№1446.

$a_1 = (2\ 0\ 3)$ $\qquad b_1 = (1\ \ 2\ \ -1)$

$a_2 = (4\ 1\ 5)$ $\qquad b_2 = (4\ \ 5\ \ -2)$

$a_3 = (3\ 1\ 2)$ $\qquad b_3 = (1\ \ -1\ \ 1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3)-(2) \\ (1)-2(3)}]{\substack{(2)-2(1) \\ (3)-(1)}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\} - \text{л.н.з.}$$

$\Rightarrow \exists!$ л.о., переводящий $\{a_1, a_2, a_3\}$ в $\{b_1, b_2, b_3\}$

$b_i = \varphi(a_i)$

$\Rightarrow b_i = L a_i$, где L – матрица искомого л.о.

$\Downarrow$

$$(b_1\ b_2\ b_3) = L\,(a_1\ a_2\ a_3)$$

$$\Rightarrow L = (b_1\ b_2\ b_3) \cdot (a_1\ a_2\ a_3)^{-1}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(1)-2(3)]{(3)-(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(3)-(2)]{(1)-2(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(1)+2(3)]{(2)-(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -7/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

A^{-1}

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & +11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Ответ: ↗

№1450

б) $R_n[x]$ – рассматриваемое пространство

$\exists\ f, g \in R_n[x]$.

Тогда $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$ по свойствам дифференцирования

⇓

дифференцирование – л.о.

Базис $e = \left\{ 1, x-c, \frac{(x-c)^2}{2!}, \dots, \frac{(x-c)^n}{n!} \right\}, c \in \mathbb{R}$

$\varphi(e_1) = 0 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \dots + 0 \cdot e_n$

$\varphi(e_2) = 1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n$

$\dots$

$\varphi(e_i) = \frac{(x-c)^i}{i!} = \frac{i(x-c)^{i-1}}{i!} = \frac{(x-c)^{i-1}}{(i-1)!} =$

$= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_{i-2} + e_{i-1} + 0 e_i + \dots + 0 \cdot e_n$

$\dots$

$\varphi(e_n) = \frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_{n-2} + e_{n-1} + 0 \cdot e_n$

$\Rightarrow$ По определению, матрица л.о.

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$$

№1452

б) $f_1 = e_1$ $\quad f_3 = e_1 + e_2 + e_3$

$f_2 = e_1 + e_2$

$f_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_f = T_{e\to f}^{-1} \cdot L_e \cdot T_{e\to f} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\cdot \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(4)]{(1)-(2),\ (2)-(3)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}}$$

Ответ:

№1454

$a_1 = (8 \quad -6 \quad 7)$ $\qquad b_1 = (1 \quad -2 \quad 1)$

$a_2 = (-16 \quad 7 \quad -13)$ $\qquad b_2 = (3 \quad -1 \quad 2)$

$a_3 = (9 \quad -3 \quad 7)$ $\qquad b_3 = (2 \quad 1 \quad 2)$

$$L_a = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix} \qquad L_b - ?$$

Пусть $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Тогда $T_{s \to a} = \begin{pmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{pmatrix}$

$$T_{s \to B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T_{a \to b} = T_{a \to s} \cdot T_{s \to b} = T_{s \to a}^{-1} \cdot T_{s \to B}$$

$$L_b = T_{a \to b}^{-1} \cdot L_a \cdot T_{a \to b} =$$

$$= \left(T_{s \to a}^{-1} \cdot T_{s \to B}\right)^{-1} \cdot L_a \cdot T_{s \to a}^{-1} \cdot T_{s \to B} =$$

$$= T_{s \to B}^{-1} \cdot T_{s \to a} \cdot L_a \cdot T_{s \to a}^{-1} \cdot T_{s \to B}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{T_{s \to B}} & \multicolumn{3}{c}{T_{s \to a}} \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -16 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -6 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & -13 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)+2(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 8 & -16 & 9 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & -25 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$(2)\leftrightarrow(3)$
$(2)\cdot -1$
$(3)/5$
$(3)-(2)$
$(1)-3(2)-2(3)$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}}_{T_{S\to B}^{-1} \cdot T_{S\to a}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$T_{S\to a}^{-1} \cdot T_{S\to B} = \left(T_{S\to B}^{-1} \cdot T_{S\to a}\right)^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[(1)-3(2)]{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 6 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[(2)+3(3)-2(1)]{(1)-6(3),\ (3)+(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2),\ (2)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

$$T^{-1}_{S\to a} : T_{S\to B}$$

$$\Rightarrow L_B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -13 & 7 \\ 6 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} =$$

