# Regelung eines Furuta Pendulums

Thomas Schildhauer
Dustin Horenburg
Kai Hamann

8. September 2015

Mechatronics Lab
Summer 2015
Advisor: Dipl.-Ing. Martin Gomse

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Diese Dokumentation...

# 2 Theorie

In diesem Abschnitt wird auf die Theorie des sogenannten *Furuta Pendels* eingegangen. Zunächst wird ein Modell des Pendels beschrieben. Im Anschluss wird die Theorie dieses Modells auf ein echtes Furuta Pendel angewandt.

## 2.1 Furuta Pendel

Bei dem *Furuta Pendel*, auch drehbares invertiertes Pendel genannt, handelt es sich um ein 1992 von Katsuhisa Furuta entwickeltes mechanisches Pendel. Es besteht aus einem angetriebenen arm, welcher in der horizontalen Ebene rotieren kann. An diesem Arm ist ein Pendelarm befestigt, welcher frei in der zum angetriebenen Arm orthogonalen Ebene rotieren kann. Das Furuta Pendel ist ein Beispiel eines komplexen nichtlinearen Oszillators. Cazzolato and Prime (2011)

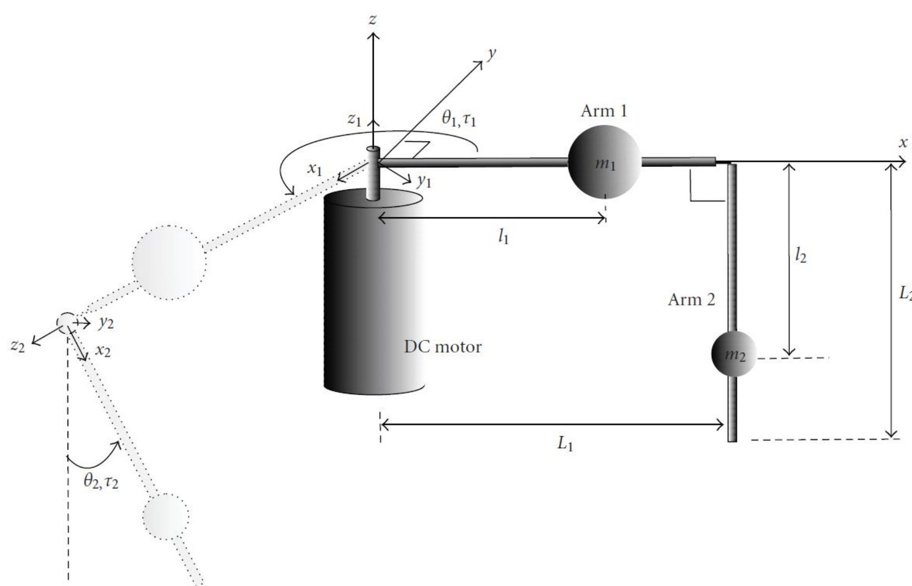


Abbildung 1: Schema des Furuta Pendels nach Cazzolato and Prime (2011).

Abbildung 2.1 zeigt das Schema eines Furuta Pendels, welches von einem DC-Elektromotor angetrieben wird. Mit dem Motor wird ein Drehmoment $\tau_1$ auf Arm 1 des Pendels gebracht. Das Drehmoment $\tau_2$ bezeichnet das Kopplungsmoment zwischen Arm 1 und Arm 2. Die Verbindung zwischen Arm 1 und Arm 2 rotiert frei und ist nicht angetrieben. Die beiden Arme haben Längen $L_1$ und $L_2$ sowie Massen $m_1$ und $m_2$. $l_1$ und $l_2$ bezeichnen die jeweiligen Abstände der Massenmittelpunkte zum Rotationspunkt der Arme. Die Arme haben Trägheitstensoren $J_1$ und $J_2$ um ihren jeweiligen Massenmittelpunkt und ihre Gelenke unterliegen linearer Dämpfung mit Dämpfungskonstanten $b_1$ und $b_2$.

### 2.1.1 Annahmen

Vor der Aufstellung des Gleichungssystems werden in Cazzolato and Prime (2011) einige Annahmen getroffen, die an dieser Stelle kurz wiederholt werden:

a. Die Kopplung zwischen Motorachse und Arm 1 wird als ideal starr angenommen.

b. Die Motorachse und beide Pendelarme werden als ideal starr angenommen.

c. Die Koordinatensysteme von Arm 1 und Arm 2 sind die Hauptachsensysteme, sodass die Trägheitstensoren diagonal sind.

d. Die Trägheit des Motors wird vernachlässigt.

e. Es wird von reiner linearer (viskoser) Dämpfung ausgegangen.

