Chương 4: BIẾN NGẪU NHIÊN NHIỀU CHIỀU

Trần Văn Long

28th April 2020

Mục lục

4.1 Biến ngẫu nhiên hai chiều

Khái niệm

Trong thực tế có nhiều phép thử ngẫu nhiên, ở đó ta quan sát về nhiều biến ngẫu nhiên. Chẳng hạn, trong một hệ thống điện ta có thể quan sát điện thế tại nhiều điểm khác nhau. Trong chương trước chúng ta đã tìm hiểu các quy luật phân phối một biến ngẫu nhiên. Trong chương này chúng ta mở rộng các khái niệm đã biết cho hai hay nhiều các biến ngẫu nhiên. Nội dung của chương này bao gồm:

- Hàm phân phối đồng thời, hàm khối xác suất đồng thời, và hàm mật độ đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều;
- Hàm phân phối thành phần, hàm khối xác suất thành phần, và hàm mật độ thành phần;
- Các biến ngẫu nhiên độc lập;
- Hàm khối xác suất có điều kiện, hàm mật độ có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện;
- Hiệp phương sai, hệ số tương quan và tỷ số tương quan;
- Biến ngẫu nhiên nhiều chiều tổng quát

4.1 Biến ngẫu nhiên hai chiều

Khái niệm

Biến ngẫu nhiên hai chiều

Giả sử ta xét một phép thử ngẫu nhiên có không gian mẫu Ω. Một hàm được xác định trên Ω bằng cách ứng với mỗi biến cố sơ cấp $\omega \in \Omega$ ta gán với một cặp số thực $(X(\omega), Y(\omega))$. Ta gọi (X, Y) là biến ngẫu nhiên hai chiều hay đại lượng ngẫu nhiên hai chiều.

Ví dụ 4.1

Xét phép thử ngẫu nhiên là kiểm tra sinh viên của Trường Đại học Giao thông Vận tải. Với mỗi sinh viên ω, ta xác định hai hàm sau:

$$X(\omega) = \text{chiều cao của sinh viên(cm)},$$

$$Y(\omega) = \text{cân nặng của sinh viên(kg)}.$$

Ta có biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y).

4.1 Biến ngẫu nhiên hai chiều

Khái niệm

Ví dụ 4.2

Gieo hai con xúc sắc và ta xét số chấm xuất hiện của hai con xúc sắc (có tính thứ tự) $(i,j), 1 \leqslant i,j \leqslant 6$. Gọi X là số chấm của con xúc sắc thứ nhất và Y là số chấm của con xúc sắc thứ hai. Khi đó với mỗi biến cố sơ cấp $\omega = (i,j)$ ta xác định

$$X(\omega) = i, Y(\omega) = j.$$

Cặp hai biến (X,Y) là biến ngẫu nhiên hai chiều.

Các biến cố mô tả về biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y) thường được mô tả bằng một miền nào đó trong mặt phẳng hệ tọa độ Đề-các Oxy. Chẳng hạn biến cố

$$A = \{X \leqslant 170, Y \leqslant 60\} = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leqslant 170, Y(\omega) \leqslant 60\},$$

trong Ví dụ 4.1 biểu diễn biến cố các sinh viên có chiều cao không quá 170 (cm) và cân nặng không quá 60 (kg) được biểu diễn bởi hình được gạch chéo dưới đây. (hình SGK)

4.1 Biến ngẫu nhiên hai chiều

Hàm phân phối đồng thời

Để xác định xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) trong một miền S nào đó của mặt phẳng, ta xét biến cố

$$A = \{(X, Y) \in S\} = \{\omega \in \Omega : \ (X(\omega), Y(\omega)) \in S\}.$$

Khi đó xác suất tương ứng là

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((X, Y) \in S) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \ (X(\omega), Y(\omega)) \in S\}).$$

Trong trường hợp tập S có thể viết dạng $S = S_1 \times S_2$, biến cố trên có thể viết là $A = \{X \in S_1, Y \in S_2\} = \{X \in S_1\} \cap \{Y \in S_2\}$.

Định nghĩa 4.1

Cho (X, Y) là biến ngẫu nhiên hai chiều. Hàm phân phối xác suất của (X, Y) là hàm hai biến $F(x, y) = F_{(X,Y)}(x, y)$ xác định với mọi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ và nó là xác suất của biến cố

$$\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = \{\omega \in \Omega : \ X(\omega) \leqslant x, Y(\omega) \leqslant y\}.$$

Hàm phân phối xác suất đồng thời được định nghĩa như sau:

$$F(x, y) = \mathbb{P}\Big(X \leqslant x, Y \leqslant y\Big). \tag{4.1}$$

Ví dụ 4.3

Gieo đồng thời hai đồng xu cân đối và đồng chất. Gọi X là biến chỉ số mặt sấp xuất hiện ở đồng xu thứ nhất và Y là biến chỉ số mặt sấp xuất hiện ở đồng xu thứ hai. Ta tìm hàm phân phối xác suất $F(x,y)$ của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y).

Giải: Ta có không gian mẫu

$$\Omega = \{NN, SN, NS, SS\}.$$

Các giá trị có thể nhận của (X,Y) là $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$. Hàm phân phối $F(x,y)$ xác định bởi công thức

$$F(x,y) = \mathbb{P}\Big(X \leqslant x, Y \leqslant y\Big).$$

Để tính $F(x,y)$ ta phải xét đến giá trị của (x,y) đối với các điểm mà biến ngẫu nhiên (X,Y) có thể nhận.

Biến cố $\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}$ được biểu diễn như sau:

$$\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = \begin{cases} \varnothing & \min(x,y) < 0, \\ \{NN\} & 0 \leqslant x,y < 1, \\ \{NN, SN\} & x \geqslant 1, 0 \leqslant y < 1, \\ \{NN, NS\} & 0 \leqslant x < 1, y \geqslant 1, \\ \{NN, SN, NS, SS\} & x \geqslant 1, y \geqslant 1. \end{cases}$$

Khi đó hàm phân phối $F(x,y) = \mathbb{P}\Big(X \leqslant x, Y \leqslant y\Big)$ được xác định như sau:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \min(x,y) < 0, \\ 1/4 & 0 \leqslant x,y < 1, \\ 2/4 & x \geqslant 1, 0 \leqslant y < 1, \\ 2/4 & 0 \leqslant x < 1, y \geqslant 1, \\ 1 & x \geqslant 1, y \geqslant 1. \end{cases}$$

4.1 Biến ngẫu nhiên hai chiều

Hàm phân phối đồng thời

Một số tính chất của hàm phân phối đồng thời

- Hàm phân phối không giảm theo x và y,
$$F(x_1,y_1) \leqslant F(x_2,y_2) \text{ nếu } x_1 \leqslant x_2 \text{ và } y_1 \leqslant y_2.$$

- Giá trị tới hạn:
$$F(x,-\infty) = 0, \quad F(-\infty,y) = 0, \quad F(+\infty,+\infty) = 1.$$

- Xác suất trong hình chữ nhật
$$\mathbb{P}([x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2]) = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1$$

- Hàm $F(x,y)$ là hàm liên tục phải theo từng biến
$$F(a+,y) = F(a,y), \quad F(x,b+) = F(x,b).$$

Từ các tính chất trên ta có thể tính được các hàm phân phối xác suất thành phần của biến ngẫu nhiên thành phần X, Y lần lượt là $F_X(x), F_Y(y)$. Chẳng hạn để tìm hàm phân phối xác suất của X ta có

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \mathbb{P}([X \leqslant x, Y < +\infty) = F(x, +\infty),$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}([Y \leqslant y]) = \mathbb{P}([X < +\infty, Y \leqslant y]) = F(+\infty, y).$$

Vậy hàm phân phối xác suất của biến thành phần X và Y là

$$F_X(x) = F(x, +\infty), \quad F_Y(y) = F(+\infty, y). \tag{4.2}$$

Tương tự như trường hợp biến ngẫu nhiên một chiều đã được xét đến ở các chương trước, trong chương này ta chia các biến ngẫu nhiên hai chiều thành hai loại: biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc và biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục.

4.2 Biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc

Hàm khối xác suất đồng thời

Nếu X và Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc thì miền giá trị của (X,Y) là tập các điểm (hữu hạn hoặc đếm được) và ta gọi (X,Y) là biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc. Khi đó chỉ có một số hữu hạn hoặc đếm được các điểm (x,y) nào đó trong mặt phẳng sao cho giá trị xác suất

$$\mathbb{P}([X=x, Y=y]) = \mathbb{P}\Big(\{\omega \in \Omega : \; X(\omega)=x, Y(\omega)=y\}\Big)$$

là dương. Hàm xác định các giá trị xác suất trên còn được gọi là hàm khối xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc.

Định nghĩa 4.2

Hàm khối xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc (X, Y) là hàm hai biến $f(x, y) = f_{(X,Y)}(x, y)$ thỏa mãn

- $f(x, y) \geqslant 0, \forall x, y,$
- $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1,$
- $f(x, y) = f_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y).$

Để cho đơn giản ta giả sử (X, Y) nhận hữu hạn các giá trị

$$S = \{(x_i, y_j) : \ i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n\},$$

và đặt

$$p_{ij} = f(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j).$$

Với mỗi giá trị $(x_i, y_j) \in S$ ta có các giá trị tương ứng $f(x_i, y_j)$. Ta thường biểu diễn hàm khối xác suất đồng thời bởi bảng, gọi là bảng phân phối xác suất đồng thời như trong Bảng 4.1.

4.2 Biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc

Hàm khối xác suất đồng thời

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mn}

Table: Hàm khối xác suất đồng thời.

Rõ ràng mỗi số $p_{ij} \geqslant 0$ và tổng các xác suất ứng với mỗi giá trị trong tập S bằng 1, nghĩa là

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Để tính xác suất của một sự kiện trong tập A nào đó của S ta sử dụng đẳng thức sau:

$$\mathbb{P}[(X, Y) \in A] = \sum_{(x_i, y_j) \in A} p_{ij}. \qquad (4.3)$$

Ví dụ 4.4

Một hộp đựng 10 chiếc bút bi giống nhau về kích thước và hình dạng, trong đó có 2 chiếc màu đỏ, 3 chiếc màu xanh và 5 chiếc màu vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 chiếc bút. Gọi X là số bút màu đỏ và Y là số bút màu xanh.
a) Tìm bảng phân phối xác suất đồng thời của (X,Y).
b) Tính xác suất để $\mathbb{P}([(X,Y) \in A])$ với $A = \{(x,y) : \ x+y \leqslant 1\}$.

