Абрамов Александр БПИ214. ИДЗ 4. Вар. 2

№1.

$$a_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} b_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b_1 = Aa_1 \\ b_2 = Aa_2 \\ b_3 = Aa_3 \\ b_4 = Aa_4 \end{cases} \Rightarrow (b_1\ b_2\ b_3\ b_4) = A \cdot (a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & -5 & 4 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 2 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \ldots \to$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1212 & 0 & 0 & 0 & -170 & 157 & 87 & -69 \\ 0 & 1212 & 0 & 0 & 8 & 14 & -54 & 210 \\ 0 & 0 & 1212 & 0 & 94 & 13 & 123 & 195 \\ 0 & 0 & 0 & 1212 & -134 & -83 & 147 & -33 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{\text{обратная матрица} \,\cdot\, 1212}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{1212}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & 1 \\ -5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -170 & 157 & 87 & -169 \\ 8 & 14 & -54 & 210 \\ 94 & 13 & 123 & 195 \\ -134 & -83 & 147 & -33 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots = \boxed{\frac{1}{1212}\begin{pmatrix} -458 & -347 & -393 & -1569 \\ 826 & -827 & -273 & -285 \\ 574 & 247 & -87 & 1281 \\ 818 & -235 & 387 & 111 \end{pmatrix}}$$

Ответ:

$\exists\, x \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$,

где $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ – базис $\mathbb{R}^4$

$\Rightarrow Ax = A(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4)$

$Ax = x_1 A e_1 + x_2 A e_2 + x_3 A e_3 + x_4 A e_4$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim L(A e_1, A e_2, A e_3, A e_4)$

Заметим, что Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4 – столбцы матрицы ЛО по определению.

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = Rg\, A = Rg(1212\, A) =$

$$= Rg \begin{pmatrix} -458 & -347 & -393 & -1569 \\ 826 & -827 & -273 & -285 \\ 574 & 247 & -87 & 1281 \\ 818 & -235 & 387 & 111 \end{pmatrix} =$$

метод Гаусса $= \ldots$

$$= Rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 4$$

~~$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 4 - \dim \operatorname{Im} f$~~

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Im} f = 4 - 4 = 0$.

Действительно, $Ax = 0$ имеет единственное решение $x = 0$, т.к. $\det A \neq 0$

Ответ: $\dim \operatorname{Im} f = 4$; $\dim \operatorname{Ker} f = 0$.

№2

$Q(x) = 8x_1^2 + 18x_2^2 + 24x_2x_3 + 8x_3^2 =$

$= \underset{\underset{(2\sqrt{2}x_1)^2}{\parallel}}{8x_1^2} + \underbrace{(3x_2\sqrt{2} + 2x_3\sqrt{2})^2}_{(3x_2\sqrt{2})^2 + 2\cdot 3x_2\sqrt{2}\cdot 2x_3\sqrt{2} + (2x_3\sqrt{2})^2 = 18x_2^2 + 24x_2x_3 + 8x_3^2} =$

$$\begin{cases} y_1 = 2\sqrt{2}x_1 \\ y_2 = 3x_2\sqrt{2} + 2x_3\sqrt{2} \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{y_1^2 + y_2^2}$ – нормальний вид, $\quad i_+ = 2$, $i_- = 0$

$$T_{y\to x} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow T_{x\to y} = T_{y\to x}^{-1}$ – матрица перехода

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$T_{x\to y}$

Ответ: $y_1^2 + y_2^2$, $\quad i_+ = 2$, $i_- = 0$

$$T_{x\to y} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/6 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

№3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

а) $z = x + iy = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ в базисе $(1, i)$

$$\Rightarrow A(z) = Az = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ x+3y \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{(2x)\cdot 1 + (x+3y)\, i}$$ — образ произвольного числа $x+iy$

б) $$\chi(A) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{array}\right.$$ — собственные числа

I) $\lambda_1 = 2$) $m(\lambda_1) = 1$ — алгебраическая кратность

$\Downarrow$

$s(\lambda_1) = 1$ — геометрическая кратность

т.к. $0 \le s(\lambda_i) \le m(\lambda_i)$ по доказанному.

