MÔN HỌC: XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Trần Văn Long

14th April 2020

Nội dung: XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Chương 1: Biến cố và xác suất của biến cố
Chương 2: Biến ngẫu nhiên rời rạc
Chương 3: Biến ngẫu nhiên liên tục
Chương 4: Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Nội dung: XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Chương 1: Biến cố và xác suất của biến cố
Chương 2: Biến ngẫu nhiên rời rạc
Chương 3: Biến ngẫu nhiên liên tục
Chương 4: Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Giáo trình: XÁC SUẤT THỐNG KÊ-TẬP 1, 2017. Tác giả: Trần Văn Long, Hoàng Việt Long, Phí Thị Vân Anh

Mục lục

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Khái niệm phép thử

Hiện tượng ngẫu nhiên. Có nhiều hiện tượng, sự việc được hình thành và tiến triển trong những điều kiện không thay đổi nhưng lại cho kết quả cuối cùng không tất định. Ta thấy rằng có thể xuất hiện một vài kết quả khác nhau hoặc vô số kết quả khác nhau đối với những hiện tượng, sự việc như thế. Với đặc điểm này chúng được gọi là các hiện tượng ngẫu nhiên.

Hiện tượng ngẫu nhiên. Có nhiều hiện tượng, sự việc được hình thành và tiến triển trong những điều kiện không thay đổi nhưng lại cho kết quả cuối cùng không tất định. Ta thấy rằng có thể xuất hiện một vài kết quả khác nhau hoặc vô số kết quả khác nhau đối với những hiện tượng, sự việc như thế. Với đặc điểm này chúng được gọi là các hiện tượng ngẫu nhiên.

Phép thử ngẫu nhiên được nhìn nhận là không có định nghĩa chính xác giống những khái niệm điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong hình học. Ta đưa ra đây một cách hiểu đơn giản về khái niệm này.

Hiện tượng ngẫu nhiên. Có nhiều hiện tượng, sự việc được hình thành và tiến triển trong những điều kiện không thay đổi nhưng lại cho kết quả cuối cùng không tất định. Ta thấy rằng có thể xuất hiện một vài kết quả khác nhau hoặc vô số kết quả khác nhau đối với những hiện tượng, sự việc như thế. Với đặc điểm này chúng được gọi là các hiện tượng ngẫu nhiên.

Phép thử ngẫu nhiên được nhìn nhận là không có định nghĩa chính xác giống những khái niệm điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong hình học. Ta đưa ra đây một cách hiểu đơn giản về khái niệm này.

Khái niệm phép thử ngẫu nhiên

Những quá trình, hiện tượng v. v. mà có kết quả khác nhau cho dù sự hình thành và tiến triển của nó được lặp lại nhiều lần với các điều kiện như nhau được gọi là các phép thử ngẫu nhiên.

Phép thử ngẫu nhiên:

- Không thể dự báo được kết quả trước khi phép thử được thực hiện.
- Phép thử được thực hiện lặp lại nhiều lần.

Các ví dụ về phép thử

- Gieo một con xúc xắc.
- Gieo một đồng xu.
- Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong một lớp.

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Không gian mẫu

Định nghĩa 1.2

Không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Ký hiệu tập không gian mẫu là Ω.

Định nghĩa 1.2

Không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Ký hiệu tập không gian mẫu là Ω.

Chúng ta có thể nhìn nhận kết quả của một phép thử theo các chiều hướng khác nhau. Tương ứng với mỗi cách nhìn ta thiết lập được một không gian mẫu. Như vậy ứng với mỗi phép thử ta có thể xây những không gian mẫu khác nhau.

Định nghĩa 1.2

Không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Ký hiệu tập không gian mẫu là Ω.

Chúng ta có thể nhìn nhận kết quả của một phép thử theo các chiều hướng khác nhau. Tương ứng với mỗi cách nhìn ta thiết lập được một không gian mẫu. Như vậy ứng với mỗi phép thử ta có thể xây những không gian mẫu khác nhau.

Ví dụ

Gieo đồng thời hai đồng xu.

Ta có thể xây dựng không gian mẫu là

$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}.$$

Cách mô tả một không gian mẫu

Liệt kê các phần tử

Ví dụ

Gieo một con xúc xắc. Tương ứng không gian mẫu là

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Cách mô tả một không gian mẫu

Liệt kê các phần tử

Ví dụ

Gieo một con xúc xắc. Tương ứng không gian mẫu là

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ví dụ

Chọn ngẫu nhiên một số từ 1 đến 20. Tương ứng không gian mẫu là

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 20\}.$$

Mô tả không gian mẫu theo tính chất đặc trưng

Ví dụ 1.4

Một vận động viên ném bóng vào rổ, anh ta ném liên tiếp cho đến khi nào có bóng trúng rổ thì dừng. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Mô tả không gian mẫu theo tính chất đặc trưng

Ví dụ 1.4

Một vận động viên ném bóng vào rổ, anh ta ném liên tiếp cho đến khi nào có bóng trúng rổ thì dừng. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Ta ký hiệu T tương ứng với việc anh ta ném bóng trúng rổ, ký hiệu K tương ứng với việc anh ta ném bóng không trúng rổ trong một lần ném. Do không khống chế số lần ném và điều kiện là khi nào bóng trúng rổ thì mới dừng nên không gian mẫu có dạng

$$\Omega = \{T, KT, KKT, KKKT, ..., \underbrace{KK...K}_{n-1 \text{ lần}} T, ...\}.$$

Mỗi phần tử của không gian mẫu chỉ xuất hiện T ở cuối và số lượng phần tử không gian mẫu trên được gọi là vô hạn đếm được.

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Khái niệm biến cố

Biến cố được mô tả như một tập con của không gian mẫu. Biến cố mô tả bởi các chữa in hoa A, B, C, A_1, A_2.
Một phép thử ngẫu nhiên có không gian mẫu Ω. Một biến cố A, ta có $A \subset \Omega$.

- Mỗi biến cố là một sự kiện mà sự xuất hiện hay không xuất hiện của nó phụ thuộc vào kết quả phép thử.
- Một biến cố xuất hiện nếu kết quả của phép thử là một phần tử của biến cố.

Mô tả biến cố ta luôn đặt câu hỏi: Khi nào biến cố xuất hiện.

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Khái niệm biến cố

Biến cố được mô tả như một tập con của không gian mẫu. Biến cố mô tả bởi các chữa in hoa A, B, C, A_1, A_2.
Một phép thử ngẫu nhiên có không gian mẫu Ω. Một biến cố A, ta có $A \subset \Omega$.

- Mỗi biến cố là một sự kiện mà sự xuất hiện hay không xuất hiện của nó phụ thuộc vào kết quả phép thử.
- Một biến cố xuất hiện nếu kết quả của phép thử là một phần tử của biến cố.

Mô tả biến cố ta luôn đặt câu hỏi: Khi nào biến cố xuất hiện.

Ví dụ

Phép thử ngẫu nhiên: Gieo một con xúc sắc. Biến cố A: "Xuất hiện mặt có số chấm chẵn".
Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Biến cố $A = \{2, 4, 6\}$

Biến cố chắc chắn, biến cố rỗng, biến cố ngẫu nhiên

- Biến cố chắc chắn: Là biến cố chắc chắn xảy mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là Ω.
- Biến cố rỗng: Là biến cố không thể xảy ra mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là $\varnothing$.
- Biến cố ngẫu nhiên: Các biến cố khác với Ω và $\varnothing$ được gọi là biến cố ngẫu nhiên.

Biến cố chắc chắn, biến cố rỗng, biến cố ngẫu nhiên

- Biến cố chắc chắn: Là biến cố chắc chắn xảy mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là Ω.
- Biến cố rỗng: Là biến cố không thể xảy ra mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là $\varnothing$.
- Biến cố ngẫu nhiên: Các biến cố khác với Ω và $\varnothing$ được gọi là biến cố ngẫu nhiên.

Ví dụ 1.7

Trong phép thử lấy một số tự nhiên bất kỳ, gọi A là biến cố

$$A = \{x \mid x \text{ là một ước số chẵn của } 5\}.$$

Khi đó A là biến cố rỗng, vì các ước số của 5 là các số 1 và 5 đều là các số lẻ .

