Абрамов Александр. Вариант 1. БПМ 214.

№1.

Теорема Ролля.

Дано: $f(x)$: 1) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$
2) $f(x)$ дифференцируема в (a,b)
3) $f(a) = f(b)$

Доказать: $\exists \psi \in (a,b)$: $f'(\psi) = 0$

Доказательство: 1) По 2-й теореме Вейерштрасса на отрезке $[a,b]$ $f(x)$ принимает минимальное и максимальное значения. Пусть x_{min} – точка, в которой $f(x)$ принимает минимальное значение; x_{max} – максимальное.

Тогда $\forall x \in [a,b]$ $\begin{cases} f(x) \geq f(x_{min}) \\ f(x) \leq f(x_{max}) \end{cases}$

2) ~~[illegible]~~ Пусть $m = f(x_{min})$; $M = f(x_{max})$.

3) Если $m = M$, то $f(x) = const$ (т.к. $f(a) = f(b)$)

$\Rightarrow \forall \psi \in (a,b)$ $\underline{f'(\psi) = 0}$

4) Если $m \neq M$, то $m < M$.

Так как $f(a) = f(b)$, то $x_{min} \in (a,b)$ или $x_{max} \in (a,b)$.

Пусть $\psi = x_{min}$, если $x_{min} \in (a,b)$ или $\psi = x_{max}$ иначе.

Тогда по теореме Ферма $f'(\psi) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \psi \in (a,b)$: $\underline{f'(\psi) = 0}$

Что и требовалось доказать.

№2.

$$y = e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

Точки разрыва функции — точки, в которых её значение не определено, то есть x, удовлетворяющие следующим условиям: $x^2-1=0$ (знаменатель дроби равен 0).

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

1) Рассмотрим точку $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x}{x^2-1>0}} = e^{\frac{1+}{0+}} = e^{+\infty} = +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow x=1$ — точка разрыва 2-го рода

2) Рассмотрим точку $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^+} e^{\frac{x}{x^2-1}} = \lim_{x\to -1^+}\left(e^{\frac{-1^+}{((-1)^+)^2-1}}\right) = \lim_{x\to -1^+}\left(e^{\frac{-1^+}{1^- -1<0}}\right) = \lim_{x\to -1^+} e^{+\infty} = +\infty$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to -1^-} e^{\frac{x}{x^2-1}} = \lim_{x\to -1^-}\left(e^{\frac{-1^-}{((-1)^-)^2-1}}\right) = \lim_{x\to -1^-} e^{\frac{-1^-}{1^+-1}} = \lim_{x\to -1^-} e^{-\infty} = 0$$

$\Rightarrow x=-1$ — точка разрыва 2-го рода.

Ответ: $x=1$; $x=-1$ — точки разрыва 2-го рода.

№3

$$y = \frac{x^2+1}{x-1} = (x^2+1)(x-1)^{-1}$$

k	$u^{(k)}$	$v^{(k)}$	C_n^k
0	x^2+1	$(x-1)^{-1}$	1
1	$2x$	$-1(x-1)^{-2}$	n
2	2	$2(x-1)^{-3}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
>2	0	$k!\cdot(-1)^k\cdot(x-1)^{-k-1}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\Rightarrow y = uv \Rightarrow y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}$$ (формула Лейбница)

Так как при $k>2$ $u^{(k)} = 0$,

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{\min(n,2)} \underbrace{C_n^k\, u^{(k)}\, v^{(n-k)}}_{f(k)}.$$

$$f(0) = C_n^0\cdot(x^2+1)\cdot\left(n!\,(-1)^n\cdot(x-1)^{-n-1}\right) = (-1)^n\cdot n!\,(x^2+1)(x-1)^{-n-1}$$

$$f(1) = C_n^1\cdot 2x\cdot\left((n-1)!\cdot(-1)^{n-1}\cdot(x-1)^{-(n-1)-1}\right) = (-1)^{n-1}\cdot\overbrace{(n-1)!\cdot n}^{n!}\cdot 2x\cdot(x-1)^{-n}$$

$$f(2) = C_n^2\cdot 2\cdot\left((n-2)!\cdot(-1)^{n-2}\cdot(x-1)^{-(n-2)-1}\right) = (-1)^{n-2}\cdot\underbrace{(n-2)!\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2}_{n!}\cdot(x-1)^{-n+1}$$

