, um die Periodendauer in Sekunden zu erhalten:

```
T = mean(diff(tmp(3:end-1)))*2/1000;
```

Schlussendlich kann nun mithilfe von T und der Grenzperiodendauer T_{diff} die passende Konfiguration ausgewählt werden:

```
T_diff = 0.9343;
if (T < T_diff)
    disp('short');
    config_short;
else
    disp('long');
    config_long;
end
```


4.2 Swing-Up-Controller

Der Swing-Up-Controller soll dem Aufschwingen des Pendels im Bereich $20^\circ < |\theta_2| < 90^\circ$ dienen und basiert auf der Lyapunov-Funktion. Diese führt dazu, dass sich bei der Wahl von $\theta_2 = 0$ in der aufrechten Position des Pendels ein Regler ergibt, welcher die Energie des Pendels minimiert:

$$U_{SU} = n \cdot g \cdot \text{sign}(E - E_0) \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \quad (19)$$

Der Term E_0 beschreibt die gewünschte, minimale Energie des Systems. Die Energie des Pendels E setzt sich aus der potentiellen Energie E_{pot} und der kinetischen Energie E_{kin} zusammen. Die potentielle Energie lässt sich aufgrund der Referenz im höchsten Punkt des Pendels wie folgt berechnen:

$$E_{pot} = m_2 \cdot g \cdot l_2 \cdot (\cos(\theta_2) - 1) \quad (20)$$

Die kinetische Energie ergibt sich zu:

$$E_{kin} = \frac{J_0}{2} \cdot \dot{\theta}_2^2 \quad (21)$$

Die Umsetzung des Reglers in Simulink ist in Abbildung 4 zu sehen.

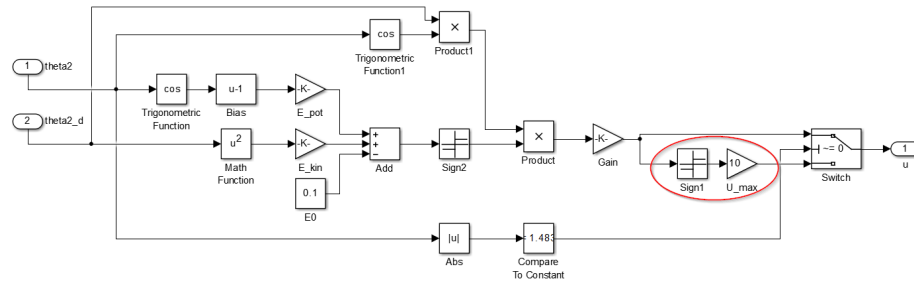


Abbildung 4: Swing-Up-Controller und Zweipunktregler

4.3 Zweipunktregler

Für den Bereich $|\theta_2| \geq 90^\circ$ soll ein Zweipunktregler (eng. Bang-bang control) das invertierte Pendel regeln. Dieser schaltet die maximale positive oder negative Spannung auf den Motor, abhängig von θ_2 und $\dot{\theta}_2$, daraus folgt die Übertragungsfunktion:

$$U = 10 \cdot \text{sign}(U_{SU} \cdot \theta_2 \cdot \cos(\dot{\theta}_2)) \quad (22)$$

Die Implementierung in Simulink ist ebenfalls als Teil des Modells in Abbildung 4 zu erkennen (Signum- und Gain-Baustein zusätzlich zum Swing-Up-Controller).

