

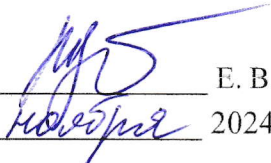
ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет компьютерных наук
Образовательная программа «Программная инженерия»

УДК 004.02, 004.62, 004.8, 004.93

СОГЛАСОВАНО

Доцент департамента математики
факультета экономических наук НИУ
ВШЭ, кандидат
физико-математических наук


Е. В. Михайлец
«18» ноября 2024 г.

УТВЕРЖДАЮ

Академический руководитель
образовательной программы
«Программная инженерия»,
старший преподаватель департамента
программной инженерии

Н.А. Павлочев
«__» _____ 2024 г.

Аннотация

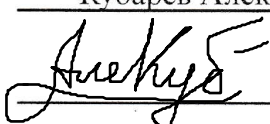
выпускной квалификационной работы

на тему “Библиотека для решения задач компьютерного зрения методами
топологического анализа данных”

по направлению подготовки бакалавров 09.03.04 «Программная инженерия»

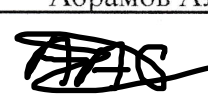
Согласовано

Соруководитель проекта,
Руководитель группы разработки
контроля качества ООО
“Яндекс.Такси Технологии”

Кубарев Александр Сергеевич

21 ноября 2024

Выполнил

студент группы БПИ213
образовательной программы
09.03.04 «Программная инженерия»

Абрамов Александр Сергеевич

18 ноября 2024

Москва 2024

АННОТАЦИЯ

Ключевые слова: топологический анализ данных, компьютерное зрение, признаковое описание, анализ изображений, классификация, сегментация, детекция, распознавание лиц, генерация

Компьютерное зрение является важным направлением исследований и находит широкое применение в индустрии для решения самых разных задач: от поиска отдельных объектов на изображениях до чтения текста и кодирования фотографий [2, 36, 42]. При этом подавляющее большинство решений полагается на методы глубинного обучения, включая нейросетевые технологии. Но результаты, полученные таким образом, сложны в интерпретации и могут вовсе вводить в заблуждение, не отражая реальных, имеющих смысл зависимостей [17, 25, 28, 37]. Более того, обучение глубоких нейронных сетей само по себе является сложной задачей как с прикладной, вычислительной, так и с теоретической, алгоритмической точки зрения.

В настоящее время стремительно набирает популярность другой подход, основанный на алгебраической топологии и заключающийся в анализе пространственной структуры данных: формы, расположения и др. Так, [15] демонстрирует высокое его качество при классификации изображений рукописных цифр, а [33] комбинирует подход с традиционными методами глубинного обучения для достижения еще более хорошего результата. Применительно к цветным изображениям, [7] демонстрирует высокое качество методов алгебраической топологии при классификации фотографий птиц, формируя ряд типичных подходов для анализа таких снимков. [9] представляет механизм регуляризации, штрафующий модель за высокую топологическую сложность, [5] описывает метод сравнения представлений данных с учетом их топологической структуры, а [27] и [39] реализуют основанные на топологических методах подходы к понижению размерности данных. [24] применяет топологический анализ к изучению изображений срезов тканей человека, а [1] – к фотографиям родинок для диагностики раковых заболеваний. Более того, [4, 16, 35] описывают различные подходы к сегментации изображений с использованием методов алгебраической топологии и заявляют о хороших результатах на определенных данных, а [41] использует топологический анализ для решения задачи детекции поражений кожи и их сегментации на изображениях.

Таким образом, топологический анализ данных показывает отличные результаты при решении различных задач, связанных с анализом изображений. Тем не менее, в отличие от традиционных технологий глубинного обучения, существующие работы лишь демонстрируют применение отдельных подходов к конкретным проблемам, что усложняет решение новых задач в смежных областях аналогичным способом. Большую как исследовательскую, так и практическую ценность имеет агрегация существующих алгоритмов и создание единого подхода к обработке изображений методами топологического анализа данных.

Целью проекта является разработка универсального решения, позволяющего эффективно работать с изображениями методами топологического анализа данных и применимого к большинству задач компьютерного зрения в качестве базовой модели, показывающей приемлемое для дальнейших исследований качество.

