CHƯƠNG 1. HÀM NHIỀU BIẾN

Nguyễn Hải Hà

Hà Nội - Tháng 3 năm 2020

Nội dung

- Định nghĩa, ví dụ về hàm nhiều biến

Nội dung

- Định nghĩa, ví dụ về hàm nhiều biến
- Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của hàm nhiều biến

Nội dung

- Định nghĩa, ví dụ về hàm nhiều biến
- Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của hàm nhiều biến
- Đạo hàm riêng của hàm hợp (tự đọc)

Nội dung

- Định nghĩa, ví dụ về hàm nhiều biến
- Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của hàm nhiều biến
- Đạo hàm riêng của hàm hợp (tự đọc)
- Đạo hàm riêng của hàm ẩn

Nội dung

- Định nghĩa, ví dụ về hàm nhiều biến
- Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của hàm nhiều biến
- Đạo hàm riêng của hàm hợp (tự đọc)
- Đạo hàm riêng của hàm ẩn
- Đạo hàm riêng và vi phân cấp 2

Nội dung

- Định nghĩa, ví dụ về hàm nhiều biến
- Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của hàm nhiều biến
- Đạo hàm riêng của hàm hợp (tự đọc)
- Đạo hàm riêng của hàm ẩn
- Đạo hàm riêng và vi phân cấp 2
- Cực trị của hàm nhiều biến

1. Định nghĩa, ví dụ về hàm nhiều biến

1.1. Tập hợp trong $\mathbb{R}^2$

Cho $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực, ta kí hiệu $\mathbb{R}^2$ là tập hợp các bộ có thứ tự của 2 số thực, xác định như sau:

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

- Nói cách khác, $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ tập các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

1.1. Tập hợp trong $\mathbb{R}^2$

Cho $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực, ta kí hiệu $\mathbb{R}^2$ là tập hợp các bộ có thứ tự của 2 số thực, xác định như sau:

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

- Nói cách khác, $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ tập các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Tương tự, ta kí hiệu $\mathbb{R}^3$ là tập hợp các bộ có thứ tự của 3 số thực, xác định như sau:

$$\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

- Nói cách khác, $\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ tập các điểm trong không gian tọa độ $Oxyz$.

1.2. ĐN, VD Hàm nhiều biến số

Định nghĩa: Cho $D \subset \mathbb{R}^2$. Một quy tắc $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, cho tương ứng mỗi điểm $(x, y) \in D$ một số thực duy nhất $f(x, y) \in \mathbb{R}$ gọi là một hàm 2 biến số.

Thường kí hiệu hàm f là $f(x, y)$;

D gọi là miền xác định của hàm số f;, là tập hợp tất cả các điểm (x, y) sao cho biểu thức $f(x, y)$ có nghĩa

x, y gọi là các biến độc lập của f.

Cho điểm $(x_0, y_0) \in D$ thì số thực $f(x_0, y_0)$ gọi là giá trị của hàm tại (x_0, y_0).

1.2. ĐN, VD Hàm nhiều biến số

Định nghĩa: Cho $D \subset \mathbb{R}^2$. Một quy tắc $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, cho tương ứng mỗi điểm $(x, y) \in D$ một số thực duy nhất $f(x, y) \in \mathbb{R}$ gọi là một hàm 2 biến số.

Thường kí hiệu hàm f là $f(x, y)$;

D gọi là miền xác định của hàm số f;, là tập hợp tất cả các điểm (x, y) sao cho biểu thức $f(x, y)$ có nghĩa

x, y gọi là các biến độc lập của f.

Cho điểm $(x_0, y_0) \in D$ thì số thực $f(x_0, y_0)$ gọi là giá trị của hàm tại (x_0, y_0).

Hoàn toàn tương tự, ta dễ dàng định nghĩa được hàm 3 biến $f(x, y, z)$.

1. Định nghĩa, ví dụ về hàm nhiều biến

Ví dụ

Một số ví dụ về hàm 2 biến

- $f(x,y) = x^2 + 3y$
- $f(x,y) = sin(xy)$

1. Định nghĩa, ví dụ về hàm nhiều biến

Ví dụ

Một số ví dụ về hàm 2 biến

- $f(x, y) = x^2 + 3y$
- $f(x, y) = sin(xy)$

Ví dụ

Một số ví dụ về hàm 3 biến

- $f(x, y, z) = x^2 + yz - 4z^5$
- $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$.

Ví dụ

Tìm tập xác định của hàm số $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. *Tính giá trị của hàm số tại các điểm* $(0,0); (\frac{1}{2}, 0); (1,1)$.

Ví dụ

Tìm tập xác định của hàm số $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. *Tính giá trị của hàm số tại các điểm* $(0,0); (\frac{1}{2}, 0); (1,1)$.

Hàm $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ là 2 biến có tập xác định:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 > 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\},$$

D chính là hình tròn tâm là gốc tọa độ O, bán kính bằng 1, không tính những điểm trên đường tròn.

$f(0,0) = \dfrac{1}{\sqrt{1-0^2-0^2}} = 1; f(\frac{1}{2}, 0) = \dfrac{2}{\sqrt{3}};$

Ví dụ

Tìm tập xác định của hàm số sau: $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$. *Tính* $u(0,0,0); u(1,1,1)$.

1. Định nghĩa, ví dụ về hàm nhiều biến

Ví dụ

Tìm tập xác định của hàm số sau: $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$. *Tính* $u(0,0,0); u(1,1,1)$.

