Абрамов Александр Сергеевич.

№1

а) Число w называется комплексно сопряжённым к числу $z = a + bi$, если $w = a - bi$. Для деления комплексных чисел необходимо домножить числитель и знаменатель дроби на число, комплексно сопряжённое к знаменателю:
$$\frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} =$$
$$= \frac{\boxed{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)} \in \mathbb{C}}{\underset{\in \mathbb{R}}{\boxed{a_2^2+b_2^2}}} = \frac{a_3}{a_2^2+b_2^2} + \frac{b_3}{a_2^2+b_2^2} i,$$ где

$$a_3 = a_1 a_2 + b_1 b_2$$
$$b_3 = a_2 b_1 - a_1 b_2$$

б). Пусть даны векторы $a = (a_1, a_2, a_3)$ и $b = (b_1, b_2, b_3)$.

Тогда $$(a,b) = (a_1\ a_2\ a_3)\begin{pmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}_1) & (\bar{e}_1, \bar{e}_2) & (\bar{e}_1, \bar{e}_3) \\ (\bar{e}_2, \bar{e}_1) & (\bar{e}_2, \bar{e}_2) & (\bar{e}_2, \bar{e}_3) \\ (\bar{e}_3, e_1) & (\bar{e}_3, \bar{e}_2) & (\bar{e}_3, \bar{e}_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

где $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — базисные векторы.

№2.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -5 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 11x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 10x_4 = 0 \\ -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 9x_4 = 0 \\ -7x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 11 & -5 & -2 & -10 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 9 & 0 \\ -7 & 3 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)+2(3)]{\substack{(4)+(3)-(2) \\ (1)+2(2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ -1 & -5 & -8 & 20 & 0 \\ 2 & -4 & -5 & 9 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 14 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{(2)+(1) \\ (3)-2(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 14 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 21 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 14 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(4)-(2) \\ (3)-(2)\cdot\frac{3}{2}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(2)/-2} \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 1 & 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6x_4 - x_2 - 2x_3 \\ 2x_2 = 7x_4 - 3x_3 \end{cases} ; \; \begin{matrix} r = 2 \\ n - r = 2 \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -5 & -3 \\ 2 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Строки A линейно независимы => => „A может быть ФСР". Проверим, являются ли строки A решениями СЛАУ:

$$\left\{\begin{array}{l|l} -5 = 6\cdot(-3)-(-3)-2\cdot(-5) & \\ 2\cdot(-3) = 7\cdot(-3)-3\cdot(-5) & \text{1-я строка} \\ 2 = 6\cdot 2-(-2)-2\cdot 6 & \\ 2\cdot(-2) = 7\cdot(2) \; -3\cdot 6 & \text{2-я строка} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} -5=-5 \text{ - верно} \\ -6=-6 \text{ - верно} \\ 2=2 \text{ - верно} \\ -4=-4 \text{ - верно} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ строки матрицы A образуют ФСР данной СЛАУ.

$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Строки B линейно независимы $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ „B может быть ФСР“. Проверим, являются ли строки B решением.

$$\left\{\begin{array}{l|l} 2 = 6\cdot 1-2-2\cdot 1 & \\ 2\cdot 2 = 7\cdot 1-3\cdot 1 & \text{1-я строка} \\ 8 = 6\cdot 7-(-4)-2\cdot 0 & \\ 2\cdot(-4) = 7\cdot 7-3\cdot 0 & \text{2-я строка} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 2=2 \text{ - верно} \\ 4=4 \text{ - верно} \\ 8=46 \text{ - неверно} \\ -8=49 \text{ - неверно} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ строки матрицы B не образуют ФСР данной СЛАУ

Ответ: A - образуют; B - не образуют.

