

# 环游师大最短路径问题

## 一、摘要

基于河北师范大学 120 周年校庆外宾访校游览校园，找出一条最短游览路径问题。本文根据所给数据的特征，本文选取五个地点：启智园、凌云运动场、图书馆、四方广场、国培大厦，采用了合理的路径数据建立整形规划模型，对路径数据和总路程之间的关系进行研究和分析。

该问题为标准 TSP 问题，在图论意义下又常常被称为最小 Hamilton 圈问题，Euler 等人最早研究了该问题的雏形，后来由英国的 Hamilton 爵士作为一个悬赏问题而提出。本文运用 C++ 编程语言对所得数学模型进行求解，发现当选择：启智园—凌云运动场—国培大厦—四方广场—图书馆—启智园；启智园—图书馆—四方广场—国培大厦—凌云运动场—启智园两条路径均为最短的 2700 米。本文利用最优方案，可以达到最短时间成本，使游览者可以更高效率的访问校园。

## 二、问题的提出

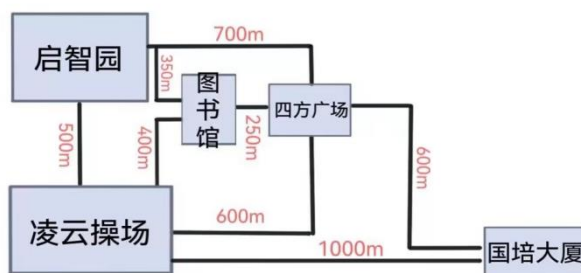
### 2.1 问题背景

基于河北师范大学 120 周年校庆外宾访问师大校园，更好展现我校校园的地标建筑，面对错综复杂的道路，避免来宾重复经过以及路程较长浪费时间消耗体力等问题，本课程研究如何能在河北师大校园内选择一条游览专线，既能方便来宾访问展现校园之美，又能增强校内各建筑之间的联系。

### 2.2 问题条件

现根据河北师范大学主要地标建筑如：启智园、凌云运动场、图书馆、四方广场、国培大厦这五个地区，找出一条最短路径，即：从任意地标建筑出发，遍访这些地标建筑各

一次，最后返回最初访问的地点的最短路径。已知各地标建筑间路径长度如图所示：



(简化的师大模式图)

### 三、条件假设

- (1) 忽略道路曲折问题;
- (2) 假设校外来宾只走主干道;
- (3) 忽略地标建筑的自身长度;
- (4) 假设校外来宾从启智园出发，且无突发情况;
- (5) 假设地标建筑不分正反面，到达任意一面即为访问;

### 四、符号约定

$V$ ：地点；

$i、j$ ：地点编号 ( $i, j=1,2,3,4,5$ ) ；

$V_1$ ：启智园；

$V_2$ ：凌云广场；

$V_3$ ：图书馆；

$V_4$ ：四方广场；

$V_5$ ：国培大厦；

$X_{ij}$ ：决策变量 ( $X_{ij}=0$  或  $1$ ，判断从  $V_i$  到  $V_j$  是否经过)；

$C_{ij}$  : 地点间路程 (单位: m);

$Z$  : 总路程 (单位: m);

## 五、问题分析

从地标建筑  $V_1$  出发, 不重复不遗漏的拜访  $V_2$ 、 $V_3$ 、 $V_4$ 、 $V_5$ , 最后返回  $V_1$  的最小路径成本。该问题为经典的“旅行商问题”, 可以依据“旅行商问题”建立数学模型, 建模的关键在于如何用数学变量来表达一条起点和终点重合的旅行路线。

## 六、模型建立

参考“旅行商问题”的解题思路, 建立如下整数线性规划数学模型:

### 6.1 参数定义

地标建筑总数为: 5, 从地标建筑  $i$  到地标建筑  $j$  的游览成本为:  $C_{ij}$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。

### 6.2 变量定义

定义 0-1 变量

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{能从地标建筑 } i \text{ 到地标建筑 } j \\ 0, & \text{不能从地标建筑 } i \text{ 到地标建筑 } j \end{cases}$$

