№1281.

$$e = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$e' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \equiv T_{s \to e},$$ где s — некий стандартный базис. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow e \text{ — базис}$$ (векторы e л.н.з.)

$$E' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = T_{s \to e'}$$

$$\det E' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \Rightarrow e' \text{ — базис.}$$ (векторы e' л.н.з.)

$$T_{s\to e}\cdot T_{e\to e'} = T_{s\to e'}$$

$$T_{e\to e'} = T_{s\to e}^{-1}\cdot T_{s\to e'}$$

- $T_{s\to e}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&2&1&3&0&1&0&0\\ 1&1&2&2&0&0&1&0\\ 1&1&1&3&0&0&0&1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&0&2&-1&1&0&0\\ 0&0&1&1&-1&0&1&0\\ 0&0&0&2&-1&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&2&-1&-1&1\\ 0&1&0&0&0&1&0&-1\\ 0&0&1&0&-1/2&0&1&-1/2\\ 0&0&0&1&-1/2&0&0&1/2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2&-1&-1&1\\ 0&1&0&-1\\ -1/2&0&1&-1/2\\ -1/2&0&0&1/2 \end{pmatrix}}_{T_{s\to e}^{-1}}$$

$$\Rightarrow T_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 2&-1&-1&1\\ 0&1&0&-1\\ -1/2&0&1&-1/2\\ -1/2&0&0&1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&-2&2&-2\\ 0&-3&2&-3\\ 3&-5&5&-4\\ 3&-4&4&-4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Пусть $X_{e'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$ в базисе e'. Тогда

$X_e = T_{e \to e'} \cdot X_{e'}$ в базисе e:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1' + x_3' - x_4' \\ -3x_1' + x_2' - 2x_3' + x_4' \\ x_1' - 2x_2' + 2x_3' - x_4' \\ x_1' - x_2' + x_3' - x_4' \end{pmatrix}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x_1 = 2x_1' + x_3' - x_4' \\ x_2 = -3x_1' + x_2' - 2x_3' + x_4' \\ x_3 = x_1' - 2x_2' + 2x_3' - x_4' \\ x_4 = x_1' - x_2' + x_3' - x_4' \end{cases}$$

№ 1313

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Big\downarrow \begin{matrix} (1)-(3) \\ (3)+(1)-(2)+(4) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)+2(2)} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} n - r = 2 \\ 5 - r = 2 \\ r = 3 \text{ — кол-во уравнений} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x_1 + 2x_3 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_4 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_5 - 6x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Ответ:

№1317.

$$L_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \quad L_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim L_1 = \dim L_2 = 2$$

$$L_1 + L_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{(2)-2(4)}{\overset{(1)-(3)-(4)}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A = 3 = \dim(L_1 + L_2)$$

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) =$$
$$= 2 + 2 - 3 = 1$$

Ответ: $s = 3$; $d = 1$

№132

$$L_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-3\end{pmatrix} \right\rangle, \quad L_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$L_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3)-(1)\\(1)-(2)}]{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(2)\leftrightarrow(3)]{(1)-(3)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)+(1)-(2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(2)/2]{(2)+(1)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

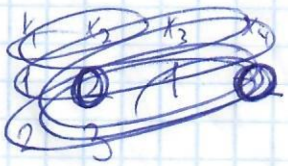
$$L_1 + L_2 = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

L_1+L_2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$

$\begin{array}{l} \\ (2)-(3)-(4)-(5)+ \\ +(6) \to \\ (4)-2(6)- \\ -(5) \\ (3)-(5) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Базис L_1+L_2: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.



1) $\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow 5x_1 - x_4 - 3x_2 - x_3 = 0$$

2) $$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x_4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_4 + x_3 - x_1 - x_2 = 0$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{(2)-\frac{(1)}{4}} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+2(2)} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_1 = 2x_3 + 2x_4 \\ 2x_2 = x_3 + x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3/2 + x_4/2 \\ x_2 = x_3/2 + x_4/2 \end{cases}$$

	y_1	y_2
x_1	1	1
x_2	1	1
x_3	2	0
x_4	0	2

$\Rightarrow$ базис $L_1 \cap L_2$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Ответ: 1) базис $L_1 + L_2$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2) базис $L_1 \cap L_2$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

№8

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)-(1)]{(2)-(1)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(2)\leftrightarrow(3)]{(1)+4(3)} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ x_2 = -x_4 + 6x_5 \end{cases}$$

$r = 2,\ n - r = 3$

$\Rightarrow$

	y_1	y_2	y_3
x_1	-2	-4	21
x_2	0	-1	6
x_3	1	0	0
x_4	0	1	0
x_5	0	0	1

$\Rightarrow \dim L = 3$; базис: $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

№9

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(5)-(1)]{(2)-(1),\ (3)-(2)} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(3)+(2)} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)-3(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{(3)-2(2)} \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{a_1, a_2\} \text{ образуют } \Rightarrow \text{ базис } L.$$

$\Rightarrow \dim L = 2$

Базис L: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{cases} a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \\ a_4 = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 \\ a_5 = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} \gamma_1 = 2 \\ \gamma_2 = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: базис: $\{a_1, a_2\}$; $a_3 = -a_1 + a_2$,

$$a_4 = a_1 + 2a_2$$

$$a_5 = 2a_1 - a_2$$

№10

$$L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^5$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)-3(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)-2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 5 - r = 2$$

$r = 3$ — кол-во уравнений.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_3 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_5 + 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Ответ:

№ 11.