Ответ:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

№1457

φ:

$a_1 = (1\ 2)$

$a_2 = (2\ 3)$

ψ:

$b_1 = (3\ 1)$

$b_2 = (4\ 2)$

$$L_a = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_b = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Пусть $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Тогда $T_{s \to a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $T_{s \to b} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$T_{a \to b} = T_{a \to s} \cdot T_{s \to b} = T_{s \to a}^{-1} \cdot T_{s \to b} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$L_b = T_{a\to b}^{-1} \cdot L_a \cdot T_{a\to b} = \begin{pmatrix}-7 & -8\\ 5 & 6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & 8\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}50 & 54\\ -43 & -46\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 5 & 6\end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-80 & -76\\ 71 & 68\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+40 & +38\\ -71/2 & -34\end{pmatrix}$$

$$\exists\ x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = (b_1\ b_2)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = L_b\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(x) + \psi(x) = (L_b + P_b)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$$

$$\psi(x) = P_b\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi + \psi = L_b + P_b =$$

$$=\begin{pmatrix} +40 & +38 \\ -\frac{71}{2} & -34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -\frac{59}{2} & -25 \end{pmatrix}}$$

Ответ:

№1458.

Ч: $a_1 = (-3 \;\; 7)$ Ч: $b_1 = (6 \;\; -7)$

$a_2 = (1 \;\; -2)$ $b_2 = (-5 \;\; 6)$

$$L_a = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad P_b = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Пусть $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$T_{S \to a} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}; \; T_{S \to B} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{T_{a \to b} = T_{a \to S} \cdot T_{S \to b} = T^{-1}_{S \to a} \cdot T_{S \to b} =}$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & \\ & 6 \end{pmatrix}}$$

$$L_s = T_{a\to s}^{-1} \cdot L_a \cdot T_{a\to s} = T_{s\to a} \cdot L_a \cdot T_{s\to a}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +2 & +1 \\ +7 & +3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_s = T_{b\to s}^{-1} \cdot P_b \cdot T_{b\to s} = T_{s\to b} \cdot P_b \cdot T_{b\to s} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -17 \\ 5 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix}$$

$$\exists x = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 = (s_1 \; s_2) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = L_s \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} ; \; \psi(x) = P_s \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x)\cdot\psi(x) = L_s \cdot P_s \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi\psi = L_s P_s = \begin{pmatrix}-2 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-143 & -122 \\ 177 & 151\end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix}109 & 93 \\ 34 & 29\end{pmatrix}}$$

Ответ: ↗

№391 + 395

д) $\varphi : x \longmapsto (a, x)x$

1) $\varphi(\alpha x + \beta y) = (a, \alpha x + \beta y)\cdot(\alpha x + \beta y) =$

$= (a, \alpha x + \beta y)\alpha x + (a, \alpha x + \beta y)\beta y =$

$= (a, \alpha x)\alpha x + (a, \beta y)\alpha x + (a, \alpha x)\beta y + (a, \beta y)\beta y =$

$\cancel{= \varphi(\alpha x) + (a, \beta y)\alpha x + (a, \alpha x)\beta y + \varphi(\beta y)}$

$= \alpha^2 \underbrace{(a,x)x}_{\varphi(x)} + \beta^2 \underbrace{(a,y)y}_{\varphi(y)} + (a,\beta y)\alpha x + (a,\alpha x)\beta y =$

Если φ — л.о., то $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$

Заметим, что это возможно только при $a = 0$ $(\varphi(x) = 0\ \forall x)$

• $\underset{\neq 0}{\varphi(x)}(\alpha^2 - \alpha) + \underset{\neq 0}{\varphi(y)}(\beta^2 - \beta) + \underset{\neq 0}{(a, \beta y)\alpha x} + \underset{\neq 0}{(a, \alpha x)\beta y} \to 0$

В общем случае, $\forall i,j$: ⓘ $\neq$ ⓙ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \alpha = 0 \text{ — неверно в общем случае} \Rightarrow \\ \beta^2 - \beta = 0 \\ (a, \beta y) = 0 \\ (a, \alpha x) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \alpha^2 - \alpha \neq 0$; $\varphi(x)(\alpha^2 - \alpha) = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = 0}$