II) $\lambda_2 = 3$; $m(\lambda_2) = 1 \Rightarrow s(\lambda_2) = 1$

$\forall i\ m(\lambda_i) = s(\lambda_i) \Rightarrow$ базис $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, в котором A диагональна, существует.

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$ — диагональный вид.

Матрица л.о. имеет диагональный вид в базисе из собственных векторов.
Найдём их:

1) $A - \lambda_1 E = A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ФСР: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ — собственный вектор, отвечающий λ_1.

2) $A - \lambda_2 E = A - 3E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ ФСР: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ — собственный вектор, отвечающий с.з. λ_2.

$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} z_1 = -1 + i \\ z_2 = i \end{cases}$

$\bullet \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = J$$

Ответ: 1) $A(x+iy) = 2x + i(x+3y)$

2) да

3) $\begin{cases} z_1 = -1+i \\ z_2 = i \end{cases}$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

№4

Пусть в некоторый день было x здоровых, y больных в лёгкой форме и z больных в тяжёлой форме: $\underset{\text{по условию}}{x+y+z=8000}$

Назовём состоянием населения в некоторый день вектор $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=8000$

Тогда состояние населения в следующий день

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-0.22-0.17)x + 0.18y + 0.1z \\ 0.22x + (1-0.18-0.19)y + 0.21z \\ 0.17x + 0.19y + (1-0.1-0.21)z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.61x + 0.18y + 0.1z \\ 0.22x + 0.63y + 0.21z \\ 0.17x + 0.19y + 0.69z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.61 & 0.18 & 0.1 \\ 0.22 & 0.63 & 0.21 \\ 0.17 & 0.19 & 0.69 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Изменение состояние населения за день можно описать линейным оператором в $\mathbb{R}^3$, заданным матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.18 & 0.1 \\ 0.22 & 0.63 & 0.21 \\ 0.17 & 0.19 & 0.69 \end{pmatrix}$$

Известно, что в некоторый начальный день состояние населения следующее:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8000-500-100 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7400 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ На следующий день состояние населения таково: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 7400 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} =$

$$= A^2 \begin{pmatrix} 7400 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$\dots$

$\Rightarrow$ Через n дней состояние населения таково: $\boxed{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 7400 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \left(A^n \begin{pmatrix} 7400 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} \right).$$

Для упрощения вычисления A^n ~~представим A [illegible]~~ диагонализируем матрицу A, если это возможно.

$$\chi(A) = \begin{vmatrix} 0.61-\lambda & 0.18 & 0.1 \\ 0.22 & 0.63-\lambda & 0.21 \\ 0.17 & 0.19 & 0.69-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \dots = \overset{f}{-\lambda^3 + 1.93\lambda^2 - 1.1434\lambda + 0.2134} =$$

$$\overset{A}{=} \dots = -(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{93+\sqrt{113}}{200}\right)\left(\lambda - \frac{93-\sqrt{113}}{200}\right)$$

(A) Корень 1 очевиден. При делении f на $(\lambda-1)$

остаётся квадратный трёхчлен. Его корни вычисляются дискриминантом.

$$\Rightarrow \chi(A) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \frac{93 - \sqrt{113}}{200} \\ \lambda_3 = \frac{93 + \sqrt{113}}{200} \end{cases}$$

$\forall i \; m(\lambda_i) = s(\lambda_i) = 1 \to$ оператор диагонализируем.

1) $\lambda_1 = 1$

$$A - \lambda_1 E = A - E = \begin{pmatrix} -0.39 & 0.18 & 0.1 \\ 0.22 & -0.37 & 0.21 \\ 0.17 & 0.19 & -0.31 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{метод Гаусса}} \dots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{748}{1047} \\ 0 & 1 & -\frac{1039}{1047} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{748}{1047} x_3 \\ x_2 = \frac{1039}{1047} x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{с.в.}: \left\{ \begin{pmatrix} 748/1047 \\ 1039/1047 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Аналогично, для λ_2 с.в.: $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{7 + \sqrt{113}}{4} \\ \frac{-11 - \sqrt{113}}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

