№1.

а) $K = F_7[x] / \langle x^2+2 \rangle$

x	x^2+2
0	2
1	3
2	6
3	4
4	4
5	6
6	3

$\Rightarrow \forall x \ x^2+2 \neq 0$

$\Rightarrow x^2+2$ неприводим над F_7

$\Rightarrow \forall a, b \quad \overline{a} \cdot \overline{b} \neq \overline{0}$

$\Rightarrow K$ – поле.

б). $\dfrac{\overline{x^3+4}}{\overline{5x^2+4x+1}} =$

① $x^3+4 \,|\, x^2+2$

$-\,x^3+2x$ $\quad x$

$5x+4$

$\Rightarrow \overline{x^3+4} = \overline{5x+4}$

② $5x^2+4x+1 \,|\, x^2+2$

$-\,5x^2+3$ $\quad 5 \ (q_1)$

$4x+5 \ (r_1)$

$x^2+2 \,|\, 4x+5$

$-\,x^2+3x$ $\quad 2x+1 \ (q_2)$

$-\,4x+2$

$4x+5$

$4 \ (r_2)$

$\Rightarrow 4 = -(5x^2+4x+1)(2x+1) + (x^2+2)\cdot(1+5(2x+1))$

$$\Rightarrow \overline{4} = -(\overline{5x^2+4x+1})(\overline{2x+1})$$

$$(\overline{5x^2+4x+1})^{-1} \cdot \overline{4} = -(\overline{2x+1})$$

$$(\overline{5x^2+4x+1})^{-1} = -(\overline{2x+1}) \cdot (\overline{4})^{-1} = -(\overline{2x+1}) \cdot \overline{2} =$$

$$= \overline{5} \cdot (\overline{2x+1}) =$$

$$= \overline{3x+5}$$

$$= \overline{x^3+4} \cdot (\overline{5x^2+4x+1})^{-1} = (\overline{5x+4})(\overline{3x+5}) =$$

$$= \overline{x^2+4x+5x+6} = \overline{x^2+2x+6} =$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+2x+6 & x^2+2 \\ \underline{-x^2+2} & \overline{1} \\ \quad 2x+4 & \end{array}$$

$$= \boxed{\overline{2x+4}}$$

№2.

$$K = F_5[x] / \langle x^2+2x+3 \rangle$$

x	x^2+2x+3
0	3
1	1
2	1
3	3
4	2

$\Rightarrow \forall x \quad x^2+2x+3 \neq 0$

$\Rightarrow x^2+2x+3$ неприводим над F_5

$\Rightarrow K$ – поле

б) $$\underbrace{\frac{3x^3+3x^2+4x+4}{4x+3}}_{(\overline{x+3})(\overline{2x})} + \overbrace{(x^3+3x^2+1)}^{\overline{3}}\overbrace{(3x^3+3x+3)}^{\overline{x+1}} - \underbrace{\frac{4x^3+3x^2+2}{4x^2+2x+4}}_{(\overline{3x+2})(\overline{x+4})} =$$

(1)
$$\begin{array}{r|l} 3x^3+3x^2+4x+4 & x^2+2x+3 \\ \cline{2-2} -\;3x^3+x^2+4x & 3x+2 \\ \hline 2x^2\quad\;\; +4 & \\ -\;2x^2+4x+1 & \\ \hline x+3 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \overline{3x^3+3x^2+4x+4} = \overline{x+3}$$

(2)
$$\begin{array}{r|l} 4x+3 \;(r_1) & x^2+2x+3 \\ \cline{2-2} & 0 \;(q_1) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2+2x+3 & 4x+3 \\ \cline{2-2} -\;x^2+2x & 4x \;(q_2) \\ \hline 3 \;(r_2) & \end{array}$$

$$\Rightarrow 3 = -(4x+3)\cdot 4x + (x^2+2x+3)(1+0\cdot 4x)$$

$$\Rightarrow \overline{3} = -(\overline{4x+3})\cdot\overline{4x}$$

$$\overline{1} = -(\overline{4x+3})\cdot\overline{4x}\cdot(\overline{3})^{-1}$$

$$(\overline{4x+3})^{-1} = -\overline{4x}\cdot(\overline{3})^{-1} = -\overline{4x}\cdot\overline{2} = -\overline{3x} = \overline{2x}$$

