

н/с.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -9/2 \\ 1 & 0 & -2 & -7/2 \\ 1 & -3 & 3 & -7/2 \\ 1 & 0 & 4 & -9/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1) \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 & -9/2 \\ 1 & 0 & -2 & -7/2 \\ 1 & -3 & 3 & -7/2 \\ 1 & 0 & 4 & -9/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -7/2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1 \neq 0 \Rightarrow \exists Q, R: A = QR$$

↑      ↖  
ортогональная      верхнетреугольная

$$2) a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; a_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; a_4 = \begin{pmatrix} -9/2 \\ -7/2 \\ -7/2 \\ -9/2 \end{pmatrix}$$

→ строки A.

Применим к  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  процесс ортогонализации Грама-Шмидта!

$$\text{Пусть } b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(b_1, a_2)}{(b_1, b_1)} b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-6}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_2$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b_3$$

$$b_4 = a_4 - \frac{(b_3, a_4)}{(b_3, b_3)} b_3 - \frac{(b_3, a_2)}{(b_3, b_2)} b_2 - \frac{(b_1, a_4)}{(b_1, b_1)} b_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} -9/2 \\ -7/2 \\ -7/2 \\ -9/2 \end{pmatrix} - \frac{0}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-16}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -9/2 \\ -7/2 \\ -7/2 \\ -9/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_4$$



$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = (a_2 + \frac{3}{2} b_1) \cdot \frac{2}{3} \\ b_3 = (a_3 - \frac{1}{2} b_2 - \frac{1}{2} b_1) \cdot \frac{1}{3} \\ b_4 = (a_4 + 4 b_1) \cdot 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = \frac{3}{2} b_2 - \frac{3}{2} b_1 \\ a_3 = 3 b_3 + \frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{2} b_1 \\ a_4 = \frac{1}{2} b_4 - 4 b_1 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

Нормируем  $\{b_1, \dots, b_4\}$ :

$$q_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1, \quad q_2 = \frac{1}{\|b_2\|} b_2, \quad q_3 = \frac{1}{\|b_3\|} b_3, \quad q_4 = \frac{1}{\|b_4\|} b_4$$

$$\Rightarrow b_i = 2 q_i, \quad q_i - \text{ОКБ} \Rightarrow Q = (q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4) -$$

ортонормированная матрица.

$$\begin{pmatrix} \Rightarrow \end{pmatrix} \begin{cases} a_1 = 2 q_1 \\ a_2 = 3 q_2 - 3 q_1 \\ a_3 = q_3 + q_2 + q_1 \\ a_4 = q_4 - 8 q_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \underset{\substack{Q \\ \uparrow \\ Q}}{(q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4)} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R





$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\textcircled{*}}{=} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \Rightarrow \text{с. в.} \\ x_3 = x_3 \end{cases} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\downarrow$   
 $\lambda_3$  - действительное  
 с. в.

$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  - нормирован-  
 ный  
 с. в. - ось  
 поворота  
 по А.

$e_3$  - ось поворота  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  плоскость поворота  
 $L = \langle e_3 \rangle^\perp$  Найдём  
 ОНБ  $L$  -  $\{e_1, e_2\}$ .

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ из решения } \textcircled{*}$$

$$\Rightarrow \{e_1, e_2\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$  - канонический базис.

$Ae_1 = \cos \alpha \cdot e_1 + \sin \alpha \cdot e_2$ , так как  
 А - поворот в  
 плоскости  $\langle e_1, e_2 \rangle$   
 на угол  $\alpha$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} (Ae_1, e_1) = \cos \alpha (e_1, \overset{1}{e_1}) + \sin \alpha (e_2, \overset{0}{e_1}) \\ (Ae_1, e_2) = \cos \alpha (e_1, \overset{0}{e_2}) + \sin \alpha (e_2, \overset{1}{e_2}) \end{cases}$$

~~Итак~~ Имеем, что  $\{e_1, e_2\}$  - ОНБ,

$$\begin{cases} \cos \alpha = (Ae_1, e_1) \\ \sin \alpha = (Ae_1, e_2) \end{cases}$$

$$\bullet Ae_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (Ae_1, e_1) = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0$$