для λ_3 с.в.: $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{7 - \sqrt{113}}{4} \\ \frac{-11 + \sqrt{113}}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\Rightarrow T_{s \to e} = \begin{pmatrix} 748/1047 & \frac{7+\sqrt{113}}{4} & \frac{7-\sqrt{113}}{4} \\ 1039/1047 & \frac{-11-\sqrt{113}}{4} & \frac{-11+\sqrt{113}}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

s — базис, в котором матрица оператора имеет вид A

e — базис из собственных векторов

$$T^{-1}_{s\to e} = \ldots = \begin{pmatrix} \frac{1047}{2834} & \frac{1047}{2834} & \frac{1047}{2834} \\ \frac{15673\sqrt{113} - 118311}{640484} & \frac{4337\sqrt{113} - 118311}{640484} & \frac{-15501\sqrt{113} + 201931}{640484} \\ \frac{-15673\sqrt{113} - 118311}{640484} & \frac{-4337\sqrt{113} - 118311}{640484} & \frac{15501\sqrt{113} + 201931}{640484} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{640484} \begin{pmatrix} 236622 & 236622 & 236622 \\ -118311 + 15673\sqrt{113} & -118311 + 4337\sqrt{113} & 201931 - 15501\sqrt{113} \\ -15673\sqrt{113} - 118311 & -118311 - 4337\sqrt{113} & 201931 + 15501\sqrt{113} \end{pmatrix}$$

Тогда оператор A в базисе e имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{93-\sqrt{113}}{200} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{93+\sqrt{113}}{200} \end{pmatrix} = T^{-1}_{s\to e} A T_{s\to e}$$

$$\Rightarrow A = T_{s\to e} J T^{-1}_{s\to e}$$

$$\Rightarrow A^n = \left(T_{s\to e} J T^{-1}_{s\to e}\right)^n = \cancel{T_{s\to e} J T^{-1}_{s\to e} T_{s\to e} J T^{-1}_{s\to e}}$$

$$= T_{s\to e} J \underbrace{T_{s\to e}^{-1} T_{s\to e}}_{E} J \underbrace{T_{s\to e}^{-1} \ldots \cdot T_{s\to e}}_{E} J T_{s\to e}^{-1} =$$

$$= T_{s\to e} J^n T_{s\to e}^{-1}$$

$\Rightarrow$ Через n дней состояние населения можно описать так:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = T_{s\to e} J^n T_{s\to e}^{-1} \begin{pmatrix} 7400 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \left(T_{s\to e} J^n T_{s\to e}^{-1} \begin{pmatrix} 7400 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\overset{(*)}{=} \ldots = \begin{pmatrix} 2112 \\ 2933 \\ 2956 \end{pmatrix}$$ — предел состояния населения после округления вверх

Ответ: (1) — поведение числа больных со временем; предел числа больных:

2933 — в лёгкой форме;
2956 — в тяжёлой форме.

(*) Учитывая, что матрица J диагональна,

$$J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{93-\sqrt{113}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{93+\sqrt{113}}{4} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{93-\sqrt{113}}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{93+\sqrt{113}}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$ по доказанному.

$$T_{s\to e} J^n T_{s\to e}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7400 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2236{,}5 \cdot 0{,}4^n + 3052 \cdot 0{,}5^n + 2111{,}5 \cdot 1{,}0^n \\ -2743{,}9 \cdot 0{,}4^n + 310{,}9 \cdot 0{,}5^n + 2932{,}9 \cdot 1{,}0^n \\ 507{,}4 \cdot 0{,}4^n - 3362{,}9 \cdot 0{,}5^n + 2955{,}5 \cdot 1{,}0^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2111{,}5 \\ 2932{,}9 \\ 2955{,}5 \end{pmatrix},$$

так как $\forall k \quad \lim_{n\to\infty} (k \cdot 0{,}4^n) = 0$

$$\lim_{n\to\infty} (k \cdot 0{,}5^n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (k \cdot 1^n) = k$$

$$\forall a, b: \quad \lim_{n\to\infty} (a + b) = \lim_{n\to\infty} (a) + \lim_{n\to\infty} (b)$$

№6.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}; \; L: Ax = 0, \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}$$

$L: Ax = 0 \Rightarrow L^{\perp} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, где

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Если $x \in L$ и $Ax = 0$, то

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1, x) = 0 \\ (a_2, x) = 0 \\ (a_3, x) = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1, a_2, a_3 \in L^{\perp}$$

$$\rho(\alpha, L) = \|\alpha_L^{\perp}\| = \|\text{пр}_{L^\perp} \alpha\|$$

Найдём $\text{пр}_{L^\perp} \alpha$.

