

# Regelung eines Furuta Pendulums

Thomas SCHILDHAUER

Dustin HORENBURG

Kai HAMANN

7. September 2015

Mechatronics Lab

Summer 2015

Advisor: Dipl.-Ing. Martin Gomse

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>4</b>
2.1	Furuta Pendel . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Identifikation der Parameter</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Design der Controller</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>11</b>

# **1 Einleitung**

Diese Dokumentation...

## 2 Theorie

In diesem Abschnitt wird auf die Theorie des sogenannten *Furuta Pendels* eingegangen. Zunächst wird ein Modell des Pendels beschrieben. Im Anschluss wird die Theorie dieses Modells auf ein echtes Furuta Pendel angewandt.

### 2.1 Furuta Pendel

Bei dem *Furuta Pendel*, auch ?drehbares??? invertiertes Pendel genannt, handelt es sich um ein 1992 von Katsuhisa Furuta entwickeltes mechanisches Pendel. Es besteht aus einem angetriebenen Arm, welcher in der horizontalen Ebene rotieren kann. An diesem Arm ist ein Pendelarm befestigt, welcher frei in der zum angetriebenen Arm orthogonalen Ebene rotieren kann. Das Furuta Pendel ist ein Beispiel eines komplexen nichtlinearen Oszillators. Cazzolato and Prime (2011)

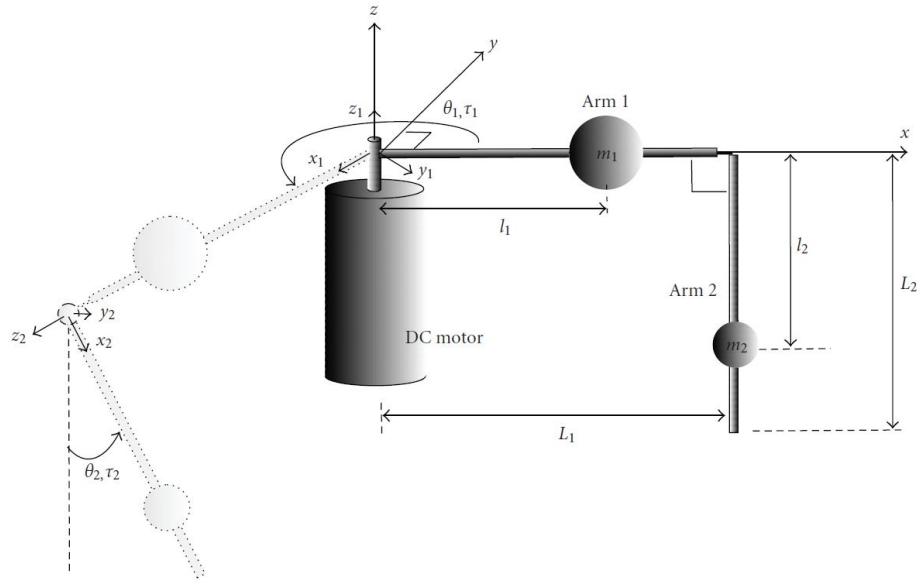


Abbildung 1: Schema des Furuta Pendels nach Cazzolato and Prime (2011).

Abbildung 2.1 zeigt das Schema eines Furuta Pendels, welches von einem DC-Elektromotor angetrieben wird. Mit dem Motor wird ein Drehmoment  $\tau_1$  auf Arm 1 des Pendels gebracht. Die Verbindung zwischen Arm 1 und Arm 2 rotiert frei und ist nicht angetrieben. Die beiden Arme haben Längen  $L_1$  und  $L_2$  sowie Massen  $m_1$  und  $m_2$ .  $l_1$  und  $l_2$  bezeichnen die jeweiligen Abstände der Massennmittelpunkte zum Rotationspunkt der Arme. Die Arme haben Trägheitstensoren  $J_1$  und  $J_2$  um ihren jeweiligen Massennmittelpunkt und ihre Gelenke unterliegen linearer Dämpfung mit Dämpfungskonstanten  $b_1$  und  $b_2$ .

$$E_{p1} = 0 \quad (1)$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2}(v_{1c}^T m_1 v_{1c} + \omega_1^T J_1 \omega_1) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (m_1 l_1 + J_{1zz}) \quad (2)$$