### 2.1.2 Formulierung des Problems nach Lagrange

Mit den in Abschnitt 2.1.1 getroffenen Annahmen erhalten wir durch den Ansatz von Lagrange'schen Tensoren die nachfolgenden Formeln **?**.
Die potentielle und die kinetische Energie von Arm 1:

$$E_{p1} = 0 \qquad E_{k1} = \frac{1}{2}(v_{1c}^T m_1 v_{1c} + \omega_1^T J_1 \omega_1) = \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2(m_1 l_1 + J_{1zz})$$

Die potentielle und kinetische Energie von Arm 2:

$$E_{p2} = g m_2 l_2 (\cos(\theta_2) - 1)$$

$$\begin{aligned}
E_{k2} &= \frac{1}{2}(v_{2c}^T m_2 v_{2c} + \omega_2^T J_2 \omega_2) \\
&= \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2(m_2 L_2^2 + (m_2 l_2^2 + J_{2yy})\sin^2(\theta_2) + J_{2xx}\cos^2(\theta_2)) \\
&\quad + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2(J_{2zz} + m_2 l_2^2) + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2
\end{aligned}$$

$$L = E_k - E_p \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + b_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1(J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + (J_{2yy} + m_2 l_2^2) \\ \times \sin^2(\theta_2) + J_{2xx} cos^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \\ \times(m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx}) + b_1\dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2(m_2 l_2^2 + J_{2zz}) \\ +\frac{1}{2}\dot{\theta}_1 \sin(2\theta_2)(-m_2 l_2^2 - J_{2yy} + J_{2xx}) \\ +b_2\dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} J_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} J_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= J_1 + m_1 l_1^2 \\ \hat{J}_2 &= J_2 + m_2 l_2^2 \\ \hat{J}_0 &= J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1(\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) + b_1\dot{\theta}_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 \hat{J}_2 - \frac{1}{2}\dot{\theta}_1^2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) \\ +b_2\dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Die folgenden Gleichungen enthalten noch den Fehler, den wir finden sollten. Ich habe die Lösung gerade nicht parat.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\begin{bmatrix} -\hat{J}_2 b_1 \\ m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) b_2 \\ -\hat{J}_2^2 \sin(2\theta_2) \\ -\frac{1}{2}\hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2)\sin(2\theta_2) \\ \hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{J}_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ \frac{1}{2} m_2^2 l_2^2 L_1 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix}}{\hat{J}_0\hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} \tag{7}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\begin{bmatrix} m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) b_1 \\ -b_2(\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \\ m_2 L_1 l_2 \hat{J}_2 \cos(\theta_2)\sin(2\theta_2) \\ -\frac{1}{2}\sin(2\theta_2)(\hat{J}_0\hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2)) \\ -\frac{1}{2} m_2^2 L_1^2 l_2^2 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 l_2 \cos(\theta_2) \\ \hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2) \\ -m_2 l_2 \sin(\theta_2)(\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix}}{\hat{J}_0\hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \theta_{1e} &= 0 \\ \theta_{2e} &= \pi \\ \dot{\theta}_{1e} &= 0 \\ \dot{\theta}_{2e} &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34}\\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ B_{31} & B_{32}\\ B_{41} & B_{42}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
A_{31} &= 0\\
A_{32} &= \frac{g m_2^2 l_2^2 L_1}{(\hat{J}_0\hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}\\
A_{33} &= \frac{-b_1\hat{J}_2}{(\hat{J}_0\hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}\\
A_{34} &= \frac{-b_2 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0\hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}\\
A_{41} &= 0\\
A_{42} &= \frac{g m_2 l_2 \hat{J}_0}{(\hat{J}_0\hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}\\
A_{43} &= \frac{-b_1 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0\hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}\\
A_{44} &= \frac{-b_2\hat{J}_0}{(\hat{J}_0\hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}\\
B_{31} &= \frac{\hat{J}_2}{(\hat{J}_0\hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}\\
B_{41} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0\hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}\\
B_{32} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0\hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}\\
B_{42} &= \frac{\hat{J}_0}{(\hat{J}_0\hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\tau = K_m i \tag{12}$$

Herleitung der Parameter (1 zu 1 aus dem Dokument übernommen.. die Herangehensweise muss also noch verändert werden!):

$$\begin{aligned}
L_1 &= l_a\\
L_2 &= l_{pm}
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= m_b + m_r + m_{sens}\\
m_2 &= m_p + m_{pm}
\end{aligned} \tag{14}$$

$$J_{arm} = m_r \frac{l_r^2}{12} + m_r(\frac{1}{2}l_r + l_b - l_a)^2 \tag{15}$$

$$J_{pend1} = m_b l_a^2 \tag{16}$$

$$J_{sens} = m_{sens}(l_a - l_b - l_r - \frac{1}{2}l_c)^2 \tag{17}$$

$$J_{ps} = m_p(r_b + \frac{1}{2}l_p)^2 \tag{18}$$

$$J_{pm} = m_{pm} l_{pm}^2 \tag{19}$$

$$J_{arm} + J_{pend1} + J_{sens} = m_1 l_1^2 J_{pm} + J_{ps} = m_2 l_2^2 \tag{20}$$

$$l_1 = \sqrt{\frac{m_r \frac{l_r^2}{12} + m_r(\frac{1}{2}l_r + l_b - l_a)^2 + m_b l_a^2 + m_{sens}(l_a - l_b - l_r - \frac{1}{2}l_c)^2}{m_1}} \tag{21}$$

$$l_2 = \sqrt{\frac{m_{pm} l_{pm}^2 + m_p(r_b + \frac{1}{2}l_p)^2}{m_2}} \tag{22}$$

