BÀI TẬP GIẢI TÍCH 2

Năm học 2021 - 2022

Chương 1. Hàm nhiều biến

Bài 1. Tính các đạo hàm riêng của hàm số:

1. Cho $z = \sqrt[3]{xy}$, tính $z'_x(0,0), z'_y(0,0)$.
2. $z = \ln \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$
3. $z = \ln \tan \dfrac{x}{y}$
4. $z = \arctan \dfrac{x+y}{x-y}$
5. $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^2} + \sin(4x^2 + 5y)$.
6. $f(x,y) = \arctan \dfrac{x+y}{1-xy}$.
7. $f(x,y,z) = \arctan \dfrac{y}{xz}$
8. $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2z + xz^3 + e^{xyz}$
9. $u = x^{y^2 z}$

Bài 2. Tính các đạo hàm của hàm số hợp:

1. Cho $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = xy$, $v = e^{x+y}$. Tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
2. Cho $z = \ln(3x + 2y - 1)$, $x = e^t$, $y = \sin t$. Tính $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{dz}{dt}$.
3. Cho $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$, f là hàm khả vi. Chứng minh rằng:
$$\frac{\partial u}{\partial y} \cos x + \frac{\partial u}{\partial x} \cos y = \cos x \cos y.$$
4. Cho $z = f(xy + y^2)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức $A = (x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
5. Cho $u = f\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{x}{z}\right)$, f là hàm khả vi. Rút gọn biểu thức $B = x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Bài 3. Đạo hàm và vi phân của hàm ẩn

1. Tính $y'(x)$ biết $y = y(x)$ hàm ẩn xác định hệ thức: $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.
2. Tính $y'(x)$ của hàm ẩn xác định bởi phương trình $xe^y + ye^x = 1$ và từ đó tính $y'(0)$.
3. Tính z'_x, z'_y và dz biết $z = z(x,y)$ là hàm ẩn xác định bởi
   (a) $xy^2z^3 + x^3y^2z = x + y + z$.
   (b) $\arctan z + z^2 = e^{xy}$
   (c) $z - ye^{x/z} = 0$

(d) $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y} + 1$

(e) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

(f) $2x + 3y + z = e^{xyz}$.

(g) $xyz = \cos(x + y + z)$

(h) $3x + 2y + z = e^{-x-y-z}$.

4. Tính u'_x, u'_y biết $u = x^2 + y^2 + xyz$ và $z = z(x,y)$ xác định bởi $ze^z = ye^x + xe^y$.

Bài 3. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

1. Cho hàm số $u(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Hãy rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

2. Cho $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Chứng minh rằng: $u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = \dfrac{2}{u}$.

3. Tính $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ biết $u(x,y) = x + (y-1)\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)$

4. Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của hàm số $f(x,y) = x\cos(3x + y^2) + e^{2x+3y}$.

5. Tính $d^2f(1,1)$, biết: $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 2\ln y$.

6. Tính $d^2f(0,1)$, biết: $f(x,y) = \arctan\dfrac{x}{y}$.

7. Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 và vi phân toàn phần của hàm số $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 3\arctan\dfrac{x}{y}$ tại điểm $(1,2)$.

8. Tìm d^2z biết:

   (a) $z = x^2\ln(x+y)$

   (b) $z = \arctan\dfrac{y}{x}$

Bài 4. Tìm cực trị của hàm nhiều biến

1. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$
2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 15xy$.
3. $f(x,y) = xy + 1000\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$
4. $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$
5. $f(x,y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{1}{y}$
6. $f(x,y) = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 7y + 5$.
7. $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2\ln(xy)$.
8. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
9. $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$.

Chương 2. Tích phân nhiều lớp

Bài 1. Tính các tích phân hai lớp sau:

1. $I = \iint\limits_D (x-y)dxdy$; D là miền giới hạn bởi các đường $y = x, y = 2 - x^2$

2. $I = \iint\limits_D (x^2+2y)dxdy$; D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 1, y = x + 1$.

3. $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$; D là miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = x,\ y = 0,\ x + y = 2,\ x + y = 4$.