Giải: Ta biết tập các giá trị có thể có của (X,Y) là

$$S = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(2,0)\}.$$

Với mỗi giá trị $(x,y) \in S$ xác suất để $X = x$ và $Y = y$ là

$$f(x,y) = \frac{C_2^x C_3^y C_5^{2-x-y}}{C_{10}^2}.$$

Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) là

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{10}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{3}{45}$
1	$\frac{10}{45}$	$\frac{6}{45}$	0
2	$\frac{1}{45}$	0	0

Table: Hàm khối xác suất đồng thời của (X, Y).

b) Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([(X,Y) \in A]) = \mathbb{P}([X+Y \leqslant 1]) &= f(0,0) + f(1,0) + f(0,1)\\ &= \frac{10}{45} + \frac{10}{45} + \frac{15}{45} = \frac{35}{45} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ví dụ 4.5

Cho hàm khối xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều rời rạc (X,Y) xác định bởi công thức

$$f(x,y) = k(x+y), \quad x = 0,1,2,3; y = 0,1,2.$$

a) Tìm giá trị k.
b) Lập bảng phân phối xác suất đồng thời (X,Y).

Giải: a) Ta có $f(x,y) \geqslant 0$ và $\sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{2} f(x,y) = \sum_{x=0}^{3}\sum_{y=0}^{2} k(x+y) = 1.$

Từ đó ta tính được $30k = 1$ hay $k = \dfrac{1}{30}.$

b) Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) là

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$
1	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$
2	$\frac{2}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$
3	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{5}{30}$

Ví dụ 4.7

Một con Robot được thiết kế để di chuyển trên mặt phẳng. Tại mỗi bước di chuyển con Robot có thể di chuyển 1 đơn vị dọc theo hướng dương trục Ox với xác suất p hoặc di chuyển 1 đơn vị dọc theo hướng dương trục Oy với xác suất q $(p+q=1)$. Tìm hàm khối xác suất xác định vị trí của con Robot trên n bước di chuyển.

Giải: Để cho thuận tiện ta giả sử con Robot bắt đầu tại vị trí có tọa độ $(0,0)$. Gọi (X,Y) là biến chỉ tọa độ của con Robot trên mặt phẳng tương ứng với số đơn vị đo. Các biến ngẫu nhiên X và Y chỉ nhận các giá trị nguyên không âm và sau n bước, vị trí của con Robot nằm trên đường thẳng $x+y=n$. Xét các điểm nguyên không âm nằm trên đường thẳng $x+y=n$ thì xác suất để $X=x, Y=y$ gồm có x bước di chuyển theo trục Ox và Oy bước di chuyển theo trục y nên xác suất để con Robot tại vị trí (x,y) sau n bước là

$$f(x,y)=f(x,n-x)=C_n^x p^x q^{n-x}, x=0,1,\ldots,n; y=n-x.$$

Khi ta biết hàm khối xác xuất đồng thời của (X, Y) thì ta dễ dàng xác định được hàm khối xác suất của X và Y. Các hàm khối xác suất của X và Y gọi là các hàm khối xác suất biên hay hàm khối xác suất thành phần được xác định như sau:

$$\begin{aligned} f_X(x_i) &= \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(X = x_i, Y \text{ bất kỳ}) \\ &= \mathbb{P}(\cup_j \{X = x_i, Y = y_j\}) \\ &= \sum_j \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_j f(x_i, y_j). \end{aligned}$$

Tương tự như trên ta xác định hàm khối xác suất của Y như sau:

$$f_Y(y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_i \mathbb{P}([X = x_i, Y = y_j]) = \sum_i f(x_i, y_j).$$

Các hàm khối xác suất biên có các tính chất như hàm khối xác suất của biến ngẫu nhiên một chiều.

Đối với trường hợp hàm khối xác suất đồng thời cho bởi Bảng 4.1 để cho thuận tiện ta ký hiệu

$$p_{i\bullet} = \sum_{j=1} p_{ij}, \qquad p_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \tag{4.4}$$

và các giá trị trên được tính bằng tổng các hàng và các cột trong bảng phân phối xác suất đồng thời.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_n	$p_{i\bullet}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2n}	$p_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mn}	$p_{m\bullet}$
$p_{\bullet j}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\dots$	$p_{\bullet n}$	1

Table: Xác định hàm khối xác suất của các biến thành phần.

Khi đó bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X có xác suất tương ứng bằng các giá trị trong cột cuối cùng của Bảng 4.4.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m
$\mathbb{P}$	$p_{1\bullet}$	$p_{2\bullet}$	$\dots$	$p_{m\bullet}$

Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y có xác suất tương ứng bằng hàng cuối cùng của Bảng 4.4.

Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n
$\mathbb{P}$	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\dots$	$p_{\bullet n}$

Ví dụ 4.8

Một cửa hàng bán máy tính để bàn gồm cây máy tính và màn hình. Cây máy tính chia làm 2 loại với mệnh giá 10 triệu đồng và mệnh giá 12 triệu đồng. Màn hình máy tính chia làm 3 loại với mệnh giá 1 triệu đồng, 2 triệu đồng và 4 triệu đồng. Một máy tính được bán gồm một cây máy tính giá X (triệu đồng) và một màn hình giá Y (triệu đồng). Theo thông báo của cửa hàng tỷ lệ mua máy tính được thống kê ở bảng dưới đây.

X \ Y	1	2	4
10	30%	20%	10%
12	20%	10%	10%

Xác định bảng phân phối xác suất của các biến thành phần X và Y.

Giải: Ta tính phân phối của các biến ngẫu nhiên X và Y bằng cách cộng các hàng và các cột trong bảng phân phối xác suất đồng thời như bảng dưới đây.

$X \backslash Y$	1	2	4	$p_{i\bullet}$
10	$0,3$	$0,2$	$0,1$	$0,6$
12	$0,2$	$0,1$	$0,1$	$0,4$
$p_{\bullet j}$	0,5	0,3	0,2	1

Bảng phân phối xác suất của X là

X	10	12
$\mathbb{P}$	$0,6$	$0,4$

Bảng phân phối xác suất của Y là

Y	1	2	4
$\mathbb{P}$	$0,5$	$0,3$	$0,2$

Định nghĩa 4.3

Hàm hai biến $f(x,y) = f_{(X,Y)}(x,y)$ là hàm mật độ đồng thời của biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục (X,Y) nếu

- $f(x,y) \geqslant 0, \forall x,y,$
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1,$
- $\mathbb{P}[(X,Y) \in S] = \iint\limits_{S} f(x,y)dx\,dy$ với mọi miền S trong mặt phẳng.

Các hàm mật độ của biến ngẫu nhiên X và Y, ký hiệu là $f_X(x), f_Y(y)$, còn gọi là hàm mật độ xác suất của các biến thành phần hay hàm mật độ biên. Các hàm này được xác định bởi công thức sau

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx. \tag{4.5}$$

Ví dụ 4.9

Cho hàm mật độ của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y) xác định bởi:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & (x,y) \notin [0,1]^2 \end{cases}$$

a) Tìm hằng số c.
b) Tìm các hàm mật độ xác suất của X và Y.

Giải: a) Do $f(x,y) \geqslant 0$ nên $c \geqslant 0$. Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 c(x+y)dxdy = c\int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right)dx$$

$$= c\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = c\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\Big|_0^1\right) = c.$$

Vì $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$ nên $c = 1$.

b) Hàm mật độ của X là

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int\limits_0^1 (x+y)dy & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

Tương tự ta có hàm mật độ của Y là

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & y \in [0,1] \\ 0 & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Ví dụ 4.10

Một máy tính có kết nối mạng. Gọi X (giây) là thời gian chờ kết nối với máy chủ, và Y (giây) là thời gian chờ để máy chủ xác nhận. Giả sử hàm mật độ đồng thời của (X, Y) xác định bởi công thức

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{trái lại.} \end{cases}$$

a) Tìm hàm mật độ của X và Y.
b) Tính xác suất để thời gian chờ kết nối với máy chủ nhỏ hơn thời gian chờ để máy chủ xác nhận.

Giải: a) Hàm mật độ của X là $f_X(x)$. Với $x > 0$, ta có

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} 2e^{-x-2y}dy = -e^{-x-2y}\Big|_0^{+\infty} = e^{-x}.$$

Tương tự, ta tìm được hàm mật độ xác suất của Y là

$$f_Y(y) = 2\exp(-2y), y > 0.$$

b) Ta cần tính xác suất

$$\mathbb{P}(X < Y) = \iint\limits_{x<y} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{+\infty}\Big(\int\limits_x^{+\infty} 2\exp(-x-2y)dy\Big)dx$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \exp(-3x)dx = -\frac{1}{3}\exp(-3x)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{3}. \qquad \square$$

Hàm phân phối của (X, Y) được xác định như sau:

$$F(x,y) = \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv. \quad (4.6)$$

Mối liên hệ giữa hàm phân phối và hàm mật độ. Hàm mật độ xác suất đồng thời bằng đạo hàm riêng cấp hai của hàm phân phối đối với các biến thành phần

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \quad (4.7)$$

Định nghĩa 4.4

Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là độc lập nếu với bất kỳ tập con S_X các giá trị của X và tập con S_Y các giá trị của Y, ta có

$$\mathbb{P}(X \in S_X, Y \in S_Y) = \mathbb{P}(X \in S_X)\mathbb{P}(Y \in S_Y). \tag{4.8}$$

4. 4 Sự độc lập của các biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên rời rạc độc lập

Biến ngẫu nhiên rời rạc hai chiều (X, Y) có hàm khối xác suất $f(x,y)$. Xét các tập $A = \{X = x_i\}, B = \{Y = y_j\}$ nếu X và Y độc lập thì

$$f(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j) = f_X(x_i)f_Y(y_j).$$

Điều khẳng định ngược lại cũng đúng. Xét các tập con S_X và S_Y các giá trị của X và Y, ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in S_X, Y \in S_Y) &= \sum_{x\in S_X}\sum_{y\in S_Y} f(x,y) = \sum_{x\in S_X}\sum_{y\in S_Y} f_X(x)f_Y(y)\\ &= \sum_{x\in S_X} f_X(x) \sum_{y\in S_Y} f_Y(y) = \mathbb{P}(X \in S_X)\mathbb{P}(Y \in S_Y).\end{aligned}$$

Vậy X và Y độc lập.

