ДЗ 7.

№1.

а) Степенная последовательность заданного графа, если в нём 8 вершин, одна из которых (F) имеет степень 1 выглядит так: $(1, x, \underbrace{y, y, \dots, y}_{6 \text{ штук}})$,

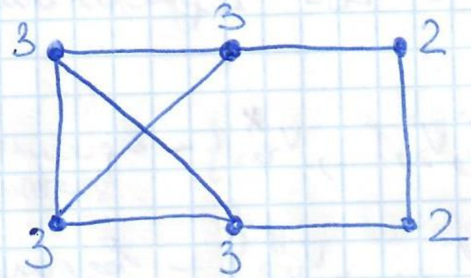
где $x \leq 7$; $y \leq 6$. Здесь x — степень вершины, которая соединена с F (она может быть соединена со всеми), y — степени остальных вершин, которые могут быть соединены со всеми, кроме той, у которой степень 1.

Тогда сумма степенной последовательности $\sum_{v \in V} d_G(v) \leq 1 + 7 + 6 \cdot 6 = 44 = 2m$, где m — число рёбер $\Rightarrow m \leq 22$

$\Rightarrow$ 23 ребра в графе быть не может.

Ответ: нет.

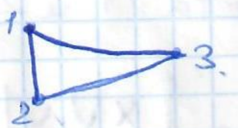
б)



Ответ: да.

№3.

K_3:



Пусть 1,2 – некоторые вершины G, соединённые ребром.
Докажем, что в G существует вершина x, соединённая с 1 и 2. Если это так, то мы нашли подграф изоморфный K_3.
Так как 1 и 2 имеют степень 201, существует 200 вершин, помимо 2, с которыми соединена 1. Аналогично,

2 соединена с 200 вершинами, помимо 1.

Пусть $X = \{v_1^x, v_2^x, \ldots, v_{200}^x\}$ – вершины, с которыми соединена 1, помимо 2.

$Y = \{v_1^y, v_2^y, \ldots, v_{200}^y\}$ – вершины, с которыми соединена 2, помимо 1.

Заметим, что в графе 400 вершин, то есть 398 без учёта 1 и 2.

Так как $1, 2 \notin X, Y$, $|X \cup Y| \leq 398$

По формуле включений-исключений,

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| \leq 398$$

$$200 + 200 - |X \cap Y| \leq 398$$

$$2 \leq |X \cap Y| \Rightarrow$$

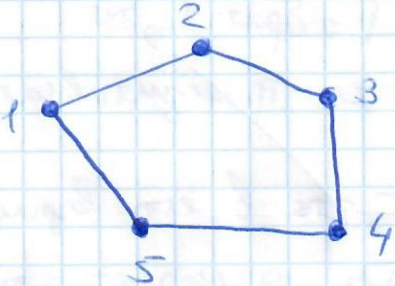
$\Rightarrow \exists V : V \in X \wedge V \in Y$, то есть

существует вершина x, соединённая и с 1, и с 2. => мы нашли подграф изоморфный K_3.

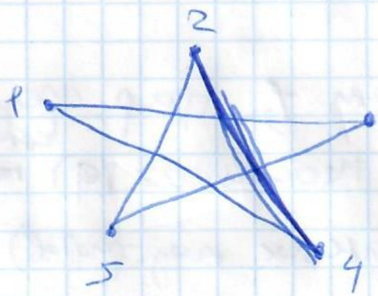
ч.т.д.

№4.

G :

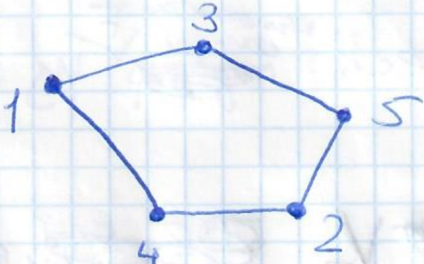


$\overline{G}$:



$\sim$

$\sim$



Изоморфизм φ:

$$\varphi(1)=1$$
$$\varphi(2)=3$$
$$\varphi(3)=5$$
$$\varphi(4)=\cancel{6}\,2$$
$$\varphi(5)=4$$

№6.

1) Если А — брат Б, а Б — брат С, то А — брат С (соблюдается транзитивность)

2) Составим граф G так, что в его вершинах — люди, наличие ребра означает, что два человека — братья.

Тогда, с учётом 1, граф представляет из себя набор из нескольких (q) ~~подграфов~~ компонент связности, изоморфных K_n (полных подграфов).

