ANUM : TME Introduction à l'optimisation

Tingting LI

1 avril 2020

1 Fonction de Rosenbrock et méthode de Newton

On va étudier la fonction de Rosenbrock :

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \tag{1}$$

Le gradient de f(x) est :

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 400x_1(-x_1^2 + x_2) - 2 \\ -200x_1^2 + 200x_2 \end{pmatrix}$$

La Hessienne de f(x) est :

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1200x_1^2 - 400x_2 + 2 & -400x_1 \\ -400x_1 & 200 \end{pmatrix}$$

On a $g(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un extremum de f et de plus les valeurs autour sont tous supérieur à 0 donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un minimum local de f.

On va calculer les 5 premiers itérés de la méthode de Newton pour minimiser f en commençant avec $x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Voici les lignes de niveau de la fonction f dans le domaine $[-1.5; 2; -3; 3]$:

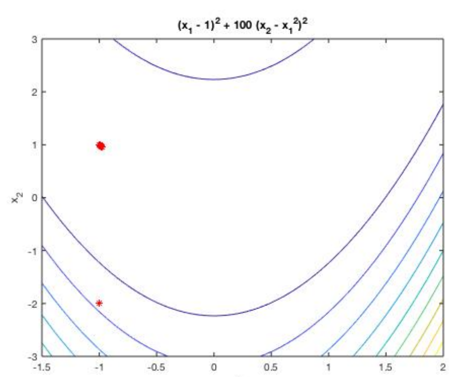

Figure 1:

D'après la méthode de Newton, $x_* = (-1, -1)$

En calculant l'erreur $\|x - x^*\|$ à chaque itération, on a :

$$\begin{pmatrix}3.6056 & 1.9967 & 1.9950 & 1.9917 & 1.9901\end{pmatrix}$$

2 Méthode de gradient à pas optimal et méthode de Wolfe

On va regarder ce que donne la méthode du gradient ($gradient.m$) avec la fonction

$$f(x) = x_1^2 + 2x_{2^2} \tag{2}$$

De plus, comme dans l'énoncer, on prend $x_0 = (-1, -1)$.

- avec $\alpha = 0.1$ et $\epsilon = 0.0001$, on trouve rapidement (avec un nombre d'itération petit) le résultat x_{min} mais il est négative. On a $x_{min} = (-4.3556e - 05, -1.0389e - 10)$
- avec $\alpha = 0.3$ et $\epsilon = 0.0001$, de même que précédemment on trouve $x_{min} = (-4.1943e-05, 2.0480e-08)$
- avec $\alpha = 0.5$ et $\epsilon = 0.0001$, même en faisant un très grand nombre d'itération, il ne trouve pas une valeur pour x_{min}
- avec $\alpha = 1$ et $\epsilon = 0.0001$, avec un nombre d'itération assez grand, on trouve $x_{min} = (1.4810, 1.2887e + 154)$

En prenant la fonction de Rosenbrock :

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \tag{3}$$

et la valeur de $x_0 = (-1, 1.2)$. En appliquant la méthode avec $\alpha = 0.001$ et $\epsilon = 0.0001$, on obtient $x_{min} = (0.9997, 0.9994)$

En appliquant la méthode de Wolfe ($Wolfe.m$) sur la fonction de Rosenbrock, on obtient : $T = [0, 0.002]$. Donc on peut poser $\alpha = 0.002$, et on obtient $x_* = (0.9997, 0.9994)$

3 Algorithme de Nelder-Meade

L'algorithme de Nelder-Mead est une méthode numérique heuristique qui cherche à minimiser une fonction continue dans un espace à plusieurs dimensions. L'implémentions de l'algorithme se trouve dans le fichier $exo8/nelder\_mead.m$.

Le code retourne pour la fonction de rosenbrock :

```
>> precission = 0.0001;
>> f = @(x)100*(x(2) - x(1)^2)^2 + (1 - x(1))^2;
>> x0 = [-1,-2];
>> precission = 0.0001;
>> nelder_mead(f,x0,precision)'

ans =

     1     1
```

La commande MATLAB $fminsearch$ donne :

```
>> fminsearch(f,x0)

ans =

    1.0000    1.0000
```