Найдём ортогональный базис $L^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \left\langle \underset{b_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{b_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

Заметим, что $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ образуют ортогональный базис $L^{\perp}$.

$$\Rightarrow пр_{L^{\perp}} x = \frac{(x, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 + \frac{(x, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 + \frac{(x, b_3)}{(b_3, b_3)} b_3 =$$

$$= \frac{2+5}{1+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 5 \\ -7/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \| \alpha^{\perp}_{L} \| = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + (5)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + (2)^2 =$$

$$= \frac{49}{4} + 25 + \frac{49}{4} + 4 = \frac{107}{2} = \boxed{53,5}$$

$\cancel{53,5}$

$$\cos(\widehat{L,\alpha}) = \cos(\widehat{\alpha, \text{пр}_L \alpha}) = \frac{(\alpha, \text{пр}_L \alpha)}{\|\alpha\| \cdot \|\text{пр}_L \alpha\|}$$

$$\text{пр}_L \alpha = \alpha - \alpha_L^{\perp} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7/2 \\ 5 \\ -7/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{L,\alpha}) = \frac{-\frac{3}{2}\cdot 2 + \frac{3}{2}\cdot 5}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}\sqrt{2^2+5^2+5^2+2^2}} =$$

$$= \frac{9/2}{\sqrt{\frac{9}{2}}\sqrt{58}} = \frac{3\cancel{9}\sqrt{2}}{2\cdot \cancel{3}\underbrace{\sqrt{58}}_{\sqrt{2\cdot 29}}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{29}} = \boxed{\frac{3\sqrt{29}}{58}}$$

Ответ: $\rho(\alpha, L) = {}^{107}/_{2}$

$\cos(\widehat{\alpha, L}) = {}^{3\sqrt{29}}/_{58}$

№7.

$$M_1: L\left\langle \overset{v_2}{\begin{pmatrix}-4\\-3\\-5\\-6\\5\end{pmatrix}}, \overset{v_1}{\begin{pmatrix}7\\0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}} \right\rangle + \overset{x_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\4\\-1\end{pmatrix}}$$

$$M_2: L\left\langle \overset{w_1}{\begin{pmatrix}-1\\-7\\2\\-5\\-1\end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix}-5\\-7\\6\\-4\\2\end{pmatrix}} \right\rangle + \overset{x_2}{\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\-3\\4\end{pmatrix}}$$

$$\rho(M_1, M_2) = \left\| (X_1 - X_2)^{\perp}_{L_1+L_2} \right\|$$ по доказанному

$$X_1 - X_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\4\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\\7\\-5\end{pmatrix}$$

$$L_1 + L_2 = \left\langle \begin{pmatrix}-4\\-3\\-5\\-6\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-7\\2\\-5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\-7\\6\\-4\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}-4 & -3 & -5 & -6 & 5\\ 7 & 0 & 4 & -2 & 1\\ -1 & -7 & 2 & -5 & -1\\ -5 & -7 & 6 & -4 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0 & -3 & -9 & -7 & 2\\ 7 & 0 & 4 & -2 & 1\\ -1 & -7 & 2 & -5 & -1\\ -4 & 0 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix}0 & -3 & -9 & -7 & 2\\ -1 & 0 & 12 & 0 & 7\\ -1 & -7 & 2 & -5 & -1\\ -4 & 0 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix} \to$$

$$
\rightarrow
\begin{pmatrix}
0 & 3 & 9 & 7 & -2 \\
1 & 0 & -12 & 0 & -7 \\
0 & +7 & +10 & +5 & +8 \\
0 & 0 & -44 & 1 & -25
\end{pmatrix}
\rightarrow
$$

$$
\rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -12 & 0 & -7 \\
0 & 1 & -8 & -9 & 12 \\
0 & 3 & 9 & 7 & -2 \\
0 & 0 & 44 & -1 & 25
\end{pmatrix}
\rightarrow
$$