- Пусть в G есть ~~подграф~~ компонента связности F из менее, чем 4-х вершин.

Тогда $\forall f \in V_F$

$\exists f_1, f_2, f_3 \in V_F : |\{f, f_1, f_2, f_3\}| = 4$,
$ff_1 \in E_F$, $ff_2 \in E_F$, $ff_3 \in E_F$ (у f есть 3 брата).

Тогда в F хотя бы 4 вершины — противоречие.

⇒ В любой компоненте связности G хотя бы 4 вершины.

⇒ Если в G хотя бы 2 компоненты связности, то в G хотя бы 8 вершин.

⇒ В G одна компонента связности, изоморфная K_7 по (*).

⇒ $\forall a, b \in V_G \quad ab \in E_G$.

ч.т.д.

~~№7.~~

~~Разделим множество вершин V след. образом: $V_1 = \{1\}$, $V_2 = V \setminus \{1\}$ (отделим вершину 1) По условию, V_1 и V_2 соединены дорогой ⇒ 1 соединена с некоторой вершиной 2.~~

№7

~~Если~~ Из любого города можно добраться до любого другого, тогда и только тогда, когда соответствующий граф G (города —

вершины, дороги — рёбра) имеет ровно одну компоненту связности. (следует из определения компонент связности).

Пусть в G хотя бы две компоненты связности. Рассмотрим разбиение G на V_1 и V_2 такое, что V_1 содержит все вершины ровно одной компоненты связности, а V_2 — остальные. Тогда $\forall\, a \in V_1$ и $b \in V_2$ $ab \in G$, то есть в разных группах нет городов, соединённых дорогой — противоречие условию $\Rightarrow$ в G менее 2-х компонент связности, то есть одна. $\Rightarrow$ из любого города можно добраться до любого другого.

№8.

~~Если $B_{n,k}$ связен, то из вершины~~

Если $B_{1000,400}$ связен, то из вершины $\underbrace{00\ldots00}_{1000\ \text{«0»}}$ есть путь в любую другую вершину.

Назовём характеристикой вершины $X(V)$ ~~[illegible]~~ пару (a, b): $a+b=1000$, в которой a — кол-во нулей в записи вершины, b — кол-во единиц.

~~Заметим, что в~~

$$X(00\ldots00) = (1000, 0)$$

Тогда $\forall y: vy \in E$, где $v = 00\ldots00$

$X(y) = (2k, 1000-2k)$, то есть в любой вершине, которая связна с v, чётность характеристики совпадает с v.

Но $1\underbrace{00\ldots00}_{999} \in B_{1000, 400}$ и

$X(100\ldots00) = (999, 1)$, то есть

$100\ldots00$ не связна с $00\ldots00$.

$\Rightarrow$ граф не связен

Ответ: нет.

⑧. Пусть $X(v) = (a, b)$; в результате „перехода" по ребру k нулей были заменены на 1, $400-k$ единиц — на 0.

Тогда $X(v') = (a - k + (400-k); b + k - (400-k)) =$
$= (a + 400 - 2k; b - 400 + 2k)$.

Заметим, что $400 - 2k = 2(200-k) \underset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + 400 - 2k \underset{2}{\equiv} a$.

Так как $\forall a, k$ это верно, нет рёбер из V: $X(v)$ чётно в v': $X(v')$ нечётно, то есть чётность всех вершин в пределах одной компоненты связности совпадает.

№9.

По доказанному на лекциях, дерево является двудольным графом.
Пусть V_1, V_2 — доли.
Если $|V_1|, |V_2| < n$, то $|V| < 2n$ — противоречие.

$\Rightarrow \exists V_i : |V_i| \geq n$.

Пусть V_1 — доля, в которой хотя бы n вершин. Выберем в ней любые n вершин. По определению двудольности, эти n вершин попарно несмежны.

№10

Разделим B_n на доли следующим образом: $00\ldots00$ — доля V_1

$\forall i$ $00\ldots00\underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-й разряд}}}{1}00\ldots00$ — доля V_2

$00\ldots00100\ldots00100\ldots00$ — доля V_1

$\vdots$

Пусть $\varphi(x)$ — количество единиц в записи вершины.