4. $I = \iint\limits_D (x^3+4y)dxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $y = 0;\ x = \sqrt{y};\ y = 2 - x$.

5. $I = \iint\limits_D xydxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $x = 0,\ y = 1,\ x^2 + y^2 = 2x$.

6. $I = \iint\limits_D (3x+4y)dxdy$, D là tam giác OBC, $O(0,0)$, $B(-2,2)$, $C(2,0)$.

7. $I = \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $x = 2,\ xy = 1,\ y = x$.

8. $I = \iint\limits_D xydxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{2x - x^2},\ y = 0$

9. $I = \iint\limits_D x^2ydxdy$, D là miền phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2,\ y = \frac{x^2}{4},\ y = 1$

10. $I = \iint\limits_D (x+2y)dxdy$, D là tam giác ABC , với $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(4,-2)$.

Bài 2. Tính các tích phân sau bằng cách đổi biến:

1. $I = \iint\limits_D (x^3-y^3)dxdy$; D giới hạn bởi $x + y = 1,\ x + y = 4,\ x - y = 1,\ x - y = -1$.

2. $I = \iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy$; D giới hạn bởi các đường $x = \sqrt{1-y^2},\ y = x,\ y = -x$.

3. $I = \iint\limits_D (1+xy)dxdy$; với $D = \{1 \le x^2 + y^2 \le 2x\}$

4. $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, với $D = \{x^2+y^2 \le x,\ y \ge 0\}$

5. $I = \iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$; trong đó $D = \{x^2+y^2 \le R^2,\ y \ge 0\}$.

Bài 3. Tính các tích phân ba lớp sau:

1. $I = \iiint\limits_V xdxdydz$; V là tứ diện được giới hạn bởi các mặt $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2. $I = \iiint\limits_V (z+x^2+y^2)dxdydz$; V được giới hạn bởi các mặt $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z=1$.

3. $I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$; V giới hạn bởi $z = \sqrt{2-x^2-y^2}$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$

4. $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$; trong đó $V = \{x^2+y^2+z^2 \le z\}$

5. $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$; trong đó $V = \{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$.

Chương 3. Tích phân đường và tích phân mặt

Bài 1. Tính tích phân đường loại 1

1. $I = \int\limits_{\widehat{AB}} x^2 ds$, $\widehat{AB}$ là cung $y = \ln x$ và $A(1,0)$, $B(e,1)$.

2. $I = \int\limits_{\widehat{OA}} \dfrac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, $\widehat{OA}$ là đoạn thẳng nối gốc $O(0,0)$ với điểm $A(1,2)$.

3. $I = \int\limits_L (x^2+y^2)ds$, L là biên của tam giác OAB với $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(-1,1)$.

4. $I = \int\limits_L (x+y)ds$; $L:\ x^2+y^2 = ax,\ a > 0$

5. $I = \int\limits_L (x+y+z)ds$; L là đường cong $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t,\ 0 \le t \le 2\pi$

6. $I=\int\limits_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})ds;\;\; C:\;\; x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\; a>0$

7. $I=\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds;\;\; C:\; x^2+y^2=2y.$

Bài 2. Tính tích phân đường loại 2

1. $I=\int\limits_L ye^{xy}dx+x^4e^{xy}dy;$ trong đó L: $y=x^2$ đi từ $A(0,0)\to\; B(1,1)$.

2. $I=\int\limits_L \dfrac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}};$ trong đó: $L:\begin{cases} x=R\cos^3 t \\ y=R\sin^3 t\end{cases},\; 0\le t\le \pi/2.$

3. $I=\oint\limits_L |x|dx+|y|dy;$ L là đường gấp khúc nối các điểm $A(1,0)\to B(0,2)\to C(-1,0)\to D(0,-2)\to A(1,0)$.

4. $I=\oint\limits_{L^+} 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy,$ L là biên của tam giác ΔLMN, $L(1,1)$, $M(2,2)$, $N(1,3)$.

5. $I=\oint\limits_{L^+}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy;$ trong đó L: $x^2+y^2=ax,\; a>0$.