Таким образом, выделяются следующие задачи исследования:

1. Более детальное изучение существующих методов, нахождение готовых или создание собственных их реализаций для дальнейшего использования.
2. Сбор открытых наборов размеченных данных различной природы ([3, 11, 18, 22, 23, 26] и др.) для оценки качества и универсальности разрабатываемого алгоритма.
3. Анализ применимости выделенных ранее методов к различным задачам компьютерного зрения и выбор наиболее эффективных, основываясь на их качестве при решении соответствующих задач на собранных данных.
4. Проектирование и реализация универсального алгоритма признакового описания изображений методами топологического анализа данных с учетом возможности его применения к большим наборам данных в распределенном режиме.
5. Валидация разработанного метода на открытых наборах данных.
6. Оценка качества полученного подхода в сравнении с существующими моделями на реальных данных системы “Фотоконтроль” в “Яндекс.Такси” и формирование вывода о целесообразности внедрения модели в продуктовые процессы проверки фотографий в компании.
7. Публикация алгоритма в качестве библиотеки на одном из языков программирования.

Методология проведения работы и общая схема эксперимента (рис. 1) условно разделяются на два этапа: анализ существующих подходов на открытых наборах данных и валидация полученных результатов на реальных данных системы “Фотоконтроль”. По завершении первого этапа исследования должен быть сформирован полный объем теоретических материалов, необходимых для проектирования и разработки библиотеки, реализующей целевой универсальный алгоритм анализа изображений методами топологического анализа данных. Второй этап работы направлен на оценку качества полученного подхода на совершенно новых, ранее не использованных в настоящем исследовании данных. В случае достижения высокого качества предсказаний в сравнении с существующими моделями и ручной разметкой, будет рассмотрен вопрос о целесообразности внедрения разработанной модели в систему “Фотоконтроль”.

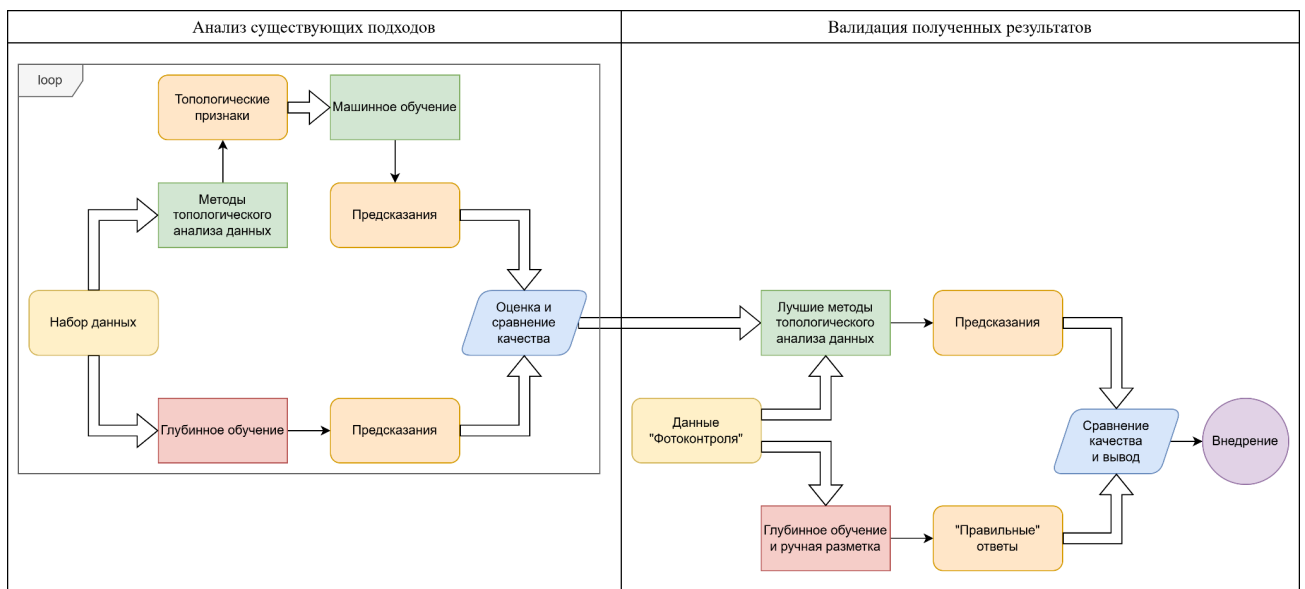


Рисунок 1 – Общая схема эксперимента при проведении исследования

При выполнении работы значительное внимание будет уделено типичным методам топологического анализа данных, которые можно условно сгруппировать в четыре ключевых стадии алгоритма:

1. Преобразование исходных данных – изображения – в функцию от двух переменных с множеством вещественных чисел в качестве образа. Фактически, исходное изображение представляется в качестве одного или нескольких черно-белых с помощью бинаризации, инвертации, фильтрации и других методов [15]. Результатом операции является так называемый кубический комплекс [19] – топологическая структура, являющаяся

объединением простейших геометрических фигур (точек, отрезков, квадратов, кубов и т.д.) единичного размера с учетом пространственной “сетки”.