4. 4 Sự độc lập của các biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên rời rạc độc lập

Định lý 4.1

Cho (X,Y) là biến ngẫu nhiên rời rạc hai chiều có hàm khối xác suất $f(x,y)$ và các hàm khối xác suất biên của X và Y lần lượt là $f_X(x)$ và $f_Y(y)$. Điều kiện cần và đủ để X và Y độc lập là

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y). \tag{4.9}$$

Ta đối chiếu với bảng phân phối xác suất đồng thời của (X,Y) và các hàm khối xác suất của X và Y trong Bảng 4.4 (SGK). Tương ứng, X và Y độc lập khi và chỉ khi

$$p_{ij} = p_{i\bullet}\, p_{\bullet j}, \tag{4.10}$$

nghĩa là xác suất đồng thời bằng tích các xác suất biên tương ứng của X và Y.

Ví dụ 4.11

Gieo hai con xúc sắc và xét số chấm xuất hiện của hai con xúc sắc (có tính thứ tự). Gọi X là số chấm của con xúc sắc thứ nhất và Y là số chấm của con xúc sắc thứ hai.
a) Chứng minh rằng X và Y độc lập.
b) Tính xác suất để số chấm bé nhất bằng 3.

Giải: a) Ta có $X(i,j) = i, Y(i,j) = j$, cặp hai biến (X,Y) là biến ngẫu nhiên rời rạc hai chiều. Ta có hàm khối xác suất đồng thời là $f(i,j) = \dfrac{1}{36}$.

4. 4 Sự độc lập của các biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên rời rạc độc lập

Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) là

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Table: Hàm khối xác suất đồng thời của (X, Y).

4. 4 Sự độc lập của các biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên rời rạc độc lập

Các biến ngẫu nhiên X và Y có phân phối đều trên tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tức là

$$f_X(i) = f_Y(j) = \frac{1}{6}, \ \forall\, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Vậy

$$f(i, j) = f_X(i) f_Y(j), \ \forall\, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Do đó X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập.
b) Ta cần tính

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\min(X, Y) = 3) &= \mathbb{P}([X = 3] \cup [Y = 3]) \\
&= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(Y = 3) - \mathbb{P}(X = 3, Y = 3) \\
&= \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(Y = 3) - \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(Y = 3) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.
\end{aligned}$$

4. 4 Sự độc lập của các biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên liên tục độc lập

Trường hợp liên tục: Xét hai biến ngẫu nhiên liên tục X và Y độc lập với hàm khối xác suất đồng thời $f(x,y)$ và các hàm khối xác suất biên $f_X(x)$ và $f_Y(y)$. Theo điều kiện (4.8) của Định nghĩa 4.4 ta có

$$\mathbb{P}(X \in S_X, Y \in S_Y) = \mathbb{P}(X \in S_X)\mathbb{P}(Y \in S_Y)$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{S_X}\int\limits_{S_Y} f(x,y)dxdy = \int\limits_{S_X} f_X(x)dx \int\limits_{S_Y} f_Y(y)dy$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{S_X}\int\limits_{S_Y} f(x,y)dxdy = \int\limits_{S_X}\int\limits_{S_Y} f_X(x)dxf_Y(y)dy.$$

Từ đó ta chỉ ra được kết quả:

Định lý 4.2

Hai biến ngẫu nhiên X và Y là độc lập khi và chỉ khi

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \ \forall x,y. \tag{4.11}$$

Ví dụ 4.12

Giả sử hàm mật độ đồng thời của (X, Y) xác định bởi công thức

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{trái lại.} \end{cases}.$$

Theo Ví dụ 4.10 ở trên ta biết hàm mật độ của X là $f_X(x) = e^{-x}, x > 0$ và hàm mật độ của Y là $f_Y(y) = 2e^{-2y}, y > 0$. Ta thấy $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, vậy X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập.

4. 4 Sự độc lập của các biến ngẫu nhiên

Biến ngẫu nhiên liên tục độc lập

Ví dụ 4.13

Hai người bạn hẹn nhau tại một địa điểm trong khoảng từ 8 giờ sáng đến 9 giờ sáng. Mỗi người đến địa điểm hẹn gặp độc lập với nhau và có phân phối đều trong khoảng thời gian hẹn gặp. Mỗi người đến địa điểm trên và chờ không quá 12 phút. Tính xác suất để hai người gặp nhau.

Giải: Gọi (X, Y) là thời gian (phút) mà hai người bạn đến địa điểm cần gặp (bắt đầu tính từ 8 giờ). Khi đó X và Y có phân phối đều trên đoạn $[0, 60]$ (phút). Do X và Y độc lập nên (X, Y) có phân phối đều trên hình vuông $[0, 60] \times [0, 60]$, nghĩa là có hàm mật độ

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{3600} & (x,y) \in [0,60] \times [0,60] \\ 0 & (x,y) \in [0,60] \times [0,60]. \end{cases}$$

Xác suất hai người gặp nhau là

$$P(|X - Y| \leqslant 12) = \frac{\text{diện tích}(S)}{60.60} = 1 - \frac{48.48}{3600} = \frac{9}{25},$$

trong đó S là phần hình được tô đậm trong Hình vẽ 4.4

Định lý 4.3

Hai biến ngẫu nhiên X và Y là độc lập khi và chỉ khi hàm phân phối đồng thời bằng tích các hàm phân phối biên:

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \ \forall x,y. \tag{4.12}$$

Đối với các biến ngẫu nhiên độc lập thì hàm của các biến ngẫu nhiên của chúng cũng độc lập. Chẳng hạn X và Y độc lập thì X^2 và Y^3 cũng độc lập. Điều này là kết quả nhận được từ định lý sau:

Định lý 4.4

Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập và $g(x)$ và $h(y)$ là hai hàm số bất kỳ. Khi đó hai biến ngẫu nhiên $Z = g(X)$ và $T = h(Y)$ cũng là hai biến ngẫu nhiên độc lập.

4. 5 Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Công thức tính kỳ vọng

- Khi nghiên cứu về biến ngẫu nhiên hai chiều trên một không gian mẫu ta thường xem xét về mối liên hệ giữa các biến ngẫu nhiên đó. Một trong các giá trị đặc trưng được dùng cho việc này có tên gọi là hiệp phương sai.
- Để tính giá trị hiệp phương sai ta cần định nghĩa kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $\mathbb{E}g(X,Y)$ đối với hàm $g(x,y)$ của biến ngẫu nhiên hai chiều (X,Y).
- Gọi $Z = g(X,Y)$ là hàm của hai biến ngẫu nhiên (X,Y). Khi đó, kỳ vọng của biến ngẫu nhiên Z được xác định bởi công thức sau:

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i,y_j)f(x_i,y_j) & (X,Y) \text{ rời rạc} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy & (X,Y) \text{ liên tục.} \end{cases} \tag{4.13}$$

Xét trường hợp riêng ứng với trường hợp hàm $g(x,y) = xy$, ta có công thức

$$\mathbb{E}[XY] = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) & (X,Y) \text{ rời rạc} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy & (X,Y) \text{ liên tục.} \end{cases} \tag{4.14}$$

4. 5 Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Công thức tính kỳ vọng

Kỳ vọng của tổng hai biến ngẫu nhiên:

Xét trường hợp $Z = g(X, Y) = X + Y$.

☞ Nếu (X, Y) là biến ngẫu nhiên rời rạc, ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X+Y] &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j) f(x_i, y_j) \\
&= \sum_i x_i \sum_j f(x_i, y_j) + \sum_j y_j \sum_i f(x_i, y_j) \\
&= \sum_i x_i f_X(x_i) + \sum_j y_j f_Y(y_j) \\
&= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

☞ Nếu (X, Y) là biến ngẫu nhiên liên tục, ta có

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X+Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy \\
&= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].
\end{aligned}
$$

Kỳ vọng của tích hai biến ngẫu nhiên:

Xét trường hợp $Z = g(X, Y) = XY$ với X và Y độc lập.

☞ Nếu (X, Y) là biến ngẫu nhiên rời rạc thì

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_i \sum_j x_i . y_j f(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j x_i . y_j f_X(x_i) f_Y(y_j)$$

$$= \sum_i x_i f_X(x_i) \sum_j y_j f_Y(y_j) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

☞ Nếu (X, Y) là biến ngẫu nhiên liên tục thì

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (xy) f(x, y) dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (xy) f_X(x) f_Y(y) dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Định lý 4.5

Kỳ vọng của tổng bằng tổng các kỳ vọng

$$\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]. \tag{4.15}$$

Định lý 4.6

Kỳ vọng của tích các biến ngẫu nhiên độc lập bằng tích các kỳ vọng

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \tag{4.16}$$

Tổng quát, cho X và Y độc lập. Khi đó với mọi hàm $g(x)$ và $h(y)$

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)]. \tag{4.17}$$

4. 5 Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hiệp phương sai

Định nghĩa 4.5

Hiệp phương sai (covariance) của X và Y ký hiệu là $\sigma_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y)$ và được xác định bởi công thức

$$\sigma_{XY} = \operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\Big]. \tag{4.18}$$

Ý nghĩa của hiệp phương sai:

- ☞ Nếu hiệp phương sai $\sigma_{XY} > 0$, các giá trị của (X,Y) có xu hướng gần đến một đường thẳng có hệ số góc dương. Nếu X lớn hơn giá trị trung bình $\mathbb{E}[X]$ thì Y có xu hướng lớn hơn giá trị $\mathbb{E}[Y]$, nghĩa là X và Y cùng biến thiên.
- ☞ Trái lại, nếu hiệp phương sai $\sigma_{XY} < 0$, các điểm (X,Y) có xu hướng nằm trên một đường thẳng có hệ số góc âm. Khi $X - \mathbb{E}[X] < 0$ thì $Y - \mathbb{E}[Y] > 0$ và ngược lại, nghĩa là X và Y biến thiên ngược.