6. $I=\int\limits_{(2,1)}^{(4,3)} e^{xy}(1+xy)dx+x^2e^{xy}dy.$

7. $I=\oint\limits_{L^+}(-x^2y)dx+xy^2dy;\;\; L:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1.$

8. $I=\oint\limits_{L^+}\dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2};\; L:\; x^2+y^2=4.$

9. $I=\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y)dx+(x-y)dy.$

10. $I=\int\limits_L (x+y+z)dx-xdy+xydz;$ trong đó L là đoạn thẳng đi từ $A(1,2,3)$ đến $B(2,4,5)$.

Bài 3. Tính tích phân mặt loại 1

1. $I = \iint\limits_S (x^2+y^2)dS$; S là phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\geq 0$.

2. $I = \iint\limits_S (x^2+z^2)dS$; trong đó S là phần mặt $z=\sqrt{2-x^2-y^2}, z\geq 1$.

3. $I = \iint\limits_S \dfrac{dS}{(1+x+y)^2}$; S là phần mặt $x+y+z=1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

4. $\iint\limits_S xyzdS,$ S là phần mặt $z=x^2+y^2$ giới hạn bởi $z=1$.

5. $I = \iint\limits_S \left(z+2x+\dfrac{4y}{3}\right)dS$; trong đó S là phần mặt $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

Bài 4. Tính tích phân mặt loại 2

1. $I = \iint\limits_S zdxdy$; S là phía ngoài mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1;\ z\geq 0$.

2. $I = \iint\limits_S yzdxdy$; S là mặt phía ngoài của vật thể giới hạn bởi $x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq 1$.

3. $I = \iint\limits_S y^2dxdz+z^2dxdy$; S là mặt phía ngoài của vật thể giới hạn bởi các mặt $z=x^2+y^2,\ z=1$.

Chương 4. Phương trình vi phân

Bài 1. Giải các phương trình tách biến:

1. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$
2. $y'=x^2+xy+\dfrac{y^2}{4}-1$
3. $y'=(x+y+1)^2$
4. $y'=\cos(x-y-1)$

Bài 2 . Giải các phương trình đẳng cấp:

1. $y'=e^{-\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$
2. $xy'-y+x\cos\dfrac{y}{x}=0$
3. $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$
4. $y'=\dfrac{y}{x}+\cos\dfrac{y}{x}$

5. $y' = \dfrac{3x^2 - xy - y^2}{x^2}$

6. $y' = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$

Bài 3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 1:

1. $y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$
2. $y' + y = \dfrac{1}{e^x(1-x)}, \;\; y(2) = 1.$
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
4. $(x^2 + y)dx = xdy$
5. $(y + \ln x)dx - xdy = 0$
6. $y' \cos y + \sin y = x$

Bài 4. Giải các phương trình Becnoulli:

1. $y' - 2xy = 3x^3y^2$
2. $2y' - \dfrac{x}{y} = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$
3. $y' + 2y = y^2e^x$
4. $xy' + y = y^2 \ln x; \;\; y(1) = 1$
5. $xy' - 2x\sqrt{y}\cos x = -2y$

Bài 5. Giải các phương trình vi phân toàn phần:

1. $(x + y)dx + (x - y)dy = 0; \;\; y(0) = 0.$
2. $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$
3. $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$
4. $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0$

Bài 6. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng:

1. $y'' - 2y' + y = 2e^{2x}.$
2. $y'' - 6y' + 9y = \cos 3x.$
3. $2y'' + 3y' + y = xe^{-x}$
4. $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 4x + 3$
5. $y'' - 4y' = 4x^2 + 3x + 2;$
   $y(0) = 0, y'(0) = 2$
6. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x},$
   $y(2) = y'(2) = 0$
7. $4y'' - 4y' + y = xe^{\frac{1}{2}x}$
8. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x.$
9. $y'' + 9y = \cos 3x + e^x$
10. $y'' + y = 4xe^x$
11. $y'' + y = 6\sin x$
12. $y'' - 2y' + y = xe^x$
13. $y'' - 4y' = x^2 + 2x + 3$
14. $y'' - 2y' = 2\cos^2 x$