2. Вычисление кубических гомологий полученной структуры путём поиска смежных пар локальных минимумов (моментов “появления” топологических признаков) и максимумов (моментов “исчезновения” топологических признаков) полученной ранее функции. Построение и очистка от шума диаграммы устойчивости, в которой каждому признаку соответствует одна точка с координатами по осям абсцисс и ординат, равными времени его появления и исчезновения соответственно.
3. Получение признакового описания исходных данных путём векторизации – вычисления различных топологических и статистических характеристик – диаграммы устойчивости в соответствии с основной теоремой устойчивых гомологий [43]. Типичный подход основан на изучении чисел Бетти [43], отражающих максимальное количество разрезов поверхности, которые могут быть сделаны до её разделения на две части. Можно также доказать, что k -е число Бетти равно количеству k -мерных «дыр» в исходных данных. Более того, предложено множество других методов, включая энтропию [34], ландшафт [6], силуэт [8] и амплитуды устойчивости. Последние могут быть особенно привлекательны как меры разницы между заданной диаграммой устойчивости и «пустой» диаграммой, вычисляемые на основе других топологических характеристик (кривых Бетти, ландшафтов и силуэтов устойчивости), а также методов из смежных областей исследований [20], таких как расстояния Вассерштейна [40] и бутылочного горлышка [14]. Доказано [10], что вычисленные таким образом признаки являются “устойчивыми”, то есть не претерпевают значительных изменений в результате небольших непрерывных деформаций исходных данных, что позволяет успешно использовать их в классических алгоритмах машинного обучения для решения различных задач.
4. Отбор признаков и понижение размерности полученного пространства для удаления шума и повышения производительности применяемых далее алгоритмов машинного обучения. При этом используются два традиционных метода: анализ главных компонент [13, 31] и автокодировщик [21], а также два топологических метода: аппроксимация и проекция однородного многообразия [27] и автокодировщик с учётом расхождения топологических представлений пространств [39]. Для отбора признаков также может быть использован анализ их информационной ценности [29].

При реализации описанных методов топологического анализа данных, помимо прочего, могут быть использованы библиотеки `giotto-tda` [38] на языке Python и `Gudhi` на языке C++ [12]. Необходимые для оценки качества алгоритмы машинного и глубинного обучения могут быть выполнены с помощью библиотек `scikit-learn` [32] и `PyTorch` [30] на языке Python.

Результатом работы будет являться программная реализация разработанного алгоритма и необходимых для его успешного использования смежных методов машинного обучения, а также вывод о применимости топологического анализа данных к задачам компьютерного зрения в целом, основанный на качестве полученной реализации при их решении на различных наборах данных. Насколько мне известно, это будет первой попыткой обобщения топологического подхода применительно к анализу изображений, что позволит исследователям эффективнее проектировать модели, основанные на этом методе, имея простую в использовании базовую реализацию, демонстрирующую приемлемое качество. Более того, настоящее исследование может стать основой для “переиспользования” знаний, полученных на одних данных, при работе с другими данными по аналогии с тем, как это происходит при решении задач методами глубинного обучения.