4. 5 Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hiệp phương sai

Trong nhiều trường hợp để thuận tiện trong việc tính toán hiệp phương sai người ta thường sử dụng công thức sau

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\
&= \mathbb{E}[XY - \mathbb{E}[X]Y - Y\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]] \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\
&= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].
\end{aligned}
$$

Công thức tính hiệp phương sai

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \tag{4.19}$$

Tính chất của hiệp phương sai với X, Y, Z là các biến ngẫu nhiên và a, b, c là các hằng số:

- $\operatorname{cov}(X, c) = 0$
- $\operatorname{cov}(X, X) = \mathbb{V}[X]$
- $\operatorname{cov}(X + a, Y + b) = \operatorname{cov}(X, Y)$
- $\operatorname{cov}(aX + b, cY + d) = ac \operatorname{cov}(X, Y)$
- $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$
- $\operatorname{cov}(aX + bY, Z) = a \operatorname{cov}(X, Z) + b \operatorname{cov}(Y, Z)$
- $\mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + 2 \operatorname{cov}(X, Y) + \mathbb{V}[Y]$.

Định lý 4.7

Nếu X và Y độc lập thì

$$\mathrm{cov}(X, Y) = 0, \quad \mathbb{V}[X + Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y].$$

4. 5 Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hệ số tương quan

Để nghiên cứu mối liên hệ tuyến tính của hai biến ngẫu nhiên X và Y, người ta thường sử dụng hệ số tương quan (còn được gọi là hệ số tương quan Pearson).

Định nghĩa 4.6

Hệ số tương quan giữa X và Y, ký hiệu là $\rho = \rho(X, Y)$ được xác định bởi công thức

$$\rho = \rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]}\sqrt{\mathbb{V}[Y]}} = \frac{\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y}{\sqrt{\mathbb{V}[X]}\sqrt{\mathbb{V}[Y]}}. \tag{4.20}$$

Ý nghĩa của hệ số tương quan: Hệ số tương quan là một đại lượng vô hướng và nó được sử dụng để đánh giá mối liên hệ tuyến tính giữa chúng. Nếu hệ số tương quan gần ± 1 thì mối liên hệ tuyến tính giữa các giá trị của (X, Y) là rõ ràng. Trái lại nếu hệ số tương quan gần bằng 0 thì giữa X và Y gần như không có mối quan hệ tuyến tính.

4. 5 Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hệ số tương quan

Tính chất của hệ số tương quan với X, Y là các biến ngẫu nhiên và a, b là các hằng số:

- $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$
- $-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$
- $\rho(X+a, Y+b) = \rho(X,Y)$
- $\rho(aX, bY) = \begin{cases} \rho(X,Y) & \text{nếu } ab > 0 \\ -\rho(X,Y) & \text{nếu } ab < 0 \end{cases}$
- Nếu X và Y là độc lập thì $\rho(X,Y) = 0$. Điều ngược lại nói chung không đúng.

Ví dụ 4.14

Cho bảng phân phối xác suất đồng thời (X, Y) xác định bởi

$X \backslash Y$	1	2	4
10	$0,3$	$0,2$	$0,1$
12	$0,2$	$0,1$	$0,1$

Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan.

Giải: Trước hết ta tính kỳ vọng của tích XY từ bảng phân phối xác suất đồng thời

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= 1.10.0,3 + 2.10.0,2 + 4.10.0,1 + 1.12.0,2 + 2.12.0,1 + 4.12 \\ &= 20,6.\end{aligned}$$

4. 5 Hiệp phương sai và hệ số tương quan

Hệ số tương quan

Từ bảng phân phối xác suất đồng thời ta tính được bảng phân phối xác suất của X (tổng các hàng xác suất) và bảng phân phối xác suất của Y (tổng các cột xác suất).

X	10	12
$\mathbb{P}$	0,6	0,4

Y	1	2	4
$\mathbb{P}$	0,5	0,3	0,2

Từ bảng phân phối xác suất của X ta tính được

$$\mathbb{E}[X] = 10,8; \ \mathbb{E}[X^2] = 117,6; \ \mathbb{V}[X] = 0,96.$$

Tương tự với bảng phân phối xác suất của Y ta có

$$\mathbb{E}[Y] = 1,9; \ \mathbb{E}[Y^2] = 4,9; \ \mathbb{V}[Y] = 1,29.$$

Hiệp phương sai của X và Y là

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 20,6 - 10,8.1,9 = 0,08.$$

Hệ số tương quan giữa X và Y là

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]}\sqrt{\mathbb{V}[Y]}} = \frac{0,08}{\sqrt{0,96}\sqrt{1,29}} = 0,0719.$$

Ví dụ 4.15

Cho hàm mật độ đồng thời (X, Y) xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & (x,y) \notin [0,1]^2. \end{cases}$$

Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan.

Giải: Ta có

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)dxdy = \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\Big)dx = \frac{1}{3}.$$

Hàm mật độ của X là

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

nên ta có

$$\mathbb{E}[X] = \frac{7}{12}, \mathbb{E}[X^2] = \frac{5}{12}, \mathbb{V}[X] = \frac{11}{144}.$$

Hàm mật độ của Y là

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & y \in [0,1] \\ 0 & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Tương tự như trên ta có

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{7}{12}, \mathbb{E}[Y^2] = \frac{5}{12}, \mathbb{V}[Y] = \frac{11}{144}.$$

Hiệp phương sai

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3} - \frac{7}{12}\frac{7}{12} = -\frac{1}{144}.$$

Hệ số tương quan

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]}\sqrt{\mathbb{V}[Y]}} = \frac{-1/144}{\sqrt{11/144}\sqrt{11/144}} = -\frac{1}{11}.$$

4. 6 Xác suất có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

Xác suất có điều kiện của biến ngẫu nhiên rời rạc

- Trong các chương trước ta đã biết về ý nghĩa của xác suất có điều kiện $\mathbb{P}(A|B)$ được xác định bởi công thức $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$.
- Trong phần này chúng ta xem xét khái niệm hàm khối xác suất có điều kiện.
- Cho X và Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc, hàm khối xác suất có điều kiện của Y đối với điều kiện $X = x$ được xác định bởi
$$\mathbb{P}(Y = y|X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$
- Ta ký hiệu hàm khối xác suất có điều kiện của Y đối với điều kiện $X = x$ là $f_Y(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ với các giá trị x sao cho $\mathbb{P}(X = x) > 0$ và ta coi $f_Y(y|x) = 0$ khi $P(X = x) = 0$.
- Tương tự như trên ta có thể xác định được hàm khối xác suất có điều kiện của X đối với $Y = y$ là $f_X(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$.

Định nghĩa 4.7

Cho (X,Y) là biến ngẫu nhiên rời rạc hai chiều có hàm khối xác suất đồng thời $f(x,y)$ và các hàm khối xác suất biên là $f_X(x)$ và $f_Y(y)$. Hàm khối xác suất có điều kiện của Y đối với $[X=x]$ là $f_Y(y|x)$ và hàm khối xác suất có điều kiện của X đối với $[Y=y]$ là $f_X(x|y)$ được xác định bởi công thức sau:

$$f_Y(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \qquad f_X(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \tag{4.21}$$

Khi đó ta có công thức tương tự công thức nhân xác suất tổng quát

$$f(x,y) = f_Y(y|x)f_X(x), \; f(x,y) = f_X(x|y)f_Y(y). \tag{4.22}$$

4. 6 Xác suất có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

Xác suất có điều kiện của biến ngẫu nhiên rời rạc

Tương tự như trường hợp biến ngẫu nhiên một chiều, ta có thể xác định hàm phân phối có điều kiện của Y đối với X và hàm phân phối có điều kiện của X đối với Y như sau:

$$F_Y(y|x_i) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y \leqslant y)}{\mathbb{P}(X = x_i)},$$

$$F_X(x|y_j) = \frac{\mathbb{P}(X \leqslant x, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}.$$

Chú ý 4.1

a) Các hàm khối xác suất có điều kiện có đầy đủ các tính chất của một hàm khối xác suất.

b) Nếu X và Y độc lập thì $f_Y(y|x) = f_Y(y),\ f_X(x|y) = f_X(x)$.

c) Nếu X và Y là độc lập thì

$$F_Y(y|x_i) = F_Y(y), F_X(x|y_j) = F_X(x).$$

☞ Dựa vào xác suất có điều kiện ta có thể dễ dàng tính được xác suất của các biến thành phần cũng như xác xuất đồng thời.

Chẳng hạn, cho biến cố B trong tập các giá trị của biến ngẫu nhiên Y và ta cần tính $\mathbb{P}(Y \in B)$. Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \in B) &= \sum_{x_i} \sum_{y_j \in B} f(x_i, y_j) = \sum_{x_i} \sum_{y_j \in B} f_Y(y_j|x_i) f_X(x_i) \\ &= \sum_{x_i} \Big(\sum_{y_j \in B} f_Y(y_j|x_i) \Big) f_X(x_i) = \sum_{x_i} \mathbb{P}(Y \in B | X = x_i) f_X(x_i).\end{aligned}$$

Nghĩa là xác suất để $\{Y \in B\}$ là xác suất trung bình của biến cố đó với điều kiện $\{X = x_i\}$ ($\mathbb{P}(Y \in B|X = x_i)$) đối với hàm khối xác suất của X $(f_X(x_i))$.

Ví dụ 4.16

Một thiết bị nhận và truyền tín hiệu có 2 cổng vào và 2 cổng ra. Xét tại một thời điểm cụ thể nào đó, gọi X là số gói thông tin truyền đến cổng ra 1, Y là số gói thông tin truyền đến cổng ra 2. Giả sử bảng phân phối xác suất của (X, Y) như sau:

X \ Y	0	1	2
0	1/4	1/4	1/16
1	1/4	1/8	0
2	1/16	0	0

Lập bảng phân phối xác suất của Y với điều kiện có $X = 0$.

