卷积和多项式

基础知识

卷积

> 在泛函分析中，卷积、叠积（convolution）、摺积或旋积，是通过两个函数 f 和 g 生成第三个函数的一种数学算子，表征函数 f 与经过翻转和平移的 g 的乘积函数所围成的曲边梯形的面积。如果将参加卷积的一个函数看作区间的指示函数，卷积还可以被看作是"移动平均"的推广。
>
> ——维基百科

事实上，在这里我们主要讨论的是定义在数列上的卷积（即离散卷积）。最基本的一个问题是：

给定两个长度有限的序列 $\{a_i\},\{b_i\}$，求出序列 $\{c_i\}$，使得 $c_i=\sum_{j+k=i}a_j\oplus b_k$，其中 $\oplus$ 是某个**满足交换律**的二元运算。

复数单位根

根据代数基本定理，复数方程 $z^n=1$ 有 n 个根，这些根互不相同，可以表示为 $e^{\frac{2\pi ki}{n}}=\cos(\frac{2\pi k}{n})+i\sin(\frac{2\pi k}{n})\quad(k\in\{0,1,\cdots,n-1\})$。一般记作 $\omega_n^k=e^{\frac{2\pi ki}{n}}$。

单位根具有一些很神奇的性质：

1. $\omega_n^0=\omega_n^n=1$。
2. $\omega_n^0,\omega_n^1,\cdots,\omega_n^{n-1}$ 各不相同。
3. $\omega_{tn}^{tk}=\omega_n^k(t\geq 1),\omega_n^{k+n/2}=-\omega_n^k$。这一个性质有着很强的几何意义。
4. $\omega_n^{jk}=\omega_n^{jk\mod n}$。
5. $\sum_{i=0}^{n-1}\omega_n^i=0$。特别地，$\forall t\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},\sum_{i=0}^{n-1}\omega_n^{it}=0$。

原根和阶

该部分内容会在 NTT 相关材料中涉及到。

FFT（快速傅里叶变换）

基础：离散傅里叶变换

离散傅里叶变换（DFT）是 FFT 的基础。

我们知道，一般我们表示多项式都是采用**系数表示**，即给出多项式的次数 n 和一个序列 $\{b_i\}$，那么这个多项式就是 $F(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i$。而 DFT 做的事情就是将一个给定多项式的系数表示转换成为点值表示（这个过程称为求值）。所谓一个多项式的**点值表示**，就是指一个 $n-1$ 次多项式可以用 n 个不同的多项式函数图像上的点来表示。我们可以解方程求出这 n 个点对应的 $n-1$ 次多项式，这表明了多项式和其点值表示是一一对应的。

一般的求值方法是选出任意 n 个不同的横坐标，然后代入计算。这样的时间复杂度是朴素的 $O(n^2)$。由于横坐标可以任取，我们考虑取一些特殊的横坐标以优化求值过程。而这里"特殊的横坐标"就是 $z^n=1$ 的 n 个单位根。

（方便起见，我们事先约定：n 是 2 的某一个正整数次幂。）

考虑 $n-1$ 次多项式 $F(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i$。我们将其分为 $F(x)=\sum_{i=0}^{n/2-1}b_{2i}x^i+\sum_{i=0}^{n/2-1}b_{2i+1}x^i$，并令等号右侧中，左边的多项式为 $G(x)$，右边的多项式为 $H(x)$。那么显然有 $F(x)=G(x^2)+xH(x^2)$。

令 $k<n/2$，代入 $x=\omega_n^k$，有 $(\omega_n^k)^2=\omega_{n/2}^k$。那么

$$F(\omega_n^k)=G(\omega_{n/2}^k)+\omega_n^kH(\omega_{n/2}^k)$$

令 $k<n/2$，代入 $x=\omega_n^{k+n/2}$，有 $(\omega_n^{k+n/2})^2=\omega_n^{2k+n}=\omega_{n/2}^k,\omega_n^{k+n/2}=-\omega_n^k$。那么

