Presentación de Avances del Proyecto

Control Óptimo mediante LS-SVM

Autores: Arian Escobar, Alfredo Padilla y Tomás Serrano

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

24 de octubre de 2024

Support Vector Machines (SVMs)

Definición

Modelos de aprendizaje supervisado empleados tanto en problemas de clasificación como en la **estimación de funciones.**

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ F(X) &= W^T \varphi(X) + B \end{aligned} \tag{1}$$

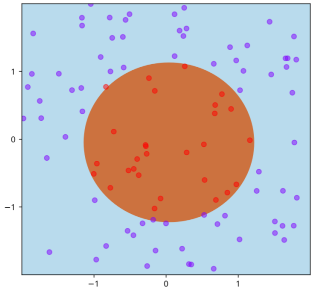
donde

- $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_h}$ mapeo no lineal con $n \leq n_h$
- $W \in \mathbb{R}^{n_h}$
- $B \in \mathbb{R}$

Buscamos minimizar el riesgo empírico.

$$R_{\text{emp}}(W, B) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |Y_i - F(X_i)| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| Y_i - W^T \varphi(X_i) - B \right| \tag{2}$$

Método del Kernel



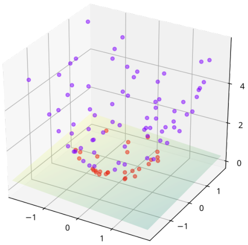


Figura 1: (Izquierda) Distribución de puntos en el intervalo $[-2,2]^2$. Se busca separar los puntos en $B(0,1)$ usando SVM. (Derecha) Uso del método del kernel para separar linealmente el conjunto de puntos en una dimensión mayor.

Problema de control discretizado en N pasos

A partir de un problema de un problema de control estándar

$$\begin{aligned} \min_{u} \quad & J(x,u) \\ s.a. \quad & \dot{x}(t) = \tilde{f}(x(t), u(t), t) \end{aligned} \tag{3}$$

podemos emplear algún algoritmo de integración numérica para resolver el problema discretizado

$$\begin{aligned} \min_{u} \quad & J_N(x,u) = \rho\left(x_N\right) + \sum_{i=1}^{N-1} h\left(x_i, u_i\right) \\ s.a. \quad & x_{i+1} = f\left(x_i, u_i\right), \quad i = 1, \ldots, N-1, \qquad (x_1 \text{ dado.}) \end{aligned} \tag{4}$$

Formulación del problema

Del principio de riesgo estructural y la formulación del problema anterior, podemos plantear el siguiente problema, donde entendemos el conjunto de entrenamiento como $\{x_i, u_i\}_{i=1}^N \sim \{X_i, Y_i\}_{i=1}^N$ y aproximamos el control u usando LS-SVM.

$$
\begin{aligned}
(\tilde{P}) \qquad \min \quad & J_N(x,u) + \frac{1}{2}W^{\mathrm{T}}W + \gamma\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} e_i^2 \\
s.a. \quad & x_{i+1} = f(x_i, u_i), \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad (x_1 \text{ dado}) \\
& u_i = W^{\mathrm{T}}\varphi(x_i) + e_i, \quad i = 1, \ldots, N
\end{aligned} \tag{5}
$$

Formulación del Problema

El problema anterior se resuelve planteando el Lagrangiano del sistema, del cual se obtiene una representación explícita para control en función del kernel.

$$u_k = W^{\mathrm{T}} \varphi(x_k) = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l \varphi^{\mathrm{T}}(x_l) \varphi(x_k) = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l K(x_l, x_k) \tag{6}$$

Luego, es posible plantear el problema de control en N pasos incorporando esta información y un término asociado a la regularización de los parámetros.

Formulación usando LS-SVM

$$\begin{aligned} (P) \qquad & \min_{x,\alpha} \quad J_N(x,u) + \lambda \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i^2 \\ & s.a. \quad x_{i+1} = f(x_i, u_i), \quad i = 1, \ldots, N-1 \; (x_1 \text{ dado.}) \\ & \qquad\;\; u_i = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l K(x_l, x_i), \quad i = 1, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{7}$$

Ejemplo 1: Dinámica de carro-cohete en 1D

Consideramos un carro sometido a la dinámica 8, donde una fuerza dependiente de la posición afecta su aceleración.

$$\ddot{x} = -\alpha x + u \tag{8}$$

Usando el método de Euler, es posible escribir el problema siguiendo la formulación del problema (P).

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \min_{x,\alpha} \quad ||v_N - v_f||^2 + \lambda \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i^2 \\
s.a. \quad & \begin{pmatrix} x_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} + \frac{T}{N} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_i \right), \quad i = 1, \dots, N-1 \; (x_1 \text{ dado.}) \\
& u_i = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l K \left(\begin{pmatrix} x_l \\ v_l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_i \\ v_i \end{pmatrix} \right), \quad i = 1, \dots, N-1.
\end{aligned}
$$

donde se busca que el carro termine con cierta velocidad final v_f dada.

Resultados Ejemplo 1

Dificultades y Trabajo Restante

Dificultades

- Comprensión del problema y su formulación.
- Implementación en *python* debido a la interdependencia de las variables.

Trabajo restante

- Implementar dos ejemplos de uso.
- Comparar cada uno de los ejemplos con la resolución mediante *OptimalControl.jl*.
- Evaluar los tiempos de ejecución y las ventajas de cada modelo.

Conclusiones

- Estudiamos los conceptos y herramientas computacionales para trabajar el problema.
- Pudimos comprender el planteamiento que permite formular el problema planteado.
- Implementamos numéricamente el método y lo aplicamos a un ejemplo sencillo.

Presentación de Avances del Proyecto

Control Óptimo mediante LS-SVM

Autores: Arian Escobar, Alfredo Padilla y Tomás Serrano

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

24 de octubre de 2024