Hàm số có tập xác định là

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}, \end{aligned}$$

đây là hình cầu tâm là gốc tọa độ O bán kính bằng 1 trong không gian, có lấy cả những điểm trên mặt cầu.
$u(0,0,0) = 1$;
$u(1,1,1)$ không tồn tại.

Định nghĩa

Cho hàm 2 biến $z = f(x, y)$ *xác định trên một lân cận của điểm* $M(x_0, y_0)$. *Đạo hàm riêng theo biến* x *(nếu có) của hàm* $f(x, y)$ *tại điểm* $M(x_0, y_0)$ *kí hiệu là* $f'_x(M) = f'_x(x_0, y_0)$ *hoặc* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(M) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ *và được định nghĩa bởi:*

$$f'_x(x_0, y_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Định nghĩa

(tiếp)

Tương tự, đạo hàm riêng theo biến y *(nếu có) của hàm* $f(x, y)$ *tại điểm* $M(x_0, y_0)$ *kí hiệu là* $f'_y(M) = f'_y(x_0, y_0)$ *hoặc* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ *và được định nghĩa bởi:*

$$f'_y(x_0, y_0) := \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

2. Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Định nghĩa

(tiếp)
Tương tự, đạo hàm riêng theo biến y *(nếu có) của hàm* $f(x, y)$ *tại điểm* $M(x_0, y_0)$ *kí hiệu là* $f'_y(M) = f'_y(x_0, y_0)$ *hoặc* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(M) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ *và được định nghĩa bởi:*

$$f'_y(x_0, y_0) := \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Chú ý: nếu các giới hạn ở vế phải không tồn tại hữu hạn thì ta nói hàm số không tồn tại đạo hàm riêng tại (x_0, y_0).

Chú ý

- *Khi tính đạo hàm riêng của hàm* $f(x,y)$ *tại điểm* (x,y) *bất kì, ta thường kí hiệu ngắn gọn các đạo hàm riêng là* f'_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, f'_y, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *thay cho các kí hiệu đầy đủ tương ứng sau*
$f'_x(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), f'_y(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y).$

2. Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Chú ý

- *Khi tính đạo hàm riêng của hàm $f(x,y)$ tại điểm (x,y) bất kì, ta thường kí hiệu ngắn gọn các đạo hàm riêng là* f'_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, f'_y, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *thay cho các kí hiệu đầy đủ tương ứng sau* $f'_x(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), f'_y(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
- *Từ định nghĩa trên ta thấy để tính đạo hàm riêng theo biến nào ta coi các biến khác là hằng số và tính đạo hàm theo biến đang xét như đạo hàm của hàm một biến.*

Chú ý

- *Khi tính đạo hàm riêng của hàm* $f(x, y)$ *tại điểm* (x, y) *bất kì, ta thường kí hiệu ngắn gọn các đạo hàm riêng là* f'_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, f'_y, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *thay cho các kí hiệu đầy đủ tương ứng sau* $f'_x(x, y), \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y), f'_y(x, y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y).$
- *Từ định nghĩa trên ta thấy để tính đạo hàm riêng theo biến nào ta coi các biến khác là hằng số và tính đạo hàm theo biến đang xét như đạo hàm của hàm một biến.*

Hoàn toàn tương tự, ta có thể định nghĩa được các đạo hàm riêng f'_x, f'_y, f'_z của một hàm ba biến $f(x, y, z)$.

Ví dụ

Tính đạo hàm riêng của các hàm số sau:

(a) $f(x,y) = x^3y^4 - 3x^2 + 2y$

(b) $z = \arctan(2x - 3y)$

(c) $z = x^y$ *(điều kiện $x > 0$) tại điểm* $(1,2)$

(d) $u = \sqrt{x^2 + y^3 + z^4}$

(e) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^3}$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$

2. Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

2. Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

(b) $z'_x = [\arctan(2x - 3y)]'_x$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

(b) $z'_x = [\arctan(2x - 3y)]'_x = \dfrac{(2x - 3y)'_x}{1 + (2x - 3y)^2}$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

(b) $z'_x = [\arctan(2x - 3y)]'_x = \dfrac{(2x-3y)'_x}{1+(2x-3y)^2} = \dfrac{2}{1+(2x-3y)^2};$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

(b) $$z'_x = [\arctan(2x - 3y)]'_x = \frac{(2x-3y)'_x}{1+(2x-3y)^2} = \frac{2}{1+(2x-3y)^2};$$

$$z'_y = [\arctan(2x - 3y)]'_y$$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

(b) $$z'_x = [\arctan(2x - 3y)]'_x = \frac{(2x - 3y)'_x}{1 + (2x - 3y)^2} = \frac{2}{1 + (2x - 3y)^2};$$
$$z'_y = [\arctan(2x - 3y)]'_y = \frac{(2x - 3y)'_y}{1 + (2x - 3y)^2}$$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

(b) $$z'_x = [\arctan(2x - 3y)]'_x = \frac{(2x-3y)'_x}{1+(2x-3y)^2} = \frac{2}{1+(2x-3y)^2};$$
$$z'_y = [\arctan(2x - 3y)]'_y = \frac{(2x-3y)'_y}{1+(2x-3y)^2} = \frac{-3}{1+(2x-3y)^2}.$$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

(b) $$z'_x = [\arctan(2x - 3y)]'_x = \frac{(2x - 3y)'_x}{1 + (2x - 3y)^2} = \frac{2}{1 + (2x - 3y)^2};$$
$$z'_y = [\arctan(2x - 3y)]'_y = \frac{(2x - 3y)'_y}{1 + (2x - 3y)^2} = \frac{-3}{1 + (2x - 3y)^2}.$$