(3)
$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2+1 & x^2+2x+3 \\ \cline{2-2} -\;x^3+2x^2+3x & x+1 \\ \hline x^2+2x+1 & \\ -\;x^2+2x+3 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{r|l} 3x^3+3x+3 & x^2+2x+3 \\ \cline{2-2} -\;3x^3+x^2+4x & 3x+4 \\ \hline 4x^2+4x+3 & \\ -\;4x^2+3x+2 & \\ \hline x+1 & \end{array}$$

(5)
$$
\begin{array}{r|l}
4x^3+3x^2+2 & x^2+2x+3 \\ \cline{2-2}
-\;4x^3+3x^2+2x & 4x \\ \cline{1-1}
3x+2 &
\end{array}
$$

(6)
$$
\begin{array}{r|l}
4x^2+2x+4 & x^2+2x+3 \\ \cline{2-2}
-\;4x^2+3x+2 & 4 \\ \cline{1-1}
4x+2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
x^2+2x+3 & 4x+2 \\ \cline{2-2}
-\;x^2+3x & 4x+1 \\ \cline{1-1}
4x+3 & \\
-\;4x+2 & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow 1 = -(4x^2+2x+4)\cdot(4x+1) + (x^2+2x+3)(1+4(4x+1))$$

$$\overline{1} = -\overline{(4x^2+2x+4)}\ \overline{(4x+1)}$$

$$\overline{(4x^2+2x+4)}^{-1} = \overline{x+4}$$

(=) $$\overline{\overline{(x+3)}\,\overline{(2x)} + \overline{3}\,(\overline{x+1}) - (\overline{3x+2})(\overline{x+4})} =$$

$$= 2x^2+x+3x+3-(3x^2+2x+2x+3) =$$

$$= 2x^2+4x+3+2x^2+x+2 \; (5) =$$

$$= 4x^2 \; (=)$$

(7)
$$
\begin{array}{r|l}
4x^2 & x^2+2x+3 \\ \cline{2-2}
-\;4x^2+3x+2 & 4 \\ \cline{1-1}
2x+3 &
\end{array}
$$

(=) $\overline{2x+3}$

№3.

а) $K = \mathbb{F}_2[x] / \langle x^3+x^2+1 \rangle$

x	x^3+x^2+1
0	1
1	1

$\Rightarrow \forall x \; x^3+x^2+1 \neq 0$

$\Rightarrow x^3+x^2+1$ неприводим над $\mathbb{F}_2$

$\Rightarrow K$ – поле.

б) $$\frac{x^2+1}{x^2+x+1} + (x^2)(x^2+x+1) - \frac{x^3+x}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2+x+1}{x^2+x+1} - \frac{x}{x^2+x+1} + (x^2)(x^2+x+1) - \frac{x^3}{x^2} - \frac{x}{x^2} =$$

$$= 1 - \frac{x}{x^2+x+1} + x^2(x^2+x+1) - x - \frac{x}{x^2} \;=$$

$$x^2+x+1 \;\big|\; \frac{x^3+x^2+1}{0} \quad r_1 \; q_1$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2+1 & x^2+x+1 \\ \underline{-\,x^3+x^2+x} & x \quad q_2 \\ x+1 \quad r_2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+x+1 & x+1 \quad r_2 \\ \underline{-\,x^2+x} & x \quad q_3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g = q_2 f + r_2 \Rightarrow r_2 = g - q_2 f \\ f = q_3 r_2 + 1 \Rightarrow f = q_3(g - q_2 f) + 1 \end{cases}$$

$$f = q_3 g - q_3 q_2 f + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = f + f q_2 q_3 - g q_3$$

$$1 = f(1 + q_2 q_3) \Rightarrow f^{-1} = 1 + q_2 q_3$$

$\Rightarrow (x^2+x+1)^{-1} = 1 + x \cdot x = 1 + x^2$

(2) $\begin{array}{c|c} x^2 & x^3+x^2+1 \\ \hline r_i & 0 \quad q_i \end{array}$ $\quad \begin{array}{l|l} x^3+x^2+1 & x^2 \\ \hline -(x^3+x^2) & x+1 \\ \hline \quad\quad 1 & \end{array}$