Таким образом, результаты работы могут быть применены в самых разных областях как при решении многих практических задач компьютерного зрения, так и при проведении дальнейших теоретических исследований, изучающих методы алгебраической топологии. Ожидается, что реализованный алгоритм покажет особенно хорошие результаты при работе с данными, в которых целевая переменная определяется преимущественно формами объектов, присутствующих на изображении. Таковыми являются, например, большая часть данных, обрабатываемых системой “Фотоконтроль” в “Яндекс.Такси”: фотографии машин и отдельных их атрибутов (брендированная оклейка, цифровой короб, детские кресла), изображения документов водителей. В случае достижения разработанным алгоритмом качества, превосходящего таковое существующих моделей машинного обучения, используемых в компании, результаты исследования могут быть внедрены в продуктовые процессы проверки изображений в системе. Это позволит повысить долю фотографий, проверяемых автоматически и, как следствие, снизить нагрузку и затраты на ручную разметку данных с помощью ассессоров.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Abaach, M. GeoTop: Advancing Image Classification with Geometric-Topological Analysis [Электронный ресурс] / M. Abaach, I. Morilla. – arXiv, 8 Nov 2023. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.16157>. (дата обращения: 09.11.2024).
2. Ahmed, A. Enhancing Wrist Fracture Detection with YOLO [Электронный ресурс] / A. Ahmed, A. S. Imran, A. Manaf, Z. Kastrati, S. M. Daudpota. – arXiv, 29 Jul 2024. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.12597>. (дата обращения: 09.11.2024).
3. Arlazarov, V. V. MIDV-500: A Dataset for Identity Documents Analysis and Recognition on Mobile Devices in Video Stream [Электронный ресурс] / V. V. Arlazarov, K. Bulatov, T. Chernov, V. L. Arlazarov. – arXiv, 11 Feb 2020. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1807.05786>. (дата обращения: 09.11.2024).
4. Assaf, R. Persistent homology for object segmentation in multidimensional grayscale images [Электронный ресурс] / R. Assaf, A. Goupil, V. Vrabie, T. Boudier, M. Kacim. – Pattern Recognition Letters – 2018 – vol. 112 – С. 277-284. – URL: <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2018.08.007>. (дата обращения: 09.11.2024).
5. Barannikov, S. Representation Topology Divergence: A Method for Comparing Neural Network Representations [Электронный ресурс] / S. Barannikov, I. Trofimov, N. Balabin, E. Burnaev. – arXiv, 28 Jun 2022. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.00058>. (дата обращения: 09.11.2024).
6. Bubenik, P. Statistical topological data analysis using persistence landscapes [Электронный ресурс]. – arXiv, 23 Jan 2015. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1207.6437>. (дата обращения: 09.11.2024).
7. Byttner, W. Classifying RGB Images with multi-colour Persistent Homology [Электронный ресурс]. – Research Gate, Jun 2019. – URL: <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.23697.17768>. (дата обращения: 09.11.2024).
8. Chazal, F. Stochastic Convergence of Persistence Landscapes and Silhouettes [Электронный ресурс] / F. Chazal, B. T. Fasy, F. Lecci, A. Rinaldo, L. Wasserman. – arXiv, 2 Dec 2013. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1312.0308>. (дата обращения: 09.11.2024).

9. Chen, C. A Topological Regularizer for Classifiers via Persistent Homology [Электронный ресурс] / C. Chen, X. Ni, Q. Bai, Y. Wang. – arXiv, 16 Oct 2018. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1806.10714>. (дата обращения: 09.11.2024).
10. Cohen-Steiner, D. Stability of persistence diagrams [Электронный ресурс] / D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, J. Harer. – Discrete & Computational Geometry: электрон. журн. – vol. 37. – С. 103-120. – Springer, 12 Dec 2006. – URL: <https://doi.org/10.1007/s00454-006-1276-5>. (дата обращения: 09.11.2024).
11. Deng, J. ImageNet: A Large-Scale Hierarchical Image Database [Электронный ресурс] / J. Deng, W. Dong, R. Socher, L.-J. Li, K. Li, L. Fei-Fei. – IEEE Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2009. – URL: <https://image-net.org>. (дата обращения: 09.11.2024).
12. Dlotko, P. Cubical complex [Электронный ресурс]. – GUDHI User and Reference Manual. – GUDHI Editorial Board, 2020 – URL: https://gudhi.inria.fr/doc/3.1.1/group__cubical__complex.html. (дата обращения: 09.11.2024).
13. Eckart, C. The approximation of one matrix by another of lower rank [Электронный ресурс] / C. Eckart, G. Young. – Psychometrika: электрон. журн. – vol. 1. – С. 211-218. – Springer, Sep 1936. – URL: <https://doi.org/10.1007/BF02288367>. (дата обращения: 09.11.2024).
14. Efrat, A. Geometry Helps in Bottleneck Matching and Related Problems [Электронный ресурс] / A. Efrat, A. Itai, M. J. Katz. – Algorithmica: электрон. журн. – vol. 31. – С. 1-28. – Springer, Sep 2001. – URL: <https://doi.org/10.1007/s00453-001-0016-8>. (дата обращения: 09.11.2024).
15. Garin, A. A Topological "Reading" Lesson: Classification of MNIST using TDA [Электронный ресурс] / A. Garin, G. Tauzin. – arXiv, 22 Oct 2019. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1910.08345>. (дата обращения: 09.11.2024).
16. Glatt, R. Topological Data Analysis Guided Segment Anything Model Prompt Optimization for Zero-Shot Segmentation in Biological Imaging [Электронный ресурс] / R. Glatt, S. Liu. – arXiv, 30 Jun 2023. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.17400>. (дата обращения: 09.11.2024).

