指称语义和小步语义的等价性

语义虽然有多种，但是描述的事情可以是一样的。本文展示指称语义和小步语义等价性的证明思路。

定理

我们想要证明的是这样一件事情：

$$(st_1, st_2) \in \text{ceval}(c) \iff (c, st_1) \to^* (\text{skip}, st_2)$$

其中 $\text{ceval}(c)$ 表示程序 c 的指称。

从左到右

先证明 $(st_1, st_2) \in \text{ceval}(c) \implies (c, st_1) \to^* (\text{skip}, st_2)$。

直接对 c 做结构归纳。重点在于先对 aexp, bexp 先做类似的归纳，即最终两者可以求出某个具体的值来。这是为了辅助赋值和 if、while 语句的证明。

然后就比较容易，对于原子语句可以直接证明，对于复合语句我们由归纳假设可以知道每一个部分的结果，然后把结果利用多步的传递性质套进去即可。

从右到左

再证明 $(c, st_1) \to^* (\text{skip}, st_2) \implies (st_1, st_2) \in \text{ceval}(c)$。

还是对 c 做结构归纳。关键的在于串联形式 $c_1; c_2$ 的证明。

按照 $c_1; c_2$ 的指称定义，我们想要证明的是

$$\exists st, (c_1; c_2, st_1) \to^* (\text{skip}; c_2, st) \to (c_2, st) \to^* (\text{skip}, st_2)$$

如果我们能够直接说明 $\exists st, (c_1, st_1) \to^* (\text{skip}, st)$ 那显然是再方便不过。但是**由于有不可停止的程序存在，这条性质并不成立。**

为此，对多步关系做 1-n 归纳，即从最后面开始向前接。在归纳的时候就可以通过反演确定具体是哪一种情况。

对于其他的也是类似，用 1-n 归纳证明复合语句的多步关系一定蕴含子语句的多步关系，最后把这些都拼起来即可。

再一次从右到左

上面的证明我们本来想要用一个看起来非常美好的性质：$\exists st, (c_1, st_1) \to^* (\text{skip}, st)$。但是用不得。

实际上，如果把这一性质减弱一点，就可以得到另一个比较类似但仍然很有用的性质。这条新的可证明的性质描述的是**小步语义对终止状态的保持（Preservation）**，即

$$(c, st_1) \to (c', st_1') \to^* (\text{skip}, st_2) \implies (st_1', st_2) \in \text{ceval}(c) \implies (st_1, st_2) \in \text{ceval}(c)$$

这就绕过了停机性，也就是先说明结果一定存在然后向前推。

对这个的证明需要对小步关系进行归纳。证明完这个之后就只需要对 $(c, st_1) \to^* (\text{skip}, st_2)$ 做 1-n 归纳即可。