$\Rightarrow 1 = -(x^2)(x+1) + (x^3+x^2+1)(1+0\cdot(x+1))$

$\overline{1} = -\overline{(x^2)(x+1)}$

$\overline{(x^2)}^{-1} = \overline{x+1}$

$\ominus\ 1 + x(1+x^2) + x^2(x^2+x+1) + x + x(x+1) =$

$= 1 + x + \cancel{x^3} + x^4 \cancel{+x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{x} + \cancel{x^2} \cancel{+x} = x^4+x+1 \ominus$

$\begin{array}{l|l} x^4+x+1 & x^3+x^2+1 \\ \hline -(x^4+x^3+x) & x+1 \\ \hline \quad x^3+1 & \\ -(x^3+x^2+1) & \\ \hline \quad\quad x^2 & \end{array}$

$\ominus\ \overline{x^2}$

№4.

а) $\mathbb{F}_3[x] / \langle x^3+x^2+2 \rangle = K$

x	x^3+x^2+2
0	2
1	1
2	2

$\Rightarrow \forall x \; x^3+x^2+2 \neq 0$

$\Rightarrow x^3+x^2+2$ неприводим над $\mathbb{F}_3$

$\Rightarrow K$ — поле.

б) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{2x^2+2} + (x+1)(x) - \dfrac{2x+1}{2x} = $

(1) $2x^2+2 \;\big|\; \dfrac{x^3+x^2+2}{0 \; (q_1)}$ (r_1)

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2+2 & 2x^2+2 \\ \underline{-\,x^3 \quad\; +x} & 2x+2 \\ \quad x^2+2x+2 & \\ \underline{-\,x^2 \quad\;\; +1} & \\ \qquad 2x+1 & \end{array}$$

~~$\Rightarrow (2x+1) = \ldots (2x+2)$~~

$\Rightarrow 2x+1 = -(2x^2+2)\cdot(2x+2) + (x^3+x^2+2)(1+0\cdot(2x+2))$

$\overline{2x+1} = -\overline{(2x^2+2)}\cdot\overline{(2x+2)}$

$\Rightarrow \left(\overline{2x^2+2}\right)^{-1} = \overline{\left(\dfrac{-2x-2}{2x+1}\right)} = \overline{\left(\dfrac{x+1}{2x+1}\right)}$

② $\cancel{x^3+x^2+x+1 \mid 2x+1}$

$\cancel{x^3+2x^2 \qquad 2x^2+x}$

$\cancel{2x^2+x+1}$

$\cancel{-\;2x^2+1}$

② $x^3+x^2+2 \mid 2x$

$-\;x^3+x^2 \qquad 2x^2+2x$ (q)

$0+2$ (r)

$\Rightarrow (x^3+x^2+2) = (2x^2+2x)\cdot 2x + 2$

$\bar{0} = (\overline{2x^2+2x})\cdot\overline{2x}+\bar{2} \mid +1$

$\bar{1} = (\overline{2x^2+2x})\cdot\overline{2x}$

$(\overline{2x})^{-1} = \overline{2x^2+2x}$

ⓒ $\dfrac{(x^3+x^2+x+1)(x+1)}{2x+1} + x^2+x-(2x+1)(2x^2+2x) \equiv$

(3)

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+x^2+2 & 2x+1 \\
\hline
-(x^3+2x^2) & 2x^2+x+1 \\
\quad 2x^2+2 & \\
\quad -(2x^2+x) & \\
\qquad 2x+2 & \\
\qquad -(2x+1) & \\
\qquad\quad 1 &
\end{array}
$$

$\Rightarrow \overline{(x^3+x^2+2)} = (2x^2+x+1)(2x+1)+1$

$\overline{0} = \overline{(2x^2+x+1)}\,\overline{(2x+1)}+\overline{1} \quad | +2$