Giao của hai biến cố

Giao của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là AB (hoặc $A \cap B$). Biến cố $A.B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.

Giao của hai biến cố

Giao của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là AB (hoặc $A \cap B$). Biến cố $A.B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.

Nếu $AB = \emptyset$ (hai tập rời nhau), A và B xung khắc.

Giao của hai biến cố

Giao của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là AB (hoặc $A \cap B$). Biến cố $A.B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.
Nếu $AB = \emptyset$ (hai tập rời nhau), A và B xung khắc.

Hợp của hai biến cố

Hợp của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là $A \cup B$. Biến cố $A \cup B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi biến cố A hoặc biến cố B xuất hiện.

Giao của hai biến cố

Giao của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là AB (hoặc $A \cap B$).
Biến cố $A.B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.
Nếu $AB = \emptyset$ (hai tập rời nhau), A và B xung khắc.

Hợp của hai biến cố

Hợp của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là $A \cup B$. Biến cố $A \cup B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi biến cố A hoặc biến cố B xuất hiện.
Nếu A và B xung khắc ta viết $A + B$ thay cho hợp $A \cup B$.

Giao của hai biến cố

Giao của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là AB (hoặc $A \cap B$). Biến cố $A.B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.
Nếu $AB = \emptyset$ (hai tập rời nhau), A và B xung khắc.

Hợp của hai biến cố

Hợp của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là $A \cup B$. Biến cố $A \cup B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi biến cố A hoặc biến cố B xuất hiện.
Nếu A và B xung khắc ta viết $A + B$ thay cho hợp $A \cup B$.

Biến cố đối

Biến cố đối của biến cố A được ký hiệu là $\overline{A}$. Biến cố $\overline{A}$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi A không xuất hiện.

Giao của hai biến cố

Giao của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là AB (hoặc $A \cap B$). Biến cố $A.B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.
Nếu $AB = \emptyset$ (hai tập rời nhau), A và B xung khắc.

Hợp của hai biến cố

Hợp của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là $A \cup B$. Biến cố $A \cup B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi biến cố A hoặc biến cố B xuất hiện.
Nếu A và B xung khắc ta viết $A + B$ thay cho hợp $A \cup B$.

Biến cố đối

Biến cố đối của biến cố A được ký hiệu là $\overline{A}$. Biến cố $\overline{A}$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi A không xuất hiện.
Hai biến cố A và $\overline{A}$ là hai biến cố xung khắc và $A + \overline{A} = \Omega$.

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Phép toán giữa các biến cố

Quy tắc De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

1.1 Không gian mẫu và biến cố

Phép toán giữa các biến cố

Quy tắc De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Tổng quát: Cho các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$

- Hợp của các biến cố $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ (Ít nhất một trong các biến cố xẩy ra)
- Giao của các biến cố $A_1 A_2 \ldots A_n$ (Đồng thời các biến cố xẩy ra)
- Quy tắc De Morgan:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$$
$$\overline{A_1 A_2 \ldots A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$$

Ví dụ Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Gọi A là biến cố sinh viên thi đỗ môn Toán, B là biến cố sinh viên thi đỗ môn Lý, và C là biến cố sinh viên thi đỗ môn Hóa. Biểu diễn các biến cố sau:

a) Sinh viên thi đỗ ít nhất một môn.
b) Sinh viên thi đỗ đúng 1 môn.
c) Sinh viên thi đỗ đúng 2 môn.
d) Sinh viên thi đỗ cả 3 môn.
e) Sinh viên thi đỗ ít nhất hai môn.
f) Sinh viên thi trượt cả ba môn.

Ví dụ Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Gọi A là biến cố sinh viên thi đỗ môn Toán, B là biến cố sinh viên thi đỗ môn Lý, và C là biến cố sinh viên thi đỗ môn Hóa. Biểu diễn các biến cố sau:

a) Sinh viên thi đỗ ít nhất một môn.

Ví dụ Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Gọi A là biến cố sinh viên thi đỗ môn Toán, B là biến cố sinh viên thi đỗ môn Lý, và C là biến cố sinh viên thi đỗ môn Hóa. Biểu diễn các biến cố sau:

a) Sinh viên thi đỗ ít nhất một môn.

Bài làm

a) Gọi D là biến cố: Sinh viên thi đỗ ít nhất một môn. Ta có

Ví dụ Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Gọi A là biến cố sinh viên thi đỗ môn Toán, B là biến cố sinh viên thi đỗ môn Lý, và C là biến cố sinh viên thi đỗ môn Hóa. Biểu diễn các biến cố sau:

a) Sinh viên thi đỗ ít nhất một môn.

Bài làm

a) Gọi D là biến cố: Sinh viên thi đỗ ít nhất một môn. Ta có

$$D = A \cup B \cup C$$

Ví dụ Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Gọi A là biến cố sinh viên thi đỗ môn Toán, B là biến cố sinh viên thi đỗ môn Lý, và C là biến cố sinh viên thi đỗ môn Hóa. Biểu diễn các biến cố sau:

b) Sinh viên thi đỗ đúng 1 môn.

Ví dụ Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Gọi A là biến cố sinh viên thi đỗ môn Toán, B là biến cố sinh viên thi đỗ môn Lý, và C là biến cố sinh viên thi đỗ môn Hóa. Biểu diễn các biến cố sau:

b) Sinh viên thi đỗ đúng 1 môn.

Bài làm

b) Gọi E là biến cố: Sinh viên thi đỗ đúng 1 môn. Ta có

Ví dụ Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Gọi A là biến cố sinh viên thi đỗ môn Toán, B là biến cố sinh viên thi đỗ môn Lý, và C là biến cố sinh viên thi đỗ môn Hóa. Biểu diễn các biến cố sau:

b) Sinh viên thi đỗ đúng 1 môn.

Bài làm

b) Gọi E là biến cố: Sinh viên thi đỗ đúng 1 môn. Ta có

$$E = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$$

Ví dụ Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Gọi A là biến cố sinh viên thi đỗ môn Toán, B là biến cố sinh viên thi đỗ môn Lý, và C là biến cố sinh viên thi đỗ môn Hóa. Biểu diễn các biến cố sau:

c) Sinh viên thi đỗ đúng 2 môn.

$$F = AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C$$

Ví dụ Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Gọi A là biến cố sinh viên thi đỗ môn Toán, B là biến cố sinh viên thi đỗ môn Lý, và C là biến cố sinh viên thi đỗ môn Hóa. Biểu diễn các biến cố sau:

c) Sinh viên thi đỗ đúng 2 môn.

$$F = AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C$$

d) Sinh viên thi đỗ cả 3 môn.

$$G = ABC$$

Ví dụ Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Gọi A là biến cố sinh viên thi đỗ môn Toán, B là biến cố sinh viên thi đỗ môn Lý, và C là biến cố sinh viên thi đỗ môn Hóa. Biểu diễn các biến cố sau:

c) Sinh viên thi đỗ đúng 2 môn.

$$F = AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C$$

d) Sinh viên thi đỗ cả 3 môn.

$$G = ABC$$

e) Sinh viên thi đỗ ít nhất hai môn.

$$H = AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC$$

Ví dụ Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong lớp. Gọi A là biến cố sinh viên thi đỗ môn Toán, B là biến cố sinh viên thi đỗ môn Lý, và C là biến cố sinh viên thi đỗ môn Hóa. Biểu diễn các biến cố sau:

c) Sinh viên thi đỗ đúng 2 môn.

$$F = AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C$$

d) Sinh viên thi đỗ cả 3 môn.

$$G = ABC$$

e) Sinh viên thi đỗ ít nhất hai môn.

$$H = AB\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC$$

f) Sinh viên thi trượt cả ba môn.

$$K = \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \overline{A \cup B \cup C}$$

Trong nhiều bài toán xác suất ta cần xác định được số lượng phần tử của không gian mẫu và số phần tử trong không gian mẫu ứng với sự xuất hiện của một biến cố nào đấy. Khi số lượng phần tử cần đếm khá lớn chúng ta hướng tới việc sử dụng các quy tắc sau của toán tổ hợp để thực hiện.