Giải: Trước hết ta tính $\mathbb{P}(X = 0) = 1/4 + 1/4 + 1/16 = 9/16$.
Phân phối xác suất có điều kiện của Y đối với điều kiện $X = 0$ là

4. 6 Xác suất có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

Xác suất có điều kiện của biến ngẫu nhiên rời rạc

$$f_Y(0|0) = \mathbb{P}(Y = 0|X = 0) = \frac{p(0,0)}{f_X(0)} = \frac{1/4}{9/16} = \frac{4}{9}$$

$$f_Y(1|0) = \mathbb{P}(Y = 1|X = 0) = \frac{p(1,0)}{f_X(0)} = \frac{1/4}{9/16} = \frac{4}{9}$$

$$f_Y(2|0) = \mathbb{P}(Y = 2|X = 0) = \frac{p(2,0)}{f_X(0)} = \frac{1/16}{9/16} = \frac{1}{9}.$$

Vậy bảng phân phối xác suất của Y đối với điều kiện $[X = 0]$ là

y	0	1	2
$f_Y(y\|0)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Ví dụ 4.17

Số lượng máy điện thoại bị lỗi X tuân theo luật phân phối Poisson với tham số λ. Trong các điện thoại bị lỗi xác suất điện thoại hỏng màn hình là p. Tìm hàm phân phối của biến Y chỉ số điện thoại bị hỏng do màn hình.

Giải: Ta thấy rằng nếu có $X = n$ điện thoại bị hỏng thì số điện thoại bị hỏng màn hình Y có phân phối nhị thức $\mathscr{B}(n,p)$, nghĩa là

$$f_Y(k|n) = \mathbb{P}(Y = k|X = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Do đó hàm khối xác suất của Y được tính như sau:

$$f_Y(k) = \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{\infty} f_Y(k|n) f_X(n) = \sum_{n=k}^{\infty} f_Y(k|n) f_X(n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[(1-p)\lambda]^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

Vậy phân phối của Y là phân phối Poisson với tham số $p\lambda$.

4. 6 Xác suất có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

Xác suất có điều kiện của biến ngẫu nhiên liên tục

Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ đồng thời $f(x,y)$.

Định nghĩa 4.8

Cho (X,Y) là biến ngẫu nhiên liên tục hai chiều có hàm mật độ đồng thời $f(x,y)$ và các hàm mật độ biên là $f_X(x)$ và $f_Y(y)$. Hàm mật độ có điều kiện của Y đối với $[X=x]$ là $f_Y(y|x)$ và hàm mật độ có điều kiện của X đối với $[Y=y]$ là $f_X(x|y)$ được xác định bởi công thức sau:

$$f_Y(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \qquad f_X(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}. \tag{4.23}$$

Ta có

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y|x) = f_Y(y) f_X(x|y).$$

Hàm mật độ có điều kiện $f_Y(y|x)$ và $f_X(x|y)$ có đầy đủ các tính chất của hàm mật độ của biến ngẫu nhiên một chiều. Sử dụng các hàm mật độ có điều kiện và hàm mật độ của X, ta có thể tìm xác suất để Y nằm trong khoảng $[c,d]$ nào đó theo công thức dưới đây.

Từ

$$\mathbb{P}(c \leqslant Y \leqslant d|X = x) = \int_c^d f_Y(y|x)dy,$$

ta suy ra

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(c \leqslant Y \leqslant d) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_c^d f(x,y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_c^d f_Y(y|x)f_X(x)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(c \leqslant Y \leqslant d|X = x)f_X(x)dx.
\end{aligned}$$

4. 6 Xác suất có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

Xác suất có điều kiện của biến ngẫu nhiên liên tục

Hàm phân phối có điều kiện được xác định như sau:

$$F_Y(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(v|x)dv = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv}{f_X(x)},$$

$$F_X(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u|y)du = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y)du}{f_Y(y)}.$$

Chú ý 4.2.

a) Khi X và Y độc lập thì các hàm mật độ có điều kiện và hàm phân phối có điều kiện bằng các hàm mật độ và hàm phân phối của các biến đó.

b) Các công thức về hàm khối xác suất và hàm mật độ có điều kiện cũng đúng khi có một biến liên tục và một biến rời rạc.

Ví dụ 4.19

Cho hàm mật độ xác suất đồng thời của biến ngẫu nhiên (X, Y) có dạng

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\Big)$$

với tham số $\rho \in (-1, 1)$.
a) Xác định các hàm mật độ thành phần của X và Y.
b) Tính hàm mật độ có điều kiện của X đối với Y.

Giải: a) Hàm mật độ của X được xác định bởi

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho)^2}\Big)dy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\frac{(1-\rho^2)x^2 + (\rho x - y)^2}{2(1-\rho)^2}\Big)dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\Big(-\frac{(\rho x - y)^2}{2(1-\rho)^2}\Big) dy.$$

Tích phân trên bằng 1 (tích phân của hàm mật độ của biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với kỳ vọng bằng ρx và phương sai bằng $1-\rho^2$). Vậy hàm mật độ của X là

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big).$$

Tương tự ta tính được hàm mật độ của Y

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{y^2}{2}\Big).$$

b) Hàm mật độ có điều kiện của Y đối với X là $f_Y(y|x)$ được xác định như sau:

$$f_Y(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\dfrac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left(-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}\right).$$

Tương tự ta tính được hàm mật độ có điều kiện của X đối với Y

$$f_X(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left(-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}\right).$$

Chú ý 4.3. Ta thấy X và Y độc lập khi và chỉ khi $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ hay $\rho = 0$. Tổng quát hơn, hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn độc lập khi và chỉ khi hiệp phương sai giữa chúng bằng 0.

Ví dụ 4.20

Xét một tín hiệu đầu vào X có phân phối rời rạc nhận các giá trị $-1; 1$ với xác suất tương ứng $1/3; 2/3$. Giả sử tín hiệu đầu ra là một biến ngẫu nhiên $Y = X + Z$ với Z là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc (nhiễu) độc lập với X.
a) Tính $\mathbb{P}(Y > 0|X = 1)$.
b) Tính $\mathbb{P}(X = 1|Y > 0)$.

Giải: a) Khi $X = 1$ thì $Y = 1 + Z$ là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $\mathscr{N}(\mu = 1, \sigma^2 = 1)$. Vậy

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > 0|X = 1) &= \mathbb{P}(X + Z > 0|X = 1) = \mathbb{P}(1 + Z > 0|X = 1)\\ &= \mathbb{P}(Z > -1|X = 1) = \mathbb{P}(Z > -1) = 1 - P(Z < -1)\\ &= (1 - 0,1587) = 0,8413.\end{aligned}$$

b) Tương tự như trên

$$\mathbb{P}(Y > 0|X = -1) = \mathbb{P}(Z > 1|X = 1) = \mathbb{P}(Z > 1) = 1 - \mathbb{P}(Z < 1)$$
$$= 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

Áp dụng công thức xác suất toàn phần

$$\mathbb{P}(Y > 0) = \mathbb{P}(Y > 0|X = -1)\mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(Y > 0|X = 1)P(X = 1)$$
$$= \frac{0,1587 + 2.0,8413}{3} = 0,6138.$$

Sử dụng công thức Bayes ta tính được

$$\mathbb{P}(X = 1|Y > 0) = \frac{\mathbb{P}(Y > 0|X = 1)\mathbb{P}(X = 1)}{\mathbb{P}(Y > 0)} = 0,9138.$$

4. 6 Xác suất có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

Kỳ vọng có điều kiện

- Trong phần này ta tìm hiểu về khái niệm kỳ vọng có điều kiện.
- Kỳ vọng có điều kiện của Y đối với điều kiện $X = x$ ký hiệu là $\mu_{Y|x} = \mathbb{E}[Y|x]$ xác định bởi

$$\mathbb{E}[Y|x] = \begin{cases} \sum\limits_{y} y f_Y(y|x) & \text{nếu } (X, Y) \text{ rời rạc} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y|x) dy & \text{nếu } (X, Y) \text{ liên tục} \end{cases} \tag{4.24}$$

- $\mathbb{E}[Y|x]$ là giá trị trung bình của hàm khối xác suất (đối với biến ngẫu nhiên rời rạc) hoặc hàm mật độ có điều kiện (đối với biến ngẫu nhiên liên tục).
- Kỳ vọng có điều kiện $\mathbb{E}[Y|x]$ xem như là một hàm của x và ta có thể mô tả là hàm $g(x) = \mathbb{E}[Y|x]$.
- Ta gọi biến ngẫu nhiên $Z = g(X) = \mathbb{E}[Y|X]$ là kỳ vọng có điều kiện của Y đối với X. Tương tự ta có thể định nghĩa kỳ vọng có điều kiện của X đối với Y và ký hiệu là $\mathbb{E}[X|Y]$.

Trung bình của kỳ vọng có điều kiện

- Xét trường hợp rời rạc ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] &= \sum_x \mathbb{E}[Y|X=x]f_X(x) \\ &= \sum_x \sum_y y f_Y(y|x) f_X(x) = \sum_x \sum_y y f(x,y) \\ &= \sum_y y \sum_x f(x,y) = \sum_y y f_Y(y) = \mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

- Ta tính toán tương tự cho trường hợp liên tục:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[Y|X=x]f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y|x) f_X(x) dydx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y) dxdy\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\Big)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy = \mathbb{E}[Y].$$

Một số công thức cơ bản của kỳ vọng có điều kiện

Định lý 4.8

Cho X, Y, Z là các biến ngẫu nhiên và a, b là các hằng số. Khi đó

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y|X] &= \mathbb{E}[Y], \text{ nếu } X \text{ và } Y \text{ độc lập} \\
\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] &= \mathbb{E}[Y], \\
\mathbb{E}[g(X)|X] &= g(X), \\
\mathbb{E}[aX + bY|Z] &= a\mathbb{E}[X|Z] + b\mathbb{E}[Y|Z], \\
\mathbb{E}[g(X)Y|X] &= g(X)\mathbb{E}[Y|X].
\end{aligned}$$

Ý nghĩa của kỳ vọng có điều kiện

- Kỳ vọng có điều kiện của Y đối với X là biến ngẫu nhiên $Z = E[Y|X]$ là một hàm của X và nó là hàm để độ lệch giữa Y và một hàm của X đạt giá trị nhỏ nhất. Nói cách khác $Z = E[Y|X]$ là ước lượng tốt nhất của Y từ các thông tin của X.