4.4 Catcher

Der Catcher dient der genaueren Regelung des Pendels nahe des oberen Equilibriums von θ_2 . Um in dem Bereich optimal und robust zu Regeln, wird ein LQ-Regler verwendet. Dieser basiert auf der Minimierung der Cost-Function, welche folgenden Form besitzt:

$$V = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (23)$$

Erhöht man die Diagonalwerte der Q-Matrix, werden die Fehler stärker gewichtet, allerdings steigt auch der Aufwand der Regelung. Die Matrix lässt sich über die Controllability-Matrix C und den linken Eigenvektor q der Matrix A wie folgt berechnen:

$$Q = C' \cdot q'^T \cdot q^T \cdot C \quad (24)$$

Für den Vektor q wurden folgenden Werte angenommen:

$$q = \begin{bmatrix} 180/\pi/180 \\ 0 \\ 0 \\ 180/\pi/0.1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Die Diagonalwerte der Matrix R der Cost-Funktion beeinflussen die Geschwindigkeit der Regelung und wurden zunächst für den Catcher auf 1 gesetzt. Zusammen mit den Eingangs- und Ausgangsmatrizen A und B lässt sich mithilfe des Matlab-Befehls $F = -lqr(A, B, Q, R)$ der LQR-Controller generieren. (Werner, 2013)

Die L -Matrix lässt sich über die Riccati-Gleichung herleiten, siehe (Werner, 2013). Zunächst ergibt sich die P -Matrix als Lösung der Riccati-Gleichung, daraus lässt sich mithilfe der bekannten Matrizen und des Place-Befehls $L = -place(A', C', p)'$ in Matlab berechnen.

Das Simulink-Modell des Observers ist in Abb. 5 zu sehen.

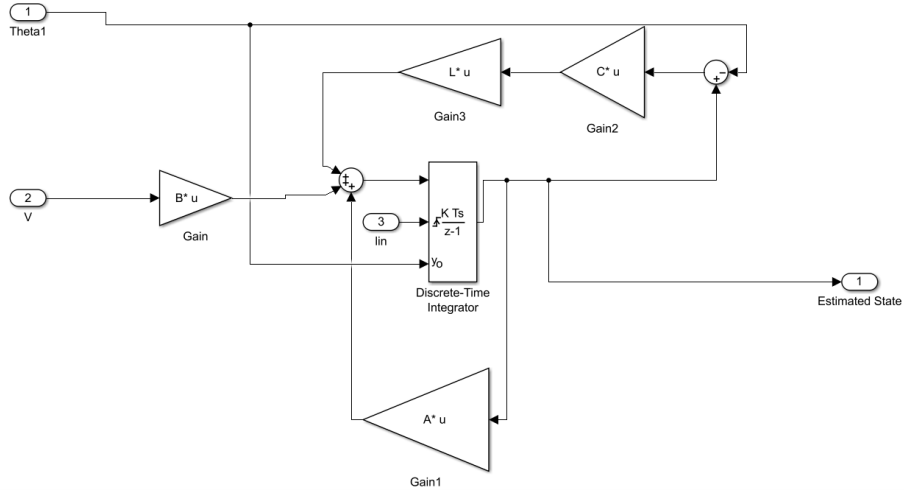


Abbildung 5: Observer des Catchers in Simulink

4.5 Stabilizer

Zur Rückführung des Pendels auf die Ausgangswinkel von θ_1 und Beibehaltung der oberen Equilibrium-Position wird auch eine LQ-Regelung verwendet, welche sich nur durch die dreifache Einheitsmatrix für R und folgenden q-Vektor von dem Catcher unterscheidet:

$$q = \begin{bmatrix} 180/\pi/1 \\ 0 \\ 0 \\ 180/\pi/0.1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Der Observer des Stabilizers ist in Abbildung 6 dargestellt, während Abbildung 7 einen Überblick über die Verschaltung des Catchers und Stabilizers bietet.