- Quy tắc cộng
- Quy tắc nhân
  - Hoán vị - hoán vị vòng
  - Chỉnh hợp
  - Tổ hợp

Quy tắc cộng

Xét một công việc nào đấy có thể thực hiện theo k phương án khác nhau, trong đó

- Phương án 1 có n_1 cách thực hiện;
- Phương án 2 có n_2 cách thực hiện;

$\vdots$

- Phương án k có n_k cách thực hiện.

Ký hiệu n là số lượng cách thực hiện công việc. Ta có công thức cộng

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Quy tắc nhân

Xét một công việc nào đấy có thể hoàn thành qua k giai đoạn liên tiếp, trong đó

- Giai đoạn 1 có n_1 cách thực hiện;

- Ứng với mỗi cách thực hiện giai đoạn 1, giai đoạn 2 có n_2 cách thực hiện;

- Ứng với mỗi cách thực hiện hai giai đoạn 1, 2, giai đoạn 3 có n_3 cách thực hiện;

$\vdots$

- Ứng với mỗi cách thực hiện $k-1$ giai đoạn đầu, giai đoạn k có n_k cách thực hiện.

Ký hiệu n là số lượng cách thực hiện công việc. Ta có công thức nhân

$$n = n_1 n_2 n_3 \ldots n_k.$$

Ví dụ 1.17

Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số có thể lập được từ các số $0, 1, 2, 5, 7, 8$ mà mỗi chữ số chỉ xuất hiện đúng một lần?

Giải. Vì số cần lập là số chẵn, nên ta có $n_1 = 3$ cách lựa chọn cho số ở vị trí hàng đơn vị. Mặt khác, vì số có 4 chữ số nên chữ số hàng nghìn không thể là số 0. Vì vậy ta xem xét đến chữ số hàng đơn vị là 0 hoặc khác 0.

- Nếu chữ số hàng đơn vị là 0, tức là $n_1 = 1$, thì ta có $n_2 = 5$ cách lựa chọn chữ số hàng nghìn, $n_3 = 4$ cách lựa chọn chữ số hàng trăm và $n_4 = 3$ cách lựa chọn chữ số hàng chục. Như vậy, theo quy tắc nhân, ta sẽ có $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ cách tạo ra số có 4 chữ số khác nhau mà số cuối cùng là số 0.

- Còn nếu, chữ số hàng đơn vị là khác 0, tức là có $n_1 = 2$, thì có $n_2 = 4$ cách chọn chữ số hàng nghìn, $n_3 = 4$ cách chọn chữ số hàng trăm và $n_4 = 3$ cách chọn chữ số hàng chục. Như vậy có $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96$ cách tạo ra số có 4 chữ số khác nhau mà số cuối cùng khác 0.

Vì 2 trường hợp trên là 2 phương án khác nhau để thành lập số có 4 chữ số theo yêu cầu của bài, nên ta phải dùng quy tắc cộng để tính tổng số cách thực hiện là $60 + 96 = 156$ cách.

Hoán vị

Định nghĩa 1.4

Một hoán vị của một tập hợp có n phần tử là một cách sắp xếp n phần tử của tập hợp đó thành một dãy có thứ tự.

Ví dụ 1.18

Đối với tập hợp có gồm 3 ký tự $\{a, b, c\}$, ta lập được 6 hoán vị là

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Số lượng các hoán vị của một tập có n phần tử

$$P_n = n!.$$

Hoán vị vòng

Một hoán vị vòng của n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử thành một vòng tròn.

Số lượng hoán vị vòng là $(n-1)!$.

Ví dụ 1.20

Có 4 người chơi đá cầu, khi đó có $3! = 6$ cách khác nhau để sắp xếp họ đứng thành hình tròn.

Hoán vị có lặp. Khi các phần tử trong tập đang xét không phân biệt, chúng có những phần tử giống nhau thì số lượng các hoán vị của tập đó có sự thay đổi. Ta trở lại Ví dụ 1.18 trong trường hợp có $b = c = x$. Khi đó 6 hoán vị của 3 ký tự đã cho sẽ trở thành: $axx, axx, xax, xxa, xax, xxa$. Như vậy, thực ra chỉ có 3 hoán vị khác biệt là: axx, xax, xxa.

Số lượng hoán vị có lặp

Xét một tập gồm n phần tử, trong đó có n_1 phần tử giống nhau thuộc loại thứ nhất, n_2 phần tử giống nhau thuộc loại thứ hai,..., và n_k phần tử giống nhau thuộc loại thứ k, ở đây $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Khi đó số lượng các hoán vị của tập n phần tử đó là

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

Hoán vị dạng này còn được mô tả ở dạng khác, đó là việc chia một tập gồm n phần tử thành k tập con, sao cho mỗi tập thứ i có n_i phần tử. Lúc này các phần tử trong tập ban đầu có thể giống hoặc khác nhau. Số lượng cách chia là

$$C_n^{n_1,n_2,...,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}, \qquad (1.1)$$

trong đó $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Ví dụ 1.22

Có bao nhiêu cách để sắp xếp đoàn có 7 nam thanh niên đi du lịch vào phòng nghỉ ở khách sạn, biết rằng khách sạn lúc đó có 1 phòng ba giường, 2 phòng giường đôi?

Giải. Đây chính là cách chia nhóm có 7 người thành 3 nhóm nhỏ, với nhóm thứ nhất có 3 người, 2 nhóm còn lại, mỗi nhóm có 2 người. Áp dụng công thức chia nhóm (1.1) ta có số cách sắp xếp 7 người vào 3 phòng là

$$C_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210.$$

Chỉnh hợp không lặp

Định nghĩa 1.5

Mỗi dãy có thứ tự bao gồm k phần tử phân biệt trong số n phần tử phân biệt được gọi là một chỉnh hợp (không lặp) chập k của n phần tử.

Số lượng chỉnh hợp không lặp chập k của n phần tử

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.2}$$

Ví dụ 1.25

Một lớp có 25 sinh viên, cần chọn một Lớp trưởng, một Lớp phó và một Bí thư. Giả sử rằng cơ hội cho mỗi sinh viên là như nhau và mỗi người chỉ được giữ không quá một chức vụ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ban cán sự lớp?

Giải. Vì 3 vị trí được chọn là phân biệt, tức là có tính đến thứ tự sắp xếp, thứ tự sắp xếp khác nhau là cách chọn ban cán sự khác nhau, do đó đây là chỉnh hợp chập 3 của 25 phần tử. Vậy có tất cả

$$A_{25}^{3} = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 25.24.23 = 13800$$

số cách chọn ban cán sự.

Chỉnh hợp có lặp

Một chỉnh hợp có lặp chập k của n phần tử là dãy có thứ tự gồm k phần tử được lập ra từ n phần tử này mà trong đó mỗi phần tử có thể được lặp lại vài lần trong dãy.

Số lượng chỉnh hợp có lặp chập k của n phần tử là

$$N = n^k.$$

Ví dụ minh họa. Mỗi cách sắp xếp 8 hành khách lên một đoàn tàu gồm 6 toa là một chỉnh hợp có lặp của 6 số $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Chẳng hạn chỉnh hợp lặp $(1, 2, 1, 4, 4, 4, 6, 6)$ là cách xếp các hành khách thứ nhất và thứ 3 lên toa 1; hành khách thứ 2 lên toa 2; hành khách 4, 5, 6 lên toa 4; hành khách 7, 8 lên toa 6. Số lượng cách sắp xếp 8 hành khách lên đoàn tàu là $N = 6^8$.

Tổ hợp. Một tổ hợp chập k của n phần tử là một tập con gồm k phần tử được lấy ra từ n phần tử này. Nói cách khác ta có

Định nghĩa 1.6

Mỗi tổ hợp chập k của n phần tử là cách lấy k phần tử, không kể thứ tự, từ tập đó.

Số lượng hợp chập k của n phần tử

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1.3}$$

Ví dụ 1.26

Một hộp có 8 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm cùng một lúc. Tính số khả năng có thể xảy ra của phép thử.