№3.

$$\left\{\begin{array}{l} (-1+2i)x_1+(5-4i)x_2=1-14i \\ (-3+i)x_1+(9+i)x_2=\lambda \end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} -1+2i & 5-4i & 1-14i \\ \underbrace{-3+i \quad 9+i}_{A} & & \lambda \end{array}\right)}_{A|b.}$$

По теореме Кронекера - Капелли, СЛАУ совместна тогда и только тогда, когда $Rg A = Rg(A|b)$

$$\det(A) = (-1+2i)(9+i)-(-3+i)(5-4i) \overset{\text{учитывая, что } i^2=-1}{=} -9-i+18i-2+15-12i-5i-4 = 0$$

$-1+2i \neq 0 \Rightarrow Rg A = 1$ (любой минор порядка 2 равен 0; существует минор порядка 1, не равный 0).

$\Rightarrow Rg(A|B) = 1$, если СЛАУ совместна.

$M_1^1 = -1+2i \neq 0 \Rightarrow Rg(A|B) \geqslant 1.$

Чтобы $Rg(A|B) = 1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall M_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = 0.$$

1) Уже посчитано, что $M_{12}^{12} = 0$.

2) $$M_{12}^{13} = \begin{vmatrix} -1+2i & 1-14i \\ -3+i & \lambda \end{vmatrix} = (-1+2i)\lambda - (-3+i)(1-14i) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{(-3+i)(1-14i)}{-1+2i} = \frac{(-3+42i+i+14)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} =$$

$$= \frac{(11+43i)(-1-2i)}{(-1)^2-(2i)^2} = \frac{-11-22i-43i+86}{1+4} =$$

$$= \frac{75-65i}{5} = \boxed{15-13i}$$

3) $$M_{12}^{23} = \begin{vmatrix} 5-4i & 1-14i \\ 9+i & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(5-4i) - (1-14i)(9+i) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{(1-14i)(9+i)}{5-4i} = \frac{(9+i-126i+14)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)} =$$

$$= \frac{(23-125i)(5+4i)}{25+16} = \frac{115+92i-625i+500}{41} = \frac{615-533i}{41} =$$

$$= \boxed{15-13i}$$

Так как $M_{12}^{13} = 0$ и $M_{12}^{23} = 0$ при одном и том же значении λ, при $\lambda = 15-13i$ $Rg(A|B) = Rg\,A = 1 \Rightarrow$ СЛАУ совместна

Ответ: $15-13i$

№4.

Пусть $f(x) = ax^2+bx+c$ — искомый многочлен. Так как задано 2 точки $(x, f(x)) \in \mathbb{C}^2$, а $f(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, степень многочлена $f(x)$ не превышает 2.

По условию, $f(2) = 11$

$f(-1+i) = 1-10i$

Если $f(-1+i) = 1-10i$, то

$$\overline{f(-1+i)} = 1+10i \Rightarrow f(-1-i) = 1+10i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\cdot(2)^2 + b\cdot(2) + c = 11 \\ a\cdot(-1+i)^2 + b\cdot(-1+i) + c = 1-10i \\ a\cdot(-1-i)^2 + b(-1-i) + c = 1+10i \end{cases} \quad \begin{cases} 4a + 2b + c = 11 \\ -2i\,a + (i-1)b + c = 1-10i \\ 2i\,a - b(i+1) + c = 1+10i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2i & i-1 & 1 \\ 2i & -(i+1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1-10i \\ 1+10i \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 11 \\ -2i & i-1 & 1 & 1+10i \\ 2i & -i+1 & 1 & 1+10i \end{array}\right) \xrightarrow[(3)/2]{(3)+(2)} \cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 11 \\ -2i & i-1 & 1 & 1-10i \\ 0 & \underset{i}{\cancel{2i}} & \underset{1}{\cancel{2}} & \underset{1}{\cancel{2}} \end{array}\right)} \xrightarrow{(2)-(3)} \cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 11 \\ -2i & -1 & 0 & -10i \\ 0 & i & 1 & 1 \end{array}\right)} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 11 \\ -2i & i-1 & 1 & 1-10i \\ 2i & -i-1 & 1 & 1+10i \end{array}\right) \xrightarrow[(3)/2]{(3)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 11 \\ -2i & i-1 & 1 & 1-10i \\ 0 & \underset{-1}{\cancel{-2}} & \underset{1}{2} & \underset{1}{\cancel{2}} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[(1)-(3)]{(2)-(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 11 \\ -2i & i & 0 & -10i \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)/i} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 11 \\ -2 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)+2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 0 & -9 \\ -2 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 5b = -9 \\ -2a + b = -10 \\ -b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -9/5 \\ a = 41/10 \\ c = -9/5 \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \frac{41}{10}x^2 - \frac{9}{5}x - \frac{9}{5}$