2) $\mathrm{Im}\,\varphi = \{0\}$

$\mathrm{Ker}\,\varphi = V$ (исходное множество)

Ответ: является; $\{0\}$; V

~~ж)~~ $\cancel{f: x \longmapsto f(x+1) - f(x)}$

$\cancel{f(x) = f(x+1) - f(x)}$

$\cancel{2f(x) = f(x+1) \Rightarrow f(x) = \frac{f(x+1)}{2} = 2f(x-1)}$

$\cancel{f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)}$, ~~т.к.~~ $\cancel{f \in \mathbb{R}_n[x]}$, ~~то есть f — некоторый многочлен.~~

ж) $\varphi: \; f(x) \longmapsto f(x+1) - f(x), \; f \in \mathbb{R}_n[x]$

~~1)~~ $\cancel{\varphi(\alpha f(x) + \beta f(y))} =$

1) $\varphi\Big(\underbrace{\alpha f(x) + \beta g(x)}_{p(x)}\Big) = \varphi(p(x)) =$

$= p(x+1) - p(x) = (\alpha f(x) + \beta g(x))(x+1) -$
$- (\alpha f(x) + \beta g(x))(x) =$

$= \alpha f(x+1) + \beta g(x+1) - \alpha f(x) - \beta g(x) =$

$= \alpha\big(f(x+1) - f(x)\big) + \beta\big(g(x+1) - g(x)\big) =$

$= \alpha\,\varphi(f(x)) + \beta\,\varphi(g(x)) \Rightarrow \varphi$ — л.о.

2) $\ker f = \{\, f(x) \mid \varphi(f(x)) = 0 \,\}$

$f(x+1) - f(x) = 0$

$f(x+1) = f(x)$ уравнение относ. a_i

$\cancel{a_n(x+1)^n + \ldots + a_1(x+1) + a_0 = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \,\Big|\, \frac{d^{(n)}}{dx}}$

$\cancel{n!\,a_n = n!\,a_n} \Rightarrow a_n = 0$

$\cancel{\Rightarrow a_{n-1}(x+1)^{n-1} + \ldots + a_1(x+1) + a_0 = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \,\Big|\, \frac{d^{(n-1)}}{dx}}$

$\cancel{a_{n-1}(n-1)! = a_{n-1}(n-1)!}$

$a_n(x+1)^n + \ldots + a_1(x+1) + a_0 = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, $a_0 \in \mathbb{R}$ — верно.

Докажем, что это единственно решение:

$a_0 + a_1(x+1) + \ldots + a_n(x+1)^n = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = f(x)$

$$\begin{pmatrix}(x+1)^0 & (x+1)^1 & \ldots & (x+1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^0 & x^1 & \ldots & x^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

Заметим, что $\{(x+1)^0, (x+1)^1 \ldots (x+1)^n\} = a$ и

$\{x^0, x^1, \ldots, x^n\} = b$ — базисы в $\mathbb{R}_n[x]$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ — координаты $f(x)$ в этих базисах.

$\Rightarrow f(x)$ — многочлены, имеющие одинаковые координаты в этих базисах.

$$T_{b\to a} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}}_{\text{координаты в } b} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ldots \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\end{pmatrix}}_{T_{b\to a}} \underbrace{\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}}_{\text{координаты в } a.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \Rightarrow a_1 = 0 \\ a_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n \Rightarrow a_2 = 0 \\ \ldots \\ a_i = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot C_k^i \quad \left((x+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k \right) \Rightarrow a_{i+1} = 0 \\ \ldots \\ a_{n-1} = a_{n-1} + n a_n \Rightarrow a_n = 0 \\ a_n = a_n \Rightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall i > 0 \quad a_i = 0$$

$\Rightarrow$ это единственное решение.

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{ f(x) \mid f(x) = a_0,\ a_0 \in \mathbb{R} \}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f \cong \mathbb{R}_0[x] \cong \mathbb{R}$$

3) $\cancel{f\ a_n(x+1)^n + \ldots + a_1(x+1) + a_0}$

$$f(x+1) - f(x) = \left(a_n(x+1)^n + \ldots + a_1(x+1) + a_0\right) -$$

$$-\left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0\right) =$$

$$= x^n \overbrace{\cancel{(a_n - a_n)}}^{0} +$$

$$+ x^{n-1} \overbrace{\left(a_{n-1} + n a_n - a_{n-1}\right)}^{\neq 0 \text{ в общем случае}} +$$

$$+ \dots + x^i \overbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k C_k^i - a_i\right)}^{\neq 0 \text{ в общем случае}} +$$

$$+ \dots + x \underbrace{\left(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + n a_n - a_1\right)}_{\neq 0} +$$

$$+ \underbrace{\left(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_0\right)}_{\neq 0} \subseteq \mathbb{R}_{n-1}[x],$$

