№43.19

б) $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$L = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Найдём ортог. базис L:

$\exists\ a_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Тогда $a_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \overset{6/7}{\frac{2+1+3}{4+1+1+1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$

$a_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \overset{11/7}{\frac{2+2+8-1}{4+1+1+1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \overset{3/7}{\frac{-5+2+120+6}{25+1+225+36}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} =$

$\sim \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 56 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 22 \\ 11 \\ 11 \\ -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 45 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow L = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\Rightarrow \text{пр}_L x = \frac{10+2-2+2}{4+1+1+1}\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{-25+2-30+12}{25+1+225+36}\begin{pmatrix}-5\\1\\15\\6\end{pmatrix} =$$

$2/7 \qquad -1/7$

$$= \frac{1}{7}\left(\begin{pmatrix}[illegible]\\ [illegible]\\ [illegible]\\ [illegible]\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\-1\\-15\\-6\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}21\\7\\-7\\-14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_L^{\perp} = \begin{pmatrix}5\\2\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

Ответ: $\text{пр}_L x = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$; $x_L^{\perp} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\4\end{pmatrix}$

б) $x = \begin{pmatrix}7\\-4\\-1\\2\end{pmatrix}$,

$$L: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$L: \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-4\end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдём ортог. базис $L^\perp$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 11 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ — ортог. базис.}$$

$$\Rightarrow \text{пр}_{L^\perp} x = x_L^\perp = \frac{7}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-4-1}{1+1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 7 \\ -5/2 \\ -5/2 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow \text{пр}_L x = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -5/2 \\ -5/2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

№1374а

$x = (4 \;\; 2 \;\; -5 \;\; 1)$

$$L': \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - \frac{x_4}{2} \\ x_2 = x_3/2 + x_4/2 - 3 \\ x_3 = x_3;\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ФСР}: \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow L = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x - x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7/2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho(x, L') = \|(x - x_0)^{\perp}_{L}\|$$

$$L = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow L^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдём ортог. базис $L^{\perp}$.

Пусть $a_1' = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Тогда по формуле Грама – Шмидта,

$$a_2' = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-1\end{pmatrix} \overbrace{- \frac{-1}{4+1}}^{+1/5} \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}0\\10\\-5\\-5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\10\\-5\\-4\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\Rightarrow (x-x_0)_{L}^{\perp} = \text{пр}_{L^{\perp}}(x-x_0) =}$$

$$\Rightarrow (x-x_0)_{L}^{\perp} = \text{пр}_{L^{\perp}}(x-x_0) =$$

$$= \frac{2+1}{4+1}\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{2+35+25-4}{4+100+25+16}\begin{pmatrix}2\\10\\-5\\-4\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\10\\-5\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\left(\begin{pmatrix}6\\0\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\20\\-10\\-8\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \| (x - x_0)_L^{\perp} \| = \sqrt{4+16+4+1} = \sqrt{25} = 5$$

Ответ: 5

№1377.

$$\begin{cases} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1) \\ X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (2) \end{cases}$$

$$\rho((1),(2)) = \min_{\substack{x_1 \in (1) \\ x_2 \in (2)}} \rho(x_1, x_2) = \| (x_1 - x_2)^{\perp}_{L_1 + L_2} \|$$

- $$x_1 - x_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- $$L_1 + L_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle -$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & +2 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_1 + L_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ +2 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдём ортог. базис L_1+L_2:

Пусть $a_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогда по формуле Грама – Шмидта

$$a_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ +2 \\ +1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow пр^{\perp}_{L_1+L_2} x_1 - x_2 = \frac{3+2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-3+8+2}{1+16+1} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{5}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\Rightarrow \rho(①,②) = \sqrt{1+36+16+25}}$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2) \perp L = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(①,②) = \sqrt{4+1+4} = 3$$

Ответ: 3

№1402

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдём ортог. базис L:

$$\exists\, a_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Тогда по формуле Грама-Шмидта:

$$a_2' = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4+4-2}{1+1+4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{6}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{пр}_L x = \frac{2-1+2}{1+1+4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2+2-1-1}{1+1+1+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ - \\ - \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1\\-1\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos(x, L) = \cos(x, \text{пр}_L x) = \frac{1+2-1+1/2}{\sqrt{4+4+1+1}\sqrt{\frac{1}{4}+1+1+\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{\overset{=5/2}{2.5}}{\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle(x, L) = \arccos\frac{1}{2} = \pi/3$$

Ответ: $\pi/3$

№1403

$$x = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix} \quad L = \left\langle \begin{pmatrix}5\\3\\4\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}5 & 3 & 4 & -3\\1 & 1 & 4 & 5\\2 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Найдём ортог. базис L методом Грама-Шмидта:

$$\exists\, a_1' = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_2' = \begin{pmatrix}5\\3\\4\\-3\end{pmatrix} - \frac{\overset{5}{10-3+4-6}}{\underset{10}{4+1+1+4}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}10\\6\\8\\-6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\7\\7\\-8\end{pmatrix}$$

$$a_3' = \begin{pmatrix}1\\1\\4\\5\end{pmatrix} - \frac{2-1+4+10}{4+1+1+4}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{8+7+28-40}{(64+49)\cdot 2}\begin{pmatrix}8\\7\\7\\-8\end{pmatrix} =$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{226}\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}}$$

№1403

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \; L = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Найдём ортог. базис L.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & +3 & +7 & +8 \\ 0 & +2 & +16 & +28 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -20 \\ 0 & 1 & 8 & 14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -9 & -20 \\ 0 & 0 & 17 & 34 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Пусть $a_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

По формуле Грама-Шмидта,

$$a_2' = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$a_3' = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\\3\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$p_L x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1+9}{15}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix} =$$

$$\cancel{= \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}3\\0\\0\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\0\\2\end{pmatrix} + \dots\right)}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}3\\0\\0\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\8\\12\\4\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}9\\6\\12\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/2\\1\\2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{x, L}) = \cos(\widehat{x, \text{пр}_L x}) = \frac{\frac{3}{2}+6}{\sqrt{1+9}\,\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1+4+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{15/2}{\sqrt{10}\,\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{4}{4}+\frac{16}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{15/2}{\sqrt{10}\,\frac{\sqrt{30}}{2}} = \frac{3\cancel{15}}{\cancel{10}\sqrt{3}\,2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \angle(\widehat{x, L}) = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi/6$$

Ответ: $\pi/6$