(c) $z'_x = (x^y)'_x$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

(b) $$z'_x = [\arctan(2x - 3y)]'_x = \frac{(2x-3y)'_x}{1+(2x-3y)^2} = \frac{2}{1+(2x-3y)^2};$$
$$z'_y = [\arctan(2x - 3y)]'_y = \frac{(2x-3y)'_y}{1+(2x-3y)^2} = \frac{-3}{1+(2x-3y)^2}.$$

(c) $z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1}$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

(b) $$z'_x = [\arctan(2x-3y)]'_x = \frac{(2x-3y)'_x}{1+(2x-3y)^2} = \frac{2}{1+(2x-3y)^2};$$
$$z'_y = [\arctan(2x-3y)]'_y = \frac{(2x-3y)'_y}{1+(2x-3y)^2} = \frac{-3}{1+(2x-3y)^2}.$$

(c) $z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1} \Longrightarrow z'_x(1,2) = 2.1^{2-1} = 2;$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

(b) $$z'_x = [\arctan(2x - 3y)]'_x = \frac{(2x-3y)'_x}{1+(2x-3y)^2} = \frac{2}{1+(2x-3y)^2};$$
$$z'_y = [\arctan(2x - 3y)]'_y = \frac{(2x-3y)'_y}{1+(2x-3y)^2} = \frac{-3}{1+(2x-3y)^2}.$$

(c) $z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1} \Longrightarrow z'_x(1,2) = 2.1^{2-1} = 2;$
$z'_y = (x^y)'_y$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

(b) $$z'_x = [\arctan(2x - 3y)]'_x = \frac{(2x-3y)'_x}{1+(2x-3y)^2} = \frac{2}{1+(2x-3y)^2};$$
$$z'_y = [\arctan(2x - 3y)]'_y = \frac{(2x-3y)'_y}{1+(2x-3y)^2} = \frac{-3}{1+(2x-3y)^2}.$$

(c) $z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1} \Longrightarrow z'_x(1,2) = 2.1^{2-1} = 2;$
$z'_y = (x^y)'_y = x^y \ln x$

Lời giải: Ở mục (a), (b), (c), (e) ta có các hàm 2 biến nên có 2 đạo hàm riêng; mục (d) là hàm 3 biến nên có 3 đạo hàm riêng:

(a) $f'_x = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_x = 3x^2y^4 - 6x;$
$f'_y = (x^3y^4 - 3x^2 + 2y)'_y = 4x^3y^3 + 2.$

(b) $z'_x = [\arctan(2x - 3y)]'_x = \dfrac{(2x-3y)'_x}{1 + (2x-3y)^2} = \dfrac{2}{1 + (2x-3y)^2};$
$z'_y = [\arctan(2x - 3y)]'_y = \dfrac{(2x-3y)'_y}{1 + (2x-3y)^2} = \dfrac{-3}{1 + (2x-3y)^2}.$

(c) $z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1} \Longrightarrow z'_x(1,2) = 2.1^{2-1} = 2;$
$z'_y = (x^y)'_y = x^y \ln x \Longrightarrow z'_y(1,2) = 1^2 \ln 1 = 0.$

Lời giải (tiếp):

(c) Biến đổi hàm thành: $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^3)$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^3)'_x}{x^2+y^3} = \frac{x}{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^3)'_y}{x^2+y^3} = \frac{3y^2}{2(x^2+y^3)}$$

(d) $$u'_x = \left(\sqrt{x^2+y^3+z^4}\right)'_x = \frac{(x^2+y^3+z^4)'_x}{2\sqrt{x^2+y^3+z^4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3+z^4}};$$

$$u'_y = \left(\sqrt{x^2+y^3+z^4}\right)'_y = \frac{(x^2+y^3+z^4)'_y}{2\sqrt{x^2+y^3+z^4}} = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3+z^4}};$$

$$u'_z = \left(\sqrt{x^2+y^3+z^4}\right)'_z = \frac{(x^2+y^3+z^4)'_z}{2\sqrt{x^2+y^3+z^4}} = \frac{2z^3}{\sqrt{x^2+y^3+z^4}}.$$

2. Đạo hàm riêng của hàm nhiều biến

Ví dụ

Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0); \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *của hàm* $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

Ví dụ

Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0); \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *của hàm* $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

Giải: Ta viết $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$.

Ví dụ

Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0); \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *của hàm* $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

Giải: Ta viết $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$.

Nếu dùng công thức tính đạo hàm ta có: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$; tương tự $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$.

Vậy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0); \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$? $\Longrightarrow$ Phải dùng định nghĩa đạo hàm riêng tại một điểm như trên ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} =$$

Ví dụ

Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0); \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *của hàm* $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

Giải: Ta viết $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$.

Nếu dùng công thức tính đạo hàm ta có: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$; tương tự $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$.

Vậy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0); \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)? \Longrightarrow$ Phải dùng định nghĩa đạo hàm riêng tại một điểm như trên ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

Ví dụ

Tính $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0); \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *của hàm* $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$.

Giải: Ta viết $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$.

Nếu dùng công thức tính đạo hàm ta có: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}$; tương tự $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$.

Vậy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0); \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)? \Longrightarrow$ Phải dùng định nghĩa đạo hàm riêng tại một điểm như trên ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0.$$

Tương tự dùng định nghĩa ta cũng có $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3. Vi Phân toàn phần

3.1 Định nghĩa vi phân toàn phần (tự đọc).

3. Vi Phân toàn phần

3.1 Định nghĩa vi phân toàn phần (tự đọc).

