Phần 2
Tri thức và lập luận

TS. Nguyễn Quốc Tuấn

Nội dung

- Logic mệnh đề
- Logic vị từ
- Tri thức và lập luận

Logic mệnh đề

- Mệnh đề
- Cú pháp và ngữ nghĩa của mệnh đề
- Dạng chuẩn tắc
- Luật suy diễn
- Luật phân giải, chứng minh bác bỏ bằng luật phân giải

1. Mệnh đề

- Mệnh đề là một khẳng định, một phát biểu mà giá trị của nó chỉ có thể hoặc đúng hoặc sai. Giá trị này gọi là chân trị của mệnh đề.
- Ví dụ:
  - P="Hà Nội là thủ đô của Việt Nam" Đúng
  - Q="Số 6 là số nguyên tố" Sai

2. Cú pháp và ngữ nghĩa của logic mệnh đề

2.1. Cú pháp

2.1.1. Các ký hiệu

- Hằng: True, False.
- Các ký hiệu mệnh đề (còn được gọi là các biến mệnh đề): P, Q, ...
- Các kết nối logic $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
- Các dấu: (,)

2. Cú pháp và ngữ nghĩa của logic mệnh đề

2.1.2. Các quy tắc xây dựng các công thức

- Các biến mệnh đề là công thức.
- Nếu A và B là công thức thì:
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $\rceil A$
  - $A \Rightarrow B$
  - $A \Leftrightarrow B$

  Là công thức

2. Cú pháp và ngữ nghĩa của logic mệnh đề

2.1.2. Các quy tắc xây dựng các công thức

- Các công thức là các ký hiệu mệnh đề sẽ được gọi là các câu đơn hoặc câu phân tử (literal).
- Các công thức không phải là câu đơn sẽ được gọi là câu phức hợp.
- P là ký hiệu mệnh đề thì
  - P và $\rceil$P được gọi là literal,
  - P là literal dương, $\rceil$P là literal âm.
- Câu phức hợp có dạng $A_1 \vee \ldots \vee A_m$ trong đó A_i, i=1..m là các literal được gọi là câu tuyển.

2.2. Ngữ nghĩa (tiếp)

- Một minh họa là một cách gán cho mỗi ký hiệu mệnh đề một giá trị chân lý True hoặc False.
- Nếu ký hiệu mệnh đề P được gán giá trị chân lý True/False

(P ← True/P ← False) thì ta nói mệnh đề P đúng/sai trong minh họa đó.

- Trong một minh họa, ý nghĩa của các câu phức hợp được xác định bởi ý nghĩa của các kết nối logic.
- Ý nghĩa của các kết nối logic trong bảng chân lý

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
False	False	True	False	False	True	True
False	True	True	False	True	True	False
True	False	False	False	True	False	False
True	True	False	True	True	True	True

2.2. Ngữ nghĩa (tiếp)

- Bảng chân lý cho phép ta xác định ngữ nghĩa các câu phức hợp.
- Một công thức gọi là **thoả được** nếu nó đúng trong một minh họa nào đó.
  - Công thức $(P \vee \rceil Q) \wedge S$ là thoả được, vì nó có giá trị True trong minh họa {P ← True, Q ← False, S ← True}.
- Một công thức được gọi là **vững chắc** nếu đúng trong mọi minh họa.
  - Ví dụ câu $P \vee \rceil P$ là vững chắc.
- Một công thức được gọi là **không thoả được**, nếu nó là sai trong mọi minh hoạ.

2.2. *Ngữ nghĩa (tiếp)*

- Bằng cách lập bảng chân lý ta có thể xác định được một công thức có thoả được hay không.

P	Q	S	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \wedge S$
False	False	False	True	False
False	False	True	True	True
False	True	False	True	False
False	True	True	True	True
True	False	False	False	False
True	False	True	False	False
True	True	False	True	False
True	True	True	True	True

3. Dạng chuẩn tắc (Normal Form)

- Chuẩn hoá các công thức, đưa công tác về dạng thuận lợi cho việc lập luận, suy diễn.
- Sử dụng các phép biến đổi tương đương ta có thể đưa một công thức bất kỳ về dạng chuẩn tắc.

