№1540

б) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$

Пусть $A=\varphi$, $B=\psi$,

Тогда $(\varphi\psi)^* \Leftrightarrow (AB)^* \Rightarrow \forall x,y \; ((AB x),y) = (x,(AB)^* y)$

• $((AB)x,y) = (A(Bx),y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y)$,

~~То есть~~ $\cancel{((AB)x,y) = (\ldots)y}$

То есть $((AB)x,y) = (x,(B^* A^*)y) \Rightarrow$

$\Rightarrow B^* A^*$ — оператор, сопряжённый к AB, то есть $(AB)^* = B^* A^* \Leftrightarrow (\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$

д) $(\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$

~~Пусть~~ $\cancel{\varphi = A}$

$\cancel{(Ax,y) = (x,A^* y)}$

• $\cancel{((AA^{-1})A^{-1}}$

Пусть $\varphi \equiv A$

$I = AA^{-1}$

единичный оператор

Очевидно, что $I = I^*$ (т.к. $(Ix, y) = (x, y) = (x, Iy)$)

$$AA^{-1} = (AA^{-1})^* = I$$

$$(A^{-1})^* A^* = I \quad \Big| \text{ применим } (A^*)^{-1} \text{ с обеих сторон}$$

$$(A^{-1})^* \underbrace{A^* (A^*)^{-1}}_{I} = (A^*)^{-1}$$

$$(A^{-1})^* I = (A^*)^{-1}$$

$$\boxed{(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}}$$

ч.т.д.

№1542

$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — в ОНБ

$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, A_f^* — ?

$$T_{s\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ онб

$$\Rightarrow A_s = T_{s\to f} A_f T_{s\to f}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 13 & -1 \\ 4 & 14 & 2 \\ 1 & 11 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(E \,\middle|\, \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_s^* = A_s^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \text{т.к. } S - \text{онб}$$

$$\Rightarrow A_f^* = T_{s\to f}^{-1} \cdot A_s^* \cdot T_{s\to f} =$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6 & 6\\ -3 & -4 & -5\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}20 & 20 & 8\\ -16 & -17 & -7\\ 24 & 23 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-36 & -37 & -15\\ 30 & 30 & 14\\ 26 & 27 & 9\end{pmatrix}$$

Ответ:

№1543

$$a_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$a_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\longrightarrow b_2=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\quad \text{в ОНБ.}$$

$$a_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad b_3=\begin{pmatrix}7\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b_1 = Aa_1\\ b_2 = Aa_2\\ b_3 = Aa_3\end{cases},\ \text{где } A - \text{лин. оп.}$$

$$\Rightarrow (b_1\ b_2\ b_3) = A(a_1\ a_2\ a_3)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 7\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Т.к. e – ОНБ, $A^* = A^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: ↑

№1556

$$f = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 =$$

$$= (x_1\, x_2\, x_3) \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{\Gamma} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица бил. формы – матрица Грама в этом базисе $\Rightarrow A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ -5 & -7 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ:

№45.4

Г). $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^3 - 1 - 1 - (5-\lambda) - (5-\lambda) - (5-\lambda) =$$

$$= (5-\lambda)^3 - 3(5-\lambda) - 2 =$$

$$= (5-\lambda)(5-\lambda)^2 - 4(5-\lambda) + 3 - \lambda =$$

$$= ((5-\lambda)^2 - 4)(5-\lambda) + 3 - \lambda =$$

$$= (25 - 10\lambda + \lambda^2 - 4)(5-\lambda) + (3-\lambda) =$$

$$= (\lambda^2 - 10\lambda + 21)(5-\lambda) + (3-\lambda) =$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-7)(5-\lambda) + (3-\lambda) =$$

$$= (\lambda-3)\big((\lambda-7)(5-\lambda) - 1\big) =$$

$$= (\lambda-3)(-\lambda^2 + 12\lambda - 36) = (\lambda-3)(\lambda-6)^2$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 6 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

1) $\lambda_1 = 3, \ m(\lambda_1) = 1$

$$(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow c \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) $\lambda_2 = 6$

$$(A-\lambda_2 E) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{с.в.:} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{с.в.:} \begin{cases} a_1 = (1\ 1\ 1)^T \\ a_2 = (-1\ 1\ 0)^T \\ a_3 = (-1\ 0\ 1)^T \end{cases}$$

Т.к. $A = A^T$ и A задана в ОНБ, $A = A^*$, A – самосопряжённый ЛО $\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1$ ортогонален a_2, a_3

Ортогонализируем $\{a_2, a_3\}$:

$\exists\ a_2' = (-1\ 1\ 0)^T$

$$\Rightarrow a_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$ по формуле Грама-Шмидта

$$\sim \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Ортог. базис из с.в.:} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{ОНБ:} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{6}/6 \\ +\sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \right\}; J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

he).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda+2) \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^3(\lambda+2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{array}\right.$$

Заметим, что A задана в ОНБ и $A = A^T \Rightarrow$
$\Rightarrow A = A^* \Rightarrow$