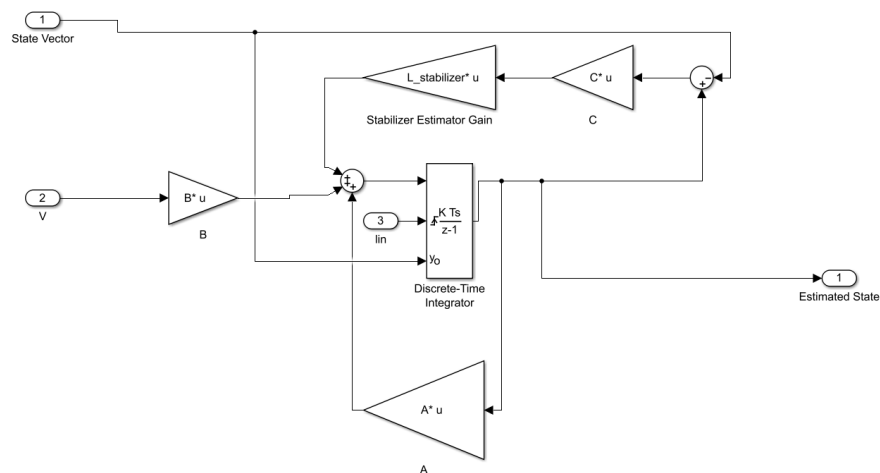


Abbildung 6: Simulink-Block des Observers des Stabilizers

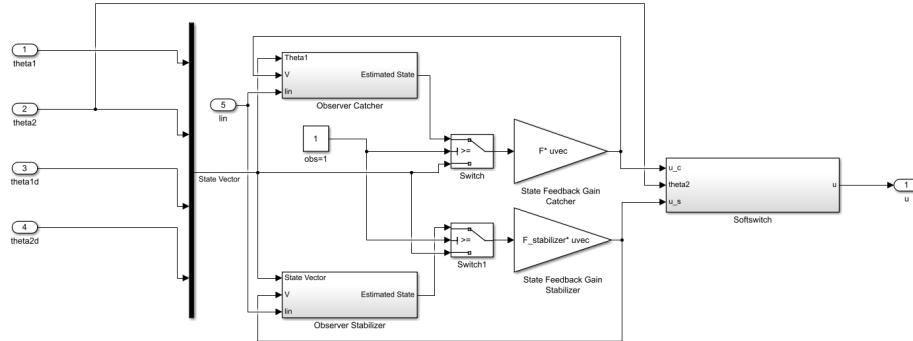


Abbildung 7: Aufbau des Catchers und Stabilizers in Simulink

4.6 Soft-Switch

Um den Übergang zwischen dem Catcher und dem stabilisierenden Controller möglichst weich zu gestalten, wurde ein Soft-Switch implementiert.

Ziel dieses Switches ist es, extreme Sprünge des Controllerausgangssignals beim Umschalten zwischen den Controllern zu verhindern, selbst wenn die einzelnen Regelsignale des Catchers und des Stabilizers sehr weit auseinander liegen.

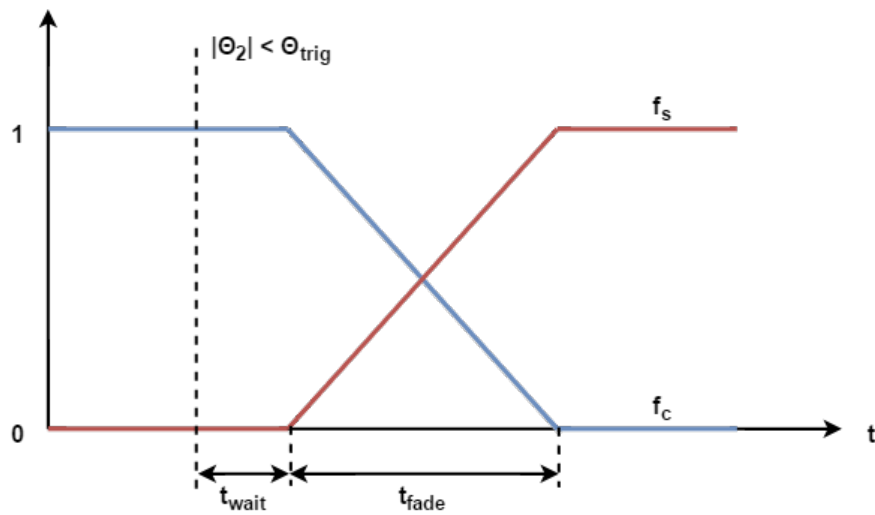


Abbildung 8: Soft-Switch

Die Umsetzung erfolgt, indem die einzelnen Regelsignale mit Verstärkungsfaktoren multipliziert werden, die in der Summe genau 1 ergeben, und sich das Gesamtsignal aus den gewichteten Einzelsignalen zusammensetzt.