(2)·i

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 11 \\ -2i^2 & -i & 0 & -10i^2 \\ 0 & i & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & -i & 0 & 10 \\ 0 & i & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

(3)+(2)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & -i & 0 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=11 \\ 2a-ib=10 \Rightarrow b=0 \\ 2a+c=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ 4a+c=11 \\ 2a=10 \\ 2a+c=1 \end{cases} \begin{cases} a=5 \\ b=0 \\ \\ c=-9 \end{cases} \Rightarrow f(x)=5x^2-9$$

Ответ: $f(x)=5x^2-9$

№5.

$$(1-i)z^5=-\sqrt{3}+i \Rightarrow z^5=\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{(-\sqrt{3}+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=$$

$$=\frac{-\sqrt{3}-i\sqrt{3}+i+i^2}{1^2-i^2}=\frac{-\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}+i}{1+1}=\frac{-(\sqrt{3}+1)}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)=$$

~~Ⓐ $=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$~~ Ⓐ $=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-11\pi}{12}\right)\right)$

$$\Rightarrow \quad z = \sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{-11\pi}{12} + i\sin\frac{-11\pi}{12}\right)} = \left\{\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{-\frac{11\pi}{12}+2\pi k}{5} + i\sin\frac{-\frac{11\pi}{12}+2\pi k}{5}\right), \; k=\overline{0,4}\right\}$$

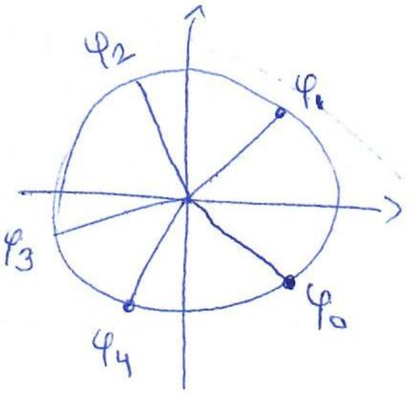
$$\Rightarrow \quad z = \left\{\sqrt[10]{2}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right\}, \text{ где } \varphi = \left\{\frac{-\frac{11\pi}{12}+2\pi k}{5}, \; k=\overline{0,4}\right\}.$$

Если z принадлежит II четверти, то $\varphi \in \left[+\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Найдём все такие φ:

1) Найдём все φ:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_0 &= -\frac{11\pi}{60} \\ \varphi_1 &= \frac{13\pi}{60} \\ \varphi_2 &= \frac{37\pi}{60} \\ \varphi_3 &= \frac{61\pi}{60} \\ \varphi_4 &= \frac{17\pi}{12} \end{aligned}\right.$$



$\Rightarrow$ подходит ровно одно значение $\varphi = \varphi_2 = \frac{37\pi}{60}$, при котором $\boxed{z = \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{60} + i\sin\frac{37\pi}{60}\right)}$

Ответ!

---

⑦ $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2\left(-\frac{11\pi}{12}\right) - 1 \Rightarrow \cos^2\left(-\frac{11\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} =$

$= -\sqrt{\frac{4\sqrt{3}+8}{16}} = -[illegible] \frac{\sqrt{4\sqrt{3}+8}}{4} = \frac{-\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}}{4} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{-11\pi}{12} \Rightarrow \sin\frac{-11\pi}{12} = -\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{-2}} =$ [illegible] $= -\frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}}{4} =$

$= -\frac{\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}}{4} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

№6.