### 6.3 数学建模

#### 6.3.1 目标函数

利用两地之间路程变量  $C_{ij}$  与决策变量  $X_{ij}$  可得到任意两地标建筑之间的实际路径长度方程式为:

$$Z = C_{ij} * X_{ij}$$
$$(i, j = 1, 2, 3, 4, 5; X = 0, 1)$$

$C_{ij}$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$C_1$		500	350	700	0
$C_2$	500		400	600	1000
$C_3$	350	400		250	0
$C_4$	700	600	250		600
$C_5$	0	1000	0	600	

(表 5.1 各个地标建筑间路径长度)

通过对  $i$  与  $j$  的控制可以实现通过全部地标建筑  $v$ ，且通过对  $X$  的控制可以实现是否两地标建筑之间有直达通路。因此对全部  $C_{ij}$  值进行求和即可得到走过的总路程  $Z$ ，即目标函数为：

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} * X_{ij}$$

### 6.3.2 约束条件

对于每个地标建筑来说，必须被访问且仅能被访问一次，故做出如下单次访问约束条件：

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = 1, \quad i=1,2,\dots,n; \quad (1)$$

约束条件(1)表示每个地标建筑  $i$  需要离开一次。

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 1, \quad i=1,2,\dots,n; \quad (2)$$

约束条件(2)表示每个地标建筑  $j$  需要进入一次。

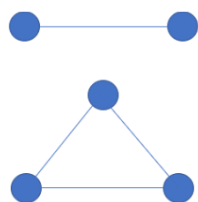
对该式进行约束，使其结果符合题目条件：以任意  $V_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ) 作为研究对象，在整个过程中，具有单次进入，单次走出的特点。即对于任意的  $V_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ )，其对应所有决策变量之和为 1。

### 6.3.3 消除子回路约束

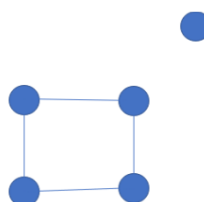
在上述约束条件中，存在不合理的“自进自出”情况，即同一地点  $V_i$  出去又回来，显然不符合题目，称为子回路约束条件。由此做出如下约束条件：

$$i \neq j$$

此处运用反证法，假设在上述条件所得路径中，存在子回路。由于  $i \neq j$  条件的存在，形成子回路至少要 3 个城市。



(1) 3个形成子回路



(1) 4个形成子回路

(子回路演示)

因为存在子回路，则子回路之一至少占用 3 个  $V_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ )，剩余的地点  $V$  至多有 2 个，所有可能的数字为 2, 1, 0，这与“形成子回路至少要 3 个城市”互相矛盾。

即在此假设下，不存在第二个子回路，无法满足单次进入，单次走出的特点。

**综上所述：** $V_i$  的总数为 5 时，无法形成符合约束条件的子回路，即该情况无子回路出现。结合上述建模过程与所有约束条件，得到所需数学模型：

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 C_{ij} * X_{ij} \\ s.t. &\begin{cases} X_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} & (i, j = 1, 2, 3, 4, 5) \\ i \neq j \\ \sum_{i=1}^5 X_{ij} = 1 & (i = 1, 2, 3, 4, 5) \\ \sum_{j=1}^5 X_{ij} = 1 & (j = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases} \end{aligned}$$