3.1. Sự tương đương của 2 công thức

- Hai công thức A và B được xem là tương đương nếu chúng có cùng một giá trị chân lý trong mọi minh họa.
- Ký hiệu : A ≡ B.
- Bằng phương pháp bảng chân lý:
  - $A \Rightarrow B \equiv \rceil A \vee B; A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A); \rceil(\rceil A) \equiv A$

3.1. Sự tương đương của 2 công thức *(tiếp)*

1. Luật De Morgan

- $\rceil(A \vee B) \equiv \rceil A \wedge \rceil B;$
- $\rceil(A \wedge B) \equiv \rceil A \vee \rceil B$

2. Luật giao hoán

- $A \vee B \equiv B \vee A$
- $A \wedge B \equiv B \wedge A$

3. Luật kết hợp

- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$

4. Luật phân phối

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C);$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

3.2. Dạng chuẩn hội (CNF-Conjuntive Normal Form)

- Một công thức ở dạng chuẩn hội nếu nó là hội của các câu tuyển.
- Câu tuyển có dạng $A_1 \vee \ldots \vee A_m$, trong đó các A_i là *literal*.
- Biến đổi một công thức bất kỳ về công thức ở dạng chuẩn hội :
  - Bỏ các dấu kéo theo ($\Rightarrow$) bằng cách thay ($A \Rightarrow B$) bởi ($\neg A \vee B$).
  - Chuyển các dấu phủ định ($\neg$) vào sát các dấu hiệu mệnh đề bằng cách áp dụng luật De Morgan và thay $\neg(\neg A)$ bởi A.
  - Áp dụng luật phân phối, thay đổi công thức có dạng

    $A \vee (B \wedge C)$ bởi $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

3.2. Dạng chuẩn hội (CNF-Conjuntive Normal Form)

Ví dụ 1: Chuẩn hoá công thức sau về dạng chuẩn hội

$$(P \Rightarrow Q) \vee \rceil(R \vee \rceil S)$$

$$(P \Rightarrow Q) \vee \rceil(R \vee \rceil S) \equiv (\rceil P \vee Q) \vee (\rceil R \wedge S)$$

$$\equiv ((\rceil P \vee Q) \vee \rceil R) \wedge ((\rceil P \vee Q) \vee S)$$

$$\equiv (\rceil P \vee Q \vee \rceil R) \wedge (\rceil P \vee Q \vee S)$$

3.2. Dạng chuẩn hội (CNF-Conjuntive Normal Form)

Ví dụ 2: Chuẩn hoá công thức sau về dạng chuẩn hội

$$(A \wedge B) \Rightarrow (\neg C \vee D)$$

BÀI TẬP

Giả sử các hiểu biết của một chuyên gia trong một tình huống nào đó được phát biểu dưới dạng các biểu thức logic mệnh đề sau đây :

1. $a \wedge ((a \wedge x) \rightarrow d)$
2. $(a \rightarrow (b \wedge c)) \wedge x$
3. $(c \rightarrow a) \rightarrow (d \wedge e)$
4. $b \rightarrow ((d \wedge x) \rightarrow f)$
5. $(e \wedge b) \rightarrow f$
6. $(e \wedge y) \rightarrow g$
7. $d \rightarrow f$
8. $f \rightarrow (\neg a \vee g)$

Chuyển tập công thức trên về tập các câu tuyển

4. Bài toán chứng minh logic

- Cho một cơ sở tri thức (KB-Knowledge Base)và công thức α cần chứng minh.
- Câu hỏi : KB $\models \alpha$? (Từ KB có thể suy diễn ra được α hay không)
- Có 3 phương pháp cơ bản:
  - Bảng chân trị
  - Luật suy diễn
  - Chứng minh bác bỏ bằng luật phân giải