Тогда $x \in V_1 \Leftrightarrow \varphi(x) \,\vdots\, 2$

$x \in V_2 \Leftrightarrow \varphi(x) \equiv_2 1$

Очевидно, что никакие две вершины в одной доле не соединены ребром:

Если $\varphi(x) \underset{2}{\equiv} 0$, $\varphi(y) \underset{2}{\equiv} 0$

~~1) $\varphi(x) \neq \varphi(y) \Rightarrow$ в x ... $x0$~~

1) $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, б.о.о. $\varphi(x) > \varphi(y)$.

$\Rightarrow$ в x хотя бы на две единицы больше, чем в $y \Rightarrow x$ и y отличаются хотя бы в двух разрядах $\Rightarrow x$ и y не соединены.

2) $\varphi(x) = \varphi(y)$

1. $x = y \Rightarrow$ нет ребра между x и y по определению графа.

2. $x \neq y \Rightarrow \exists\, i, j$: $\begin{cases} x_i = 0 \wedge y_i = 1 \\ x_j = 1 \wedge y_j = 0, \end{cases}$

Так как в x и y одинаковое число единиц и они не равны.

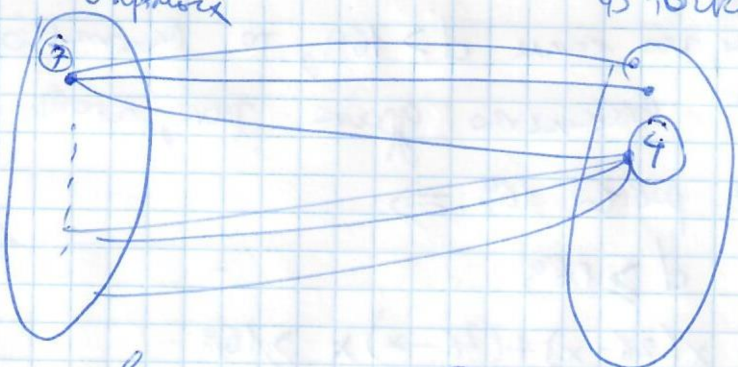
$\Rightarrow x$ и y отличаются хотя бы в двух разрядах $\Rightarrow x$ и y не соединены ребром $\not\exists$

Ответ: да

№11.

Рассмотрим граф, вершины которого — точки и прямые, причём вершины а и в соединены тогда и только тогда, когда а — точка, в — прямая и а лежит на в.

Очевидно, что граф двудольный: прямые не соединены между собой и точки не соединены между собой.



По условию, у каждой прямой степень 7 (на каждой прямой ровно 7 точек), а у каждой точки — 4 (каждая точка лежит ровно на 4-х прямых)

Тогда в графе $26 \cdot 7$ и $43 \cdot 4$ рёбер.

Заметим, что $26 \cdot 7 \neq 43 \cdot 4 \Rightarrow$ такой граф не существует.

Ответ: нет.

№12.

Пусть в классе А x учеников. Тогда в Б – $26-x$ учеников.

Очевидно, что наибольшее количество драк для фиксированных классов достигается, когда каждый из А подрался с каждым из Б, то есть $d = x(26-x) + (26-x)\cdot x$ драк.

Заметим, что если $d > 169$, то можно „убрать" несколько драк так, чтобы их осталось ровно 169. $\Rightarrow$

x: $d \geq 169$

$$x(26-x)+(26-x)x \geq 169$$

$$2x(26-x) \geq 169$$

$$2x^2 - 52x + 169 \leq 0$$

$$D = 52^2 + 4\cdot 2\cdot 169 = 4056$$

$$x = \frac{52 \pm \sqrt{4096}}{4} = \frac{26 \pm 13\sqrt{2}}{2}$$

$$2\left(x - \frac{26+13\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{26-13\sqrt{2}}{2}\right) < 0$$

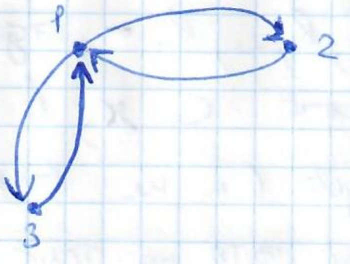
$$\Rightarrow x \in \left[\frac{28-13\sqrt{2}}{2}, \frac{26+13\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$x \in [\approx 3{,}8 ; \approx 22{,}2]$$

$\Rightarrow$ в классе A может быть от 4 до 22 человек. Если в классе A x человек, то в Б — $26-x$.