Zunächst ist lediglich der Catcher aktiv. Dies kommt dadurch zum Ausdruck, dass sein Verstärkungsfaktor f_c den Wert 1 besitzt. Folglich muss der Faktor f_s des Stabilizers 0 betragen.

Wenn nun der Betrag des Winkels θ_2 für mindestens t_{wait} kleiner als θ_{trig} ist, beginnt der Crossfader, das Verhältnis der Regelsignale zu verändern. Während der Faktor des Catchers innerhalb der Zeit t_{fade} linear von 1 auf 0 abfällt, erhöht sich der Faktor des Stabilizers gegenläufig innerhalb derselben Zeit von 0 auf 1. Nach Abschluss dieses Vorgangs ist nur noch der Stabilizer für die Regelung des Pendels zuständig (vgl. Abbildung 8).

Wird zu irgendeiner Zeit der Winkel θ_{trig} überschritten, wird augenblicklich mittels eines Hard-Switches der Catcher wieder aktiv geschaltet.

In unserem Controller wurden die Werte wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned}\theta_{trig} &= 5^\circ \\ t_{wait} &= 0.5s \\ t_{fade} &= 5s\end{aligned}$$

Die Abbildungen 9 und 10 zeigen die Umsetzung dieses Soft-Switches in Simulink. Der Block ‘ramp’ erzeugt dabei den Faktor f_s woraus sich ebenfalls f_c ableiten lässt.

Als Timer, wie sie innerhalb des ‘ramp’ - Blocks zu finden sind (vgl. Abbildung 10), werden grundsätzlich Integrator-Blöcke verwendet. Schließt man am Eingang eines solchen Integrators die Konstante 1 an, so ist der Wert des Ausgangs die Zeit seit dem letzten Reset.

Hinweis: Die Funktionsweise dieses Verfahrens ist dabei identisch mit der eines Crossfaders, wie er teilweise beim Übergang zwischen zwei Musikstücken verwendet wird.

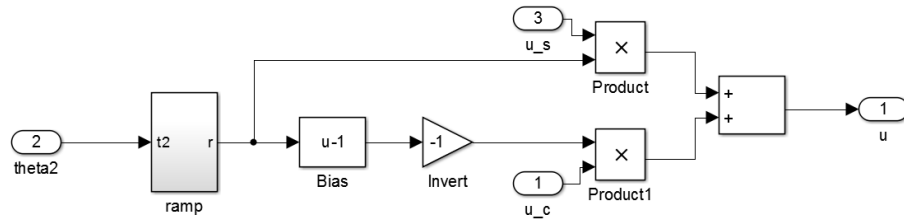


Abbildung 9: Soft-Switch in Simulink

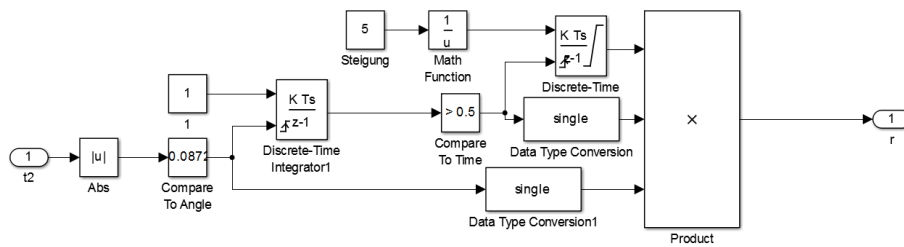


Abbildung 10: Ramp-Baustein in Simulink

5 Ergebnisse

In diesem Kapitel sind Versuchsergebnisse dargestellt, die an dem geregelten Pendel gewonnen wurden. Dafür wurde das stabilisierte Pendel mit einem kurzen Störimpuls beaufschlagt und die Reaktion aufgezeichnet. Dieser Störimpuls erfolgte per Hand und wurde in unterschiedlichen Stärken durchgeführt, um so die einzelnen Controller testen zu können.