4.1 Chứng minh bằng bảng chân trị

- Chứng minh : KB $\models$ α ?
- Kiểm tra mọi thể hiện của KB là True xem α là True hay False.
- Ví dụ:

		KB		α
p	q	$p \lor q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \lor \neg q) \land q$
true	true	true	true	true
true	false	true	false	false
false	true	true	false	false
false	false	false	true	false

4.1 Chứng minh bằng bảng chân trị

- Ví dụ 2:
  - KB = $(p \vee r) \wedge (q \vee \neg r)$
  - $\alpha = (p \vee q)$
  - KB $\models \alpha$?

p	q	r	$p \vee r$	$q \vee \neg r$	KB	α
true	true	true	true	true	true	true
true	true	false	true	true	true	true
true	false	true	true	false	false	true
true	false	false	true	true	true	true
false	true	true	true	true	true	true
false	true	false	false	true	false	true
false	false	true	true	false	false	false
false	false	false	false	true	false	false

4.2 Luật suy diễn (Inference rules)

- Khi có một cơ sở tri thức, ta muốn sử dụng tri thức trong cơ sở này để suy ra tri thức mới mà nó là hệ quả logic của các công thức trong cơ sở tri thức. Điều đó thực hiện bằng cách sử dụng *các luật suy diễn* (inference rule).
- Một luật suy diễn gồm hai phần: Một tập các điều kiện và một kết luận.
- Biểu diễn các luật suy diễn dưới dạng "phân số" trong đó tử số là danh sách các điều kiện, còn mẫu số là kết luận của luật, tức là mẫu số là công thức mới được suy ra từ các công thức ở tử số.

4.2 Luật suy diễn (tiếp)

- Một số luật suy diễn quan trọng trong logic mệnh đề. Trong các luật này α, α_i, β, γ là các công thức:

- ***Luật Modus Ponens***

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$$

- ***Luật Modus Tollens***

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \urcorner\beta}{\urcorner\alpha}$$

- ***Luật bắc cầu***

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma}$$

- ***Luật loại bỏ hội***

$$\frac{\alpha_1 \wedge .. \wedge \alpha_i \wedge \dots \wedge \alpha_m}{\alpha_i}$$

- ***Luật đưa vào hội***

$$\frac{\alpha_1, .., \alpha_i, .., \alpha_m}{\alpha_1 \wedge .. \wedge \alpha_i \wedge .. \wedge \alpha_m}$$

- ***Luật đưa vào tuyển***

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_i \vee \dots \vee \alpha_m}$$

- ***Luật phân giải***

$$\frac{\alpha \vee \beta, \urcorner\beta \vee \gamma}{\alpha \vee \gamma}$$

4.2. Luật suy diễn

$$\frac{\alpha \vee \beta,\ \urcorner\beta \vee \gamma}{\alpha \vee \gamma}$$

- Bảng chân lý của luật phân giải

α	β	γ	$\alpha \vee \beta$	$\urcorner\beta \vee \gamma$	$\alpha \vee \gamma$
False	False	False	False	True	False
False	False	True	False	True	True
False	True	False	True	False	False
False	True	True	True	True	True
True	False	False	True	True	True
True	False	True	True	True	True
True	True	False	True	False	True
True	True	True	True	True	True

- Từ bảng này ta thấy rằng, trong bất kỳ một minh họa nào mà cả hai giả thiết $\alpha \vee \beta$, $\urcorner\beta \vee \gamma$ đúng thì kết luận $\alpha \vee \gamma$ cũng đúng. Do đó luật phân giải là luật suy diễn tin cậy.

4.2. Luật suy diễn

- ***Ví dụ***. Giả sử ta có công thức sau:

$(Q \wedge S) \Rightarrow (G \wedge H)$	(1)	$P \Rightarrow Q$	(2)
$R \Rightarrow S$	(3)	P	(4)
R	(5)		

- Ta cần chứng minh công thức G.

