

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение  
высшего образования  
«Московский политехнический университет»  
(Московский политех)

Домашняя работа по курсу «Дискретные структуры и  
компьютинг»

Ответ на задание 18



Выполнил:

Студент группы 221-352

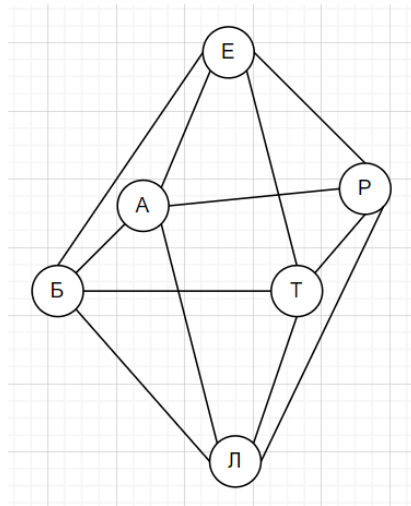
Барателія Т.А.

Проверил преподаватель: Люксембург А. А.

Москва 2023г.

Найти число различных раскрасок вершин многогранника М в не более чем  $m = 9$  цветов.

Две раскраски считаются одинаковыми, если вращением октаэдра в пространстве их раскраски можно совместить. Шесть вершин октаэдра не более чем девятью красками, например, красный, оранжевый, желтый, зелёный, голубой, синий, фиолетовый, розовый, бежевый (к,о,ж,з,г,с,ф,р,б) можно раскрасить  $9^6 = 531441$  способами. Многие раскраски окажутся одинаковыми.

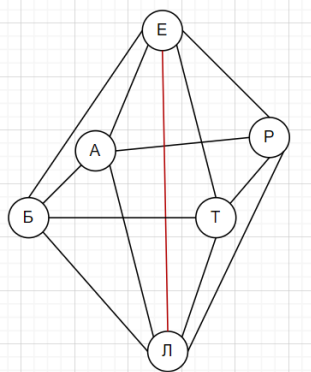


**Тождественная подстановка**

$$P_0 = \begin{pmatrix} б & а & р & т & е & л \\ б & а & р & т & е & л \end{pmatrix} = (б)(а)(р)(т)(е)(л), \langle 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle.$$

6 циклов длины 1.

**1. Относительно прямой ЕЛ**



Поворот на 90 градусов.

$$P_1 = \begin{pmatrix} б & а & р & т & е & л \\ а & р & т & е & л & б \end{pmatrix} = (барт)(е)(л), \langle 1, 1, 4 \rangle.$$

2 цикла длины 1, 1 цикл длины 4.

Поворот на 180 градусов.

$$P2 = \begin{pmatrix} б & а & р & т & е & л \\ р & т & б & а & е & л \end{pmatrix} = (бр)(ат)(е)(л), \langle 1, 1, 2, 2 \rangle.$$

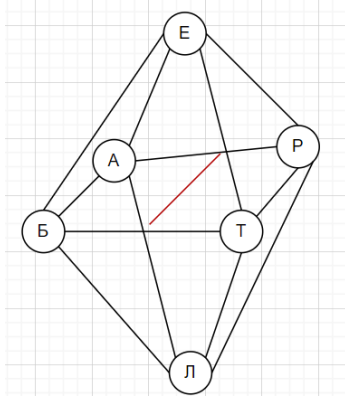
2 цикла длины 1, 2 цикла длины 2.

Поворот на 270 градусов.

$$P3 = \begin{pmatrix} б & а & р & т & е & л \\ а & б & т & р & е & л \end{pmatrix} = (ба)(рт)(е)(л), \langle 1, 1, 2, 2 \rangle.$$

2 цикла длины 1, 2 цикла длины 2.

## 2. Относительно середин сторон БТ и АР

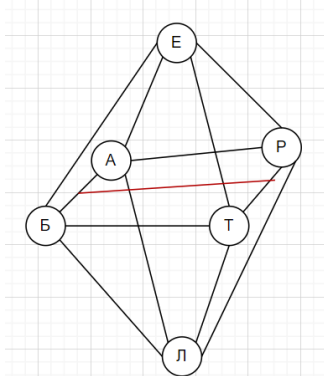


Поворот на 180 градусов.

$$P4 = \begin{pmatrix} б & а & р & т & е & л \\ а & р & е & г & н & с \end{pmatrix} = (бт)(ар)(ел), \langle 2, 2, 2 \rangle.$$

3 цикла длины 2.

