MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre Primavera 2024
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Diego Olguín W. **Ayudantes:** Carlos Antil C. y Luis Fuentes C.

Control Óptimo mediante LS-SVM (Least Squares Support Vector Machines)

Descripción: El objetivo de este proyecto es estudiar el uso de Máquinas de vectores de soporte (SVMs) para encontrar controles óptimos, Para luego ser implementado en `python`. Se deben entregar simulaciones y ejemplos numéricos.

Introducción: Desde el momento en que el concepto fue desarrollado, las Máquinas de vectores de soporte (SVMs) han sido muy utilizadas, principalmente en el reconocimiento de patrones y en la estimación de funciones. Esto llevó a que, al día de hoy, se les siga considerando como uno de los pilares principales en el Aprendizaje de Máquinas.

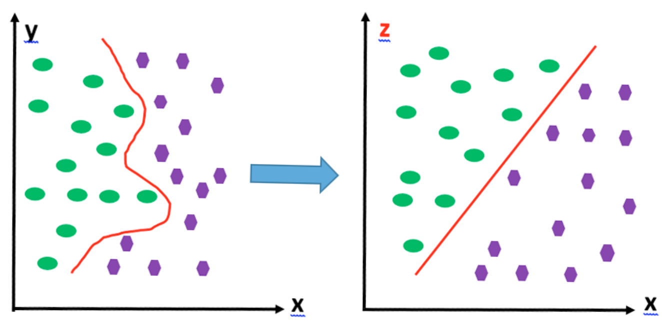

Figura 1: Uso de SVM para clasificar mediante un hiperplano en una dimensión superior.

La idea básica del método de SVM para la estimación de funciones consiste en la siguiente regresión:

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{1}$$
$$F(X) = W^T \varphi(X) + B \tag{2}$$

donde el mapeo no lineal $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_h}$ envía los datos a un espacio de mayor dimensión, $W \in \mathbb{R}^{n_h}$, $B \in \mathbb{R}$. Dado un conjunto de datos de entrenamiento $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^N$, donde $X_i \in \mathbb{R}^n$ corresponden a los datos de entrada (input) y $Y_i \in \mathbb{R}$ corresponden a los datos de salida (output). El método tiene como objetivo minimizar el riesgo empírico dado por

$$R_{\text{emp}}(W, B) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \Big| Y_i - W^T \varphi(X_i) - B \Big|.$$

Utilizaremos el modelo anterior para resolver problemas de control óptimo discretizados en N pasos de la siguiente forma:

$$\min_{u} \quad J_N(x,u) = \rho(x_N) + \sum_{i=1}^{N-1} h(x_i,u_i) \tag{3}$$

$$\text{s.a.} \quad x_{i+1} = f(x_i,u_i), \quad i = 1,\ldots,N-1 \quad (x_1 \text{ dado.}) \tag{4}$$

el cual, al trabajar con el método de SVMs, donde se entiende la variable espacial y la variable de control como conjunto de entrenamiento ($\{x_k,u_k\} \sim \{X_i,Y_i\}$), podemos obtener la siguiente formulación:

$$\min_{x,\alpha} \quad J_N(x,u) + \lambda \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i^2 \tag{5}$$

$$\text{s.a.} \quad x_{i+1} = f(x_i,u_i), \quad i = 1,\ldots,N-1(x_1 \text{ dado.}) \tag{6}$$

$$u_i = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l K(x_l,x_i), \quad i = 1,\ldots,N-1. \tag{7}$$

donde λ es una constante positiva, y K es una función kernel dada por $K(x_l,x_i) = \varphi(x_l)^T\varphi(x_i)$.

Objetivos La idea es utilizar las herramientas teóricas y numéricas de control óptimo estudiadas en el curso para analizar este problema. **Se le otorga cierta libertad a la hora de plantear el problema y en el formato del informe. Sin embargo, debe guiarse por la pauta siguiente que entrega los criterios mínimos a ser evaluados**.

- Estudiar los principales conceptos introducidos en SVM, así como los principales paquetes en `python` con los cuales se trabajará.
- Debe comprender y describir los pasos que dan como resultado la formulación (5) − (7) (ver [1]).
- Implementar numéricamente el método, pudiendo ingresar el problema de control óptimo a resolver y los parámetros del modelo (valor de λ, kernel utilizado, etc).
- Encontrar el control óptimo para al menos tres problemas distintos con el método propuesto.
- Comparar los resultados obtenidos con los encontrados al utilizar técnicas estudiadas en el curso con `OptimalControl.jl`.

Referencias

[1] Suykens, J. A., Vandewalle, J., & De Moor, B. (2001). *Optimal control by least squares support vector machines.* Neural networks, 14(1), 23-35.

[2] Bishop, C. M. (1995). *Neural networks for pattern recognition*, Oxford: Oxford University Press.

[3] Schölkopf, B., Burges, C. J. C., & Smola, A. J. (1999). *Advances in kernel methods - Support vector learning*, Cambridge, MA: MIT Press.