$$E_{p2} = g m_2 l_2 (\cos(\theta_2) - 1) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} E_{k2} &= \frac{1}{2}(v_{2c}^T m_2 v_{2c} + \omega_2^T J_2 \omega_2) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 (m_2 L_2^2 + (m_2 l_2^2 + J_{2yy}) \sin^2(\theta_2) + J_{2xx} \cos^2(\theta_2)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 (J_{2zz} + m_2 l_2^2) + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$L = E_k - E_p \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + b_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 (J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + (J_{2yy} + m_2 l_2^2) \\ &\times \sin^2(\theta_2) + J_{2xx} \cos^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ &- m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \\ &\times (m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx}) + b_1 \dot{\theta}_1 \end{aligned} \right) \\ \left( \begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 (m_2 l_2^2 + J_{2zz}) \\ &+ \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \sin(2\theta_2) (-m_2 l_2^2 - J_{2yy} + J_{2xx}) \\ &+ b_2 \dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \right) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{bmatrix} J_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix} \\ J_2 &= \begin{bmatrix} J_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2zz} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= J_1 + m_1 l_1^2 \\ \hat{J}_2 &= J_2 + m_2 l_2^2 \\ \hat{J}_0 &= J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ &- m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) + b_1 \dot{\theta}_1 \end{aligned} \right) \\ \left( \begin{aligned} &\ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 \hat{J}_2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) \\ &+ b_2 \dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{aligned} \right) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Die folgenden Gleichungen enthalten noch den Fehler, den wir finden sollten.

Ich habe die Lsung gerade nicht parat.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{\begin{bmatrix} -\hat{J}_2 b_1 \\ m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) b_2 \\ -\hat{J}_2^2 \sin(2\theta_2) \\ -\frac{1}{2} \hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \sin(2\theta_2) \\ \hat{J}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{J}_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ \frac{1}{2} m_2^2 l_2^2 L_1 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix}}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} \quad (11)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\begin{bmatrix} m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) b_1 \\ -b_2 (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \\ m_2 L_1 l_2 \hat{J}_2 \cos(\theta_2) \sin(2\theta_2) \\ -\frac{1}{2} \sin(2\theta_2) (\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2)) \\ -\frac{1}{2} m_2^2 L_1^2 l_2^2 \sin(2\theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_2 l_2 \cos(\theta_2) \\ \hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2) \\ -m_2 l_2 \sin(\theta_2) (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ g \end{bmatrix}}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 \sin^2(\theta_2) - m_2^2 L_1^2 l_2^2 \cos^2(\theta_2)} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \theta_{1e} &= 0 \\ \theta_{2e} &= \pi \\ \dot{\theta}_{1e} &= 0 \\ \dot{\theta}_{2e} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
A_{31} &= 0 \\
A_{32} &= \frac{gm_2^2 l_2^2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
A_{33} &= \frac{-b_1 \hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
A_{34} &= \frac{-b_2 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
A_{41} &= 0 \\
A_{42} &= \frac{gm_2 l_2 \hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
A_{43} &= \frac{-b_1 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
A_{44} &= \frac{-b_2 \hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
B_{31} &= \frac{\hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
B_{41} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
B_{32} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)} \\
B_{42} &= \frac{\hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\tau = K_m i \tag{16}$$

Herleitung der Parameter (1 zu 1 aus dem Dokument bernommen.. die Herangehensweise muss also noch verndert werden!):

$$\begin{aligned}
L_1 &= l_a \\
L_2 &= l_{pm}
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= m_b + m_r + m_{sens} \\
m_2 &= m_p + m_{pm}
\end{aligned} \tag{18}$$

$$J_{arm} = m_r \frac{l_r^2}{12} + m_r \left( \frac{1}{2} l_r + l_b - l_a \right)^2 \tag{19}$$

$$J_{pend1} = m_b l_a^2 \quad (20)$$

$$J_{sens} = m_{sens} (l_a - l_b - l_r - \frac{1}{2} l_c)^2 \quad (21)$$

$$J_{ps} = m_p (r_b + \frac{1}{2} l_p)^2 \quad (22)$$

$$J_{pm} = m_{pm} l_{pm}^2 \quad (23)$$

$$J_{arm} + J_{pend1} + J_{sens} = m_1 l_1^2 J_{pm} + J_{ps} = m_2 l_2^2 \quad (24)$$

$$l_1 = \sqrt{\frac{m_r \frac{l_r^2}{12} + m_r (\frac{1}{2} l_r + l_b - l_a)^2 + m_b l_a^2 + m_{sens} (l_a - l_b - l_r - \frac{1}{2} l_c)^2}{m_1}} \quad (25)$$

$$l_2 = \sqrt{\frac{m_{pm} l_{pm}^2 + m_p (r_b + \frac{1}{2} l_p)^2}{m_2}} \quad (26)$$

... Hier sollten wir gucken, ob wie die Umformungen evtl. anders vornehmen.

$$ListederZahlenwerte \quad (27)$$

$$(28)$$

$$(29)$$

Swing-Up

$$U = n \cdot g \cdot \text{sign}(E - E_0) \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) \quad (30)$$

$$E = E_{pot} + E_{kin} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} E_{pot} &= m_2 g l_2 (\cos(\theta_2) - 1) \\ E_{kin} &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 \hat{J}_2 \end{aligned} \quad (32)$$

$$(33)$$



### **3 Identifikation der Parameter**

## 4 Design der Controller

## 5 Ergebnisse

## Literatur

Cazzolato, B. S. and Prime, Z. (2011). On the dynamics of the furuta pendulum.  
*Journal of Control Science and Engineering*, 2011(6):1–8.