$\Rightarrow A$ диагонализируема, с.в., отвечающие разным с.з., ортогональны

1) $\lambda_1 = 2$

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{с.в.: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) $\lambda_2 = -2$

$$A - \lambda_2 E = A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = -x_1 \\ x_3 = -x_1 \\ x_4 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \text{с.в.: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ортогонализируем с. в., отвечающие λ_1:

] $a_1' = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, тогда по формуле Грама-Шмидта:

$$a_2' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$a_3' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}6\\0\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-2\\6\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ортог. базис: $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

$$J = \begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

ОНБ: $\left\{\begin{pmatrix}\sqrt2/2\\\sqrt2/2\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}\sqrt6/6\\-\sqrt6/6\\\sqrt6/3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{12}\\-1/\sqrt{12}\\-1/\sqrt{12}\\\sqrt3/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\-1/2\end{pmatrix}\right\}$.

Спектральное разложение:

г) $$A = \begin{pmatrix}\sqrt3/3 & -\sqrt2/2 & -\sqrt6/6\\ \sqrt3/3 & \sqrt2/2 & -\sqrt6/6\\ \sqrt3/3 & 0 & \sqrt6/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt3/3 & -\sqrt2/2 & -\frac{\sqrt6}{6}\\ \sqrt3/3 & \sqrt2/2 & -\frac{\sqrt6}{6}\\ \sqrt3/3 & 0 & \sqrt6/3\end{pmatrix}^T$$

ж)

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & 1/\sqrt{12} & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & -1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & -1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & 1/\sqrt{12} & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & -1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & -1/\sqrt{12} & -1/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}^T$$

№636.

б) $\mathcal{A}x = [x, a]$

$$[x, a] = \begin{pmatrix} x_2 a_3 - a_2 x_3 \\ x_3 a_1 - a_3 x_1 \\ x_1 a_2 - a_1 x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}x = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

то есть $A = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица по $\mathcal{A}$ в онб.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_3^2+a_2^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 \\ -a_1a_2 & a_3^2+a_1^2 & -a_2a_3 \\ -a_1a_3 & -a_2a_3 & a_1^2+a_2^2 \end{pmatrix} = E$$

$\Downarrow$

два из $\{a_1, a_2, a_3\}$ равны 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, a_i^2 + a_j^2 = 0 \Rightarrow A \neq E \Rightarrow$

$\Rightarrow$ оператор A не ортогонален.

г). $Af(t) = t^n f(t^{-1})$

$\exists\, f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$

$$t^n f(t^{-1}) = t^n(a_n t^{-n} + \ldots + a_1 t^{-1} + a_0) =$$

$$= a_n + a_{n-1} t + \ldots + a_1 t^{n-1} + a_0 t^n$$

$$\Rightarrow f(t) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix};\ f(t^{-1}) = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Пусть $e_i = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\} i \\ 1 \\ \left.\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}\right\} n-i-1 \end{pmatrix}$

Известно, что $\{e_i \mid i=\overline{0,n}\}$ — ортонормированный базис в M_n

Заметим, что $A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}i \\ \\ \}n-i-1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n-i-1 \\ \\ \}i \end{matrix}$, то

есть $Ae_i = e_{n-i}$

$\Rightarrow$ Матрица ЛО A в ОНБ $\{e_i\}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Заметим, что $\{e_{n-i} \mid i=\overline{0,n}\}$ тоже ОНБ, то есть A переводит ОНБ в ОНБ $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ ортогонален

№63.15

1) $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad b_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\forall i \; b_i = Aa_i \Rightarrow (b_1 \; b_2 \; b_3 \; b_4) = A(a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4)$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = 2\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to 2\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +4 & 0 & +4 & +2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to 2\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to 2\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A^T \Rightarrow A$$ ортогональна в ОНБ $\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ ортогонален

№63.31

Г) $\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = -e_1 + e_2 \\ f_3 = e_1 - e_2 + e_3 \end{cases}$ $A_f = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_e = T_{e\to f} \cdot A_f \cdot T_{e\to f}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 5/3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_e^T = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_e A_e^T = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 5/3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/3 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 26 & & \\ & \ast & \\ & & \end{pmatrix} \neq E \quad \left(\frac{26}{9} \neq 1 \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow A_e A_e^T \neq E$, где A_e – матрица ЛО в ОНБ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ЛО не ортогонален.

д) $\begin{cases} f_1 = e_2 + e_3 \\ f_2 = e_1 + e_3 \\ f_3 = e_1 + e_2 \end{cases}$ $\quad A_f = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$T_{e \to f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_e = T_{e\to f} A_f T_{e\to f}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(4 \right.$$

$$\cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & +2 & -2 & 0 & -2 & +2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & +2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_e A_e^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E \Rightarrow A_e A_e^T = E,$$ где

A_e – матрица ЛО
в ОНБ

$\Rightarrow$ ЛО ортогонален