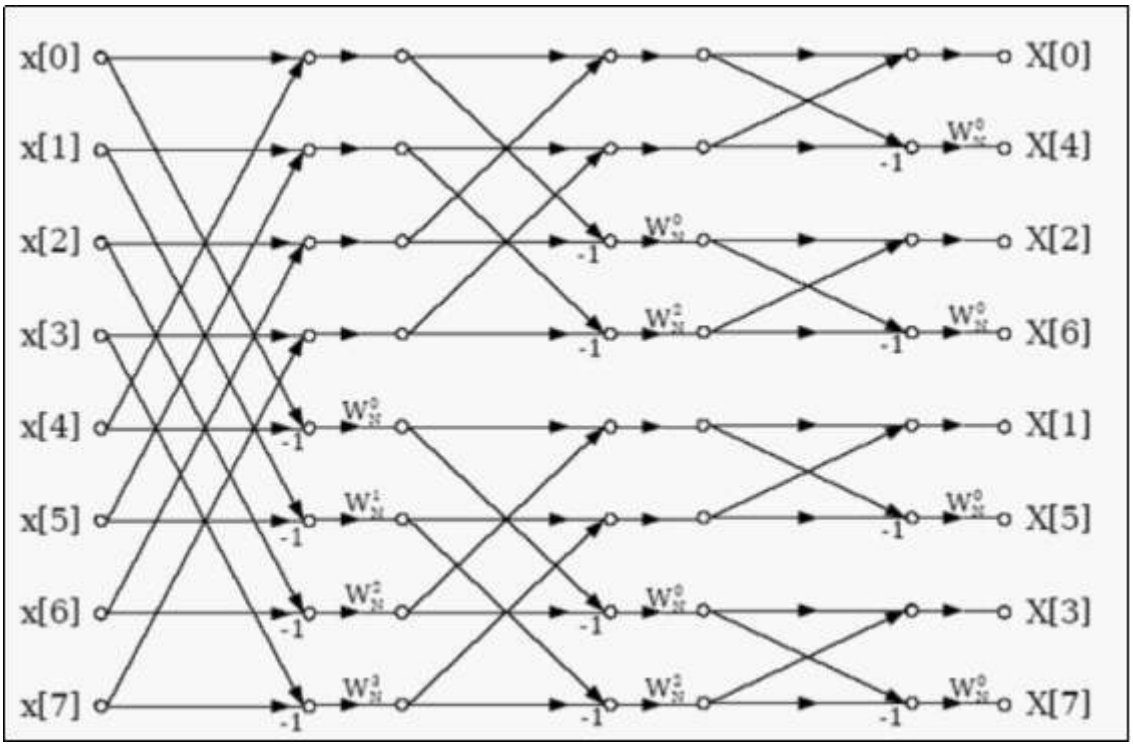
$$F(\omega_n^{k+n/2})=G(\omega_{n/2}^k)-\omega_n^kH(\omega_{n/2}^k)$$

显然，上面的式子具有很强的子结构性质，我们考虑递归分治求解。如果我们已经求出了 $G(x),H(x)$ 的点值表示，那么显然我们可以在 $O(n)$ 时间内求出 $F(x)$ 的点值表示。整个过程的时间复杂度是 $O(n\log n)$。

蝴蝶变换

有一个细节值得考虑：每一次 $F(x)$ 分裂为 $G(x)$ 和 $H(x)$ 时，$F(x)$ 的系数会按照奇偶性分配给 $G(x)$ 和 $H(x)$。

这是采用自顶向下视角，在子过程开始时所看到的现象。如果我们一层一层地画出系数的位置是如何变化的（即系数是怎么分配的），就会发现一种奇妙的对应：整个过程中，最顶层的系数下标，和与其对应的最底层的系数下标，呈**二进制反转关系**。



（上面这种图形就是蝴蝶变换，因为看起来有点像蝴蝶。图片来自网络）

蝴蝶变换的用处在于，它给了我们一种自底向上的 DFT 实现方法。我们可以预处理出每一个下标的二进制反转，然后将元素按照蝴蝶变换后的下标放置，再自底向上地两两合并。这种迭代版本比递归版本要更快、占用空间要更少。

还原：逆离散傅里叶变换

逆离散傅里叶变换（IDFT）是将 DFT 求出的点值表达还原为系数表达的方法（这个过程称为插值）。

这个过程看上去需要另一种专门的方法，但实际上不需要。我们设 f_i 为单位根 ω_n^i 作为横坐标时，对应的点的纵坐标。那么显然有 $f_i = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^i)^j b_j$。

然后结论是 $nb_i = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^{-i})^j f_j$。直接给出结论比较唐突（因为我也不知道这是怎么算出来的），我们可以验证一下：

$\sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^{-i})^j f_j = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{j(k-i)} b_k$。若 $k = i$，则贡献为 nb_i；否则固定 k，根据单位根性质，$\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{j(k-i)} b_k = b_k (\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{j(k-i)}) = b_k \cdot 0 = 0$。所以式子成立。