5.1 Swing-Up

Zunächst soll anhand von Abbildung 11 der Aufschwing-Vorgang betrachtet werden. Wie bereits in Kapitel 4.1 erwähnt, vollzieht der Controller in den ersten 5 Sekunden die Identifikation des Pendels. Der dafür verwendete Impuls lässt sich bei θ_1 nahe $t = 0s$ erkennen. Nach diesen 5 Sekunden beginnt der Controller zunächst durch Verwendung des Zweipunktreglers und des Swing-Ups den Pendelarm in den Bereich $|\theta_2| < 20^\circ$ zu bewegen, in welchem dann der Catcher aktiv wird, um ein Überspringen zu verhindern. Nach einer kurzen Zeit, in der gilt $|\theta_2| < 5^\circ$, übernimmt dann der Stabilizer mehr und mehr die Kontrolle (vgl. Kapitel 4.6), welcher schließlich auch θ_1 auf seinen Anfangswinkel regelt.

5.2 Stabilizer

Der Stabilizer wird in Abbildung 12 durch einen schwachen Impuls getestet, wodurch θ_2 um 2 Grad ausgelenkt wurde. Dadurch bleibt der Stabilizer weiterhin aktiv und regelt die Motorspannung so, dass durch das Überspringen von θ_1 das Pendel wieder in die Top Equilibrium gebracht wird. Zudem ist zu erkennen, dass der Regler auch hier θ_1 in die Ausgangsposition zurückführt.