- Thật vậy, xét biến ngẫu nhiên $T = \varphi(X)$ là một hàm của X bất kỳ. Khi đó
$$\mathbb{E}[Y-T]^2 = \mathbb{E}[(Y-Z)+(Z-T)]^2$$
$$= \mathbb{E}[(Y-Z)^2] + 2\mathbb{E}[(Y-Z)(Z-T)] + \mathbb{E}[(Z-T)^2].$$
Ta có
$$\mathbb{E}[(Y-Z)(Z-T)] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[(Y-Z)(Z-T)|X]\Big]$$
$$= \mathbb{E}\Big[(Z-T)\mathbb{E}[Y-Z|X]\Big] = \mathbb{E}\Big[(Z-T)(E(Y|X)-Z)\Big] = 0.$$
Vậy
$$\mathbb{E}[(Y-T)^2] = \mathbb{E}[(Y-Z)^2] + \mathbb{E}[(Z-T)^2] \geqslant \mathbb{E}[(Y-Z)^2],$$
nghĩa là
$$\mathbb{E}[(Y-Z)]^2 = \min_{\varphi} \mathbb{E}[Y-\varphi(X)]^2.$$

Ví dụ 4.21

Cho bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) như sau:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$1/4$	$1/4$	$1/16$
1	$1/4$	$1/8$	0
2	$1/16$	0	0

Tìm kỳ vọng có điều kiện của Y đối với X.

Giải: Ta tính tổng các hàng của để tìm bảng phân phối xác suất của X

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1/4 + 1/4 + 1/16 = 9/16,$$
$$\mathbb{P}(X = 1) = 1/4 + 1/8 + 0 = 3/8,$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = 1/16 + 0 = 1/16.$$

4. 6 Xác suất có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

Kỳ vọng có điều kiện

Trước hết ta cần tính $\mathbb{E}[Y|X=x]$ với $x = 0, 1, 2$. Ta sử dụng công thức

$$\mathbb{E}[Y|X=x] = \sum_y y f_Y(y|x) = \frac{\sum_y y f(x,y)}{f_X(x)}.$$

Ta có

$$\mathbb{E}[Y|X=0] = \frac{0.1/4 + 1.1/4 + 2.1/16}{9/16} = 2/3,$$

$$\mathbb{E}[Y|X=1] = \frac{0.1/4 + 1.1/8 + 2.0}{3/8} = 1/3,$$

$$\mathbb{E}[Y|X=2] = \frac{0.1/16 + 1.0 + 2.0}{1/16} = 0.$$

Vậy kỳ vọng của Y đối với X là một biến ngẫu nhiên rời rạc $Z = \mathbb{E}[Y|X]$ và có bảng phân phối được xác định bởi bảng phân phối xác suất sau:

$Z = \mathbb{E}[Y|X]$	0	1/3	2/3
$\mathbb{P}$	1/16	3/8	9/16

Ví dụ 4.22

Cho biến ngẫu nhiên hai chiều liên tục có hàm mật độ đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x+6y}{5} & (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & (x,y) \notin [0,1]^2. \end{cases}$$

Tìm kỳ vọng có điều kiện $\mathbb{E}[Y|X]$.

Giải: Trước hết ta tìm hàm mật độ biên của X. Ta có $f_X(x) = 0$ nếu $x \notin [0,1]$, và khi $x \in [0,1]$ ta có

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{4x+6y}{5}dy = \frac{4xy+3y^2}{5}\Big|_0^1 = \frac{4x+3}{5}.$$

Để tính $\mathbb{E}[Y|X=x]$ ta sử dụng công thức

$$\mathbb{E}[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y|x) dy = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y) dy}{f_X(x)}.$$

Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y) dy = \int_0^1 y \frac{4x+6y}{5} dy = \frac{2xy^2+2y^3}{5}\Big|_0^1 = \frac{2x+2}{5}.$$

Vậy

$$\mathbb{E}[Y|X=x] = \begin{cases} \dfrac{2x+2}{4x+3} & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Kỳ vọng có điều kiện cần tìm là

$$\mathbb{E}[Y|X] = \frac{2X+2}{4X+3}.$$

Trong phần trước chúng ta đã xem xét về kỳ vọng có điều kiện $\mathbb{E}[Y|X]$, đó là một biến ngẫu nhiên và biểu diễn như một hàm của X. Hàm $\mathbb{E}[Y|X]$ là một xấp xỉ tốt nhất của Y trong tất cả các hàm của X. Để đánh giá sự xấp xỉ này chúng ta xét khái niệm tỷ số tương quan.

Định nghĩa 4.9

Tỷ số tương quan giữa biến ngẫu nhiên Y đối với biến ngẫu nhiên X ký hiệu là $\eta^2 = \eta^2(Y|X)$ được xác định bởi công thức

$$\eta^2 = 1 - \frac{\mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y|X]]^2}{\mathbb{V}[Y]}. \tag{4.25}$$

Từ định nghĩa của tỷ số tương quan ta có

$$0 \leqslant \eta^2 \leqslant 1, \quad \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|X])^2] = \mathbb{V}[Y](1 - \eta^2)$$

Từ định nghĩa của tỷ số tương quan ta biến đổi

$$\begin{aligned}\eta^2 &= 1 - \frac{\mathbb{E}[Y^2] - 2\mathbb{E}\Big[Y\mathbb{E}[Y|X]\Big] + \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[Y|X]\Big]^2}{\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2} \\ &= 1 - \frac{\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}[Y|X]\Big]^2}{\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2} \\ &= \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]^2 - (\mathbb{E}[Y])^2}{\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2}.\end{aligned}$$

Trong thực hành tỷ số tương quan thường được tính theo công thức

$$\eta^2 = \eta^2(Y|X) = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]^2 - (\mathbb{E}[Y])^2}{\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2}. \qquad (1)$$

Chú ý rằng $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$ nên công thức trên có thể viết gọn lại thành

$$\eta^2 = \eta^2(Y|X) = \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[Y|X]]}{\mathbb{V}[Y]}.$$

Mối liên hệ giữa tỷ số tương quan và hệ số tương quan

Xét hàm bất kỳ của biến ngẫu nhiên X và ký hiệu bởi $g(X)$. Ta xét hiệp phương sai giữa biến ngẫu nhiên Y và $g(X)$

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y, g(X)) &= \mathbb{E}[Yg(X)] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Yg(X)|X]] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]\mathbb{E}[g(X)] \\ &= \mathbb{E}[g(X)\mathbb{E}[Y|X]] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]\mathbb{E}[g(X)] = \operatorname{cov}(\mathbb{E}[Y|X], g(X))\end{aligned}$$

Khi $g(X) = \mathbb{E}[Y|X]$ thì

$$\mathbb{V}[\mathbb{E}[Y|X]] = \operatorname{cov}(\mathbb{E}[Y|X], \mathbb{E}[Y|X]) = \operatorname{cov}(Y, \mathbb{E}[Y|X]).$$

Hơn nữa, xét hệ số tương quan giữa Y và $g(X)$ ta có

$$\begin{aligned}\rho^2(Y, g(X)) &= \frac{\operatorname{cov}^2(Y, g(X))}{\mathbb{V}[Y]\mathbb{V}[g(X)]} = \frac{\operatorname{cov}^2(\mathbb{E}[Y|X], g(X))}{\mathbb{V}[Y]\mathbb{V}[g(X)]} \\ &= \frac{\operatorname{cov}^2(\mathbb{E}[Y|X], g(X))}{\mathbb{V}[\mathbb{E}[Y|X]]\mathbb{V}[g(X)]} \frac{\mathbb{V}[\mathbb{E}[Y|X]]}{\mathbb{V}[Y]} \\ &= \rho^2(\mathbb{E}[Y|X], g(X))\ \eta^2(Y|X).\end{aligned}$$

4. 6 Xác suất có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện

Tỷ số tương quan

- Từ hệ thức trên xét trường hợp đặc biệt $g(X) = X$ ta có $\rho^2(Y,X) \leqslant \eta^2(Y|X)$, và cận trên đạt được chỉ khi $\rho^2(\mathbb{E}[Y|X], X) = 1$ nghĩa là $\mathbb{E}[Y|X] = aX + b$ là một hàm tuyến tính của X.
- Với trường hợp $g(X) = \mathbb{E}[Y|X]$ ta có $\eta^2(Y|X) = \rho^2(Y, \mathbb{E}[Y|X])$, nghĩa là tỷ số tương quan của Y đối với X bằng bình phương của hệ số tương quan giữa Y và ước lượng tốt nhất $\mathbb{E}[Y|X]$ của Y đối với X.

Định lý 4.9

Ta luôn có $\eta^2(Y|X) \geqslant \rho^2(X,Y), \qquad \eta^2(Y|X) = \rho^2(Y, \mathbb{E}[Y|X])$

Ý nghĩa của tỷ số tương quan: Tỷ số tương quan nằm trong đoạn $[0,1]$, nếu η^2 càng gần 1 thì sự phụ thuộc hàm của Y vào X càng mạnh. Nếu hệ số tương quan gần ± 1 thì ta có η^2 gần 1, nghĩa là ta có sự phụ thuộc tuyến tính. Tuy nhiên nếu hệ số tương quan gần 0 và η^2 gần 1 thì ta có sự phụ thuộc phi tuyến. Hệ số tương quan có tính đối xứng giữa X và Y, tuy nhiên tỷ số tương quan không đối xứng, nghĩa là $\eta^2(Y|X) \neq \eta^2(X|Y)$.

Ví dụ 4.23

Cho X có phân phối đều trên đoạn $[-1,1]$. Xét biến ngẫu nhiên $Y = X^2$. Hãy tính

a) Hệ số tương quan $\rho = \rho(X,Y)$.

b) Tỷ số tương quan $\eta^2 = \eta^2(Y|X)$.