Giải. Khi lấy cùng một lúc thì 3 sản phẩm lấy ra không kể đến thứ tự, và đó là 3 sản phẩm phân biệt trong tổng số 8 sản phẩm. Nên mỗi cách lấy là một tổ hợp chập 3 của 8. Vậy tổng số cách lấy là:

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56.$$

- Xác suất của một biến cố đặc trưng cho khả năng xảy ra của một biến cố.
- Xác suất của một biến cố A được ký hiệu là $P(A)$. Giá trị của $P(A)$ được xác định tùy theo mô hình xác suất được sử dụng cho không gian mẫu Ω.
- Việc tiếp cận một định nghĩa chung đòi hỏi sự chuẩn bị phức tạp về toán học. Để đơn giản chúng ta sẽ tiếp cận định nghĩa xác suất theo từng cách cụ thể:
  - Định nghĩa theo mô hình xác suất cổ điển.
  - Định nghĩa xác suất theo tần suất.
  - Định nghĩa xác suất theo số đo hình học.

1.2 Định nghĩa về xác suất

Mô hình cổ điển

Trong mô hình cổ điển không gian mẫu Ω có n phần tử và n phần tử này được nhìn nhận là đồng khả năng xuất hiện. Để thuận tiện ta gọi các phần tử của không gian mẫu Ω là các biến cố sơ cấp.

☞ Các ví dụ

1. Gieo một con xúc xắc, Ω chứa 6 biến cố sơ cấp.
2. Chọn ngẫu nhiên một số từ 1-20, Ω chứa 20 biến cố sơ cấp.
3. Chọn ngẫu nhiên ba quân bài từ một cỗ bài 52 quân, Ω chứa $n = C_{52}^{3} = 22100$ phần tử.

Định nghĩa cổ điển

Xét phép thử có không gian mẫu Ω gồm n phần tử đồng khả năng xuất hiện. Nếu A là một biến cố và trong Ω có m_A phần tử ứng với sự xuất hiện của A thì xác suất của A là

$$P(A) = \frac{m_A}{n}. \tag{1.4}$$

Ví dụ 1.28

Một lớp học môn Xác suất thống kê có 25 sinh viên ngành công trình, 10 sinh viên ngành cơ khí, 10 sinh viên ngành điện tử, và 8 sinh viên ngành xây dựng. Chọn ngẫu nhiên một người để trả lời câu hỏi. Hãy tính xác suất để sinh viên được chọn là:
a) Sinh viên ngành công trình.
b) Sinh viên ngành xây dựng hoặc sinh viên ngành điện tử.

Giải. Tổng số các sinh viên trong lớp là 53 nên số khả năng xảy ra là $n = 53$ và mọi người đều có cơ hội được chọn như nhau.
a) Gọi A là biến cố sinh viên được chọn thuộc ngành công trình. Vì có 25 sinh viên ngành công trình nên số khả năng thuận lợi cho A là $m = 25$. Do đó xác suất của biến cố A là

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{25}{53} = 0,4717.$$

b) Gọi B là biến cố sinh viên được chọn thuộc ngành xây dựng hoặc điện tử. Vì có 18 sinh viên ngành xây dựng hoặc điện tử, nên xác suất của B là

$$P(B) = \frac{18}{53} = 0,3396.$$

Ví dụ 1.29

Một hộp chứa 15 sản phẩm, trong đó có 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm cùng một lúc. Tính xác suất để trong 3 sản phẩm lấy ra thì:
a) Có 2 sản phẩm tốt.
b) Cả 3 sản phẩm đều tốt.
c) Có nhiều nhất 1 sản phẩm phế phẩm.

Giải. Khi lấy 3 sản phẩm cùng lúc trong tổng số 15 sản phẩm, thì các sản phẩm lấy ra không kể thứ tự, nên mỗi cách lấy là tổ hợp chập 3 của 15. Vậy tổng số cách lấy là

$$n = C_{15}^{3} = \frac{15!}{(15-3)!3!} = 455.$$

a) Gọi A là biến cố *"trong 3 sản phẩm lấy ra có 2 sản phẩm tốt."*. Ta phân tích bài toán này chi tiết như sau: Mỗi trường hợp thuận lợi cho biến cố A chính là một cách lấy ra 2 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu (phế phẩm). Vậy ta chia việc lấy đó thành 2 công đoạn, công đoạn thứ nhất lấy 2 sản phẩm tốt, công đoạn thứ hai lấy 1 sản phẩm xấu. Vì lấy 2 sản phẩm tốt trong số $15 - 4 = 11$ sản phẩm tốt và lấy không kể thứ tự nên công đoạn thứ nhất có $C_{11}^2 = \frac{11!}{9!2!} = 55$ cách thực hiện. Tương tự, lấy 1 sản phẩm xấu trong số 4 sản phẩm xấu, nên công đoạn thứ hai có $C_4^1 = 4$ cách thực hiện. Nếu bỏ bất kỳ công đoạn nào trong hai công đoạn này thì phép thử đều không thành công. Do đó, đây là một biểu hiện cho ta thấy phải sử dụng quy tắc nhân để tính được số cách chọn, hay số khả năng thuận lợi cho A là $m_A = C_{11}^2 C_4^1 = 55 \cdot 4 = 220$.
Vậy xác suất của A là:
$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{220}{455} = 0,4835.$$

b) Tương tự, gọi B là biến cố *"cả 3 sản phẩm đều tốt"*. Ta có

$$P(B) = \frac{C_{11}^3}{C_{15}^3} = \frac{165}{455} = 0,3626.$$

c) Gọi C là biến cố *"có nhiều nhất một sản phẩm phế phẩm"*. Ở đây chúng ta phân tích việc có nhiều nhất một phế phẩm tương đương với tình huống trong 3 sản phẩm lấy ra có 0 hoặc 1 phế phẩm. Như vậy công việc C có thể thực hiện bằng 2 phương án khác nhau.
Phương án I là lấy 3 sản phẩm mà không có phế phẩm nào, số khả năng thuận lợi là $C_{11}^3 = 165$.
Phương án II là lấy 3 sản phẩm thì có 1 phế phẩm và 2 chính phẩm, số khả năng thuận lợi là $C_4^1.C_{11}^2 = 220$.

Hai phương án này là hai cách khác nhau để thực hiện công việc C, nếu bỏ một trong hai phương án thì phép thử vẫn thành công. Do đó, đây là một biểu hiện cho ta thấy cần sử dụng quy tắc cộng để tính được số cách chọn, hay số khả năng thuận lợi cho biến cố C là $m = 165 + 220 = 385$. Vậy xác suất của C là:

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{385}{455} = 0,8462.$$

1.2 Định nghĩa về xác suất

Định nghĩa theo tần suất

- ☞ Có nhiều phép thử không thuộc về mô hình cổ điển. Chẳng hạn ta chọn ngẫu nhiên một sinh viên và quan tâm đến chiều cao của sinh viên được chọn. Tương ứng không gian mẫu là tập số thực $\mathbb{R}$. Vì $\mathbb{R}$ có vô hạn phần tử nên phép thử này không thuộc về mô hình cổ điển.
- ☞ Chúng ta có thể xác định giá trị xác suất của một biến cố A thông qua việc theo dõi tần suất xuất hiện của biến cố đó. Cụ thể hơn ta theo dõi số lần xuất hiện của A trong một số lớn lần xuất hiện phép thử.
- ☞ Ký hiệu n là số lần thử và m là số lần xuất hiện A trong n lần thử đó. Ta gọi $f = \dfrac{m}{n}$ là tần suất xuất hiện của A.
- ☞ Quan sát thực tế người ta nhận thấy rằng nếu n tăng thì giá trị của f thay đổi không nhiều. Có thể nói giá trị của f dần ổn định và ta nhìn nhận về việc tồn tại một giới hạn của f và gọi giới hạn này là xác suất của A.

Định nghĩa 1.8

Giả sử khi thực hiện một phép thử n lần một cách độc lập, thì có m_A lần xuất hiện biến cố A. Khi đó tỷ số

$$f_n(A) = \frac{m_A}{n}$$

được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A trong n lần thử. Xác suất của biến cố A được xác định là giới hạn của tần suất khi số phép thử tăng lên vô hạn, tức là

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A). \tag{1.5}$$

Ví dụ 1.30

Để xác định xác suất bắn trúng đích của một xạ thủ chúng ta yêu cầu anh ta bắn kiểm tra nhiều lần mỗi lần bắn $n = 150$ viên. Nếu số đạn trúng đích ổn định ở cỡ $m = 125$ viên mỗi lần thì ta có thể coi tỷ số $\frac{125}{150}$ là giới hạn của tần suất. Tương ứng, ta nói rằng *"xác suất bắn trúng đích của xạ thủ là* $\frac{125}{150} = 0,8333 = 83,33\%$*."*.