$2x-2y-3z-6=0$; $-2x+z+4=0$

$A=(3;-2;-4)$; $B=(3;3;0)$; $C=(1;3;0)$

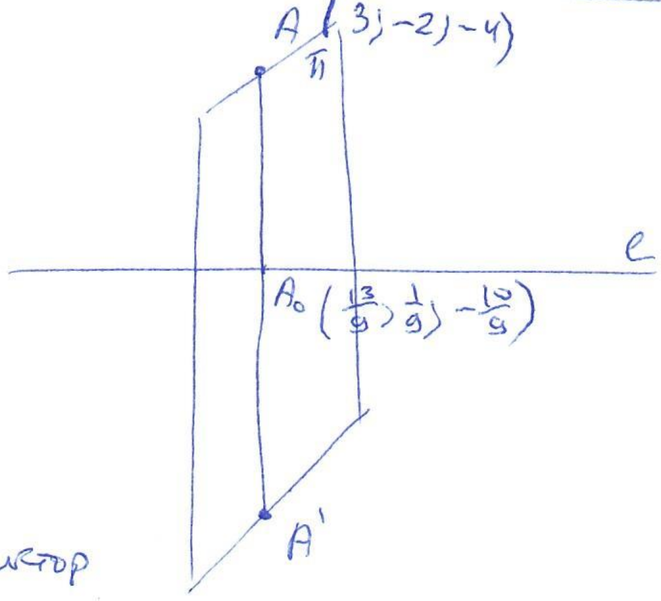
Пусть l – линия пересечение плоскостей.

Тогда l: $\begin{cases} 2x-2y-3z-6=0 \\ -2x+z+4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-2x+3 \\ z=2x-4 \end{cases}$ ⇒

$\Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{a}(1;-2;2)$ – направляющий вектор l. ~~$\Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+4}{2} \Rightarrow a(1;-2;2)$ – направляющий вектор l.~~

Найдём координаты A':



Пусть π – плоскость, такая, что:

$\begin{cases} A\in\pi \\ l\perp\pi \end{cases}$

Тогда $AA'\in\pi$; $A_0=l\cap\pi$.

$\Rightarrow \bar{a}(1;-2;2)$ – нормаль - вектор π.

$\Rightarrow \pi: x-2y+2z+D=0$

$A\in\pi \Rightarrow 3-2\cdot(-2)+2\cdot(-4)+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow \pi: x-2y+2z+1=0$

$\Rightarrow A_0: x-2(-2x+3)+2(2x-4)+1=0$

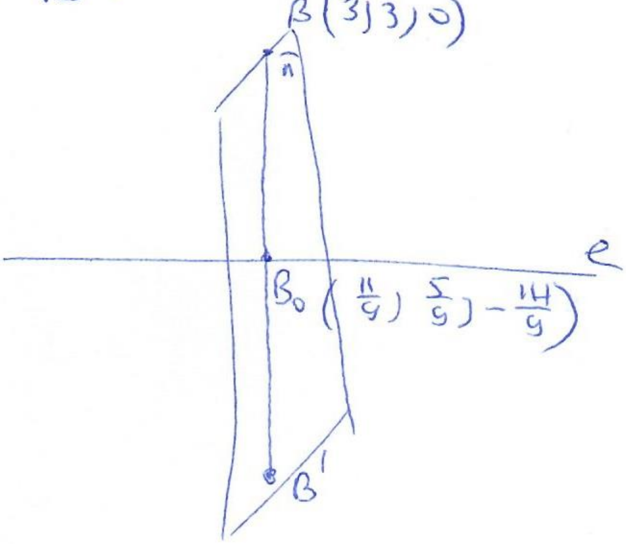
$x+4x-6+4x-8+1=0 \Rightarrow 9x-13=0$

$\begin{cases} x=13/9 \\ y=1/9 \\ z=-10/9 \end{cases}$

По построению, ~~$AA_0 = A_0A'$~~ $\overline{AA_0} = \overline{A_0A'} = \left(-\frac{14}{9}; \frac{19}{9}; \frac{26}{9}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow A'\left(-\frac{1}{9}; \frac{20}{9}; \frac{16}{9}\right)$$

Аналогично найдём координаты B':