Giải: a) Biến ngẫu nhiên X có phân phối đều trên đoạn $[-1,1]$ nên hàm mật độ là

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [-1,1] \\ 0 & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

Ta có

$$\mathbb{E}[X] = 0, \mathbb{V}[X] = \frac{1}{3}.$$

Hiệp phương sai giữa X và Y là

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^3] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2] \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^3dx - \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}xdx \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^2dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Vậy hệ số tương quan giữa X và Y là

$$\rho = \rho(X,Y) = 0.$$

b) Ta có $\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[X^2|X] = X^2 = Y$. Tỷ số tương quan là

$$\eta^2 = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]^2 - (\mathbb{E}[Y])^2}{\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2} = \frac{\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2}{\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2} = 1.$$

Ta thấy tỷ số tương quan bằng 1, nghĩa là Y và X có quan hệ hàm phi tuyến ($Y = X^2$). Do hệ số tương quan $\rho = 0$ nên giữa Y và X không có mối quan hệ tuyến tính.

Ví dụ 4.24

Cho bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y)

$X \backslash Y$	1	2	4
10	$0,3$	$0,2$	$0,1$
12	$0,2$	$0,1$	$0,1$

Tính tỷ số tương quan $\eta^2 = \eta^2(Y|X)$.

Giải: Để tính tỷ số tương quan ta sử dụng công thức

$$\eta^2 = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]^2 - (\mathbb{E}[Y])^2}{\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2}.$$

Từ bảng phân phối đồng thời của X và Y. Ta tìm được hàm phân phối của Y là

Y	1	2	4
P	$0,5$	$0,3$	$0,2$

Ta tính được

$$\mathbb{E}[Y] = 1,9; \qquad \mathbb{E}[Y^2] = 4,9.$$

Để tính kỳ vọng có điều kiện của Y đối với X, $\mathbb{E}[Y|X]$. Ta tính các hàm phân phối các giá trị $\mathbb{E}[Y|X = 10]$ và $\mathbb{E}[Y|X = 12]$. Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y|X = 10] =& 1.\frac{0,3}{0,3+0,2+0,1} + 2.\frac{0,2}{0,3+0,2+0,1} \\ &+ 4.\frac{0,1}{0,3+0,2+0,1} = \frac{11}{6} \\ \mathbb{E}[Y|X = 12] =& 1.\frac{0,2}{0,2+0,1+0,1} + 2.\frac{0,1}{0,2+0,1+0,1} \\ &+ 4.\frac{0,1}{0,2+0,1+0,1} = 2.\end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]^2 &= \Big(\mathbb{E}[Y|X=10]\Big)^2 0,6 + \Big(\mathbb{E}[Y|X=12]\Big)^2 0,4 \\ &= \frac{11^2}{6^2} 0,6 + 2^2 0,4 = 3,6167.\end{aligned}$$

Tỷ số tương quan là

$$\begin{aligned}\eta^2 &= \frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]^2 - (\mathbb{E}[Y])^2}{\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2} \\ &= \frac{3,6167 - 1,9^2}{4,9 - 1,9^2} = 0,0052.\end{aligned}$$

Ta thấy tỷ số tương quan gần 0 nên Y và X không có quan hệ hàm.

4. 7 Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Định nghĩa

Một biến ngẫu nhiên n chiều (còn gọi là véc-tơ ngẫu nhiên) có dạng

$$\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Để thuận tiện ta ký hiệu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một véc-tơ có n thành phần. Tương tự như trường hợp biến ngẫu nhiên hai chiều. Ta xem xét các khái niệm ứng với biến ngẫu nhiên tổng quát nhiều chiều.

Định nghĩa 4.10

Hàm phân phối xác suất của véc-tơ ngẫu nhiên $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ tại điểm $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbb{P}([X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_n \leqslant x_n]).$$

Định nghĩa 4.11

Hàm $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là hàm khối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nếu

- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$,
- $\sum\limits_{x_1} \sum\limits_{x_2} \cdots \sum\limits_{x_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$,
- $f(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$.

4. 7 Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Định nghĩa

Ví dụ 4.26 (Phân phối nhị thức tổng quát)

Xét dãy n phép thử độc lập. Giả sử mỗi phép thử được chia thành k loại $C_1, C_2, \dots, C_k$ có xác suất tương ứng là $p_1, p_2, \dots, p_k$, với $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. Gọi X_i là số phép thử xuất hiện biến cố C_i trong n lần thực hiện phép thử. Khi đó, véc-tơ ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ gọi là có phân phối nhị thức tổng quát nếu hàm khối xác suất là

$$\mathbb{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_1^{n_2} \dots p_k^{n_k} \tag{4.27}$$

với $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = 1$. Các biến thành phần X_i của biến nhị thức tổng quát có phân phối nhị thức $\mathscr{B}(n, p_i)$.

Ví dụ 4.27

Gieo một con xúc sắc n lần. Gọi C_i là biến cố xuất hiện mặt i chấm trong một lần gieo, ta có $p_i = \mathbb{P}(C_i) = \dfrac{1}{6}$ với $i = 1, 2, \ldots, 6$. Gọi X_i là số lần xuất hiện mặt có số chấm bằng i trong n lần gieo. Khi đó $\mathbb{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ có phân phối nhị thức tổng quát và công thức xác định hàm mật độ đồng thời là

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_6 = n_6) &= \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_6!} p_1^{n_1} p_1^{n_2} \ldots p_k^{n_6} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \left(\frac{1}{6}\right)^n.\end{aligned}$$

4. 7 Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Định nghĩa

Ví dụ 4.28

Thực hiện 8 lần phép thử gieo đồng thời 3 đồng xu. Tính xác suất để trong 8 lần gieo có 1 lần xuất hiện một mặt sấp, 2 lần xuất hiện hai mặt sấp, 3 lần xuất hiện ba mặt sấp và 2 lần không xuất hiện mặt sấp nào.

Giải: Gọi C_i là biến cố xuất hiện i lần mặt sấp trong một lần gieo đồng thời 3 con xúc sắc, $i = 0, 1, 2, 3$. Ta có $p_0 = \mathbb{P}(C_0) = \frac{1}{8}, p_1 = \mathbb{P}(C_1) = \frac{3}{8}, p_2 = \mathbb{P}(C_2) = \frac{3}{8}, p_3 = \mathbb{P}(C_3) = \frac{1}{8}$.
Gọi X_i là biến chỉ số lần xuất hiện i mặt sấp trong 8 lần thực hiện phép gieo 3 đồng xu. Xác suất cần tính là

$$\mathbb{P}(X_0 = 2, X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3) = \frac{8!\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^1\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{1}{8}\right)^3}{2!1!2!3!} = 0,002$$

Định nghĩa 4.12

Hàm n biến $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên n chiều liên tục $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nếu

- $f(\mathbf{x}) \geqslant 0$,
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1$,
- $\mathbb{P}(\mathbb{X} \in D) = \int \underset{D}{\cdots} \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, với miền D trong $\mathbb{R}^n$.

Mối liên hệ giữa hàm phân phối xác suất và hàm mật độ:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ví dụ 4.29 (Phân phối chuẩn nhiều chiều)

Véc-tơ ngẫu nhiên $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ gọi là có phân phối chuẩn n chiều $N(\mu, C)$ nếu X có hàm mật độ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(C)}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)C^{-1}(x-\mu)^T}{2}\right),$$

với $\quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n); \quad \mu = (\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2], \ldots, \mathbb{E}[X_n])$

là véc-tơ giá trị trung bình và

$$C = \Big(\operatorname{cov}(X_i, X_j)\Big)_{n\times n}$$

là ma trận hiệp phương sai và $(x-\mu)^T$ là véc-tơ chuyển vị của $(x-\mu)$.

a) Xét trường hợp $\mu = 0$ và $C = \sigma^2 I$, hàm mật độ của phân phối chuẩn n chiều trở thành

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sigma^n\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{2\sigma^2}\right).$$

b) Xét trường hợp $n = 2$, $\mu = 0$ và ma trận hiệp phương sai

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

với $\rho = \rho(X_1, X_2)$ là hệ số tương quan giữa X_1 và X_2.
Ta có $\det(C) = 1 - \rho^2$, ma trận nghịch đảo của C là

$$C^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Với $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{x}C^{-1}\mathbf{x}^T &= \frac{1}{1-\rho^2}(x_1 x_2) \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1-\rho^2}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Vậy hàm mật độ của $\mathbb{X}$ là

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big(- \frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)} \Big).$$

4. 7 Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Định nghĩa

c) Xét trường hợp phân phối chuẩn hai chiều tổng quát có véc-tơ trung bình $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ và ma trận hiệp phương sai

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

với $\rho = \rho(X_1, X_2)$ là hệ số tương quan giữa X_1 và X_2. Ta có

$$\det(C) = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

$$C^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & -\rho/(\sigma_1\sigma_2) \\ -\rho/(\sigma_1\sigma_2) & 1/\sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Vậy hàm mật độ của $\mathbb{X}$ là

$$f(x_1, x_2) = \frac{\exp\Big(-\Big[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{2(1-\rho^2)\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{2(1-\rho^2)\sigma}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

4. 7 Biến ngẫu nhiên nhiều chiều
Định nghĩa

Biến thành phần. Tương tự như trường hợp biến ngẫu nhiên hai chiền ta có thể xác định được các hàm phân phối, hàm khối xác suất của biến ngẫu nhiên thành phần từ hàm khối xác suất của biến ngẫu nhiên đồng thời. Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X_i xác định từ hàm phân phối đồng thời như sau:

$$F_i(x_i) = F(+\infty, \dots, x_i, \dots, +\infty).$$

Hàm khối xác suất của X_1 được xác định bởi công thức

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Đối với trường hợp liên tục thì hàm mật độ của X_1 được xác định như sau

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n.$$

4. 7 Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Định nghĩa

Hàm phân phối đồng thời của biến ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_k)$ được xác định bởi

$$F_{1,\ldots,k}(x_1, \ldots, x_k) = F(x_1, \ldots, x_k, +\infty, \ldots, +\infty).$$

hàm khối xác suất đồng thời của nó đối với trường hợp rời rạc xác định bởi

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = \sum_{x_{k+1}} \cdots \sum_{x_n} f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} \ldots, x_n).$$

Đối với trường hợp liên tục thì hàm mật độ của nó được xác định như sau

$$f_{1,\ldots,k}(x_1, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) dx_{k+1} \ldots dx_n.$$

Sự độc lập.