Ví dụ 1.31

Một hãng hàng không tuyên bố với công chúng là *"qua thống kê cho thấy, xác suất rơi máy bay của hãng bằng* 0%*"*. Lời tuyên bố này là chấp nhận được vì có thể qua khảo sát thực tế, các chuyến bay đã diễn ra của hãng thì chưa thấy chuyến nào có sự cố bị rơi, tần suất của việc rơi máy bay đến thời điểm quan sát bằng 0. Tuy nhiên, người dùng không thể hiểu xác suất đó là tuyệt đối vì đây chỉ là cách coi tần suất là xác suất khi số phép thử khá lớn, và số phép thử khá lớn bao nhiêu cũng chưa phải là tất cả, các chuyến bay vẫn tiếp tục.

1.2 Định nghĩa về xác suất

Định nghĩa hình học

Đối với một số phép thử ta có thể mô tả không gian mẫu Ω như một tập hợp trong mặt phẳng hoặc trong không gian. Tương ứng một biến cố A của phép thử là một tập con của Ω. Ta sử dụng một số đo hình học nào đấy $m(\Omega), m(A)$ cho Ω và A và định nghĩa $P(A)$ là

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Ví dụ

Có 2 điệp viên hẹn gặp nhau tại một địa điểm trong công viên. Họ giao ước rằng mỗi người trong số họ phải đến điểm gặp mặt trong khoảng thời gian từ 7h đến 8h. Khi đến điểm hẹn thì chỉ chờ người còn lại không quá 10 phút. Hãy tính xác suất để cuộc hẹn thành công.

Giải. Để thuận tiện, khoảng thời gian từ 7h đến 8h được đồng nhất với khoảng $[0, 60]$ (tính theo phút). Ta ký hiệu một kết quả của phép thử là (x, y) trong đó x, y tương ứng là thời điểm người thứ nhất và người thứ 2 tới điểm hẹn. Như vậy ta nhìn nhận Ω là hình vuông

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x, y \leqslant 60\}.$$

Gọi A là biến cố chỉ sự kiện "cuộc hẹn thành công". Biến cố A được biểu diễn bằng hình lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (hình vẽ). Như vậy ta xác định được $P(A)$ bằng tỷ số của số đo diện tích

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(\Omega)} = \frac{3600 - 2500}{3600} = \frac{11}{36} = \approx 0,3056.$$

1.2 Định nghĩa về xác suất

Tiên đề về xác suất

Các định nghĩa khác nhau của xác suất giúp cho chúng ta tiếp cận thuận lợi việc tính toán xác suất trong các tình huống thực tế. Điểm chung các định nghĩa này là chúng đảm bảo các tiên đề sau đây về xác suất.

1. Nếu A là một biến cố thì $P(A) \geqslant 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Nếu $A_1, A_2, \ldots$ là các biến cố đôi một xung khắc thì

$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Từ các tiên đề trên ta chứng minh được các công thức

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. Nếu A là một biến cố thì $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

1.3 Công thức cộng xác suất

Trường hợp xung khắc

1. Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đôi một xung khắc thì ta có công thức
$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Chứng minh: Áp dụng tiên đề 3 bằng cách gán $A_k = \varnothing$ cho $k > n$.
Trường hợp riêng $n = 2$: Nếu A, B xung khắc thì
$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

2. Nếu $A \subset B$ thì
$$P(A) \leqslant P(B).$$

1.3 Công thức cộng xác suất

Trường hợp không xung khắc

Định lý 1.1

Cho A, B là hai biến cố tùy ý

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1.9}$$

Chứng minh: Ta phân tích A thành tổng hai biến cố xung khắc như sau

$$A = A\Omega = A(B+\overline{B}) = AB + A\overline{B}$$

và nhận được $P(A) = P(AB) + P(A\overline{B})$. Tương tự $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$.
Tiếp theo ta có

$$A + B = (AB + A\overline{B}) + (AB + \overline{A}B) = AB + A\overline{B} + \overline{A}B.$$

Từ đó ta thu được
$P(A+B) = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

Hệ quả 1.3

Cho ba biến cố A, B, C. Ta có công thức

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC).$$

Ví dụ 1.23

Một ngân hàng sử dụng hai loại thẻ thanh toán A và B. Tỉ lệ khách hàng sử dụng loại thẻ A là 70%, loại thẻ B là 55% và cả hai loại là 30%. Chọn ngẫu nhiên một khách hàng của ngân hàng.
Tính xác suất để:
a) Người đó sử dụng thẻ của ngân hàng.
b) Người đó không sử dụng thẻ của ngân hàng.
c) Người đó chỉ sử dụng một loại thẻ của ngân hàng.
d) Người đó chỉ sử dụng loại thẻ B của ngân hàng.

Giải. Gọi A là biến cố *"Người đó sử dụng thẻ thanh toán A"*, B là biến cố *"Người đó sử dụng thẻ thanh toán B"*.

a) Biến cố *"Người đó sử dụng thẻ của ngân hàng"* là biến cố $A \cup B$. Do đó, dùng công thức cộng xác suất (1.9), ta tính được

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,55 - 0,3 = 0,95.$$

b) Biến cố *"Người đó không sử dụng thẻ của ngân hàng"* là $\overline{A \cup B}$. Nên ta có:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,95 = 0,05.$$

c) Biến cố *"Người đó chỉ sử dụng một loại thẻ của ngân hàng"* là biến cố $A\overline{B} \cup \overline{A}B$. Do đó,

$$P(A\overline{B} \cup \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = [P(A) - P(AB)] + [P(B) - P(AB)]$$
$$= (0,7 - 0,3) + (0,55 - 0,3) = 0,4 + 0,25 = 0,65.$$

d) Biến cố *"Người đó chỉ sử dụng loại thẻ B của ngân hàng"* là biến cố $\overline{A}B$. Từ câu (c), ta có

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = 0,55 - 0,3 = 0,25.$$

Một khái niệm rất quan trọng của xác suất là xác suất có điều kiện. Ta tiếp cận khái niệm này qua một ví dụ cụ thể:

Trong dịch tễ học, thay cho việc quan tâm tới tỉ lệ dân nói chung bị mắc bệnh tiểu đường, người ta quan tâm vấn đề mắc bệnh đó ở từng nhóm riêng biệt, như nhóm phụ nữ với độ tuổi từ 35 đến 50, hay nhóm những người đàn ông tuổi từ 40 đến 60.

Tương ứng ta có:

- Tỷ lệ người dân mắc tiểu đường là xác suất chọn được một người mắc tiểu đường khi chọn ngẫu nhiên một người dân.
- Tỷ lệ phụ nữ độ tuổi từ 35 đến 50 mắc tiểu đường là xác suất chọn được một người mắc tiểu đường khi chọn ngẫu nhiên một phụ nữ độ tuổi từ 35 đến 50.
- Tỷ lệ đàn ông tuổi từ 40 đến 60 mắc tiểu đường là xác suất chọn được một người mắc tiểu đường khi chọn ngẫu nhiên một đàn ông tuổi từ 40 đến 60.

Các tỷ lệ trên là khác nhau và ta xét chúng theo cùng một phép thử là "chọn ngẫu nhiên một người dân". Tương ứng ta ký hiệu A là biến cố "người dân được chọn là một phụ nữ độ tuổi từ 35 đến 50", B là biến cố "người dân được chọn là một đàn ông độ tuổi từ 35 đến 50" , C là biến cố "người dân được chọn là một người mắc tiểu đường". Khi đó các tỷ lệ (hay là xác suất) ở trên đều được ký hiệu theo C và tương ứng là $P(C), P(C|A)$ và $P(C|B)$.

Các xác suất $P(C|A)$ và $P(C|B)$ là xác suất có điều kiện.