3.2 Công thức vi phân toàn phần

3. Vi Phân toàn phần

3.1 Định nghĩa vi phân toàn phần (tự đọc).

3.2 Công thức vi phân toàn phần

(a) Cho hàm 2 biến $z = f(x, y)$. Vi phân toàn phần của hàm số này tại điểm (x_0, y_0) xác định bởi công thức:

$$df(x_0, y_0) := f'_x(x_0, y_0).dx + f'_y(x_0, y_0).dy.$$

3. Vi Phân toàn phần

3.1 Định nghĩa vi phân toàn phần (tự đọc).

3.2 Công thức vi phân toàn phần

(a) Cho hàm 2 biến $z = f(x, y)$. Vi phân toàn phần của hàm số này tại điểm (x_0, y_0) xác định bởi công thức:

$$df(x_0, y_0) := f'_x(x_0, y_0).dx + f'_y(x_0, y_0).dy.$$

Trong trường hợp vi phân tại điểm bất kì ta viết ngắn gọn: $df = f'_x.dx + f'_y.dy$ Ở đó $f'_x; f'_y$ là các đạo hàm riêng của hàm f đã học như trên; dx, dy là các kí hiệu vi phân tương ứng của biến x, y.

3.1 Định nghĩa vi phân toàn phần (tự đọc).

3.2 Công thức vi phân toàn phần

(a) Cho hàm 2 biến $z = f(x, y)$. Vi phân toàn phần của hàm số này tại điểm (x_0, y_0) xác định bởi công thức:

$$df(x_0, y_0) := f'_x(x_0, y_0).dx + f'_y(x_0, y_0).dy.$$

Trong trường hợp vi phân tại điểm bất kì ta viết ngắn gọn: $df = f'_x.dx + f'_y.dy$ Ở đó $f'_x; f'_y$ là các đạo hàm riêng của hàm f đã học như trên; dx, dy là các kí hiệu vi phân tương ứng của biến x, y.

(b) Cho hàm 3 biến $u = f(x, y, z)$. Vi phân toàn phần của hàm số xác định theo công thức:

$$df = f'_x.dx + f'_y.dy + f'_z.dz.$$

3. Vi Phân toàn phần

Ví dụ

Tìm vi phần của các hàm số sau:

(a) $f(x,y) = x^y$ *tại điểm* $(1,2)$.

(b) $f(x,y) = \arctan \dfrac{x}{y}$

(a) Xem lại tính toán ở ví dụ trên ta có: $f'_x(1,2) = 2; f'_y(1,2) = 0.$

3. Vi Phân toàn phần

Ví dụ

Tìm vi phần của các hàm số sau:

(a) $f(x, y) = x^y$ *tại điểm* $(1, 2)$.

(b) $f(x, y) = \arctan \dfrac{x}{y}$

(a) Xem lại tính toán ở ví dụ trên ta có: $f'_x(1, 2) = 2; f'_y(1, 2) = 0$.

Do vậy: $df(1, 2) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 2).dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}(1, 2).dy = 2dx + 0dy = 2dx$

3. Vi Phân toàn phần

Ví dụ

Tìm vi phần của các hàm số sau:

(a) $f(x,y) = x^y$ *tại điểm* $(1,2)$.

(b) $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$

(a) Xem lại tính toán ở ví dụ trên ta có: $f'_x(1,2) = 2; f'_y(1,2) = 0$.

Do vậy: $df(1,2) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(1,2).dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,2).dy = 2dx + 0dy = 2dx$

(b) Với $f(x,y) = \arctan \dfrac{x}{y}$, trước hết ta tính:

$$f'_x = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)'_x}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

(b) Với $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$, trước hết ta tính:

$$f'_x = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)'_x}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$f'_x = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)'_y}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2};$$

Vậy áp dụng công thức ta có:

$$df = f'_x.dx + f'_y.dy = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

3.3. Ứng dụng vi phân toàn phần tính gần đúng

Công thức tính gần đúng: Cho hàm $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0); các số gia $\Delta x, \Delta y$ đủ nhỏ. Khi đó ta có công thức tính gần đúng sau:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y.$$

3.3. Ứng dụng vi phân toàn phần tính gần đúng

Công thức tính gần đúng: Cho hàm $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0); các số gia $\Delta x, \Delta y$ đủ nhỏ. Khi đó ta có công thức tính gần đúng sau:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y.$$

Ví dụ

. *Tính gần đúng bằng vi phân các số sau:*

(a) $A = \sqrt{1,03^2 + 1,98^3}$

(b) $B = 1,04^{3,03}$

(c) $C = \sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$

3.3. Ứng dụng vi phân toàn phần tính gần đúng

Lời giải:

(a) $A = \sqrt{1,03^2 + 1,98^3}$

Ta xét hàm $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$. Khi đó ta có:

$$A = f(1,03; 1,98)$$

Lời giải:

(a) $A = \sqrt{1,03^2 + 1,98^3}$

Ta xét hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$. Khi đó ta có:

$$A = f(1,03; 1,98) = f(1 + 0,03; 2 - 0,02).$$

3.3. Ứng dụng vi phân toàn phần tính gần đúng

Lời giải:

(a) $A = \sqrt{1,03^2 + 1,98^3}$

Ta xét hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$. Khi đó ta có:

$$A = f(1,03; 1,98) = f(1 + 0,03; 2 - 0,02).$$

Áp dụng công thức tính gần đúng bằng vi phân với $x_0 = 1; y_0 = 2; \Delta x = 0,03; \Delta y = -0,02$ ta có:

Lời giải:

