№1

$$A = \begin{pmatrix} 30 & -120 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}$$

а) $\chi(A) = \begin{vmatrix} 30-\lambda & -120 \\ 4 & -14-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (30-\lambda)(-14-\lambda) + 120 \cdot 4 =$

$= -(\lambda+14)(30-\lambda) + 480 =$

$= -(30\lambda - \lambda^2 + 420 - 14\lambda) + 480 =$

$= \lambda^2 - 16\lambda + 60 = (\lambda-6)(\lambda-10) = 0$

$\begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 10 \end{cases}$

$m(\lambda_1) = m(\lambda_2) = 1 \Rightarrow s(\lambda_1) = s(\lambda_2) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ЛО диагонализируем.

1) $B = A - 6E = \begin{pmatrix} 24 & -120 \\ 4 & -20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \ker B = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

2) $B = A - 10E = \begin{pmatrix} 20 & -120 \\ 4 & -84 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow$

С.в.: $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\Rightarrow \boxed{T = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$; $A' = T^{-1}AT = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}}$

8) $A^n = (TA'T^{-1})^n = T(A')^n \cdot T^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 6^n & 6 \cdot 10^n \\ 6^n & 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} =$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 6 \cdot 10^n - 5 \cdot 6^n & 5 \cdot 6^{n+1} - 30 \cdot 10^n \\ -6^n + 10^n & 6^{n+1} - 5 \cdot 10^n \end{pmatrix}}$$

№2.

$$A = \begin{pmatrix} -104 & 96 \\ -108 & 100 \end{pmatrix}$$

a) $$\chi(A) = \begin{vmatrix} -104-\lambda & 96 \\ -108 & 100-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(100-\lambda)(104+\lambda) + 96 \cdot 108 =$$

$$= 96 \cdot 108 - 100 \cdot 104 + 4\lambda + \lambda^2 =$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda - 32 = (\lambda+8)(\lambda-4)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -8 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

$m(\lambda_1) = m(\lambda_2) = 1 \Rightarrow s(\lambda_1) = s(\lambda_2) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{ЛО диагонализируем}}$

1) $$B = A + 8E = \begin{pmatrix} -96 & 96 \\ -108 & 108 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \text{с.в.}: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

г) $B = A - 4E = \begin{pmatrix} -108 & 96 \\ -108 & 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8}{9} x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow$ Ф.С.: $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}}$; $A' = T^{-1} A T = \boxed{\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$

д) $A^n = (TA'T^{-1})^n = T(A')^n T^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}^{-1} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-8)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} (-8)^n & 8 \cdot 4^n \\ (-8)^n & 9 \cdot 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \boxed{\begin{pmatrix} 9 \cdot (-8)^n - 8 \cdot 4^n & (-8)^{n+1} + 8 \cdot 4^n \\ 9 \cdot (-8)^n - 9 \cdot 4^n & (-8)^{n+1} + 9 \cdot 4^n \end{pmatrix}}$

• Докажем, что $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$

$n = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ – верно

Пусть верно для $i = n$. Докажем для $n = i+1$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{i+1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{i} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^i & 0 \\ 0 & b^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^{i+1} & 0 \\ 0 & b^{i+1} \end{pmatrix} \text{ – верно} \Rightarrow$$

$$\cancel{\Rightarrow \forall n} \Rightarrow \forall a, b, n \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

№1361.

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & 4 \\ 0 & -1 & 23 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 & 7 \\ 0 & -1 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ — базис } L$$

Пусть
Тогда

$$\begin{cases} a_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ a_2' = a_2 - \dfrac{(a_2, a_1')}{(a_1', a_1')} a_1' \\ a_3' = a_3 - \dfrac{(a_3, a_2')}{(a_2', a_2')} a_2' - \dfrac{(a_3, a_1')}{(a_1', a_1')} a_1' \end{cases}$$

по формуле Грама-Шмидта

$$\begin{cases} a_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T \\ a_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ a_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3/2 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3/2 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

№1362

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 5 & 8 & -2 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ 0 & 6 & 6 & 14 \end{pmatrix} \to$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -{}^{13}/_{3} \\ 0 & 1 & 1 & {}^{7}/_{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \text{ — базис в } L$$

$$\begin{cases} \text{Пусть } a_1' = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} \\ \text{Тогда по формуле Грама–Шмидта, } a_2' = a_2 - \dfrac{(a_2, a_1')}{(a_1', a_1')} a_1' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1' = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} \\ a_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \dfrac{\overset{109}{6 \cdot 3 + 13 \cdot 7}}{\underset{214}{9 + 36 + 169}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} = \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {}^{327}/_{214} \\ 0 \\ -{}^{327}/_{107} \\ -{}^{1417}/_{214} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{327}/_{214} \\ 3 \\ -{}^{6}/_{107} \\ {}^{81}/_{214} \end{pmatrix}$$

Ответ: $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}^{327}/_{214} \\ 3 \\ -{}^{6}/_{107} \\ {}^{81}/_{214} \end{pmatrix} \right\}$

№1363

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & -1 \\ 0 & -3 & 45 & -3 \\ 0 & 2 & 37 & 8 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 67 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -124/67 \\ 0 & 1 & 0 & 157/67 \\ 0 & 0 & 1 & 6/67 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 67 & 0 & 0 & -124 \\ 0 & 67 & 0 & 157 \\ 0 & 0 & 67 & 6 \end{pmatrix}$$

Итак $\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 67 \\ 0 \\ 0 \\ -124 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 67 \\ 0 \\ 157 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 67 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ — базис в L

~~Пусть~~ $\cancel{a_1' = \begin{pmatrix} 67 \\ 0 \\ 0 \\ -124 \end{pmatrix}}$

~~Тогда по формуле Грама-Шмидта,~~

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\} \text{ — базис в } L$$

Пусть $a_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Тогда по формуле Грама — Шмидта:

$$a_2' = a_2 - \frac{(a_2, a_1')}{(a_1', a_1')} a_1'$$

$$a_3' = a_3 - \frac{(a_3, a_2')}{(a_2', a_2')} a_2' - \frac{(a_3, a_1')}{(a_1', a_1')} a_1'$$

$$a_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a_2' = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \overset{30/15 = 2}{\frac{14+4+9+3}{4+1+9+1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a_3' = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} - \overset{0}{\frac{15+14-21-8}{9+4+9+1}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} - \overset{2}{\frac{10+7+21-8}{15}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$