Định nghĩa 1.9

Xác suất có điều kiện của B với điều kiện A, được ký hiệu $P(B|A)$ và được xác định bởi công thức

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \text{ với } P(A) > 0.$$

Ví dụ 1.34

Một tập vé số có 10 vé, giả sử trong đó có 1 vé trúng thưởng. Hai người đến, lần lượt lấy mỗi người 1 vé. Tính xác suất trúng của người thứ hai trong các điều kiện người thứ nhất:
a) Lấy được vé trúng.
b) Lấy được vé không trúng.
Giải. Gọi A là biến cố chỉ *"người thứ nhất lấy được vé trúng"*, B là biến cố chỉ *"người thứ hai lấy được vé trúng"*.
a) Ta cần tính $P(B|A)$. Lúc này ta hiểu là A đã xảy ra, tức người thứ nhất lấy được vé trúng. Trong tập vé số còn 9 vé và không có vé nào trúng thưởng. Khi đó cơ hội lấy được vé trúng cho người thứ hai là

$$P(B|A) = \frac{0}{9} = 0.$$

b) Tương tự ta cần tính $P(B|\overline{A})$. Khi biến cố đối $\overline{A}$ đã xảy ra, nghĩa là người thứ nhất lấy được vé không trúng thưởng.

Số vé còn lại gồm 9 vé, trong đó có một vé trúng thưởng. Khi đó xác suất có điều kiện của B đối với $\overline{A}$ đã xảy ra là

$$P(B|\overline{A}) = \frac{1}{9}.$$

Ví dụ 1.37

Cho biết một chuyến bay thường xuyên theo lịch trình có xác suất khởi hành đúng giờ là $P(D) = 0,83$ (D-Depart), xác suất đến nơi đúng giờ là $P(A) = 0,82$ (A-Arrive), và xác suất để nó vừa khởi hành và đến nơi đúng giờ là $P(DA) = 0,78$. Hãy tìm xác suất để một chuyến bay:

a) Đến nơi đúng giờ, biết rằng nó khởi hành đúng giờ.

b) Khởi hành đúng giờ, biết rằng nó đến nơi đúng giờ.

Giải. a) Xác suất chuyến bay đến nơi đúng giờ, biết rằng nó khởi hành đúng giờ là $P(A|D)$,

$$P(A|D) = \frac{P(DA)}{P(D)} = \frac{0,78}{0,83} = 0,94.$$

b) Xác suất chuyến bay khởi hành đúng giờ, biết rằng nó đến nơi đúng giờ là $P(D|A)$,

$$P(D|A) = \frac{P(DA)}{P(A)} = \frac{0,78}{0,82} = 0,95.$$

Như vậy xác suất có điều kiện cho biết khả năng xảy ra của một biến cố này trong bối cảnh có thêm thông tin về biến cố khác đã xảy ra. Giả sử trong Ví dụ 1.37 cho biết thêm thông tin về một chuyến bay không khởi hành đúng giờ, khi đó khả năng nó đến nơi đúng giờ là bao nhiêu? Xác suất cần tìm là $P(A|\overline{D})$.

$$P(A|\overline{D}) = \frac{P(A\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(A) - P(AD)}{1 - P(D)} = \frac{0,82 - 0,78}{1 - 0,83} = 0,24.$$

Kết quả cho thấy, xác suất đến đúng giờ của một chuyến bay bị giảm khi biết chắc chắn rằng máy bay xuất phát không đúng giờ.

Trong các tính toán xác suất chúng ta thường vận dụng một tình huống đặc biệt trong quan hệ của các biến cố là tính độc lập giữa chúng. Ta làm quen với quan hệ này qua ví dụ sau:

Xét phép thử chọn ngẫu nhiên một sinh viên. Gọi A là biến cố "sinh viên được chọn có chiều cao > 170cm", B là biến cố "sinh viên được chọn có thể giao tiếp bằng tiếng Anh". Sự xuất hiện của A không gây ảnh hưởng tới khả năng xuất hiện của B, nghĩa là $P(B/A) = P(B)$.

Định nghĩa 1.10

Cho hai biến cố A và B. Ta nói biến cố B độc lập với biến cố A nếu

$$P(B|A) = P(B). \tag{1.14}$$

Nhận xét 1.2:

☞ Nếu có $P(B|A) = P(B)$ thì suy ra $P(A|B) = P(A)$, và ngược lại.
Thật vậy, theo công thức xác suất có điều kiện, ta có

$$P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(AB)$$

Nếu $P(B|A) = P(B)$ thì $P(AB) = P(A)P(B)$ nên $P(A|B) = P(A)$.

☞ Nếu B độc lập với A thì A cũng độc lập với B và ta nói rằng "A, B độc lập với nhau".

☞ Nếu A và B là hai biến cố độc lập thì hai biến cố trong mỗi cặp sau cũng độc lập: A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B; $\overline{A}$ và $\overline{B}$.

Ví dụ 1.38

Một thùng đựng 10 sản phẩm được bày bán, trong đó có 2 phế phẩm. Lấy lần lượt hai lần, mỗi lần một sản phẩm một cách ngẫu nhiên. Gọi A_i là biến cố *"lần thứ i lấy được sản phẩm tốt"* $(i = 1, 2)$.

Khi đó,

a) Nếu lấy có hoàn lại thì A_1 và A_2 là hai biến cố độc lập vì lần thứ nhất lấy xong lại hoàn trả lại thì thùng vẫn chứa 10 sản phẩm tốt và 2 sản phẩm phế phẩm như lúc đầu, do đó xác suất xảy ra A_1 và A_2 là như nhau:

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{8}{10}.$$

b) Nếu lấy không hoàn lại thì số lượng các loại sản phẩm trong thùng có sự khác biệt giữa hai lần lấy. Do đó biến cố A_1 có ảnh hưởng đến biến cố A_2 hay A_1 và A_2 không độc lập. Tương ứng ta có

Hệ quả 1.4

Nếu A, B là hai biến cố ứng với một phép thử nào đấy thì

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). \tag{1.15}$$

Trường hợp riêng, nếu A, B độc lập thì

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{1.16}$$

Ví dụ 1.39

Giả sử có một hộp cầu chì chứa 20 cầu chì, trong đó có 5 cái bị lỗi. Chọn ngẫu nhiên 2 lần, mỗi lần một cầu chì, không hoàn lại. Tính xác suất để cả 2 cầu chì lấy ra đều bị lỗi.

Giải. Gọi A là biến cố *"cầu chì lấy lần đầu bị lỗi"* và B là biến cố *"cầu chì lấy lần thứ hai bị lỗi"*. Biến cố *"cả hai cầu chì lấy ra đều bị lỗi"* là biến cố AB. Ta thấy A và B là hai biến cố không độc lập. Sử dụng công thức nhân xác suất, ta có

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

Trong lần chọn đầu tiên, hộp có 5 cái lỗi trong tổng 20 cái, nên

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$

Biến cố $B|A$ cho biết thông tin A xảy ra, tức là lần thứ nhất đã lấy một cầu chì bị lỗi ra khỏi hộp, nên hộp còn lại 4 cầu chì lỗi, trong tổng số 19 cầu chì. Vì vậy khả năng xảy ra B là

$$P(B|A) = \frac{4}{19}.$$

Nên ta có,

$$P(AB) = \frac{1}{4}.\frac{4}{19} = \frac{1}{19}.$$

Định lý 1.2

Nếu trong một phép thử, các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ có thể xuất hiện, thì ta có

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}). \tag{1.17}$$

Nếu các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ là độc lập, thì ta có

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n). \tag{1.18}$$

Ví dụ 1.41

Một lô hàng có 100 sản phẩm, trong đó có 8 phế phẩm. Rút ngẫu nhiên lần lượt 4 sản phẩm. Nếu cả 4 sản phẩm này đều tốt thì lô hàng được chấp nhận. Hãy tính xác suất để lô hàng được chấp nhận trong các tình huống sau:

a) Rút không hoàn lại.

b) Rút có hoàn lại.

Giải. Gọi H là biến cố *"lô hàng được chấp nhận"*, gọi A_i là biến cố chỉ *"sản phẩm rút ở lần thứ i là tốt"*, $(i = 1, 2, 3, 4)$.

a) Khi rút không hoàn lại thì các biến cố A_i là không độc lập vì mỗi lần rút sau có số lượng sản phẩm tốt, xấu bị thay đổi so với lần rút trước. Do đó

$$P(H) = P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)$$
$$= \frac{92}{100}.\frac{91}{99}.\frac{90}{98}.\frac{89}{97} = 0,7126.$$

b) Khi rút có hoàn lại thì số lượng hàng tốt, xấu trong lô không có sự thay đổi, các lần lấy sau không phụ thuộc vào lần lấy trước đó hay các biến cố A_i là độc lập và xác suất để lấy được sản phẩm tốt ở mỗi lần lấy là như nhau. Do đó

$$P(H) = P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = \left(\frac{92}{100}\right)^4 = 0,7164.$$

Trong nhiều bài toán chúng ta phải tính giá trị xác suất trong những tình huống khá phức tạp. Cụ thể là ta phải phân chia không gian mẫu một cách phù hợp để thực hiện các tính toán. Đây chính là việc phân chia không gian mẫu thành một hệ biến cố đầy đủ.

Định nghĩa 1.11

Cho một hệ các biến cố $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ của cùng một phép thử. Hệ các biến cố này là một hệ biến cố đầy đủ, nếu nó thỏa mãn hai điều kiện dưới đây:
i) $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$, với Ω là tập không gian mẫu.
ii) $B_i \cap B_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ và $i, j = \overline{1, n}$.

Nhận xét 1.3. Với mọi biến cố A của phép thử thì ta luôn có hệ hai biến cố $\{A, \overline{A}\}$ là một hệ đầy đủ.

Định lý 1.3

Giả sử $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ là một hệ biến cố đầy đủ của một phép thử nào đó. Giả sử A là một biến cố bất kỳ có liên quan đến phép thử. Khi đó, xác suất của A được tính theo công thức sau đây và gọi là công thức xác suất đầy đủ.

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + ... + P(B_n)P(A|B_n). \quad (1.19)$$

Chứng minh. Ta có $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega$ nên

$$A = A\Omega = A(B_1 + B_2 + \ldots + B_n) = AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n.$$

Với $i \neq j$ ta có $(AB_i)(AB_j) = AB_iB_j = A\varnothing = \varnothing$ nên sử dụng công thức cộng, công thức nhân xác suất ta có

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n) \\ &= P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_n) \\ &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + ... + P(B_n)P(A|B_n). \end{aligned}$$

Ví dụ 1.47

Theo nghiên cứu của Bộ y tế cho rằng tỷ lệ hút thuốc lá là 20%. Xác suất bác sĩ chẩn đoán người hút thuốc lá mắc bệnh ung thư $0,78$. Xác suất chẩn đoán người không hút thuốc bị ung thư là $0,06$. Chọn ngẫu nhiên một người để kiểm tra. Tính xác suất để người đó bị chẩn đoán mắc bệnh ung thư.

Giải. Gọi B là biến cố người được chọn là người hút thuốc lá. Gọi A là biến cố người được chọn bị chẩn đoán mắc bệnh ung thư. Ta thấy rằng hệ $\{B, \overline{B}\}$ là một hệ đầy đủ, với $P(B) = 0,2,\ P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0,8$. Tính $P(A)$ theo công thức xác suất đầy đủ

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}) = 0,2.0,78 + 0,8.0,06 = 0,204.$$

Định lý 1.4

Nếu $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ là một hệ đầy đủ các biến cố của một phép thử nào đó sao cho $P(B_i) \neq 0$, với $i = 1, 2, ..., n$ và A là một biến cố bất kỳ của cùng một phép thử, sao cho $P(A) \neq 0$. Khi đó ta có công thức Bayes như sau:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(B_1)P(A|B_1) + ... + P(B_n)P(A|B_n)}, \text{ với } k = 1, 2, ..., n. \tag{1.20}$$

Chứng minh. Công thức này được suy từ công thức xác suất có điều kiện $P(B_k|A) = \frac{P(B_kA)}{P(A)}$. Ta thay $P(B_kA)$ trên tử số bằng công thức nhân xác suất $P(B_kA) = P(B_k)P(A|B_k)$ và thay $P(A)$ dưới mẫu số bởi công thức xác suất đầy đủ (1.19), sẽ nhận được công thức (1.20).

Ví dụ 1.49

Có ba cái hộp đựng sản phẩm, hộp thứ nhất chứa 6 chính phẩm và 2 phế phẩm, hộp thứ hai chứa 10 chính phẩm và 4 phế phẩm, hộp thứ ba chứa 15 chính phẩm và 5 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một hộp, rồi từ đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm.
a) Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là chính phẩm.
b) Giả sử sản phẩm lấy ra là chính phẩm, hãy tính xác suất để đó là sản phẩm của hộp thứ hai.

Giải. Gọi B_i là biến cố *"hộp được lựa chọn là hộp thứ i"*, $i = 1, 2, 3$. Khi đó, $\{B_1, B_2, B_3\}$ là một hệ đầy đủ, với

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Gọi A là biến cố *sản phẩm được lấy ra là một chính phẩm*.

a) Tính $P(A)$ theo công thức xác suất đầy đủ

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$
$$= \frac{1}{3}.\frac{6}{8} + \frac{1}{3}.\frac{10}{14} + \frac{1}{3}.\frac{15}{20} = \frac{31}{42} = 0,7381.$$

b) Giả sử lấy được chính phẩm, tức là A đã xảy ra. Tính khả năng nó là sản phẩm của hộp thứ hai, nghĩa là tính $P(B_2|A)$. Dùng công thức Bayes ta thu được

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{14}}{\frac{31}{42}} = \frac{10}{31} = 0,3226.$$

Nhận xét 1.4. Nếu phép thử gồm hai giai đoạn, biến cố A liên quan đến giai đoạn sau, thì các kết quả có thể của giai đoạn đầu chính là một hệ đầy đủ.

Ví dụ 1.50

Một lô hàng gồm 50 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm xấu được vận chuyển về kho, trong quá trình vận chuyển đã có 1 sản phẩm (không rõ chất lượng) bị mất. Khi lô hàng về đến kho, chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm:
a) Tính xác suất để sản phẩm này là sản phẩm tốt.
b) Biết rằng sản phẩm được chọn là tốt, tính xác suất để sản phẩm bị mất là sản phẩm tốt.

Giải. Gọi B là biến cố sản phẩm bị mất là sản phẩm tốt. Khi đó $\{B, \overline{B}\}$ là một hệ đầy đủ, với $P(B) = \frac{50}{55}$ và $P(\overline{B}) = \frac{5}{55}$. Gọi A là biến cố sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt.
a) Tính $P(A)$ theo công thức xác suất đầy đủ. Ta cần xác định các xác suất điều kiện $P(A|B)$ và $P(A|\overline{B})$.

Với $P(A|B)$, ta đang giả thiết tình huống B xảy ra, tức là sản phẩm bị mất là sản phẩm tốt, trong tình huống đó ta xét khả năng A xảy ra. Vậy lúc này lô hàng gồm 49 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm xấu, nên $P(A|B) = \frac{49}{54}$. Tương tự, ta có $P(A|\overline{B}) = \frac{50}{54}$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}) \\ &= \frac{50}{55} \cdot \frac{49}{54} + \frac{5}{55} \cdot \frac{50}{54} = \frac{50}{55} = 0,9091. \end{aligned}$$

b) Bây giờ ta giả thiết kết quả cuối của phép thử là nhận được sản phẩm tốt, tức là A xảy ra. Trong tình huống này, ta đặt câu hỏi: Sự kiện *"sản phẩm trước đó bị mất là sản phẩm tốt"* có xác suất là bao nhiêu? Tức là ta cần tính $P(B|A)$. Kiểu tính này ta gọi là dùng hậu nghiệm để tính tiền nghiệm. Dùng công thức Bayes, ta có:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{\frac{50}{55} \cdot \frac{49}{54}}{\frac{50}{55}} = \frac{49}{54} = 0,9074.$$

Trong một số tình huống ta cần tính toán xác suất liên quan đến việc thực hiện liên tiếp một phép thử n lần độc lập. Chẳng hạn

- Ta coi việc sử dụng một máy điều hòa là thực hiện một phép thử. Tương ứng việc một công ty lắp đặt và sử dụng một lô 25 máy điều hòa chính là thực hiện $n = 25$ phép thử.
- Ta coi việc chạy một chuyến xe buýt trên một tuyến nào đó là thực hiện một phép thử. Tương ứng, việc chạy 50 chuyến xe buýt trong một ngày trên tuyến đó chính là thực hiện $n = 50$ phép thử.
- Ta coi việc theo dõi khả năng mắc bệnh truyền nhiễm ở một người dân trong một năm là thực hiện một phép thử. Tương ứng việc cơ quan y tế dự phòng theo khả năng mắc bệnh truyền nhiễm trong một năm đối với một thành phố có 500.000 dân là thực hiện $n = 500.000$ phép thử.