(a) $A = \sqrt{1,03^2 + 1,98^3}$

Ta xét hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$. Khi đó ta có:

$$A = f(1,03; 1,98) = f(1 + 0,03; 2 - 0,02).$$

Áp dụng công thức tính gần đúng bằng vi phân với $x_0 = 1; y_0 = 2; \Delta x = 0,03; \Delta y = -0,02$ ta có:

$$A \approx f(1; 2) + f'_x(1; 2).0,03 + f'_y(1; 2).(-0,02).$$

3.3. Ứng dụng vi phân toàn phần tính gần đúng

Lời giải:

(a) $A = \sqrt{1,03^2 + 1,98^3}$

Ta xét hàm $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^3}$. Khi đó ta có:

$$A = f(1,03; 1,98) = f(1 + 0,03; 2 - 0,02).$$

Áp dụng công thức tính gần đúng bằng vi phân với $x_0 = 1; y_0 = 2; \Delta x = 0,03; \Delta y = -0,02$ ta có:

$$A \approx f(1;2) + f'_x(1;2).0,03 + f'_y(1;2).(-0,02).$$

Ta tính được: $f(1;2) = \sqrt{1^2 + 2^3} = 3;\ f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}} \implies f'_x(1;2) = \frac{1}{3};\ f'_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}} \implies f'_y(1;2) = 2$. Thay vào công thức trên ta được:

$$A \approx 3 + \frac{1}{3}.0,03 + 2.(-0,02) = 2,97.$$

4. Đạo hàm riêng và vi phân cấp 2 của hàm nhiều biến

Nhận xét rằng $f'_x(x,y)$ và $f'_y(x,y)$ cũng là các hàm 2 biến. Các đạo hàm riêng của chúng, nếu tồn tại được gọi là đạo hàm riêng cấp 2 của $f(x,y)$. Ta kí hiệu

$$f''_{xx}(x,y) = (f'_x(x,y))'_x$$
$$f''_{yy}(x,y) = (f'_y(x,y))'_y$$
$$f''_{xy}(x,y) = (f'_x(x,y))'_y$$
$$f''_{yx}(x,y) = (f'_y(x,y))'_x.$$

Hay đơn giản hơn: $f''_{xx} = (f'_x)'_x$, $f''_{yy} = (f'_y)'_y$, $f''_{xy} = (f'_x)'_y$, $f''_{yx} = (f'_y)'_x$.

ĐHR cấp 2

Ví dụ

Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $f(x,y) = xy^2 + x^3 - \sin y$ *tại* $(0, \frac{\pi}{2})$.

ĐHR cấp 2

Ví dụ

Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số $f(x,y) = xy^2 + x^3 - \sin y$ *tại* $(0, \frac{\pi}{2})$.

Ta có

$$\begin{aligned} f'_x &= y^2 + 3x^2 \\ f'_y(x,y) &= 2xy - \cos y. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= \left(y^2 + 3x^2\right)'_x = 6x \\ f''_{yy}(x,y) &= (2xy - \cos y)'_y = 2x + \sin y \\ f''_{xy}(x,y) &= \left(y^2 + 3x^2\right)'_y = 2y \\ f''_{yx}(x,y) &= (2xy - \cos y)'_x = 2y. \end{aligned}$$

Từ đó, dễ thấy

$$
\begin{aligned}
f''_{xx}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &= 6 \cdot 0 = 0 \\
f''_{yy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &= (2xy - \cos y)'_y = 2 \cdot 0 + \sin\frac{\pi}{2} = 1 \\
f''_{xy}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &= \left(y^2 + 3x^2\right)'_y = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \\
f''_{yx}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &= (2xy - \cos y)'_x = \pi.
\end{aligned}
$$

Chú ý

Ta gọi $f''_{xy}(x, y)$ và $f''_{yx}(x, y)$ là các đạo hàm riêng cấp 2 hỗn hợp của hàm 2 biến. Các đạo hàm riêng này nói chung không bằng nhau do thứ tự lấy đạo hàm khác nhau.

Chú ý

Ta gọi $f''_{xy}(x, y)$ và $f''_{yx}(x, y)$ là các đạo hàm riêng cấp 2 hỗn hợp của hàm 2 biến. Các đạo hàm riêng này nói chung không bằng nhau do thứ tự lấy đạo hàm khác nhau.
Định lý Schwartz (Giáo trình giải tích 2) cho ta điều kiện đủ để một hàm 2 biến có các đạo hàm riêng hỗn hợp $f''_{xy}(x, y)$ và $f''_{yx}(x, y)$ trùng nhau (yêu cầu tự đọc). Từ giờ trở đi, ta coi như $f''_{xy}(x, y)$ và $f''_{yx}(x, y)$ trùng nhau.

Chú ý

Ta gọi $f''_{xy}(x,y)$ và $f''_{yx}(x,y)$ là các đạo hàm riêng cấp 2 hỗn hợp của hàm 2 biến. Các đạo hàm riêng này nói chung không bằng nhau do thứ tự lấy đạo hàm khác nhau.
Định lý Schwartz (Giáo trình giải tích 2) cho ta điều kiện đủ để một hàm 2 biến có các đạo hàm riêng hỗn hợp $f''_{xy}(x,y)$ và $f''_{yx}(x,y)$ trùng nhau (yêu cầu tự đọc). Từ giờ trở đi, ta coi như $f''_{xy}(x,y)$ và $f''_{yx}(x,y)$ trùng nhau.
Hoàn toàn tương tự, ta có thể định nghĩa được các đạo hàm riêng cấp 2 $f''_{xx}(x,y,z)$, $f''_{yy}(x,y,z)$, $f''_{zz}(x,y,z)$, $f''_{xy}(x,y,z)$, $f''_{yx}(x,y,z)$, $f''_{yz}(x,y,z)$, $f''_{zy}(x,y,z)$, $f''_{xz}(x,y,z)$ và $f''_{zx}(x,y,z)$ của hàm 3 biến $f(x,y,z)$.