причём $\forall g \in \mathbb{R}_{n-1}[x] \ \exists f \in \mathbb{R}_n[x]:$

$$f(x+1) - f(x) = g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}_{n-1}[x]$$

Ответ: является; $\mathbb{R}_{n-1}[x]$; $\mathbb{R}$.

и) $f: (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$.

$$f\left(\alpha\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\right)=$$

$$=f\left(\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1 & \alpha x_2+\beta y_2 & \alpha x_3+\beta y_3\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1+2 & \alpha x_2+\beta y_2+5 & \alpha x_3+\beta y_3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha x_1+2 & \alpha x_2+5 & \alpha x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta y_1 & \beta y_2 & \beta y_3\end{pmatrix}=$$

$$=f\left(\begin{pmatrix}\alpha x_1 & \alpha x_2 & \alpha x_3\end{pmatrix}\right)+\underbrace{\begin{pmatrix}\beta y_1 & \beta y_2 & \beta y_3\end{pmatrix}}_{\neq f\left(\beta y_1 \;\beta y_2\; \beta y_3\right)}$$

f не линейна

$\Rightarrow$ f – не л.о.

Ответ: не является

1) $f: (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$

1) $f\left(\alpha(x_1\ x_2\ x_3) + \beta(y_1\ y_2\ y_3)\right) =$

$= f\left((\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)\right) =$

$= \left(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3\right) =$

$= \left(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3\right) + \left(\beta y_1, \beta y_2, \beta y_1 + \beta y_2 + \beta y_3\right)$

$= \alpha\left(x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3\right) + \beta\left(y_1, y_2, y_1 + y_2 + y_3\right) =$

$= \alpha f\left((x_1, x_2, x_3)\right) + \beta f\left((y_1, y_2, y_3)\right) \Rightarrow f - \text{л.о.}$

2)

$\mathrm{Ker} f = \{(x_1, x_2, x_3) \mid f((x_1, x_2, x_3)) = (0,0,0)\}$

$(x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3) = (0,0,0)$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{(0,0,0)\}$

~~3) $\forall (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$~~

3) $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R};\ f(q) = (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$

$\exists q = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} \cong$

$\cong \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^3$

Ответ: является; $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

№39.6

а) Пусть базис $\{x^0, x^1, \dots, x^n\} = e$

φ — оператор дифференцирования

Тогда $\varphi(e_1) = \varphi(x^0) = 0$

$\varphi(e_2) = \varphi(x^1) = 1$

$\varphi(e_3) = \varphi(x^2) = 2x$

$\varphi(e_n) = (n-1)x^{n-2}$; $\varphi(e_{n+1}) = nx^{n-1}$

$$\Rightarrow L_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$ — матрица л.о. φ.

Заметим, что $\det L_\varphi = 0 \Rightarrow \varphi$ вырожден.

д) Базис $e = \{(\cos t, \sin t)\}$

$\varphi(e_1) = \varphi(\cos t) = -\sin t = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2$
$\varphi(e_2) = \varphi(\sin t) = \cos t = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$

$\Rightarrow L_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица л.о. φ.

$\det(L_\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi$ невырожден.

№39.2.

Пусть W – подпространство в V.

Пусть P – подпространство в V такое, что $W + P = V$, то

есть если $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис V,
$e_w = \{e_1, \dots, e_w\}$ – базис W,

то $e_p = \{e_{w+1}, \dots, e_n\}$ – базис P.

а) Пусть $\varphi: V \to V$ - линейный оператор проекции вектора $x \in V$ на подпространство P.

Тогда $\operatorname{Ker} \varphi = W \Rightarrow \forall W \subseteq V \ \exists \varphi: \operatorname{Ker} \varphi = W$.

б) Пусть $\varphi: V \to V$ - линейный оператор проекции вектора $x \in V$ на подпространство W. Тогда $\operatorname{Im} \varphi = W \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall W \ \exists \varphi: \operatorname{Im} \varphi = W$.

Что и требовалось доказать.