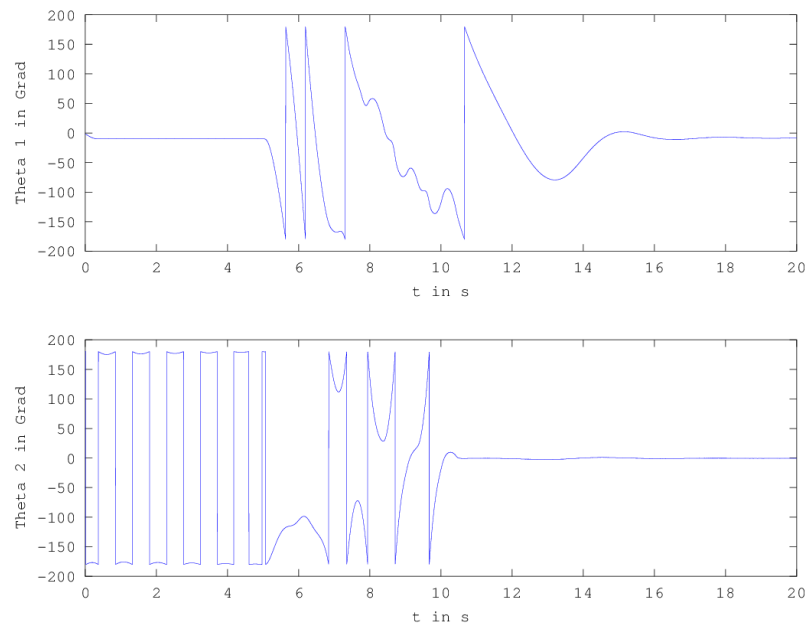


Abbildung 11: Der Swing-Up-Vorgang

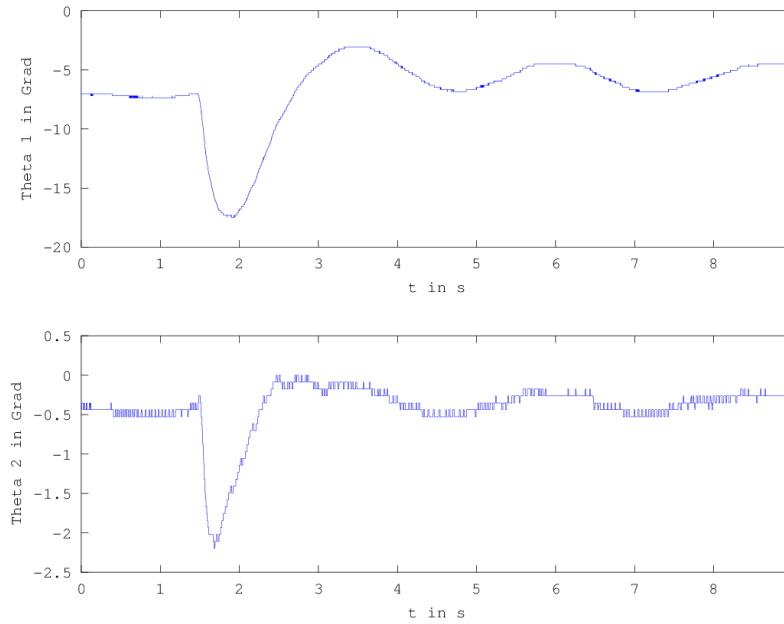


Abbildung 12: Störimpuls $<5^\circ$

5.3 Catcher

In Abbildung 13 sind die Auswirkungen einer Störung von 9 Grad zu erkennen. Der Catcher sorgt dabei zunächst für ein schnelles Rückstellen des Pendels auf das obere Equilibrium, während nach der 3. Sekunde der Einfluss des Stabilizers steigt und dieser im Mittel θ_1 gegen 0 Grad regelt, allerdings mit starken Schwingungen, um die Abweichung von θ_2 auszugleichen.

5.4 Resonanzfall

Hin und wieder kommt es vor, dass das System in einen Zustand gerät, in dem der Controller das Pendel nicht mehr fangen und in das Top Equilibrium zurückbringen kann. Dieser Zustand ist in Abbildung 14 zu sehen.