$\overline{2} = \overline{(2x^2+x+1)}\,\overline{(2x+1)} \quad | \cdot 2$

$\overline{1} = \overline{(x^2+2x+2)}\cdot\overline{(2x+1)}$

$\overline{(2x+1)}^{-1} = \overline{(x^2+2x+2)}$

$\cancel{x^3+x^2+2}$

(1)

$= \big((x^3+x^2+2)+x+2\big)(x+1)(x^2+x+2)+x^2+x - \cancel{(x^3+2x^2+x)}$

$-(x^3+2x) =$

$= \overline{(x+2)}\,\overline{(x+1)}\,\overline{(x^2+x+2)} + x^2+x+2x^3+x =$

$= x^4+\cancel{x^3}+x^2+2x+1+x^2+2x+\cancel{2x^3} =$

$= x^4+2x^2+x+1$ (=)

$$\begin{array}{r|l} x^4+2x^2+x+1 & x^3+x^2+2 \\ \underline{-\,x^4+x^3+2x} & x+2 \\ 2x^3+2x^2+2x+1 & \\ \underline{-\,2x^3+2x^2+1} & \\ 2x & \end{array}$$

$\textcircled{=}\ \overline{2x}$

№1277

$e_1=(1,1,1);\ e_2=(1,1,2);\ e_3=(1,2,3);\ x=(6,9,14)$

$$\det(e_1\,e_2\,e_3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&-1&-1\\1&2&3\end{vmatrix}=1\neq0 \Rightarrow \{e_1,e_2,e_3\} - \text{базис}$$

Пусть $\overline{x}=a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}+a_3\overline{e_3}$

Тогда $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=6\\a_1+a_2+2a_3=9\\a_1+2a_2+3a_3=14\end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\1&1&2&9\\1&2&3&14\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&-1&-3\\0&-1&-1&-5\\1&2&3&14\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ: (1, 2, 3)

№1279

$e_1 = (1, 2, -1, -2)$; $e_2 = (2, 3, 0, -1)$

$e_3 = (1, 2, 1, 4)$; $e_4 = (1, 3, -1, 0)$; $x = (7, 14, -1, 2)$

$$\det(e_1, e_2, e_3, e_4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ -6 & -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -8 & 0 & -1 & -6 \\ -6 & -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -8 & -1 & -6 \\ -6 & 0 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & -6 \\ -6 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 8 - (3 \cdot 6 \cdot 6 - \cancel{6}) - 4 \cdot 8 \cdot 3) = 8 - 6 = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ базис.

Пусть $\overline{x} = a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2} + a_3 \overline{e_3} + a_4 \overline{e_4} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 7 = a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 \\ 14 = 2a_1 + 3a_2 + 2a_3 + 3a_4 \\ -1 = -a_1 + a_3 - a_4 \\ 2 = -2a_1 - a_2 + 4a_3 \end{cases}$$

$$в)\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 14 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 16 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \end{array} \to$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 16 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \\ -3 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$г)\ \begin{cases} a_2 = 2 \\ a_3 = 1 \\ a_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 0$$

Ответ: $(0, 2, 1, 2)$

№1295.

Пусть $\dim L_1 = a$, $\dim L_2 = b$

Пусть $a > b$. Тогда

$\exists v_1, v_2, \ldots, v_a \in L_1 : v_1, v_2, \ldots, v_n$ — л.н.з. векторы

Т.к. $L_1 \subseteq L_2$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in L_2 \Rightarrow$ в L_2 есть

a л.н.з. векторов $\Rightarrow \dim L_2 \geq a$,

но $\dim L_2 = b$, то есть $\begin{cases} a > b \\ \dim L_2 \geq a \\ \dim L_n = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ b \geq a \end{cases}$

противоречие

$\Downarrow$

$\boxed{a \leq b}$

Пусть $L_1 \neq L_2$. Тогда $\exists x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \begin{cases} x \in L_2 \\ x \notin L_1 \end{cases}$

~~$\exists y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) : \begin{cases} y \in L_2 \\ y \in L_1 \end{cases}$~~

~~Тогда~~ Т.к. $\dim L_1 = \dim L_2$,

$\exists B$ - базис L_1 и L_2, причём

$x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_k b_k$. Если $x \in L_1$, то

$\forall u, v : u + v = x \Rightarrow \begin{cases} u \in L_1 \\ v \in L_1 \end{cases}$ и

$\forall u, v : u \in L_1$ и $v \in L_1 \Rightarrow u + v \in L_1$.