Định lý 1.5

Giả sử có một dãy gồm n phép thử độc lập. Với mỗi phép thử ta đều quan tâm đến biến cố A nào đó, với $P(A) = p$ (không đổi). Khi đó,

a) Xác suất để trong n lần thử, biến cố A xuất hiện đúng k lần $(0 \leqslant k \leqslant n)$:

$$P_n(k;p) = C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}. \tag{1.21}$$

b) Xác suất để trong n lần thử, biến cố A xuất hiện từ k_1 đến k_2 lần:

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2;p) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}. \tag{1.22}$$

Chứng minh. Ta gọi A_i là biến cố chỉ *"lần thử thứ i xuất hiện A"*, $i = 1, 2, .., n$. Do dãy phép thử độc lập, nên các biến cố A_i độc lập, với $P(A_i) = P(A) = p, \forall i = 1, 2, ..., n$.

Công thức (1.21): Gọi B là biến cố *trong n lần thử thì biến cố A xuất hiện k lần*. Tương ứng, trong n lần thử có $(n-k)$ lần không xuất hiện A, hay $(n-k)$ lần xuất hiện $\overline{A}$. Chẳng hạn

$$\underbrace{A_1A_2...A_k}_{k \text{ lần}}\underbrace{\overline{A}_{k+1}...\overline{A}_n}_{n-k \text{ lần}}.$$

Ta tách B thành một tổng của các biến cố xung khắc

$$B = \sum B_1B_2\ldots B_n \qquad (1.21a)$$

trong đó ứng với mỗi số hạng của vế phải $B_1B_2\ldots B_n$ ta lấy

$$B_i = \begin{cases} A_i & \text{nếu lần thử thứ } i \text{ xuất hiện } A, \\ \overline{A_i} & \text{nếu lần thử thứ } i \text{ không xuất hiện } A. \end{cases}.$$

Do các lần thử độc lập nên mỗi số hạng trong vế phải của $(1.21a)$ có xác suất là

$$P(B_1B_2\ldots B_n) = P(B_1)P(B_2)\ldots P(B_n) = [P(A)]^k[P(\overline{A})]^{n-k} = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Mỗi số hạng trong vế phải của $(1.21a)$ ứng với một cách chọn k vị trí trong dãy $B_1B_2\ldots B_n$ để gán $B_i = A_i$ (các vị trí khác được gán $B_i = \overline{A}_i$). Như vậy số lượng số hạng trong vế phải $(1.21a)$ chính là số tổ hợp chập k của n, hay là C_n^k. Từ đó ta có

$$P(B) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Người ta thường ký hiệu công thức Bernoulli theo các chỉ số có liên quan, nên $P(B)$ còn được ký hiệu là $P_n(k;p)$.

Công thức (1.22): Ta gọi C là biến cố *trong n lần thử thì biến cố A xuất hiện từ k_1 đến k_2 lần*, gọi C_k là biến cố *trong n lần thử thì biến cố A xuất hiện k lần*. Như vậy biểu diễn được $C = C_{k_1} \cup C_{k_1+1} \cup \ldots \cup C_{k_2}$. Do các biến cố trong tổng là xung khắc nên

$$P(C) = P(C_{k_1}) + P(C_{k_1+1}) + \ldots + P(C_{k_2}).$$

Mà mỗi xác suất $P(C_k)$ lại được tính như công thức (1.21). Từ đó ta nhận được công thức (1.22).

1.7 Dãy phép thử độc lập và công thức Bernoulli

Công thức Bernoulli

Nhận xét 1.5 Trong bài toán Bernoulli, các thông tin quan trọng cần được phân tích theo trật tự:
- Phép thử là gì?
- Phép thử đó lặp bao nhiêu lần? (tìm n)
- Mỗi lần thử ta quan tâm đến biến cố A chỉ cái gì?
- Xác suất xảy ra A là bao nhiêu? (tìm p-không đổi)
- Cần tính xác suất để trong n lần thử thì A xuất hiện mấy lần? (tìm k)

Ví dụ 1.53

Người ta kiểm tra chất lượng một thùng hàng bằng cách lấy ngẫu nhiên 5 lần, mỗi lần 1 sản phẩm, có hoàn lại. Nếu trong 5 lần lấy, có không quá 1 lần xuất hiện phế phẩm thì thùng hàng sẽ được chấp nhận. Biết rằng thùng hàng có 150 sản phẩm, trong đó có 10 phế phẩm. Tính xác suất để thùng hàng được chấp nhận.

Giải. Mỗi lần lấy một sản phẩm từ thùng hàng là một phép thử. Vì lấy có hoàn lại nên khi thực hiện 5 lần, ta nhận được một dãy phép thử độc lập

Mỗi lần thử, ta quan tâm biến cố A chỉ thông tin *sản phẩm lấy được là phế phẩm*. Ta có

$$P(A) = \frac{10}{150} = \frac{1}{15}.$$

Ta thấy $P(A)$ không thay đổi ở mỗi lần thử, nên $p = \frac{1}{15}$.
Gọi B là biến cố *thùng hàng được chấp nhận*. Theo đề bài, thùng hàng được chấp nhận là khi có không quá 1 phế phẩm xuất hiện trong 5 lần kiểm tra ngẫu nhiên. Vậy số lần xuất hiện phế phẩm là $0 \leqslant k \leqslant 1$. Dùng công thức Bernoulli (1.22), ta có

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=0}^{1} C_5^k p^k (1-p)^{5-k} \\ &= C_5^0 \left(\frac{1}{15}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{15}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{1}{15}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{15}\right)^4 \\ &= 0,7082 + 0,2529 = 0,9611. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.55

Trong một thùng chứa 20 sản phẩm loại A, 10 sản phẩm loại B và 15 sản phẩm loại C. Lấy ngẫu nhiên 7 lần (có hoàn lại) mỗi lần một sản phẩm. Tính xác suất để trong 7 lần lấy đó
a) Có 3 lần lấy được sản phẩm loại A.
b) Có 4 lần lấy được sản phẩm loại A và 3 lần lấy được sản phẩm loại B.
c) Có 2 lần lấy được sản phẩm loại A, 4 lần lấy được sản phẩm loại B và 1 lần lấy được sản phẩm loại C.

Giải. Do lấy sản phẩm có hoàn lại nên mỗi lần lấy thì số lượng các loại sản phẩm trong thùng là như nhau và các lần lấy là độc lập với nhau. Gọi A, B, C là các biến cố chỉ sản phẩm lấy ra trong một lần lấy là sản phẩm loại A,B, C tương ứng. Ta có

$$P(A) = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}, P(B) = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}, P(C) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

Các xác suất này không thay đổi trong mỗi lần lấy. Coi mỗi lần lấy là một phép thử ta có dãy phép thử độc lập lặp $n = 7$ lần.

a)Gọi D là biến cố "trong 7 lần lấy có 3 lần lấy được sản phẩm loại A". Theo công thức Bernoulli, ta có

$$P(D) = C_7^3\left(\frac{4}{9}\right)^3\left(1-\frac{4}{9}\right)^{7-3} = 0,2927.$$

b) Gọi E là biến cố "trong 7 lần lấy sản phẩm có 4 lần lấy được sản phẩm loại A và 3 lần lấy được sản phẩm loại B". Ta có

$$P(E) = C_7^4\left(\frac{4}{9}\right)^4 C_3^3\left(\frac{2}{9}\right)^3 = 0,015.$$

c) Gọi F là biến cố "trong 7 lần lấy có 2 lần lấy được sản phẩm loại A, 4 lần lấy được sản phẩm loại B và 1 lần lấy được sản phẩm loại C". Ta có

$$P(F) = C_7^2\left(\frac{4}{9}\right)^2 C_5^4\left(\frac{2}{9}\right)^4 C_1^1\left(\frac{1}{3}\right)^1 = 0,0034.$$