$$
\rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -12 & 0 & -7 \\
0 & 1 & -8 & -9 & 12 \\
0 & 0 & 33 & 34 & -38 \\
0 & 0 & 11 & -35 & 63
\end{pmatrix}
\rightarrow
$$

$$
\rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & -35 & 56 \\
0 & 1 & -8 & -9 & 12 \\
0 & 0 & 0 & 139 & -227 \\
0 & 0 & 11 & -35 & 63
\end{pmatrix}
\rightarrow
$$

$$
\rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & -959/1529 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2371/1529 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 812/1529 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{227}{139}
\end{pmatrix}
\rightarrow
$$

$$
\rightarrow \cancel{\begin{pmatrix} 959 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}
$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1529 & 0 & 0 & 0 & -959 \\ 0 & 1529 & 0 & 0 & 2371 \\ 0 & 0 & 1529 & 0 & 812 \\ 0 & 0 & 0 & 139 & -227 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1529 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1529 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1529 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 139 \\ -959 & 2371 & 812 & -227 \end{pmatrix}$$

$\{a_1; a_2; a_3; a_4\}$ — базис L_1+L_2

$$\Rightarrow (x_1-x_2)^{\perp}_{L_1+L_2} = \left(E - A(A^TA)^{-1}A^T\right)(x_1-x_2)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1529 & 0 & 0 & 0 & -959 \\ 0 & 1529 & 0 & 0 & 2371 \\ 0 & 0 & 1529 & 0 & 812 \\ 0 & 0 & 0 & 139 & -227 \end{pmatrix}$$

Нетрудно вычислить, что

$$E - A(A^TA)^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 919681 & -2273789 & -778708 & 2394623 & 1466311 \\ -2273789 & 5621641 & 1925252 & -5920387 & -3625259 \\ -778708 & 1925252 & 653349 & -2027564 & -1241548 \\ 2394623 & -5920387 & -2027564 & 6235009 & 3817913 \\ 1466311 & -3625259 & -1241548 & 3817913 & 2337841 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1577356}$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)_{L_1+L_2}^{\perp} = \frac{1}{7886758}\begin{pmatrix} 1911287 \\ -4725403 \\ -1618316 \\ 4976521 \\ 3047297 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\| (x_1 - x_2)_{L_1+L_2}^{\perp} \right\| = \frac{1}{(7886758)^2}\left(1911287^2 + 4725403^2 + 1618316^2 + 4976521^2 + 3047297^2\right) =$$

$$= \boxed{\frac{3972049}{3943379}}$$

Ответ:

№9

$$A = \begin{pmatrix} 47/9 & -14/9 & 22/9 \\ -14/9 & 62/9 & 8/9 \\ 22/9 & 8/9 & 44/9 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $A = A^T$, то есть A — симметрическая матрица в ОНБ $\Rightarrow$ по теореме о спектральном разложении,

$A = U \cdot \Delta U^T$, где U — ортогональная матрица,

то есть A приводится к диагональному виду ортогональным преобразованием U.

Найдём ортонормированный базис из собственных векторов A.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 47/9-\lambda & -14/9 & 22/9 \\ -14/9 & 62/9-\lambda & 8/9 \\ 22/9 & 8/9 & \frac{44}{9}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9^3} \begin{vmatrix} 47-9\lambda & -14 & 22 \\ -14 & 62-9\lambda & 8 \\ 22 & 8 & 44-9\lambda \end{vmatrix} =$$

Столбцы: $(3)-2(1)$

$$= \frac{1}{9^3} \begin{vmatrix} 47-9\lambda & -14 & 18\lambda-72 \\ -14 & 62-9\lambda & 36 \\ 22 & 8 & -9\lambda \end{vmatrix} =$$

Столбцы: $(3)/9$

$$= \frac{1}{9^2} \begin{vmatrix} 47-9\lambda & -14 & 2\lambda-8 \\ -14 & 62-9\lambda & 4 \\ 22 & 8 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$(1)+2(2)+2(3)$

$$= \frac{1}{9^2} \begin{vmatrix} 63-9\lambda & 126-18\lambda & 0 \\ -14 & 62-9\lambda & 4 \\ 22 & 8 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$(1)/9$

$$= \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 7-\lambda & 14-2\lambda & 0 \\ -14 & 62-9\lambda & 4 \\ 22 & 8 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