这个结论的形式表明了我们可以按照 DFT 的方式来做 IDFT，只需要将代入的对象换成 ω_n^{-k}，并在最后将系数除以 n 即可。

实现

下面给出一个迭代方法实现的模板。其中蝴蝶变换给出了两种实现方式。

```
struct Comp{
    double rlt, img;
    Comp(double xx, double yy){
        rlt = xx, img = yy;
    }
    Comp(){
        rlt = img = 0;
    }
    Comp operator + (const Comp &ca){
        return Comp(rlt + ca.rlt, img + ca.img);
    }
    Comp operator - (const Comp &ca){
        return Comp(rlt - ca.rlt, img - ca.img);
    }
    Comp operator * (const Comp &ca){
        return Comp(rlt * ca.rlt - img * ca.img, rlt * ca.img + img *
ca.rlt);
    }
};
double Pi = acos(-1.0);
int rev[250005];
void reverse_bit(int len){
    rev[0] = 0, rev[len - 1] = len - 1;
    int j = (len >> 1), k;
    for(int i = 1; i < len - 1; ++i){
        rev[i] = j, k = (len >> 1);
        for(; j >= k; j -= k, k >>= 1);
        j += k;
    }
}
void reverse_bit_2(int len){
    rev[0] = 0;
    for (int i = 1; i < len; ++i)
        rev[i] = (rev[i >> 1] >> 1) + ((i & 1) ? (len >> 1): 0);
}
void fft(Comp E[], int len, int opt){
    for(int i = 0; i < len; ++i)
        if(rev[i] > i) swap(E[i], E[rev[i]]);
    for(int h = 1; h < len; h <<= 1){
        Comp wn(cos(Pi / h), opt * sin(Pi / h));
        for(int i = 0; i < len; i += (h << 1)){
```

```
            Comp w(1, 0);
            for(int j = 0; j < h; ++j, w = w * wn){
                Comp x = E[i + j], y = w * E[i + j + h];
                E[i + j] = x + y, E[i + j + h] = x - y;
            }
        }
    }
    if(opt == -1){
        for(int i = 0; i < len; ++i)
            E[i].rlt *= 1.0 / len;
    }
}
```

FFT 主程序中，设定交换两个值的条件为 `rev[i] > i` 是为了避免交换两次而抵消效果。参数 `opt` 为 1 表示当前做的是 DFT，为 -1 表示是 IDFT。

注意循环中单位根使用的角度是 $\frac{\pi}{h}$，因为 2 上下消去了。

番外：三次变两次优化

（等待补充）

NTT（快速数论变换）

FFT 能够解决大部分的问题，但是它的精度和速度都不够理想，而且有时候“运算对象必须是复数”这个条件会非常累赘。这一点尤其体现在只有整数参与运算的场合。

为此，我们希望有一个专门针对整数的卷积计算工具。这就是 NTT。

基本原理

回想一下，我们之所以要将复数作为运算对象，是因为我们要用单位根来求值，而使用单位根就必须使用复数。而在数论中，恰好有一个概念能提供和单位根一样具有良好的性质，那就是**原根**。

原根是和具体的模数相关的概念，这里我们取模数 $M = k2^t + 1$，其中 2^t 很大，远大于 n（这里 n 的定义和 FFT 中相同）。设 M 的原根为 g。

然后定义模意义下的单位根，设 $\omega_n^k = g^{k(M-1)/n}$。容易验证，单位根的前 2 条性质在这里成立。我们验证其余 3 条性质：（注意，下面的计算都是模意义下进行的）

1. $\omega_{2n}^{2k} = \omega_n^k, \omega_n^{k+n/2} = -\omega_n^k$。前者显然，对后者，考虑 $(\omega_n^{k+n/2})^2 = g^{2k(M-1)/n} \cdot g^{M-1} = g^{2k(M-1)/n} = (\omega_n^k)^2$。由单位根互不相同可知 $\omega_n^{k+n/2} = -\omega_n^k$。
2. $\omega_n^{jk} = \omega_n^{jk \mod n}$。只需注意 $g^{M-1} \equiv 1 \pmod M$。
3. $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_n^i = 0$。只需注意：利用等比数列求和可得分子为 $\omega_n^n - 1 = 0$。

由此可知，NTT 在整个代码结构上和 FFT 基本不会有太大区别，只需要在具体的计算上稍加修改即可。

实现

在这里，我们使用经典模数 998244353，原根选 3。

```
const int M = 998244353, g = 3, invg = 332748118;
void ntt(int E[], int len, int opt){
    for(int i = 0; i < len; ++i)
        if(rev[i] > i) swap(E[i], E[rev[i]]); // 强制定序
    for(int h = 1, id = 0; h < len; h <<= 1, ++id){
```

```
        int wn = poww(opt == 1 ? g: invg, (M - 1) / (h << 1), M);
        for(int i = 0; i < len; i += (h << 1)){
            int w = 1;
            for(int j = 0; j < h; ++j, w = 1ll * w * wn % M){
                int x = E[i + j], y = 1ll * w * E[i + j + h] % M;
                E[i + j] = (x + y >= M ? x + y - M: x + y),
                E[i + j + h] = (x + M - y >= M ? x - y: x + M - y);
            }
        }
    }
    if(opt == -1){
        int invn = poww(len, M - 2, M);
        for(int i = 0; i < len; ++i)
            E[i] = 1ll * E[i] * invn % M;
    }
}
```

注意在给 `E[i + j]` 和 `E[i + j + h]` 取模的时候不要先计算再取模，而是先判断然后直接得到取模后的结果。否则效率会慢上一倍左右。

参考资料

（等待补充）