... Hier sollten wir gucken, ob wie die Umformungen evtl. anders vornehmen.

$$ListederZahlenwerte \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

$$\tag{25}$$

Swing-Up

$$U = n \cdot g \cdot sign(E - E_0)\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \tag{26}$$

$$E = E_{pot} + E_{kin} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} E_{pot} &= m_2 g l_2(\cos(\theta_2) - 1) \\ E_{kin} &= \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 \hat{J}_2 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\tag{29}$$

# 3 Identifikation der Parameter

# 4 Design der Controller

## 4.1 Pendelidentifikation

Beim Starten des Programmes zur Regelung des Pendels wird zunächst identifiziert, um welche Pendelaufbaus es sich handelt. Es wird dabei zwischen zwei zuvor definierten Pedenlarmlängen unterschieden. Für die Identifikation wird wird durch den Motor ein kurzer Impuls auf das Pendel gegeben.
Weiterschreiben Je nachdem, welches Pendel auf diese Weise erkannt wurde, werden die entsprechenden Modelldaten geladen und für die Regelung verwendet.

## 4.2 Soft-Switch

Um den Übergang zwischen dem Catcher und dem stabilisierenden Controller möglichst weich zu gestalten, wurde ein Soft-Switch implementiert.
Ziel dieses Switches ist es, extreme Sprünge des Controllerausgangssignals beim Umschalten zwischen den Controllern zu verhindern, selbst wenn die einzelnen Regelsignale des Catchers und des Stabilisierers sehr weit auseinander liegen. Stabilisierer gegen kleine Störungen

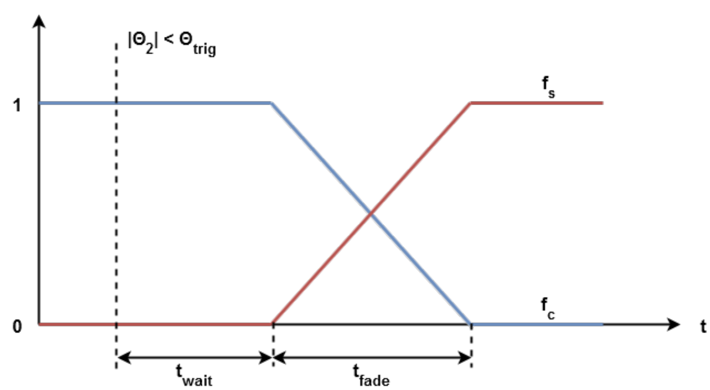


Abbildung 2: Soft-Switch

Die Umsetzung erfolgt, indem die einzelnen Regelsignale mit Verstärkungsfaktoren multipliziert werden, die in der Summe genau 1 ergeben, und sich das Gesamtsignal aus den gewichteten Einzelsignalen zusammensetzt.
Zunächst ist lediglich der Catcher aktiv. Dies kommt dadurch zum Ausdruck, dass sein Verstärkungsfaktor $f_c$ den Wert 1 besitzt. Folglich muss der Faktor $f_s$ des Stabilisierers 0 betragen.
Wenn nun der Betrag des Winkels $\theta_2$ für mindestens $t_{wait}$ kleiner als $\theta_{trig}$ ist, beginnt der Crossfader, das Verhältnis der Regelsignale zu verändern.
Während der Faktor des Catchers innerhalb der Zeit $t_{fade}$ linear von 1 auf 0 abfällt, erhöht sich der Faktor des Stabilisierers gegenläufig innherhalb derselben

Zeit von 0 auf 1.
Nach Abschluss dieses Vorgangs ist nur noch der Stabilisierer für die Regelung des Pendels zuständig.

Wird zu irgendeiner Zeit der Winkel $\theta_{trig}$ überschritten, wird instantan mittels eines Hardswitches der Catcher wieder aktiv geschaltet.
In unserem Controller wurden die Werte wie folgt gewählt:

$$\theta_{trig} = 5^\circ$$
$$t_{wait} = 1s$$
$$t_{fade} = 0.5s$$

Werte überprüfen
*Hinweis:* Die Funktionsweise dieses Verfahrens ist dabei identisch mit der eines Crossfaders, wie er teilweise beim Übergang zwischen zwei Musikstücken verwendet wird.

# 5 Ergebnisse

In diesem Kapitel sind Versuchsergebnisse dargestellt, die an dem geregelten Pendel gewonnen wurden. Dafür wurde, das stabilisierte Pendel mit einem kurzen Störimpuls beaufschlagt und die Reaktion aufgezeichnet. Dieser Störimpuls erfolgte per Hand und wurde in unterschiedlichen Stärken durchgeführt, um so die einzelnen Controller testen zu können.

## 5.1 Swing-Up

## 5.2 Stabilisierer

## 5.3 Catcher

## Literatur

Cazzolato, B. S. and Prime, Z. (2011). On the dynamics of the furuta pendulum. *Journal of Control Science and Engineering*, 2011(6):1–8.