стохаст.
(2) − 2(1)

(2)/9

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 0 \\ -14 & 10-\lambda & 4 \\ 22 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)\begin{vmatrix} 10-\lambda & 4 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (7-\lambda)(-(10-\lambda)\lambda+16) =$$

$$= (7-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+16) = (7-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-8)=0$$

$$\left[\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \\ \lambda_2 &= 7 \\ \lambda_3 &= 8 \end{aligned}\right.$$

1) $\lambda_1 = 2$

$$A-\lambda_1 E = \begin{pmatrix} 28/9 & -14/9 & 22/9 \\ -14/9 & 44/9 & 8/9 \\ 22/9 & 8/9 & 26/9 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

(1)·9
(2)·9
(3)·9

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 74 & 38 \\ -7 & 22 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

(1)+2(2)
(2)/2
(3)/2

(2)+7(1)

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 74 & 38 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

(3)−11(1)
(2)/270

$$\xrightarrow{(1)-37(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3/2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{c.b.: } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) $\lambda_2 = 7$

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -16/9 & -14/9 & 22/9 \\ -14/9 & -1/9 & 8/9 \\ 22/9 & 8/9 & -19/9 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[(1)-(2)]{(1)\cdot 9,\ (2)\cdot 9,\ (3)\cdot 9} \begin{pmatrix} -2 & -13 & 14 \\ -14 & -1 & 8 \\ 22 & 8 & -19 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[(3)+11(1),\ (2)/90]{(2)-7(1)} \begin{pmatrix} -2 & -13 & 14 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3/2 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{c.b. } \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3) $\lambda_3 = 8$

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -28/9 & -14/9 & 22/9 \\ -14/9 & -10/9 & 8/9 \\ 22/9 & 8/9 & -28/9 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{(2)/2 \\ (3)/2 \\ (1)-2(2)+(3)}]{\substack{(1)\cdot 9 \\ (2)\cdot 9 \\ (3)\cdot 9}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7 & -5 & 4 \\ 11 & 4 & -14 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{(1)+(2) \\ (2)+(1) \\ (2)/3 \\ (2)\cdot -1}]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -10 \\ \cancel{-3} & \cancel{-3} & \cancel{-6} \\ +1 & +2 & +2 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)-4(1)]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & -18 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{(2)/-9 \\ (1)-2(2)}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases},$$

$$\Rightarrow \text{с. в.: } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} - \text{базис из с. в.}$$

Заметим, что $A = A^T$ в ОНБ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A — самосопряжённый ЛО $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны

$\Rightarrow$ B — ортогональный базис из с.в. A.

Нормируем его.

$$B \sim C = \left\{ \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\-1/2\\1\end{pmatrix}, \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1/2\\1\\1\end{pmatrix}; \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}-2/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix} \right\}$$ — ОНБ из с.в. A.

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix}-2/3 & 1/3 & 2/3\\ -1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$$ — ортогональная матрица перехода (т.к. переводит ОНБ в ОНБ), то есть искомое ортогональное преобразование,

$$\Lambda = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$$ — матрица с с.з. на диагонали

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}-2/3 & 1/3 & 2/3\\ -1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/3 & 1/3 & 2/3\\ -1/3 & 2/3 & -2/3\\ 2/3 & 2/3 & 1/3\end{pmatrix}^T$$

~~⇒ Ответ: диагональный вид:~~ $\cancel{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}$,

~~Ортогональное преобразование:~~

$$\cancel{\underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix}}_{\text{новый базис}} = + \frac{1}{3} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ +1 & 2 & +2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{ортог. матрица перехода } T_{e \to e'} = U^T} \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}}_{\text{старый базис}}}$$

⇒ Ответ: диагональный вид: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Ортогональное преобразование:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{pmatrix}}_{\substack{\text{строка из} \\ \text{векторов} \\ \text{нового базиса}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{строка из} \\ \text{векторов} \\ \text{старого базиса}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Ортогональная} \\ \text{матрица перехода} \\ T_{e \to e'} = U}}$$