- Từ công thức (2) và (4), ta suy ra Q (Luật Modus Ponens).
- Áp dụng luật Modus Ponens, từ (3) và (5) ta suy ra S.
- Từ Q, S ta suy ra $Q \wedge S$ (luật đưa vào hội).
- Từ (1) và $Q \wedge S$ ta suy ra $G \wedge H$ (Luật Modus Ponens).
- Từ công thức $G \wedge H$ ta suy ra G *(Luật loại bỏ hội)*.

2. Cho tập công thức

1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow r$
3. $\neg r \vee \neg s$
4. $\neg s \rightarrow u$
5. $\neg u$

Chứng minh $\neg p$ bằng phương pháp diễn dịch

3.Cho tập công thức sau

$P \Rightarrow Q$ (1)

$P \vee R$ (2)

$\rceil Q$ (3)

$R \Rightarrow S$ (4)

Chứng minh S bằng phương pháp Diễn dịch

4.3. Phương pháp chứng minh bác bỏ

- Phương pháp chứng minh bác bỏ (Refutation proof hoặc Proof by contradiction) là một phương pháp thường xuyên được sử dụng trong các chứng minh toán học.
- Tư tưởng của phương pháp :
  - Để chứng minh *P* đúng, giả sử *P* sai (thêm $\rceil P$ vào các giả thiết) và dẫn tới một mâu thuẫn.
  - Giả sử chúng ta có một tập công thức g = $\{G_1,\ldots, G_m\}$ ta cần chứng minh công thức H là hệ quả logic của g.
    - Chứng minh công thức $G_1 \wedge \ldots \wedge G_m \Rightarrow H$ là vững chắc, ta chứng minh G1 $\wedge$ ... $\wedge$ Gm $\wedge$ $\rceil$H là không thoả được.
    - g' = $(G_1, \ldots, G_m, \rceil H)$ là không thoả được. g' sẽ không thoả được nếu từ g' ta suy ra hai mệnh đề đối lập nhau.

Luật phân giải, chứng minh bác bỏ bằng luật phân giải

+ ***Luật phân giải trên các câu tuyển***

$$\frac{A_1 \vee \ldots \vee A_m \vee C, \quad \rceil C \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n}{A_1 \vee \ldots \vee A_m \vee B_1 \vee \ldots \vee B_n}$$

trong đó A_i, B_i và C là các literal

Luật phân giải

- Khi ta có thể áp dụng luật phân giải cho hai câu, thì hai câu này được gọi là hai câu phân giải được và kết quả nhận được khi áp dụng luật phân giải cho hai câu đó được gọi là giải thức của chúng.

- Giải thức của hai câu A và B được kí hiệu là **res(A, B)**.

- Ví dụ: Giải thức của hai literal đối lập nhau (P và $\neg$P) là câu rỗng, chúng ta sẽ ký hiệu câu rỗng là [], câu rỗng không thỏa được.
- Giả sử g là một tập các câu tuyển. Ta sẽ ký hiệu R(g) là tập câu bao gồm các câu thuộc g và tất cả các câu nhận được từ g bằng một dãy áp dụng luật phân giải.

Luật phân giải (tiếp)

- Luật phân giải là luật đầy đủ để chứng minh một tập câu là thỏa được hay không.
  - Nếu từ các câu thuộc g bằng cách áp dụng luật phân giải ta dẫn tới câu rỗng thì g là không thoả được, còn nếu không thể sinh ra câu rỗng bằng luật phân giải thì g thoả được.
  - Việc dẫn tới câu rỗng có nghĩa là ta đã đến tới hai literal đối lập nhau P và $\neg$P (tức là dẫn tới mâu thuẫn).