π – плоскость: $\begin{cases} B \in \pi \\ l \perp \pi \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \pi: x - 2y + 2z + D = 0$$

$$3 - 2\cdot 3 + 2\cdot 0 + D = 0$$

$$D = 3 \Rightarrow \pi: x - 2y + 2z + 3 = 0$$

$$\Rightarrow B_0: \; x - 2(-2x + 3) + 2(2x - 4) + 3 = 0$$

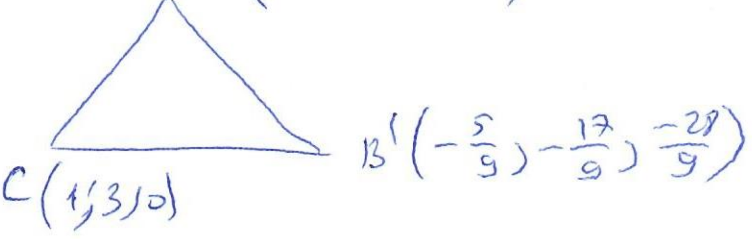
$$x + 4x - 6 + 4x - 8 + 3 = 0$$

$$9x = 11 \Rightarrow \begin{cases} x = 11/9 \\ y = 5/9 \\ z = -14/9 \end{cases}$$

$$\overline{BB_0} = \overline{B_0B'} = \left(-\frac{16}{9}; -\frac{22}{9}; -\frac{14}{9}\right)$$

$$\Rightarrow B'\left(-\frac{5}{9}; -\frac{17}{9}; -\frac{28}{9}\right)$$

$\Rightarrow A'B'C$:



$$\Rightarrow \quad CA' \left(-\frac{10}{9};\ -\frac{7}{9};\ \frac{16}{9}\right)$$

$$CB' \left(-\frac{14}{9};\ -\frac{44}{9};\ -\frac{28}{9}\right)$$

$$S_{A'B'C} = \frac{1}{2}\left|[CA', CB']\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -\frac{10}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{16}{9} \\ -\frac{14}{9} & -\frac{44}{9} & -\frac{28}{9} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{81}\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 10 & 7 & -16 \\ 14 & 44 & 28 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{81}\left|900i - 504j + 342k\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{900^2+504^2+342^2}}{2\cdot 81} \approx 6{,}7.$$

Ответ: $\approx 6{,}7$.

№7.

Дано: $M_0(\bar{r}_0)$

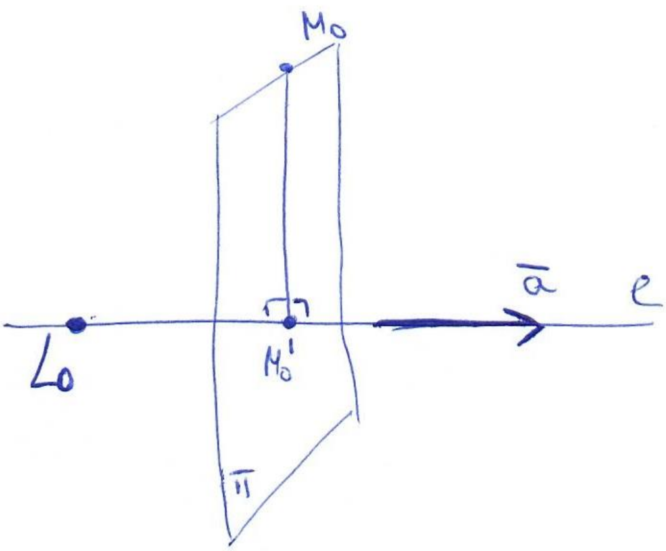
$l: [\bar{r}, \bar{a}] = \bar{M}$

$\bar{a} \neq 0$

$(\bar{a}, \bar{M}) = 0$

Найти: M_0'

Решение:



1) Рассмотрим плоскость π:

$$\begin{cases} l \perp \pi \\ M_0 \in \pi \end{cases}$$

Пусть $\bar{M}(\bar{r}) \in \pi$. Тогда $\overline{MM_0} \in \pi$.; $\overline{MM_0} = \bar{r} - \bar{r}_0$

Так как $l \perp \pi$, $\bar{a}$ – нормаль-вектор $\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{a} \perp \overline{MM_0} \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{r} - \bar{r}_0 \Rightarrow (\bar{a}; \bar{r} - \bar{r}_0) = 0$ – уравнение плоскости π.