Cho véc-tơ ngẫu nhiên $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập nếu

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_n}(x_n).$$

Nếu véc-tơ ngẫu nhiên $\mathbb{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ rời rạc hoặc liên tục thì $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập nếu

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n).$$

4. 7 Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Định nghĩa

Kỳ vọng của hàm các biến ngẫu nhiên n chiều.

Xét hàm $Z = g(\mathbb{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ của biến ngẫu nhiên n chiều với hàm g nào đó. Khi đó kỳ vọng của biến ngẫu nhiên Z được xác định như sau. Nếu $\mathbb{X}$ là biến ngẫu nhiên rời rạc thì

$$\mathbb{E}\Big[g(X_1, X_2, \dots, X_n)\Big] = \sum_{x_1}\sum_{x_2}\cdots\sum_{x_n} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n).$$

Nếu $\mathbb{X}$ là biến ngẫu nhiên liên tục thì

$$\mathbb{E}\Big[g(X_1, X_2, \dots, X_n)\Big] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Chẳng hạn xét hàm $g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Khi đó

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i],$$

nghĩa là kỳ vọng của một tổng bằng tổng các kỳ vọng.

Định lý 4.10

Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập. Khi đó,

a) Kỳ vọng của một tích bằng tích các kỳ vọng

$$\mathbb{E}\Big[X_1 X_2 \ldots X_n\Big] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]\ldots\mathbb{E}[X_n].$$

b) Phương sai của một tổng bằng tổng các phương sai

$$\mathbb{V}\Big[X_1 + X_2 + \cdots + X_n\Big] = \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] + \cdots + \mathbb{V}[X_n].$$

4. 7 Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Định nghĩa

Ví dụ 4.30

(Độ tin cậy của hệ thống) Xét một hệ thống gồm n thành phần hoạt động độc lập. Mỗi thành phần có hai trạng thái là (i) hoạt động ứng với giá trị 1 và (ii) không hoạt động ứng với giá trị 0. Trạng thái hoạt động của thành phần thứ i được biểu diễn bởi biến Bernoulli X_i với độ tin cậy

$$p_i = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{E}[X_i].$$

Ta gọi X biểu diễn trạng thái hoạt động của hệ thống, nghĩa là $X = 1$ thì hệ thống hoạt động và $X = 0$ hệ thống không hoạt động (hệ thống bị lỗi). Ta cần tính độ tin cậy của hệ thống này bằng cách xác định giá trị

$$p = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{E}X.$$

Hệ thống thường chia làm ba loại: hệ thống nối tiếp, hệ thống

☞ Hệ thống nối tiếp. Một hệ thống có các thành phần nối tiếp nhau. Khi đó hệ thống hoạt động khi và chỉ khi tất cả các thành phần phải hoạt động. Trạng thái của hệ thống được biểu diễn bởi

$$X = X_1 X_2 \dots X_n.$$

Trong phương trình trên ta thấy $X = 1$ khi và chỉ khi tất cả các thành phần $X_i = 1$. Độ tin cậy của hệ thống nối tiếp là

$$p = \mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 X_2 \dots X_n = \mathbb{E}X_1 \mathbb{E}X_2 \dots \mathbb{E}X_n = p_1 p_2 \dots p_n.$$

☞ Hệ thống song song. Hệ thống hoạt động khi và chỉ khi có ít nhất một thành phần hoạt động. Trạng thái hoạt động của hệ thống song song được biểu diễn bởi

$$X = 1 - (1 - X_1)(1 - X_2) \dots (1 - X_n).$$

Tương tự như trên ta có công thức tính độ tin cậy của hệ thống song song là

$$p = \mathbb{E}X = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n).$$

4. 7 Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Định nghĩa

☞ Hệ thống có ít nhất k thành phần hoạt động. Ta xét hệ thống có 3 thành phần. Hệ thống hoạt động nếu có ít 2 thành phần hoạt động. Khi đó trạng thái của hệ thống được biểu diễn bởi

$$X = X_1X_2X_3 + (1 - X_1)X_2X_3 + X_1(1 - X_2)X_3 + X_1X_2(1 - X_3).$$

Độ tin cậy của hệ thống này là

$$p = \mathbb{E}X = p_1p_2p_3 + (1 - p_1)p_2p_3 + p_1(1 - p_2)p_3 + p_1p_2(1 - p_3).$$

Ví dụ 4.31

Cho $X_1, X_2, \dots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng hàm phân phối $F(x)$. Tìm hàm phân phối của các biến ngẫu nhiên $U = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ và $V = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Giải: Gọi hàm phân phối xác suất của U và V lần lượt là $F_U(u), F_V(v)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \mathbb{P}(U \leqslant u) = \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant u) \\ &= P(X_1 \leqslant u, X_2 \leqslant u, \dots, X_n \leqslant u) = F(u, u, \dots, u) \\ &= [F(u)]^n. \end{aligned}$$

Để tìm hàm phân phối xác suất của V ta tính

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V > v) &= \mathbb{P}(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > v) = \mathbb{P}(X_1 > v, X_2 > v, \dots, X_n > v) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > v)\mathbb{P}(X_2 > v)\dots\mathbb{P}(X_n > v) \end{aligned}$$

4. 7 Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Định nghĩa

$$= [1 - \mathbb{P}(X_1 \leqslant v)][1 - \mathbb{P}(X_2 \leqslant v)] \dots [1 - \mathbb{P}(X_n \leqslant v)]$$
$$= \Big(1 - F(v)\Big)^n.$$

Vậy hàm phân phối xác suất của V là

$$F_V(v) = \mathbb{P}(V \leqslant v) = 1 - \mathbb{P}(V > v) = 1 - \Big(1 - F(v)\Big)^n.$$

Xác suất có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện.

Trong phần này trình bày các khái niệm về hàm khối xác suất có điều kiện và kỳ vọng có điều kiện của một biến ngẫu nhiên đối với các biến ngẫu nhiên khác. Chẳng hạn ta xây dựng khái niệm hàm khối xác suất có điều kiện của X_1 đối với $X_2, \ldots, X_n$.

Hàm khối xác suất có điều kiện của X_1 đối với $X_2, \ldots, X_n$ ký hiệu là $f_1(x_1|X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$ và được tính theo công thức sau:

$$f_1(x_1|X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f_{2,\ldots,n}(x_2, x_3, \ldots, x_n)}.$$

Kỳ vọng có điều kiện của X_1 đối với điều kiện $X_2, \ldots, X_n$ ký hiệu là

$$\mathbb{E}[X_1|X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n]$$

4. 7 Biến ngẫu nhiên nhiều chiều

Định nghĩa

và xác định bởi công thức

$$\mathbb{E}[X_1|X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_1(x_1|x_2, \ldots, x_n) dx_1$$

đối với trường hợp liên tục và

$$\mathbb{E}\Big[X_1|X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\Big] = \sum_{x_1} x_1 f_1(x_1|x_2, \ldots, x_n)$$

đối với trường hợp rời rạc. Kỳ vọng có điều kiện

$$\mathbb{E}\Big[X_1|X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\Big] = g(x_2, \ldots, x_n)$$

là một hàm của $(x_2, \ldots, x_n)$. Ta ký hiệu kỳ vọng của X_1 đối với $X_2, \ldots, X_n$ là

$$\mathbb{E}[X_1|X_2, \ldots, X_n] = g(X_2, \ldots, X_n).$$

4. 8 Tổ hợp tuyến tính của các biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Có những biến ngẫu nhiên được mô tả như một hàm của nhiều biến ngẫu nhiên. Trong phần này chúng ta xét một loại hàm gọi là tổ hợp tuyến tính của các biến ngẫu nhiên. Chẳng hạn trong sản xuất nhôm tấm, gọi X_1 là biến xác định chiều dài và X_2 là biến xác định chiều rộng thì chu vi của tấm nhôm được xác định bởi biến ngẫu nhiên $Y = 2X_1 + 2X_2$. Ta gọi một tổ hợp tuyến tính của các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ với các hệ số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là biến ngẫu nhiên

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n. \tag{4.28}$$

Định lý 4.11

Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên bất kỳ. Khi đó

a) $\mathbb{E}Y = a_1\mathbb{E}X_1 + a_2\mathbb{E}X_2 + \cdots + a_n\mathbb{E}X_n$

b) Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập thì
$\mathbb{V}Y = a_1^2\mathbb{V}X_1 + a_2^2\mathbb{V}X_2 + \cdots + a_n^2\mathbb{V}X_n$

c) Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ có phân phối chuẩn thì Y cũng có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu = \mathbb{E}[Y], \sigma^2 = \mathbb{V}[Y])$.

4. 8 Tổ hợp tuyến tính của các biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Xét trường hợp đặc biệt, các hệ số trong tổ hợp tuyến tính bằng nhau và có tổng bằng 1, ta có khái niệm trung bình cộng. Ta gọi trung bình cộng của các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Định lý 4.12

Giả sử các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Khi đó

a) $\mathbb{E}\overline{X}_n = \mu$

b) Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập $\mathbb{V}\overline{X}_n = \dfrac{\sigma^2}{n}$

c) $\overline{X}_n$ có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$.

4. 8 Tổ hợp tuyến tính của các biến ngẫu nhiên

Định nghĩa

Đối với trường hợp các biến ngẫu nhiên tổng quát và độc lập với nhau. Ta có các kết quả tổng quát sau.

Định lý 4.13

(Luật số lớn) Giả sử các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập, cùng phân phối với kỳ vọng $\mathbb{E}[X_i] = \mu, \mathbb{V}[X_i] = \sigma^2$. Khi đó, với mọi số $\varepsilon > 0$ ta có

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1.$$

Định lý 4.14

(Định lý giới hạn trung tâm) Giả sử các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ độc lập, cùng phân phối với kỳ vọng $\mathbb{E}[X_i] = \mu, \mathbb{V}[X_i] = \sigma^2$. Khi đó, biến ngẫu nhiên

$$Z = \frac{(\bar{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}$$

có phân phối xấp xỉ phân phối chuẩn tắc $\mathcal{N}(0, 1)$.