№13

Рассмотрим следующий орграф:



Видно, что из каждой вершины в каждую другую ведёт ровно один простой путь: 12, 13, 312, 213, 31, 21.
Так как любой путь содержит вершину 1,

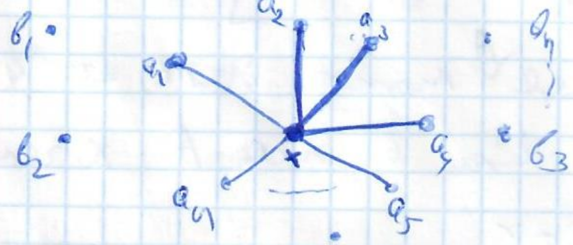
по построению, других простых путей нет.

Заметим, что полустепень исхода вершины $1 = 2 \neq 1$

Ответ: нет.

№2.

Все такие графы выглядят так:



В таких графах x – вершина, общая для всех рёбер; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – вершины, связные с x; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – „отдельные" вершины, не связные с x, в которые не приходит (и не выходит) ни одно ребро (если это не так, то ребро идёт в x, то есть это вершина a_i).

№5.

Если в G ровно одна вершина степени 50, то в G 99 вершин со степенями, отличными от 50.

Заметим, что степенные последовательности G и $\bar{G}$ должны совпадать с точностью до перестановки элементов, если $G \cong \bar{G}$, причём

$$d_G = (a_1, a_2, \dots, a_{99}, 50)$$

$$d_{\bar{G}} = (100-a_1, 100-a_2, \dots, 100-a_{99}, 50)$$ по определению $\bar{G}$

$\Rightarrow \forall a_i \ \exists j: a_i = 100 - a_j$ (если $d_G = d_{\bar{G}}$)

Заметим, что $\forall i \ \ a_i \neq 100 - a_i$;

$\forall i,j \ \ a_i = 100 - a_j \Rightarrow a_j = 100 - a_i$

$\Rightarrow$ Степенные последовательности должны разбиваться на пары элементов так, что $\forall i,j \ \ a_i + a_j = 100$.

Пусть 98 элементов успешно разбились на пары, ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ причём „50" не среди них.

Очевидно, что „50" должно быть в паре с „50".

Значит среди $(a_{99}, 50)$ есть 50 и $100 - a_{99}$,

то есть $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 50 = 50 \\ a_{99} = 100 - a_{99} \end{cases} \\ \begin{cases} 50 = 100 - a_{99} \\ a_{99} = 50 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow a_{99} = 50 \Rightarrow$ в G не одна вершина степени 50

Ответ: нет

№14

Пусть n — кол.-во участников турнира (ребро между a и b означает, что a „выиграл" b).

Очевидно, что при $n = 1, 2$ утверждение верно.

Пусть утверждение верно при $n = m$

Докажем, что оно верно при ~~[illegible]~~ $n = m+1$

Так как оно верно при $n = m$, есть простой путь ~~$a_1 a_2 \dots$~~ $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$.

1) Пусть a_{n+1} „проиграл" всем, то есть в a_{n+1} входит n рёбер. Тогда есть простой путь $a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1}$.

2) Пусть a_{n+1} „выиграл" всех, то есть из a_n выходит n рёбер.
Тогда есть простой путь $a_{n+1} a_1 a_2 a_3 \dots a_n$.

3) Если a_{n+1} не попадает в ~~[illegible]~~ случаи 1, 2, то

$$\exists i : \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_{n+1} \text{ выиграл } a_i \\ a_{n+1} \text{ проиграл } a_{i+1} \end{cases} \text{ и } 1 \\ \text{или} \\ \begin{cases} a_{n+1} \text{ проиграл } a_i \\ a_{n+1} \text{ выиграл } a_{i+1} \end{cases} \text{ и } 2 \end{array}\right.$$

1 ~~Существует простой путь~~

~~$a_1 a_2 \dots a$~~

2 Есть простой путь $a_1 a_2 \dots a_i a_{n+1} a_{i+1} \dots a_n$.

① Если выполнен также пункт 2, то действует по нему.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{array}$$

Иначе: в в в — — — п п п п п

a_{n+1} проиграл всем „в конце", и выиграл всех „в начале": Пусть i — минимальный номер: a_{n+1} проиграл a_{i+1}.

Если $\exists j > i$: a_{n+1} выиграл a_j, то

$\exists \min j \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} \text{ проиграл } a_{j-1} \\ a_{n+1} \text{ выиграл } a_j \end{array} \right.$ — случай ②

$\Rightarrow \forall j > i$ a_{n+1} проиграл a_j.

Тогда a_n выиграл a_{n+1} $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть простой путь $a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}$.

ч.т.д.