$f(k) = 0 \ \forall k>2$

Ответ: $$y^{(n)} = \begin{cases} (x^2+1)(x-1)^{-1}, & n=0 \\ -(x^2+1)(x-1)^{-2} + 2x(x-1)^{-1}, & n=1 \\ (-1)^n\cdot n!\left((x^2+1)(x-1)^{-n-1} - 2x\cdot(x-1)^{-n} + (x-1)^{1-n}\right), & \text{иначе} \end{cases}$$

№4.

$$y^3 = x^3 + \arcsin x \Rightarrow y = \sqrt[3]{x^3 + \arcsin x}$$

$f(x) = x^3$ – возрастающая и непрерывная функция

$g(x) = \arcsin(x)$ – возрастающая и непрерывная функция

$h(x) = \sqrt[3]{x}$ – возрастающая и непрерывная функция

$\Rightarrow y = \sqrt[3]{x^3 + \arcsin x}$ – возрастающая и непрерывная функция $\Rightarrow$ обратная функция $y = y(x)$ существует.

$$x''_{y^2} = -\frac{y''_{x^2}}{(y'_x)^3}.$$

Найдём y'_x. $y'_x = \left(\sqrt[3]{x^3 + \arcsin x}\right)' = \left(\left(x^3 + \arcsin x\right)^{1/3}\right)' =$

$$= \frac{1}{3}(x^3 + \arcsin x)^{-2/3} \cdot (x^3 + \arcsin x)' =$$

$$= \frac{1}{3}(x^3 + \arcsin x)^{-2/3} \cdot \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = (x^3 + \arcsin x)^{-2/3} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$y''_{x^2} = (y'_x)'_x = \left((x^3 + \arcsin x)^{-2/3} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\right)\right)' =$$

$$= \left((x^3 + \arcsin x)^{-2/3}\right)' \left(x^2 + \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\right)' \cdot (x^3 + \arcsin x)^{-2/3} =$$

$$= -\frac{2}{3}(x^3 + \arcsin x)^{-5/3} \cdot (x^3 + \arcsin x)' \left(x^2 + \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\right) + \left(2x + \frac{1}{3}(1-x^2)^{-1/2}\right)' (x^3 + \arcsin x)^{-2/3} =$$

$$= (x^3 + \arcsin x)^{-2/3}\left(-\frac{2}{3}(x^3 + \arcsin x)^{-1} \cdot \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + 2 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x)\right)$$

$$\Rightarrow x''_{y^2} = \frac{-(x^3 + \arcsin x)^{-2/3} \cdot \left(-\frac{2}{9}(x^3 + \arcsin x)^{-1} \cdot \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 + 2 + \frac{1}{3} \cdot (1-x^2)^{-3/2} \cdot x\right)}{(x^3 + \arcsin x)^{-2} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\right)^3} =$$

$$= \frac{-\left(x^3+\arcsin x\right)^{4/3}\cdot\left(-\frac{2}{9}\cdot\frac{\left(3x^2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}{x^3+\arcsin x}+2+\frac{x}{3\sqrt{(1-x^2)^3}}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\right)^3} =$$

$$= \frac{\frac{2}{9}\left(x^3+\arcsin x\right)^{1/3}\cdot\left(3x^2+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 - 2\left(x^3+\arcsin x\right)^{4/3} - \frac{x\left(x^3+\arcsin x\right)^{4/3}}{3\sqrt{(1-x^2)^3}}}{\left(x^2+\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\right)^3}$$

Для нахождения $x''(a)$ найдём такой x_a, что $y(x_a)=a$,

то есть $\sqrt[3]{x_a^3+\arcsin x_a}=0$

$$x_a^3+\arcsin x_a=0$$

Так как $x^3+\arcsin x$ — возрастающая функция, 0 — константная, уравнение $x^3+\arcsin x=0$ имеет единственное решение. Очевидно, $x_a=0$

$$\Rightarrow x''(a)=x''(0)=\frac{\frac{2}{9}\cdot\left(0^3+\arcsin 0\right)^{1/3}\cdot\left(3\cdot 0^2+\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}\right)^2-2\left(0^3+\arcsin 0\right)^{4/3}-\frac{0\cdot\left(0^3+\arcsin 0\right)^{4/3}}{3\sqrt{(1-0^2)^3}}}{\left(0^2+\frac{1}{3\sqrt{1-0^2}}\right)^3}=$$

$$=\frac{\frac{2}{9}\cdot 0\cdot 1-2\cdot 0-\frac{0}{3}}{(1/3)^3}=0$$

Ответ: 0

№5.

$$\begin{cases} x = \cos t - \ln\left(tg\,\frac{t}{2}\right) \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(\cos t - \ln\left(tg\,\frac{t}{2}\right)\right)'_t}{(\sin t)'_t} = \frac{-\sin t - \frac{\left(tg\,t/2\right)'}{tg\,t/2}}{\cos t} =$$

$$= \frac{-\sin t - \frac{1/\cos^2 t/2}{tg\,t/2}\cdot\left(t/2\right)'}{\cos t} = \frac{-\sin t - \frac{\cancel{\cos t/2}}{\sin t/2 \cdot \cos^{\cancel{2}} t/2}\cdot\frac{1}{2}}{\cos z} =$$

$$= \frac{-\sin t - \frac{1}{2\sin t/2\,\cos t/2}}{\cos t} = \frac{-\sin t - \frac{1}{\sin t}}{\cos t} = -\frac{\sin^2 t + 1}{\cos t \sin t} =$$

$$= -\frac{+2\sin^2 t + 2}{2\cos t \sin t} = -\frac{+2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} + 2}{\sin 2t} = -\frac{1-\cos 2t + 2}{\sin(2t)} =$$

$$= -\frac{3-\cos 2t}{\sin 2t} = \boxed{\frac{\cos 2t - 3}{\sin 2t}}$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{\cos 2t - 3}{\sin 2t}\right)'_t}{(\sin t)'_t} = \frac{(\cos 2t - 3)'\sin 2t - (\sin 2t)'(\cos 2t - 3)}{\sin^2(2t)\cdot\cos t} =$$

$$= \frac{-\sin 2t\cdot(2t)'\cdot\sin(2t) - \cos 2t\cdot(2t)'\cdot(\cos 2t - 3)}{\sin^2(2t)\cdot\cos t} =$$

$$= \boxed{\frac{-2\sin^2 2t - 2\cos^2 2t + 6\cos(2t)}{\sin^2(2t)\cdot\cos t}} = \frac{-2(\sin^2 2t + \cos^2 2t) + 6\cos 2t}{\sin^2(2t)\cos t} =$$

$$= \boxed{\frac{6\cos(2t) - 2}{\sin^2(2t)\cos t}}$$

№6.

$$x^3+xy+y^2=0 \Rightarrow \left(x^3+xy+y^2\right)'_x = 0$$

$$3x^2 + (x'_x)y + (y'_x)x + 2y\cdot y'_x = 0$$

$$3x^2+y+y'_x(x+2y)=0$$

$$\boxed{y'_x = \frac{-3x^2-y}{x+2y}}$$

$$\left(3x^2+y+y'_x x+2yy'_x\right)'_x = 0$$

$$6x + y'_x + (y'_x)'_x x + y'_x (x)'_x + (2y)'_x y'_x + 2y\cdot(y'_x)'_x = 0$$

$$6x + y'_x + xy''_{xx} + (y'_x) + 2y'_x y'_x + 2y\, y''_{xx} = 0$$

$$y''_{xx}(x+2y) + 6x + 2y'_x + 2(y'_x)^2 = 0$$

$$\boxed{y''_{xx} = \frac{-6x-2y'_x-2(y'_x)^2}{x+2y}}$$

№7.

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(tg\,x+\frac{2}{2x-\pi}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{tg\,x(2x-\pi)+2}{2x-\pi}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2tgx\cdot x-\pi tgx+2}{2x-\pi}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(2x)'tgx+(tgx)'2x-\pi(tgx)'}{2}=$$

по правилу Лопиталя

$$2\frac{\sin x}{\cos x}\cos^2 x=2\sin x\cos x=\sin(2x)$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2tgx+\frac{2x}{\cos^2x}-\frac{\pi}{\cos^2x}}{2}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2tgx\cos^2x+2x-\pi}{2\cos^2x}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin 2x+2x-\pi}{2\cos^2x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\cos(2x)+2}{-2\cdot2\cos x\cdot\sin x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{2\cos2x+2}{-2\sin(2x)}=$$

по правилу Лопиталя

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(2x)+1}{-\sin(2x)}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-2\sin(2x)}{-\cos(2x)\cdot2}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}tg(2x)=tg\left(\frac{2\pi}{2}\right)=tg\pi=\boxed{0}$$

№8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin x - x\cos x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2x-x}+\frac{x^3}{3!}-o(x^3)\cancel{-x}+\frac{x^3}{2!}-o(x^3)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}\right)-o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\boxed{2/3}$$

№9.

$$f(x)=\frac{2^{x^2}}{1+x^2}$$

Рассмотрим $g(y)=\frac{2^y}{1+y}$. Тогда $f(x)=g(x^2)$.

Тогда $T(f,x^4)\approx T(g,x^2)$, где $T(a,b)$ – представление функции a локальной формулой Тейлора . с остаточным членом $o(b)$

$$g(y)=\frac{2^y}{1+y}\Rightarrow g(0)=\frac{2^0}{1+0}=1$$

$$g'_y(y)=\left(\frac{2^y}{1+y}\right)'=\frac{(2^y)'(1+y)-(1+y)'2^y}{(1+y)^2}=\frac{2^y\ln 2(1+y)-2^y}{(1+y)^2}\Rightarrow g'(0)=\frac{2^0\cdot\ln 2(1+0)-2^0}{(1+0)^2}=$$

$$=\frac{\ln 2-1}{1}=\ln 2-1$$

$$g''_{yy}(y)=\left(\frac{2^y(\ln 2+y\ln 2-1)}{(1+y)^2}\right)'=\frac{\left(2^y(\ln 2+y\ln 2-1)\right)'(1+y)^2-((1+y)^2)'\cdot 2^y(\ln 2+y\ln 2-1)}{(1+y)^4}=$$

$$= \frac{(1+y)^2\cdot\left((2^y)'(\ln 2 + y\ln 2 - 1) + 2^y(\ln 2 + y\ln 2 - 1)'\right) - 2(1+y)\cdot 2^y(\ln 2 + y\ln 2 - 1)}{(1+y)^4} =$$

$$= \frac{(1+y)^2\cdot\left(2^y\ln 2(\ln 2 + y\ln 2 - 1) + 2^y\cdot\ln 2\right) - 2(1+y)\cdot 2^y\cdot(\ln 2 + y\ln 2 - 1)}{(1+y)^4}$$

$$\Rightarrow g''_{yy}(0) = \frac{(1+0)^2\cdot(2^0\ln 2(\ln 2 + 0\ln 2 - 1) + 2^0\ln 2) - 2(1+0)\cdot 2^0\cdot(\ln 2 + 0\ln 2 - 1)}{(1+0)^4} =$$

$$= \ln 2(\ln 2 - 1) + \ln 2 - 2(\ln 2 - 1) = \ln^2 2 \cancel{- \ln 2} \cancel{+ \ln 2} - 2\ln 2 + 2 =$$

$$= \ln^2 2 - 2\ln 2 + 2 =$$

$$= (\ln 2 - 1)^2 + 1$$

$$\Rightarrow g(y) = \frac{2^y}{1+y} = 1 + \frac{\ln 2 - 1}{1!}y + \frac{(\ln 2 - 1)^2 + 1}{2!}y^2 + o(x^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x^2) = \frac{2^{x^2}}{1+x^2} = 1 + \frac{\ln 2 - 1}{1}\cdot x^2 + \frac{(\ln 2 - 1)^2 + 1}{2}\cdot x^4 + o(x^4)$$

Ответ: $1 + x^2(\ln 2 - 1) + x^4\cdot\frac{(\ln 2 - 1)^2 + 1}{2} + o(x^4)$

№10

$$y_к = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y_н = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

1) $x_0 = x(t) = x\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \cos\frac{\pi}{3} - \ln\left(tg\,\frac{\pi/3}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

2) $f(x_0) = y(t) = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $f'(x_0) = y'_x(t) = y'_x\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

$= \frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right) - 3}{\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{-1/2 - 3}{\sqrt{3}/2} =$

$= \frac{-\frac{1}{2} - \frac{6}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-7}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow y_к = \frac{-7}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_н = -\frac{1}{-7/\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{7}\left(x - \frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$