2) M_0' – точка пересечения l и $\pi \Rightarrow$ Если $M_0'(\bar{r}_0')$, то

$$\begin{cases} (\bar{a};\ \bar{r}_0' - \bar{r}_0) = 0 \\ [\bar{r}_0', \bar{a}] = \bar{M} \end{cases} \qquad \begin{cases} (\bar{a}, \bar{r}_0') - (\bar{a}, \bar{r}_0) = 0 \\ [\bar{a}, [\bar{r}_0', \bar{a}]] = [\bar{a}, \bar{M}] \end{cases}$$

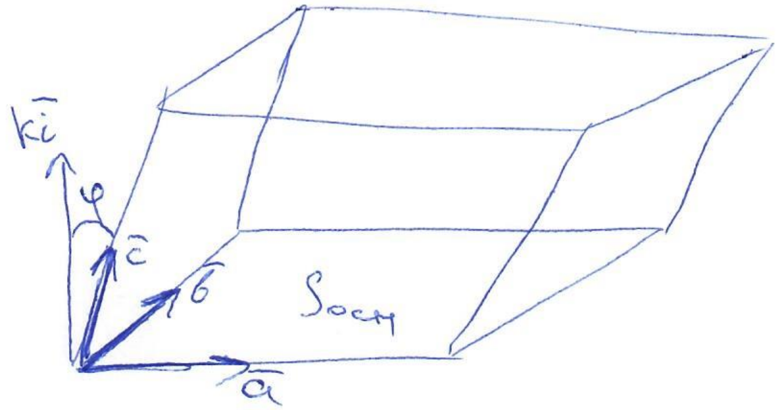
$$\begin{cases} (\bar{a}, \bar{r}_0') = (\bar{a}, \bar{r}_0) \\ \bar{r}_0'(\bar{a}, \bar{a}) - \bar{a}(\bar{a}, \bar{r}_0') = [\bar{a}, \bar{M}] \end{cases} \Rightarrow \boxed{r_0' = \frac{[\bar{a}, \bar{M}] + \bar{a}(\bar{a}, \bar{r}_0)}{a^2}}$$

Ответ.

№8.

Если параллелепипед построен на векторах a, b, c, то

$V_{п-педа} = |\langle a, b, c\rangle|$, при чём $\begin{cases} \langle a, b, c\rangle = V, \text{ если } a, b, c \text{ — правая тройка} \\ \langle a, b, c\rangle = -V, \text{ если } a, b, c \text{ — левая тройка} \end{cases}$



~~$[a, b] =$ [illegible] $k\bar{i}$~~

1) Пусть $[a, b] = k\bar{i}$, где $\bar{i}$ — единичный вектор.

Тогда $S_{осн} = |k\bar{i}| = k$

2) $\langle a, b, c\rangle = ([a, b], c) = (k\bar{i}, c) = |k\bar{i}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\varphi =$

$= k|\bar{c}|\cos\varphi = S_{осн}|\bar{c}|\cos\varphi.$

Заметим, что $\left||\bar{c}|\cos\varphi\right| = h$ — высота параллелепипеда

Если a, b, c — правая тройка, то $\cos\varphi > 0 \Rightarrow \langle a, b, c\rangle = S_{осн}|\bar{c}|\cos\varphi$ и $\langle a, b, c\rangle > 0$

$(h > 0)$

Если a, b, c — левая тройка, то $\cos\varphi < 0 \Rightarrow h < 0$

$\langle a, b, c\rangle < 0$

$\Rightarrow \langle a, b, c\rangle = \pm S_{осн} \cdot h = \pm V_{п.-педа}$

Что и требовалось доказать.