Thủ tục phân giải

Input: tập g các câu tuyển

Begin

1. Repeat

1.1. Chọn hai câu A và B thuộc g;

1.2. if A và B phân giải được **then** tính Res(A, B);

1.3. if Res(A,B) là câu mới **then** thêm Res(A, B) vào g;

until nhận được câu rỗng hoặc không có câu mới xuất hiện:

2. **if** nhận được câu rỗng **then** thông báo g không thoả được

else thông báo g thoả được;

End;

Thủ tục chứng minh bác bỏ bằng luật phân giải

Thủ tục chứng minh bác bỏ

Input: Tập g các công thức;

Công thức cần chứng minh H;

Begin

1. Thêm $\neg H$ vào g;
2. Chuyển các công thức trong g về dạng chuẩn hội;
3. Từ các dạng chuẩn hội ở bước hai => thành lập tập các câu tuyển g;
4. Áp dụng **thủ tục phân giải** cho tập câu g;
5. if g không thỏa được then thông báo H là hệ quả logic
   else thông báo H không là hệ quả logic của g;

End;

Ví *dụ 1*. Giả sử g là tập hợp các câu tuyển sau

$\rceil A \vee \rceil B \vee P$ (1)

$\rceil C \vee \rceil D \vee P$ (2)

$\rceil E \vee C$ (3)

A (4)

E (5)

D (6)

Giả sử ta cần chứng minh *P.*

Thêm vào g câu sau:

$\rceil P$ (7)

Áp dụng luật phân giải cho câu (2) và (7) ta được câu:

$\rceil C \vee \rceil D$ (8)

Từ câu (6) và (8) ta nhận được câu:

$\rceil C$ (9)

Từ câu (3) và (9) ta nhận được câu:

$\rceil E$ (10)

Tới đây đã xuất hiện mâu thuẫn, vì câu (5) và (10) đối lập nhau. Từ câu (5) và (10) ta nhận được câu rỗng [].

Vậy *P* là hệ quả logic của các câu (1) -- (6).

***Ví dụ** 2:* CMR từ

$a \wedge b \to c$ (1), $b \wedge c \to d$ (2), a (3), b (4). Hãy chứng minh d theo Phương pháp diễn dịch và Phương pháp bắc bỏ bằng luật phân giải.

1. $\neg a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg b \vee \neg c \vee d$
3. a
4. b
5. $\neg d$

Quá trình hợp giải như sau:

6. $\neg b \vee c$	Res(1,3)
7. $\neg a \vee c$	Res(1, 4)
8. $\neg c \vee d$	Res(2, 4)
9. $\neg b \vee \neg c$	Res(2, 5)
10.c	Res(3, 7)
11. $\neg c$	Res(4, 9).

BÀI TẬP

1.Cho tập công thức sau

$P \Rightarrow Q$ (1)

$P \vee R$ (2)

$\rceil Q$ (3)

$R \Rightarrow S$ (4)

Chứng minh S bằng 2 phương pháp: Diễn dịch, Bác bỏ

2. Cho tập công thức sau

1. $e \Rightarrow f$
2. $a \wedge b \Rightarrow c$
3. $b \Rightarrow d$
4. $c \wedge d \Rightarrow e$
5. a
6. b

Chứng minh f bằng 2 phương pháp: Diễn dịch, Bác bỏ

6. Cho tập công thức

1. $m \rightarrow n$
2. $\neg n \lor p$
3. $\neg(p \land q)$
4. $q \lor r$
5. m

Chứng minh r bằng phương pháp diễn dịch, bác bỏ

BÀI TẬP

3. Giả sử các hiểu biết của một chuyên gia trong một tình huống nào đó được phát biểu dưới dạng các biểu thức logic mệnh đề sau đây :

   1. $a \wedge ((a \wedge x) \rightarrow d)$
   2. $(a \rightarrow (b \wedge c)) \wedge x$
   3. $(c \rightarrow a) \rightarrow (d \wedge e)$
   4. $b \rightarrow ((d \wedge x) \rightarrow f)$
   5. $(e \wedge b) \rightarrow f$
   6. $(e \wedge y) \rightarrow g$
   7. $d \rightarrow f$
   8. $f \rightarrow (\neg a \vee g)$

a. Chuyển tập công thức trên về tập các câu tuyển

b. Sử dụng bác bỏ để chứng minh g đúng, đưa ra chứng minh