## 七、模型求解

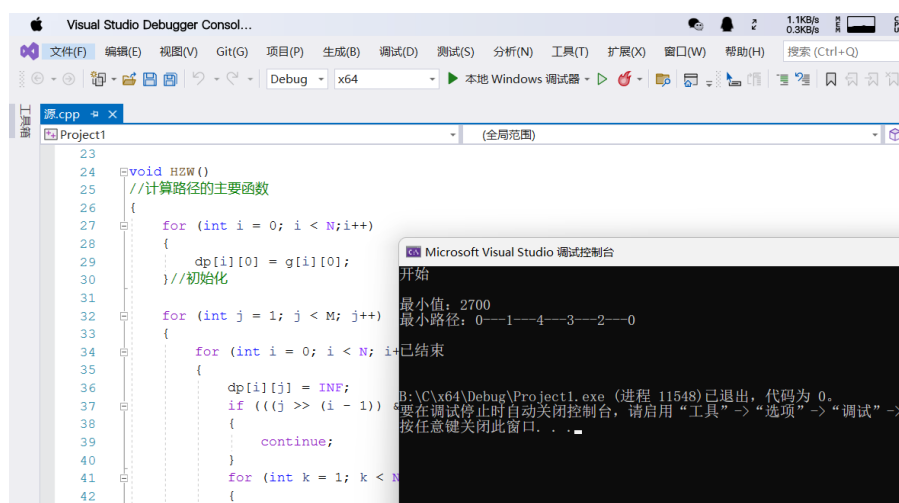
### 7.1 代码编写

编写环境：Visual Studio 2022

## 7.2 源代码解释

- 1、 In ( ) 函数用作获取数据，Out ( ) 函数用作输出，HWZ ( ) 函数为计算的核心函数，该函数名取自本小组三位成员姓名首字母。
- 2、 计算机运算从 0 开始，故在代码中的 i 与 j 与模型中的 i 与 j 相差 1。即在计算机中 V 表示为 V0、V1、V2、V3、V4。
- 3、 利用编程可以对代码进行监控，从而便捷的得到所经过的路径。

## 7.3 源代码运行



The screenshot displays the Visual Studio 2022 interface. The main editor window shows the source code for a function named `HWZ()`. The code is written in C++ and includes comments in Chinese. The function is designed to calculate the shortest path. The debug console window, titled 'Microsoft Visual Studio 调试控制台', shows the output of the program. It indicates that the minimum value is 2700 and the shortest path is 0—1—4—3—2—0. The console also shows a message that the program has exited with a code of 0.

```
23
24 void HWZ()
25 //计算路径的主要函数
26 {
27     for (int i = 0; i < N; i++)
28     {
29         dp[i][0] = g[i][0];
30     } //初始化
31
32     for (int j = 1; j < M; j++)
33     {
34         for (int i = 0; i < N; i++)
35         {
36             dp[i][j] = INF;
37             if ((i >> (i - 1)) && (i < N - 1))
38             {
39                 continue;
40             }
41             for (int k = 1; k < N; k++)
42             {
```

开始  
最小值: 2700  
最小路径: 0—1—4—3—2—0  
已结束  
B:\C\Debug\Project1.exe (进程 11548) 已退出, 代码为 0。  
要在调试停止时自动关闭控制台, 请启用“工具”->“选项”->“调试”->  
按任意键关闭此窗口。 . . .

(源代码运行结果)

由该代码运行结果可知：

最短路径为：V1—V2—V5—V4—V3—V1

由于路径具有可逆性，故：V1—V3—V4—V5—V2—V1

两路径所得 Z 最小值均为 2700。

# 八、结果分析与模型评价

## 8.1 结果分析

将模型结果带回原问题可得环游师大的最短路径为：

①：启智园—凌云运动场—国培大厦—四方广场—图书馆—启智园

②：启智园—图书馆—四方广场—国培大厦—凌云运动场—启智园

两条路径均为最短的 2700 米。

## 8.2 模型评价

优点：本文根据旅行商问题的基本思想，灵活运用 EXCEL， C++ 对所给的数据进行处理，建立了整数线性规划模型，且模型的拟合效果整体良好，解决了最小游览路径问题。运算具有高效性，便于修改和添加数据，对于类似问题具有较强的解决能力。

缺点：由于对所给数据的局限性，地标建筑的个数，无法做到更好的拟合计算，无法解决多地点的子回路问题。

## 九、参考文献

- [1] CSDN 代码参考 旅行商问题规划 作者：仁者乐山智者乐水 （2019 年 9 月 23 日发布）
- [2] 数学建模（第四版） 高等教育出版社 2011 作者：姜启源 谢金星 叶俊
- [3] 旅行商问题-PPT 课件
- [4] 迷茫的旅行商 原作者：美 William J.Cook 译：隋春宁