17. Goodfellow, I. J. Explaining and Harnessing Adversarial Examples [Электронный ресурс] / I. J. Goodfellow, J. Shlens, C. Szegedy. – arXiv, 20 Mar 2015. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6572>. (дата обращения: 09.11.2024).
18. Huang, G. B. Labeled Faces in the Wild: A Database for Studying Face Recognition in Unconstrained Environments [Электронный ресурс] / G. B. Huang, M. Ramesh, T. Berg, E. Learned-Miller. – University of Massachusetts, Amherst, Technical Report 07-49, Oct 2007. – URL: <https://vis-www.cs.umass.edu/lfw>. (дата обращения: 09.11.2024).
19. Kaczynski, T. Computational Homology [Электронный ресурс] / T. Kaczynski, K. Mischaikow, M. Mrozek. – Springer, 2004. – URL: <https://doi.org/10.1007/b97315>. (дата обращения: 09.11.2024).
20. Kerber, M. Geometry Helps to Compare Persistence Diagrams [Электронный ресурс] / M. Kerber, D. Morozov, A. Nigmatov. – arXiv, 10 Jun 2016. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1606.03357>. (дата обращения: 09.11.2024).
21. Kramer, M. A. Nonlinear principal component analysis using autoassociative neural networks [Электронный ресурс]. – AIChE: электрон. журн. – Feb 1991. – vol. 2. – С. 233-243. – Springer, Sep 1936. – URL: <https://doi.org/10.1007/BF02288367>. (дата обращения: 09.11.2024).
22. Krizhevsky, A. The CIFAR-10 and CIFAR-100 datasets [Электронный ресурс] / A. Krizhevsky, V. Nair, G. Hinton. – URL: <https://www.cs.toronto.edu/~kriz/cifar.html>. (дата обращения: 09.11.2024).
23. LeCun, Y. THE MNIST DATABASE of handwritten digits [Электронный ресурс] / Y. LeCun, C. Cortes, C. J. C. Burges. – URL: <https://yann.lecun.com/exdb/mnist>. (дата обращения: 09.11.2024).
24. Levy, J. Topological Feature Extraction and Visualization of Whole Slide Images using Graph Neural Networks [Электронный ресурс] / J. Levy, C. Haudenschild, C. Barwick. – Cold Spring Harbor Laboratory, bioRxiv, 12 Oct 2020. – URL: <https://doi.org/10.1101/2020.08.01.231639>. (дата обращения: 09.11.2024).
25. Lipton, Z. C. The Mythos of Model Interpretability [Электронный ресурс]. – arXiv, 6 Mar 2017. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1606.03490>. (дата обращения: 09.11.2024).

26. Liu, Z. Deep Learning Face Attributes in the Wild [Электронный ресурс] / Z. Liu, P. Luo, X. Wang, X. Tangu. – arXiv, 24 Sep 2015. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1411.7766>. (дата обращения: 09.11.2024).
27. McInnes, L. UMAP: Uniform Manifold Approximation and Projection for Dimension Reduction [Электронный ресурс] / L. McInnes, J. Healy, J. Melville. – arXiv, 18 Sep 2020. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1802.03426>. (дата обращения: 09.11.2024).
28. Nguyen, A. Deep Neural Networks are Easily Fooled: High Confidence Predictions for Unrecognizable Images [Электронный ресурс] / A. Nguyen, J. Yosinski, J. Clune. – arXiv, 2 Apr 2015. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.1897>. (дата обращения: 09.11.2024).
29. Osteyee, D. B. Information, Weight of Evidence. The Singularity Between Probability Measures and Signal Detection [Электронный ресурс] / D. B. Osteyee, I. J. Good. – Springer, 1974. – URL: <https://doi.org/10.1007/BFb0064126>. (дата обращения: 09.11.2024).
30. Paszke, A. PyTorch: An Imperative Style, High-Performance Deep Learning Library [Электронный ресурс] / A. Paszke, S. Gross, F. Massa, A. Lerer, J. Bradbury, G. Chanan, T. Killeen, Z. Lin, N. Gimeshein, L. Antiga, A. Desmaison, A. Köpf, E. Yang, Z. DeVito, M. Raison, A. Tejani, S. Chilamkurthy, B. Steiner, L. Fang, J. Bai, S. Chintala. – arXiv, 3 Dec 2019. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.01703>. (дата обращения: 09.11.2024).
31. Pearson, K. LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space [Электронный ресурс]. – The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. – vol. 2, iss. 11. – С. 559-572. – Taylor & Francis, 08 Jun 2010. – URL: <https://doi.org/10.1080/14786440109462720>. (дата обращения: 09.11.2024).
32. Pedregosa, F. Scikit-learn: Machine Learning in Python [Электронный ресурс] / F. Pedregosa, G. Varoquaux, A. Gramfort, V. Michel, B. Thirion, O. Grisel, M. Blondel, P. Prettenhofer, R. Weiss, V. Dubourg, J. Vanderplas, A. Passos, D. Cournapeau, M. Brucher, M. Perrot, É. Duchesnay. – Journal of Machine Learning Research: электрон. журн. – vol. 12. – С. 2825-2830. – 2011. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.14100>. (дата обращения: 09.11.2024).
33. Prata Lima, M. D. Image Classification using Combination of Topological Features and Neural Networks [Электронный ресурс] / M. D. Prata Lima, G. A. Giralddi, G. F. Miranda Junior. –