4.1 Vi phân cấp 2 của hàm nhiều biến

Giả sử $f(x, y)$ có tất cả các đạo hàm riêng cấp 2. Vi phân cấp 2 của $f(x, y)$ kí hiệu là $d^2 f(x, y)$ cho bởi

Công thức

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y) &= f''_{xx}(x, y)dx^2 + f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{yx}(x, y)dydx + f''_{yy}(x, y)dy^2 \\ &= f''_{xx}(x, y)dx^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{yy}(x, y)dy^2. \end{aligned}$$

Ví dụ

Tính vi phân cấp 2 của hàm $f(x, y) = xy^3 + 5x^2$ *tại* $(x_0, y_0) = (3, 1)$.

Ví dụ

Tính vi phân cấp 2 của hàm $f(x, y) = xy^3 + 5x^2$ *tại* $(x_0, y_0) = (3, 1)$.

Ta có

$$f'_x = y^3 + 10x; \quad f'_y = 3xy^2$$
$$f''_{xx} = 10; \quad f''_{xy} = 3y^2; \qquad f''_{yy} = 6xy.$$

Ví dụ

Tính vi phân cấp 2 của hàm $f(x,y) = xy^3 + 5x^2$ *tại* $(x_0, y_0) = (3,1)$.

Ta có

$$f'_x = y^3 + 10x; \quad f'_y = 3xy^2$$
$$f''_{xx} = 10; \quad f''_{xy} = 3y^2; \qquad f''_{yy} = 6xy.$$

Suy ra

$$d^2f(x,y) = 10dx^2 + 6y^2dxdy + 6xydy^2$$
$$d^2f(3,1) = 10dx^2 + 6.1^2dxdy + 6.3.1dy^2 = 10dx^2 + 6dxdy + 18dy^2.$$

5 Bài toán tìm cực trị của hàm nhiều biến

Ta có các bài toán tìm cực trị sau của hàm nhiều biến

- Bài toán tìm cực trị không có điều kiện (hàm 2 biến)

5 Bài toán tìm cực trị của hàm nhiều biến

Ta có các bài toán tìm cực trị sau của hàm nhiều biến

- Bài toán tìm cực trị không có điều kiện (hàm 2 biến)
- Bài toán tìm cực trị có điều kiện (hàm 2 biến)

5 Bài toán tìm cực trị của hàm nhiều biến

Ta có các bài toán tìm cực trị sau của hàm nhiều biến

- Bài toán tìm cực trị không có điều kiện (hàm 2 biến)
- Bài toán tìm cực trị có điều kiện (hàm 2 biến)
- Bài toán tìm min, max của hàm 2 biến trong miền đóng

5.1 Bài toán tìm cực trị không có điều kiện

Cho hàm 2 biến $f(x, y)$. Giả sử các đạo hàm cấp 2 của $f(x, y)$ tồn tại. Ta tìm các điểm cực tiểu địa phương và các điểm cực đại địa phương của $f(x, y)$ (gọi chung là các điểm cực trị) theo các bước sau

Bước 1: Tìm tập xác định D của $f(x, y)$

5.1 Bài toán tìm cực trị không có điều kiện

Cho hàm 2 biến $f(x,y)$. Giả sử các đạo hàm cấp 2 của $f(x,y)$ tồn tại. Ta tìm các điểm cực tiểu địa phương và các điểm cực đại địa phương của $f(x,y)$ (gọi chung là các điểm cực trị) theo các bước sau

Bước 1: Tìm tập xác định D của $f(x,y)$

Bước 2: Tính f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}

5.1 Bài toán tìm cực trị không có điều kiện

Cho hàm 2 biến $f(x,y)$. Giả sử các đạo hàm cấp 2 của $f(x,y)$ tồn tại. Ta tìm các điểm cực tiểu địa phương và các điểm cực đại địa phương của $f(x,y)$ (gọi chung là các điểm cực trị) theo các bước sau

Bước 1: Tìm tập xác định D của $f(x,y)$

Bước 2: Tính f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}

Bước 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x &= 0 \\ f'_y &= 0 \end{cases}$$

5.1 Bài toán tìm cực trị không có điều kiện

Cho hàm 2 biến $f(x, y)$. Giả sử các đạo hàm cấp 2 của $f(x, y)$ tồn tại. Ta tìm các điểm cực tiểu địa phương và các điểm cực đại địa phương của $f(x, y)$ (gọi chung là các điểm cực trị) theo các bước sau

Bước 1: Tìm tập xác định D của $f(x, y)$

Bước 2: Tính f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}

Bước 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x & = 0 \\ f'_y & = 0 \end{cases}$$

Các nghiệm của hệ này là $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,... (chú ý kết hợp điều kiện tập xác định để loại các điểm dừng không thỏa mãn). Ta gọi chúng là các điểm dừng của $f(x, y)$.

5.1 Bài toán tìm cực trị không có điều kiện (Tiếp)

Bước 4: Xét riêng tại điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$.
Tính các giá trị $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$.