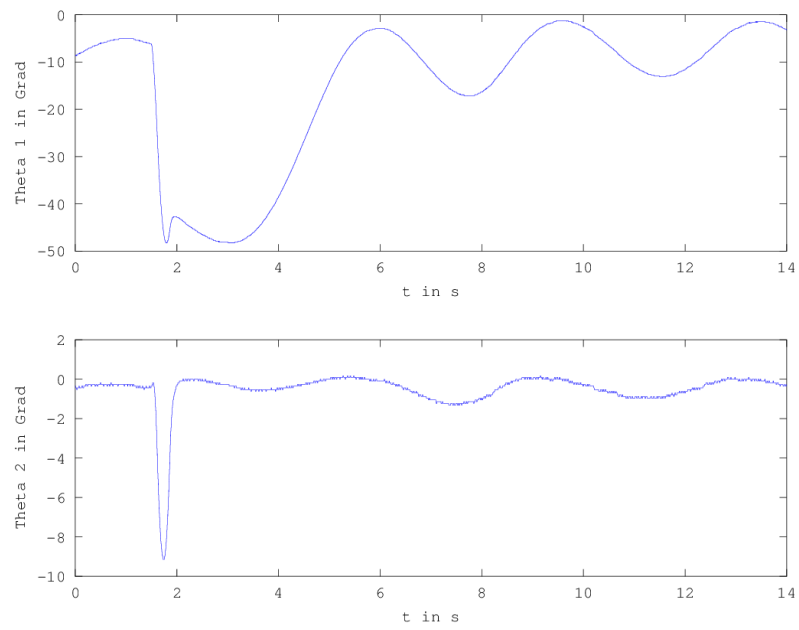


Abbildung 13: Störimpuls $>5^\circ$

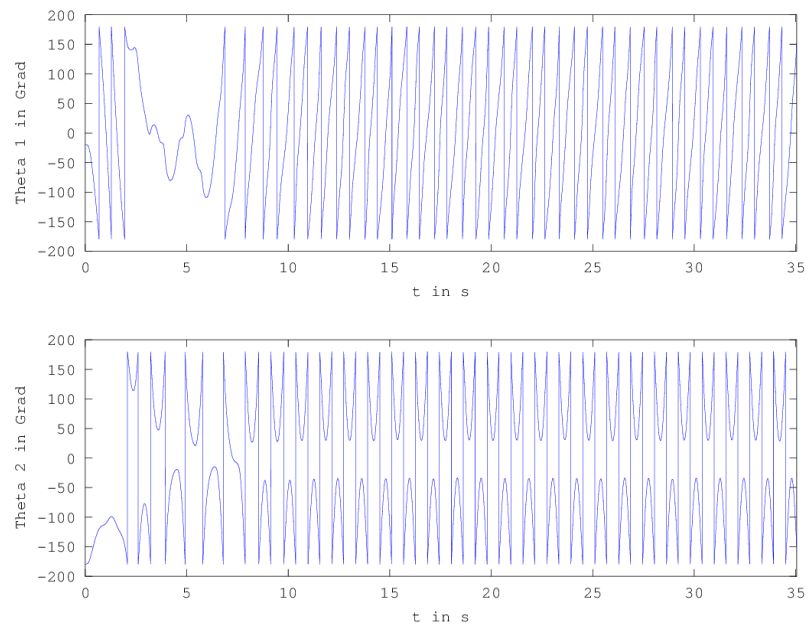


Abbildung 14: Messung des Resonanzfalles des Controllers

6 Fazit

Zusammenfassend wurde das Ziel des Fachlabors Mechatronik - das Aufschwingen und Halten eines inversen Pendels - erreicht, was in diesem Bericht erläutert wurde. Es wurde zunächst ein (vereinfachtes) Modell hergeleitet, auf dessen Basis die Implementierung der Regler stattfand.

Durch die Verwendung eines nichtlinearen Swing-Up-Controllers konnte das Aufschwingen beschleunigt werden, wie in Kapitel 5 bewiesen. Das Verhalten wurde sogar durch die Erweiterung durch einen Bang-Bang-Controller verbessert. Zum Fangen und Stabilisieren des Pendels nahe des oberen Equilibriums wurde eine lineare, auf einem Observer basierende LQ-Regelung implementiert. Durch die Trennung in Catcher- und Stabilizer-Regler konnte auch θ_1 auf den Ursprung zurückgeholt werden.

Das Verhalten wurde auch durch unterschiedlich große Störimpulse nachvollzogen, wobei der Regler bei nahezu allen Störungen funktionierte. Allerdings trat vereinzelt bei sehr starken Störimpulsen eine Instabilität des Systems auf. Um ein solches Verhalten zu verhindern, könnte man im nächsten Schritt einen Watchdog implementieren, der Anhand der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}_1$ erkennt, wenn das Pendel nicht mehr erfolgreich geregelt werden kann. Liegt der Wert von $\dot{\theta}_1$ für eine bestimmte Zeit nicht in dem Intervall $[-\epsilon, +\epsilon]$, so kann der Watchdog einen kurzzeitigen Stopp des Pendels veranlassen und es anschließend neu starten.

Darüber hinaus könnte eine bessere Modellbildung z.B. der Reibungskräften und Verformungen des Pendels sowie die Beachtung der Umwelteinflüsse, wie z.B. Temperatur und Wind, zu einer besseren Regelbarkeit führen.

Bisher wurden zudem auch nur 2 Parametersätze zur automatischen Erkennung und Regelung verschiedener Pendellängen und -massen eingepflegt. Dies könnte noch erweitert werden, um die Robustheit des Systems zu erhöhen.

Literatur

- Cazzolato, B. S. and Prime, Z. (2011). On the dynamics of the furuta pendulum.
Journal of Control Science and Engineering, 2011(6):1–8.
- Werner, H. (2013). Control systems theory and design.