Т.к. $b_1, b_2, \dots, b_n \in L_1$, то $\lambda_1 b_1, \lambda_2 b_2, \dots, \lambda_n b_n \in L_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n \in L_1 \Rightarrow x \in L_1$ — противоречие

$\Rightarrow L_1 = L_2$.

Если $L_1 \neq L_2$, то, утверждение неверно:

рассмотрим $L_1, L_2 \subseteq \mathbb{R}^3$, L_1 — плоскость Oxz,

L_2 — плоскость Oyz.

Очевидно, $L_1 \neq L_2$, но $\dim L_1 = \dim L_2$.

№1296

Пусть $\dim A = a$, $\dim B = b$; $A \subseteq C$, $B \subseteq C$, $\dim C = n$

$a + b > n$

Рассмотрим $A \cap B$:

$$\dim(A \cap B) = \underbrace{\underbrace{\dim A + \dim B}_{a+b>n} - \underbrace{\dim(A+B)}_{=d \leq n}}_{>0}$$

$\Rightarrow \dim(A \cap B) > 0$ ①

Если A и B не имеют общих ненулевых векторов, то $\dim(A \cap B) = 0$ ②

①
② $\Big\} \Rightarrow$ A и B имеют общий ненулевой вектор.

№1299

$(x_1, x_2, x_3, x_2, x_5, \dots, x_n) \in L$

1) Очевидно, что $\forall X = (x_1, x_2, x_3, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, y_3, y_2, \dots, y_n)$
$X + Y = Y + X$.

2) $\forall X, Y, Z \in L \quad (X+Y)+Z = X+(Y+Z)$

3) $0 = (0, 0, 0, \dots, 0) \in L$

4) $\forall X \; \exists -X = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_2, \dots, -x_n) \in L$
$\Rightarrow (L, +)$ – абелева группа.

5) $\forall X \quad 1 \cdot X = X$ – верно

6) $\forall \mu, \lambda, X \quad (\mu\lambda)X = \mu(\lambda X)$ – верно

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
8) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ – очевидно

$\Rightarrow L$ — линейное пространство.

Базис: $\begin{cases} (1,0,0,\dots,0) \\ (0,0,1,0,\dots,0) \\ \vdots \\ (0,1,0,1,\dots,0?) \end{cases}$ ← ~~все единичные векторы~~

— все векторы вида $(0,0,\dots,0,x_i,0,0,\dots,0)$,

где i — нечётное число; $x_i = 1$

и вектор $y = (0,1,0,1,\dots)$: $\forall i$ $\begin{cases} y_i = 0, \text{ если } i \text{ нечётно} \\ y_i = 1, \text{ если } i \text{ чётно} \end{cases}$

$\Rightarrow \dim L = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1$

↑ кол-во нечётных чисел (индексов) $i = \overline{1,n}$.

№1304.

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \ \forall i,j: a_{ij} = -a_{ji} \right\}$$

1) $\forall X, Y \in L: X + Y = Y + X$ — по свойству сложения матриц.

2) $\forall X, Y, Z \in L: (X+Y)+Z = X+(Y+Z)$

3) $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in L$

4) $\forall X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

$\exists Y = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix} \in L$

$\Rightarrow (L; +)$ — абелева группа.

5) $1 \cdot X = X \quad \forall x \in L$

6) $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in L \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu) X$ — по свойствам умножения матриц и вещественных чисел

7) По свойствам операций над матрицами,

$(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

$\Rightarrow L$ — линейное пространство.

Базис: $\{ E_{ij} - E_{ji} + E_{ii} \mid \forall i, j = \overline{1, n} \}$.

$\Rightarrow \dim L = \frac{n(n-1)}{2}$