~~$$\bullet Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$~~

~~$$\Rightarrow (Ae_2, e_2) =$$~~

$$\Rightarrow (Ae_1, e_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \Rightarrow \sin \alpha = -1,$$

$$\Rightarrow K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{канонический вид } A.$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} - \text{угол поворота}$$

$$\text{Ответ: } K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \alpha = \frac{3\pi}{2};$$

Ось поворота: прямая с направляющим вектором  $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ .



$$A = \begin{pmatrix} 14 & -14 & -10 & 10 \\ -10 & 10 & 14 & -14 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим  $B = A^T$  и найдём сингулярные разложение  $B_{4 \times 2} = V_{4 \times 4} \cdot \Sigma_{4 \times 2} \cdot U_{2 \times 2}^T$ .

$$\text{Тогда } B^T = (V \Sigma U^T)^T = U \Sigma^T V^T = U \Sigma V^T$$

$$\Rightarrow A = B^T = U_{2 \times 2} \cdot \Sigma_{2 \times 4} \cdot V_{4 \times 4}^T$$

$$B = \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ -14 & 10 \\ -10 & 14 \\ 10 & -14 \end{pmatrix}$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} 14 & -14 & -10 & 10 \\ -10 & 10 & 14 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ -14 & 10 \\ -10 & 14 \\ 10 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 592 & -560 \\ -560 & 592 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{B^T B}(\lambda) = \begin{vmatrix} 592 - \lambda & -560 \\ -560 & 592 - \lambda \end{vmatrix} = (592 - \lambda)^2 - 560^2 =$$

$$= (592 - \lambda - 560)(592 - \lambda + 560) =$$

$$= (32 - \lambda)(1152 - \lambda)$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 32 \\ \lambda_2 = 1152 \end{cases}$$

$$- \text{с.з. } B^T B \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{1152} = 24\sqrt{2} \end{cases}$$

- сингулярные числа  $B$ .

$$1) \lambda_1 = 32$$

$$B^T B - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 560 & -560 \\ -560 & 560 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{c.b.:} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \lambda_2 = 1152$$

$$B^T B - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -560 & -560 \\ -560 & -560 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{c.b.:} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

~~$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 24\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$~~

~~в матрице \$S\$ значения \$\sigma\_1\$ и \$\sigma\_2\$~~

~~в матрице \$U\$ значения \$u\_1\$ и \$u\_2\$~~

Итак, так как  $\sigma_2 > \sigma_1$ ,

$$S = \begin{pmatrix} 24\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$



~~Реш~~ Так как  $\{u_1, u_2\}$  - орб,  $U$  - ортонорми-  
рующая матрица.

Найдём  $V$ :  $V_i = \frac{Bu_i}{\sigma_i}$

$$V_1 = \frac{Bu_1}{\sigma_1} = \frac{p}{24\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ -14 & 10 \\ -10 & 14 \\ 10 & -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{p}{24 \cdot 2} \begin{pmatrix} -24 \\ 24 \\ 24 \\ -24 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \frac{Bu_2}{\sigma_2} = \frac{p}{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ -14 & 10 \\ -10 & 14 \\ 10 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{p}{8} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\{V_3, V_4\}$  - ортонормированное дополнение  
 $\{V_1, V_2\}$  до орб  $R^4$ . (Найдём ФСР  
СИСТ  $(V_1, V_2)^T X = 0$ )

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_1, V_2 \sim \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \text{||} & \text{||} & \text{||} & \text{||} \\ \text{||} & \text{||} & \text{||} & \text{||} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T$$

Ответ:  $\rightarrow$

Проверка:

$$U \leq V^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{2} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \text{||} & \text{||} & \text{||} & \text{||} \\ \text{||} & \text{||} & \text{||} & \text{||} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & 2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & -14 & -10 & 10 \\ -10 & 10 & 14 & -14 \end{pmatrix} = A\text{-оператор.}$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{||} & \text{||} & \text{||} & \text{||} \\ \text{||} & \text{||} & \text{||} & \text{||} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^T =$$



$$= \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -12 & -12 & 12 \\ -12 & 12 & 12 & -12 \end{pmatrix}$$

Order: ↗