- arXiv, 10 Nov 2023. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.06375>. (дата обращения: 09.11.2024).
34. Rucco, M. Characterisation of the Idiotypic Immune Network Through Persistent Entropy [Электронный ресурс] / M. Rucco, F. Castiglione, E. Merelli, M. Pettini. – Proceedings of ECCS 2014. Springer Proceedings in Complexity. – Springer, 04 May 2016. – URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-29228-1_11. (дата обращения: 09.11.2024).
 35. Sofi, S. S. Image Segmentation with Topological Priors [Электронный ресурс] / S. S. Sofi, N. Alsahanova. – arXiv, 12 May 2022. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.06197>. (дата обращения: 09.11.2024).
 36. Srivastava, S. OmniVec: Learning robust representations with cross modal sharing [Электронный ресурс] / S. Srivastava, G. Sharma. – arXiv, 7 Nov 2023. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.05709>. (дата обращения: 09.11.2024).
 37. Szegedy, C. Intriguing properties of neural networks [Электронный ресурс] / C. Szegedy, W. Zaremba, I. Sutskever, J. Bruna, D. Erhan, I. Goodfellow, R. Fergus. – arXiv, 19 Feb 2014. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1312.6199>. (дата обращения: 09.11.2024).
 38. Tauzin, G. giotto-tda: A Topological Data Analysis Toolkit for Machine Learning and Data Exploration [Электронный ресурс] / G. Tauzin, U. Lupo, L. Tunstall, J. B. Pérez, M. Caorsi, W. Reise, A. Medina-Mardones, A. Dassatti, K. Hess. – arXiv, 5 Mar 2021. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2004.02551>. (дата обращения: 09.11.2024).
 39. Trofimov, I. Learning Topology-Preserving Data Representations [Электронный ресурс] / I. Trofimov, D. Cherniavskii, E. Tulchinskii, N. Balabin, E. Burnaev, S. Barannikov. – arXiv, 15 Feb 2023. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.00136>. (дата обращения: 09.11.2024).
 40. Vaidya, P. Geometry helps in matching [Электронный ресурс]. – Proceedings of the twentieth annual ACM symposium on Theory of computing. – C. 422-425. – Association for Computing Machinery, 01 Jan 1988. – URL: <https://doi.org/10.1145/62212.62253>. (дата обращения: 09.11.2024).
 41. Vandaele, R. Topological image modification for object detection and topological image processing of skin lesions [Электронный ресурс] / R. Vandaele, G. A. Nervo, O. Gevaert. –

- Scientific Reports. – vol. 10, 21061 – С. 2045-2322. – 13 Nov 2020. – URL: <https://doi.org/10.1038/s41598-020-77933-y>. (дата обращения: 09.11.2024).
42. Wang, J. GIT: A Generative Image-to-text Transformer for Vision and Language [Электронный ресурс] / J. Wang, Z. Yang, X. Hu, L. Li, K. Lin, Z. Gan, Z. Liu, C. Liu, L. Wang. – arXiv, 15 Dec 2022. – URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.14100>. (дата обращения: 09.11.2024).
43. Zomorodian, A. Computing persistent homology [Электронный ресурс] / A. Zomorodian, G. Carlsson. – Discrete & Computational Geometry: электрон. журн. – vol. 33. – С. 249-274. – Springer, 19 Nov 2004. – URL: <https://doi.org/10.1007/s00454-004-1146-y>. (дата обращения: 09.11.2024).