## 3. Относительно середин сторон ГЕ и АР

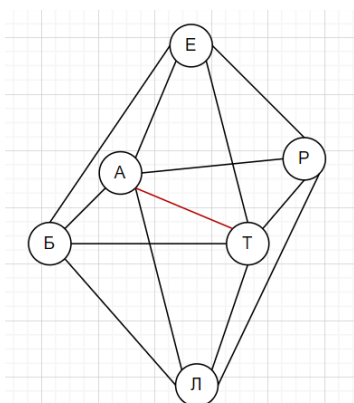


Поворот на 180 градусов.

$$P5 = \begin{pmatrix} б & а & р & т & е & л \\ а & б & т & р & л & е \end{pmatrix} = (ба)(рт)(ел), \langle 2, 2, 2 \rangle.$$

3 цикла длины 2.

#### 4. Относительно прямой АТ

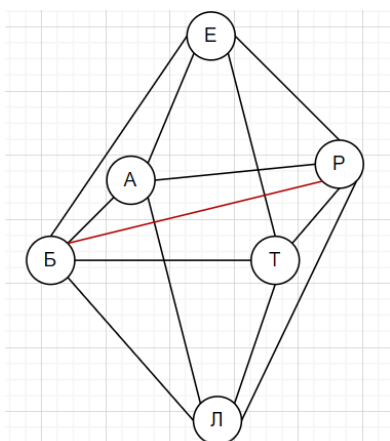


Поворот на 180 градусов.

$$P_6 = \begin{pmatrix} б & а & р & т & е & л \\ р & а & б & т & л & е \end{pmatrix} = (бр)(а)(т)(ел), \langle 1, 1, 2, 2 \rangle.$$

2 цикла длины 1, 2 цикла длины 2.

#### 5. Относительно прямой БР



Поворот на 180 градусов.

$$P_7 = \begin{pmatrix} б & а & р & т & е & л \\ б & т & р & а & л & е \end{pmatrix} = (б)(ат)(р)(ел), \langle 1, 1, 2, 2 \rangle.$$

2 цикла длины 1, 2 цикла длины 2.

Это составляет 8 подстановок группы  $G$ .

В группе вращений  $G$  октаэдра по типу каждой подстановки найти соответствующее слагаемое в многочлене циклов (в цикловом индексе). В группе вращений  $G$  октаэдра они следующие.

1 подстановка типа  $\langle 1,1,1,1,1,1 \rangle$  из 6 циклов дает  $9^6$  неподвижных точек и соответствует слагаемому  $S_1^6$  многочлена циклов;

1 подстановка типа  $\langle 1,1,4 \rangle$  дают  $9^3$  неподвижных точек и соответствуют слагаемому  $S_1^2 S_4^1$  многочлена циклов;

4 подстановки типа  $\langle 1,1,2,2 \rangle$  дают  $4 \cdot 9^4$  неподвижных точек и соответствуют слагаемому  $4 \cdot S_1^2 S_2^2$  многочлена циклов;

2 подстановки типа  $\langle 2,2,2 \rangle$  дают  $2 \cdot 9^3$  неподвижных точек и соответствуют слагаемому  $2 \cdot S_2^3$  многочлена циклов.

По теореме Пойа многочлен циклов 
$$N(G_M) = |G|^{-1} \sum_{p \in G} \prod_{k=1}^n s_k^{j_k(p)}.$$

Число различных раскрасок вершин октаэдра в не более чем  $m=9$  цвета есть число

$$\begin{aligned} N(G_M) &= |G|^{-1} \sum_{p \in G} \prod_{k=1}^n s_k^{j_k(p)} \quad S_K=m=9 \\ &= |G|^{-1} (S_1^6 + S_1^2 S_4^1 + 4 \cdot S_1^2 S_2^2 + 2 \cdot S_2^3) \Big|_{s_1=\dots=s_6=9} = \\ &= (1/8) (m^6 + m^2 m^4 + 4 \cdot m^2 m^2 + 2 \cdot m^3) = \\ &= (1/8) (9^6 + 9^2 9^4 + 4 \cdot 9^2 9^2 + 2 \cdot 9^3) = 69984. \end{aligned}$$

Ответ. 69984 есть число различных раскрасок вершин октаэдра не более чем девятью красками.