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

$$V_1: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 9 & 14 \\ -4 & 1 & 2 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)+4(1)]{(2)+2(3)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 10 & -6 \\ 0 & 1 & -10 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(2)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & -10 & -17 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim V_1 = 3.$$

Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -23 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \\ -17 \end{pmatrix} \right\}$

$$V_2: \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim V_2 = 2$

Базис: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$.

$$V_1 + V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -23 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \\ -17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & -10 & -17 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(5)+3(1) \\ (3)-(5)-(4) \\ (2)-4(4)}]{(4)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$(2)/-27$

„занулить" 4 столбец 2-й строкой

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{„занулить" 3-й столбец 3-ей строкой}}$$

$(2) \leftrightarrow (4)$

$(3)/-2$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(V_1+V_2)=4$$

$$\Rightarrow \text{Базис } V_1+V_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

$$4 = 3 + 2 - \dim(V_1 \cap V_2) \Rightarrow \dim(V_1 \cap V_2) = 1$$

$$V_1 \cap V_2 : \begin{cases} x \in V_1 \\ x \in V_2 \end{cases}$$

$$V_1 : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & -10 & -17 \end{vmatrix} = 0$$

$$x_1 \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 4 & 0 & -23 \\ 1 & -10 & -17 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ 4 & 0 & -23 \\ 1 & -10 & -17 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1 \overbrace{\left(3 \cdot 23 + 8 \cdot 10 - 3 \cdot 4 \cdot 17\right)}^{-55} -$$

$$- \left(-23x_3 - 40x_4 - 23 \cdot 10 \cdot x_2 + 17 \cdot 4\, x_3\right) =$$

$$= -55x_1 + 230x_2 - 45x_3 + 40x_4 = 0$$

$$11x_1 - 46x_2 + 9x_3 - 8x_4 = 0$$

$$V_2 : \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_1 \cap V_2 : \begin{cases} 11x_1 - 46x_2 + 9x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 6x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -46 & 9 & -8 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 11 & -46 & 9 & -8 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{(1)+8(3)} \begin{pmatrix} 3 & -30 & 9 & 0 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-3(2)} \begin{pmatrix} 0 & -54 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\frac{1}{3} x_4 \end{cases}$$

	y
x_1	3
x_2	0
x_3	-1
x_4	3

$\Rightarrow$ базис $L_1 \cap L_2$: $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

№12.

$$e = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$e' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$x = -e'_1 + 3e'_2 - e'_3$$

$T_{S\to}$ Пусть $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ – стандартный базис.

$$T_{S\to e} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T_{S\to e'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{s\to e'} = C_{s\to e} \cdot C_{e\to e'}$$

$$C_{e\to e'} = C_{s\to e}^{-1} \cdot C_{s\to e'}$$

$$C_{e\to e'} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{(1)+3(2) \\ (2)-(1)}]{(3)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(3)-2(2)]{(1)+2(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[(1)+3(3)]{\substack{(3)/11 \\ (2)+5(3)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{11} & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 11 \\ 20 & 11 & 11 \\ 15 & 11 & 11 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{12}{11} & 0 & 1 \\ 20/11 & 1 & 1 \\ 15/11 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow X_e = C_{e\to e'} \cdot X_{e'}$$

$$\begin{pmatrix} x_e^1 \\ x_e^2 \\ x_e^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{11} & 0 & 1 \\ 20/11 & 1 & 1 \\ 15/11 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23/11 \\ 2/11 \\ 7/11 \end{pmatrix}$$

Ответ: $C_{e\to e'} = \begin{pmatrix} \frac{12}{11} & 0 & 1 \\ 20/11 & 1 & 1 \\ 15/11 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$X_{\cancel{e}} = \{ -\frac{23}{11} e_1 + \frac{2}{11} e_2 + \frac{7}{11} e_3$$

№13.

$$L_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle; \; L_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$L_1 + L_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&0&1&-1\\0&1&1&-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&-1&+2\\1&0&1&-1\\0&1&1&-1\end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \text{базис: } \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow L_1 + L_2$ - пространство.

$$X = \begin{pmatrix}0\\-2\\2\\0\end{pmatrix} = x_1 + x_2 =$$

$$= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) + (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) =$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[(2)-(3)]{(1)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{matrix} (2)+(1) \\ (3)+(1) \\ \longrightarrow \\ (4)-(1) \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{matrix} (2)-(4) \\ \longrightarrow \\ (2)/3 \\ (3)+(2) \\ (4)+(2) \end{matrix} \begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \beta_1 & \beta_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_1 = \beta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = (-2a_2) + (2b_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: