霍尔逻辑的可靠性和完备性

此前讨论过指称语义和小步语义的等价性。那么，霍尔逻辑和指称语义之间有没有等价性？答案是肯定的。本文展示霍尔逻辑和指称语义之间等价性的证明思路，也即展示霍尔逻辑的可靠性（Soundness）和完备性（Completeness）。

基本定义

由于我们下面要论述的断言包含量词，还可能包含自由出现的逻辑变量，方便起见，先给出一些定义。

称一个将逻辑变量到具体值的映射为一个**指派（Assignment）**。一般用 La 表示。简单来说，在一个指派下，给定一个逻辑变量，就能知道它的值。

称程序状态和指派的二元组 $J = (st, La)$ 为**解释（Interpretation）**。

显然，给定一个解释，一个断言中所有未知的量就被消除了。

对霍尔三元组的重新定义

此前我们对霍尔逻辑的定义是通过一系列的公理，或者说是推理规则给出的。在证明霍尔三元组的过程中，我们停留在了对程序状态的断言这一表观层面；也就是说，我们所操纵的都是断言，而并不涉及符合断言的那些程序状态的集合。但对于霍尔三元组 $\{P\}\,c\,\{Q\}$，我们的理解就是若开始程序状态符合断言 P，则执行 c 之后，终止程序状态就会符合 Q。而指称语义恰恰与程序状态的集合有关。

这启发了我们定义断言的另一种方法：不依赖于推理的过程，而是直接对断言赋予某种“意义”，通过确认“意义”的真假性（元语言下）来判断三元组是否成立。具体而言，所要做的就是将断言在语法树上递归定义成解释的集合。

如果一个解释 J 符合断言 P，或者说其在该断言“意义”的集合中，那么就称 J **满足（Satisfies）** P，记作 $J \models P$。

等价性描述

对于原来的、基于推理规则的定义，称一个霍尔三元组 $\{P\}\,c\,\{Q\}$ **可证（Provable）**，若其可以通过推理规则被推导出来。记作 $\vdash \{P\}\,c\,\{Q\}$。注意这里的推理规则包括那几条公理化定义以及一个用于处理断言之间推导的一阶逻辑系统。给定不同的一阶逻辑系统，将会得到不同的基于规则的霍尔逻辑。

对于这里给出的、基于解释的定义，称一个霍尔三元组 $\{P\}\,c\,\{Q\}$ **有效（Valid）**，若

$$\forall st_1, st_2, La, (st_1, La) \models P \land (st_1, st_2) \in \mathrm{ceval}(c) \implies (st_2, La) \models Q$$

记作 $\models \{P\}\,c\,\{Q\}$。注意这里的蕴含是元语言的蕴含，且前后指派不变。

可证只和霍尔逻辑这个推理系统有关，而有效是通过指称语义定义的。

$\vdash \{P\}\,c\,\{Q\} \implies \models \{P\}\,c\,\{Q\}$ 称为霍尔逻辑的**可靠性（Soundness）**。可以解释为：根据霍尔逻辑这个推理系统推理出来的三元组都是有意义的。

$\models \{P\}\,c\,\{Q\} \implies \vdash \{P\}\,c\,\{Q\}$ 称为霍尔逻辑的**完备性（Completeness）**。可以解释为：有意义的霍尔三元组总能被推理出来。

以上两者都成立，则表明霍尔逻辑和指称语义等价。

需要注意的是，由于引入了一个一阶逻辑，只有当这个一阶逻辑满足可靠性和完备性时，才能证明上述两者的等价性。

可靠性证明

可靠性证明的重点在于：对于每一条公理，都应该说明如果公理的前提有效，那么公理的结论有效。

完备性证明

（等待补充）