5.1 Bài toán tìm cực trị không có điều kiện (Tiếp)

Bước 4: Xét riêng tại điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$.
Tính các giá trị $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$.
Bước 5: Ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 1

$$\begin{cases} B^2 - AC & < 0 \\ A & > 0 \end{cases}$$

$M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu của $f(x, y)$. Ta tính $f_{CT} = f(x_0, y_0)$

5.1 Bài toán tìm cực trị không có điều kiện (Tiếp)

Bước 4: Xét riêng tại điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$.
Tính các giá trị $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$.
Bước 5: Ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 1

$$\begin{cases} B^2 - AC & < 0 \\ A & > 0 \end{cases}$$

$M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu của $f(x, y)$. Ta tính $f_{CT} = f(x_0, y_0)$

- Trường hợp 2

$$\begin{cases} B^2 - AC & < 0 \\ A & < 0 \end{cases}$$

$M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực đại của $f(x, y)$. Ta tính $f_{CĐ} = f(x_0, y_0)$

Bước 5: Ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 3: $B^2 - AC > 0$.
  $M_0(x_0, y_0)$ không là điểm cực trị của $f(x, y)$.

5.1 Bài toán tìm cực trị không có điều kiện (Tiếp)

Bước 5: Ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 3: $B^2 - AC > 0$.
  $M_0(x_0, y_0)$ không là điểm cực trị của $f(x, y)$.
- Trường hợp 4: $B^2 - AC = 0$.
  Ta chưa thể kết luận. Phải dùng phương pháp khác để xét tính cực trị của M_0.

5.1 Bài toán tìm cực trị không có điều kiện (Tiếp)

Bước 5: Ta có các trường hợp sau

- Trường hợp 3: $B^2 - AC > 0$.
  $M_0(x_0, y_0)$ không là điểm cực trị của $f(x, y)$.
- Trường hợp 4: $B^2 - AC = 0$.
  Ta chưa thể kết luận. Phải dùng phương pháp khác để xét tính cực trị của M_0.

Ta tiếp tục lặp lại bước 4 và bước 5 cho tất cả các điểm dừng khác: M_1, M_2,...
Bước 6: Kết luận về các điểm cực trị tìm được ở bước 4 và bước 5.

5.1 Bài toán tìm cực trị không có điều kiện (Tiếp)

Ví dụ

Tìm cực trị của $f(x, y) = x^2 + y^4 - 4x - 4y + 1.$

Ví dụ

Tìm cực trị của $f(x,y) = x^2 + y^4 - 4x - 4y + 1.$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}^2$. Ta có:

$$f'_x = 2x - 4;\ f'_y = 4y^3 - 4$$
$$f''_{xx} = 2;\ f''_{xy} = 0;\ f''_{yy} = 12y^2.$$

Ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x = 2x - 4 = 0 \\ f'_y = 4y^3 - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $f(x,y)$ có điểm dừng $M_0(2,1)$

Xét tại M_0: $A = f''_{xx}(2,1) = 2$, $B = f''_{xy}(2,1) = 0$, $C = f''_{yy}(2,1) = 12$.
Ta có

$$\begin{cases} B^2 - AC = 0 - 2.12 < 0 \\ A = 2 > 0 \end{cases}$$

$M_0(2,1)$ là điểm cực tiểu, $f_{CT} = f(2,1) = 2^2 + 1^4 - 4.2 - 4.1 + 1 = -6$.

Lưu ý

- Các bước quan trọng nhất trong bài toán tìm cực trị không điều kiện là bước 2 và bước 3 (tính đạo hàm và giải hệ phương trình).
- Giải hệ phương trình là bước khó nhất.
- Chú ý kết hợp điều kiện tập xác định khi giải hệ phương trình.
- Thực hiện bước 4 và bước 5 với tất cả các điểm dừng tìm được.

Ví dụ

Tìm cực trị của $f(x,y) = xy - 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

Ví dụ

Tìm cực trị của $f(x,y) = xy - 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

Tập xác định: $x, y \neq 0$. Ta có:

$$f'_x = y + \frac{8}{x^2}; f'_y = x + \frac{8}{y^2}$$
$$f''_{xx} = -\frac{16}{x^3}; f''_{xy} = 1; f''_{yy} = -\frac{16}{y^3}.$$

Ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x = y + \dfrac{8}{x^2} = 0 \\ f'_y = x + \dfrac{8}{y^2} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{8}{x^2} & (1) \\ x = -\dfrac{8}{y^2} & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta có

$$x = -\frac{8}{(\frac{-8}{x^2})^2} = -\frac{x^4}{8} \iff x(8 + x^3) = 0$$
$$\iff 8 + x^3 = 0 \text{ (vì } x \neq 0) \iff x = -2.$$

Thay $x = -2$ vào (1) ta được $y = -2$. Vậy $f(x, y)$ có điểm dừng $M_0(-2, -2)$.
Xét tại M_0: $A = f''_{xx}(-2, -2) = 2$, $B = f''_{xy}(-2, -2) = 1$, $C = f''_{yy}(-2, -2) = 2$.
Ta có

$$\begin{cases} B^2 - AC = 1 - 4 < 0 \\ A = 2 > 0 \end{cases}$$

$M_0(-2, -2)$ là điểm cực tiểu, $f_{CT} = f(-2, -2) = 12$.

6.1 Hàm ẩn một biến

Định nghĩa: Cho hàm số một biến $y = y(x)$. Nếu $y(x)$ thỏa mãn hệ thức

$$F(x, y) = F(x, y(x)) = 0 \qquad (*)$$

thì $y = y(x)$ được gọi là một hàm ẩn một biến xác định bởi $(*)$.

Ví dụ

- *Hàm số* $y = \frac{3}{4}x - 5$ *có thể biểu diễn dưới dạng hàm ẩn xác định bởi* $F(x, y) = 3x - 4y - 20 = 0$.

6.1 Hàm ẩn một biến

Định nghĩa: Cho hàm số một biến $y = y(x)$. Nếu $y(x)$ thỏa mãn hệ thức

$$F(x, y) = F(x, y(x)) = 0 \qquad (*)$$

thì $y = y(x)$ được gọi là một hàm ẩn một biến xác định bởi $(*)$.

Ví dụ

- *Hàm số $y = \frac{3}{4}x - 5$ có thể biểu diễn dưới dạng hàm ẩn xác định bởi $F(x, y) = 3x - 4y - 20 = 0$.*
- *Hàm số $y = \sqrt[3]{x - 1}$ có thể biểu diễn dưới dạng hàm ẩn xác định bởi $F(x, y) = y^3 - x + 1 = 0$.*

6.1 Hàm ẩn một biến

Định nghĩa: Cho hàm số một biến $y = y(x)$. Nếu $y(x)$ thỏa mãn hệ thức

$$F(x, y) = F(x, y(x)) = 0 \qquad (*)$$

thì $y = y(x)$ được gọi là một hàm ẩn một biến xác định bởi $(*)$.

Ví dụ

- *Hàm số* $y = \frac{3}{4}x - 5$ *có thể biểu diễn dưới dạng hàm ẩn xác định bởi* $F(x, y) = 3x - 4y - 20 = 0$.
- *Hàm số* $y = \sqrt[3]{x - 1}$ *có thể biểu diễn dưới dạng hàm ẩn xác định bởi* $F(x, y) = y^3 - x + 1 = 0$.
- *Đôi khi, việc tìm chính xác công thức* $y = y(x)$ *từ* $F(x, y) = 0$ *không đơn giản, chẳng hạn* $F(x, y) = \cos(xy) + e^{x^3 + 5y} - \arctan x + 3y = 0$.

Cho hàm ẩn một biến $y = y(x)$ xác định bởi hệ thức

$$F(x, y) = 0.$$

Coi $F(x, y)$ là một hàm 2 biến đối với x, y.Ta có

Công thức

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

6.2 Đạo hàm của hàm ẩn một biến (Tiếp)

Ví dụ

Tìm đạo hàm của hàm ẩn xác định bởi $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

Ví dụ

Tìm đạo hàm của hàm ẩn xác định bởi $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

Ta có

$$F'_x = 3x^2 - 3y$$
$$F'_y = 3y^2 - 3x$$

Do đó

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x},$$

với $y^2 - x \neq 0.$

6.3 Hàm ẩn hai biến

Định nghĩa: Cho hàm số hai biến $z = z(x, y)$. Nếu $z(x, y)$ thỏa mãn hệ thức

$$F(x, y, z) = F(x, y, z(x, y)) = 0 \qquad (**)$$

thì $z = z(x, y)$ được gọi là một hàm ẩn 2 biến xác định bởi (**).

6.3 Hàm ẩn hai biến

Định nghĩa: Cho hàm số hai biến $z = z(x, y)$. Nếu $z(x, y)$ thỏa mãn hệ thức

$$F(x, y, z) = F(x, y, z(x, y)) = 0 \qquad (**)$$

thì $z = z(x, y)$ được gọi là một hàm ẩn 2 biến xác định bởi (**).

Ví dụ

$z(x, y)$ là hàm ẩn xác định bởi $F(x, y, z) = xy - yz^2 + \arcsin(xyz) = 0.$

6.4 Đạo hàm của hàm ẩn hai biến

Cho $z(x, y)$ là hàm ẩn hai biến $z = z(x, y)$ xác định bởi $F(x, y, z) = 0$. Ta coi $F(x, y, z)$ là một hàm 3 biến đối với x, y, z. Các đạo hàm riêng z'_x và z'_y cho bởi

Công thức

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

6.4 Đạo hàm của hàm ẩn hai biến

Cho $z(x,y)$ là hàm ẩn hai biến $z = z(x,y)$ xác định bởi $F(x,y,z) = 0$. Ta coi $F(x,y,z)$ là một hàm 3 biến đối với x,y,z. Các đạo hàm riêng z'_x và z'_y cho bởi

Công thức

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z},$$
$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Chú ý rằng khi đó, vi phân toàn phần của $z(x,y)$ sẽ cho bởi

$$dz(x,y) = z'_x dx + z'_y dy = -\frac{F'_x}{F'_z}dx - \frac{F'_y}{F'_z}dy$$

Ví dụ

Tìm vi phân toàn phần của hàm ẩn $z(x, y)$ *xác định bởi phương trình* $xyz = \cos(x + y + z)$.

Ví dụ

Tìm vi phân toàn phần của hàm ẩn $z(x,y)$ xác định bởi phương trình $xyz = \cos(x+y+z)$.

Theo bài ra, ta lấy hàm $F(x,y,z)$ cho bởi
$F(x,y,z) = xyz - \cos(x+y+z) = 0.$

$$F'_x = yz + \sin(x+y+z)$$
$$F'_y = xz + \sin(x+y+z)$$
$$F'_z = xy + \sin(x+y+z)$$

Do đó

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz + \sin(x+y+z)}{xy + \sin(x+y+z)}$$
$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{xz + \sin(x+y+z)}{xy + \sin(x+y+z)}.$$

Từ đó, ta tính được vi phân toàn phần của $z(x, y)$:

$$dz(x, y) = -\frac{yz + \sin(x + y + z)}{xy + \sin(x + y + z)}dx - \frac{xz + \sin(x + y + z)}{xy + \sin(x + y + z)}dy.$$