№63.42

д) $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ – ортогональный ЛО

$A \neq A^T$ в ОНБ $\Rightarrow$ это отображение и поворот

$\Rightarrow \lambda_3 = 1$ или $\lambda_3 = -1$ – с.з. A.

$A - E = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_3 = 1$ – с.з. A

с.в.: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. $\exists\, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

– вектор канонического базиса

$\Rightarrow \{e_1, e_2\}$ – базис $\{e_3\}^\perp$

$\Rightarrow \{e_1, e_2\} \sim \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \sim \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

ОНБ $\{e_1, e_2\}$.

• trA – инвариант $\Rightarrow 2\cos\alpha + 1 = 5/3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = 1/3 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\alpha \in (0, \pi))$

$$\Rightarrow K = \begin{pmatrix} 1/3 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ~ канонический вид

Проверим $\{e_1, e_2, e_3\}$

$\overline{e_3}$ — направляющий вектор оси вращения

$\Rightarrow A$ — оператор поворота в $\langle e_1, e_2 \rangle$

$\Rightarrow Ae_2 \overset{?}{=} e_2 \cos\alpha - e_1 \sin\alpha$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ канонический базис: $\{e_1, -e_2, e_3\}$

Ответ: $$K = \begin{pmatrix} 1/3 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

канон. базис: $\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

е) $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt6 \\ 3 & 1 & -\sqrt6 \\ -\sqrt6 & \sqrt6 & -2 \end{pmatrix}$ — ортогональный ЛО

$A \neq A^T \Rightarrow$ это отражение и поворот.

$\Rightarrow \lambda_3 = 1$ или $\lambda_3 = -1$ — с.з. A.

$$A - E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 3 & \sqrt6 \\ 3 & -3 & -\sqrt6 \\ -\sqrt6 & \sqrt6 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 3 & \sqrt6 \\ -\sqrt6 & \sqrt6 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{\sqrt6}{3} \\ 1 & -1 & \frac{2}{\sqrt6} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{\sqrt6}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt6} \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{с.в. } \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$e_3 = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — ось поворота.

$\mathrm{tr}\, A = 2\cos\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$ — косинус угла поворота.

Найдем базис плоскости, в которой происходит поворот: $\{e_1, e_2\} = \{e_3\}^\perp = \left\{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$Ae_2 = \cos\alpha\, e_2 - \sin\alpha\, e_1$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt6 \\ 3 & 1 & -\sqrt6 \\ -\sqrt6 & \sqrt6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} - \sin\alpha \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 \\ -\sqrt{6}/4 \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin\alpha \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ Канонический вид: $\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Канонический базис: $\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

№8.24

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$

$\Downarrow$

$\exists QR: QR = A$

2) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\exists\, b_1 = a_1$

Г.-Ш.: $b_2^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ -8/3 \end{pmatrix} \sim$

$\overset{\cdot 3/4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$b_3' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\cancel{-14}^{\,-7}}{\cancel{6}_{\,3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{\cdot 3}{\sim} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{:3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

То есть,
$$\begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = \frac{3}{4}\left(a_2 - \frac{5}{3} b_1\right) \\ b_3 = a_3 - \frac{4}{3} b_1 + \frac{7}{3} b_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = \frac{5}{3} b_1 + \frac{4}{3} b_2 \\ a_3 = \frac{4}{3} b_1 - \frac{7}{3} b_2 + b_3 \end{cases}$$

Нормируем b:

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1};\quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{b_2};\quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_3}$$

$$\Rightarrow b_1 = q_1\sqrt{3};\ b_2 = \sqrt{6}\, q_2;\ b_3 = \sqrt{2}\, q_3$$
$(q_1, q_2, q_3 - \text{онб})$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = q_1\sqrt{3} \\ a_2 = \frac{5}{\sqrt{3}} q_1 + \frac{4\sqrt{6}}{3} q_2 \\ a_3 = \frac{4\sqrt{3}}{3} q_1 - \frac{7\sqrt{6}}{3} q_2 + \sqrt{2}\, q_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}}_{Q} \overbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{5}{\sqrt{3}} & 4\sqrt{3}/3 \\ 0 & 4\sqrt{6}/3 & -7\sqrt{6}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}^{R}$$

Ответ: $A = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/3 & 0 \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5\sqrt{3}/3 & 4\sqrt{3}/3 \\ 0 & 4\sqrt{6}/3 & -\frac{7\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{R}$

③ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$

$\exists Q, R: A = QR$

2) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Г.-Ш.:

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{\cdot 3/2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\cancel{-2}^{\,-1}}{\cancel{6}_{\,3}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нормируем b:

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} b_1, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} b_2; \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_3$$

(q_1, q_2, q_3 − ОНБ)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} q_1 = a_1 \\ \sqrt{6} q_2 = \frac{3}{2}\left(a_2 + \frac{1}{3}\sqrt{3} q_1\right) \\ \sqrt{2} q_3 = a_3 + \frac{1}{3}\sqrt{3} q_1 + \frac{1}{3}\sqrt{6} q_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \sqrt{3} q_1 \\ a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} q_1 + \frac{2\sqrt{6}}{3} q_2 \\ a_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3} q_1 - \frac{\sqrt{6}}{3} q_2 + \sqrt{2} q_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_1 \ a_2 \ a_3)}_{A} = \underbrace{(q_1 \ q_2 \ q_3)}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & 2\sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{R}$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/3 \\ 0 & 2\sqrt{6}/3 & -\sqrt{6}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

№8.33

① $A=\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^TA=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 84 & 48 & 24 \\ 48 & 84 & 24 \\ 24 & 24 & 48 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A^TA}(\lambda)=\begin{vmatrix} 84-\lambda & 48 & 24 \\ 48 & 84-\lambda & 24 \\ 24 & 24 & 48-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 36-\lambda & \lambda-36 & 0 \\ 0 & 36-\lambda & 2\lambda-72 \\ 24 & 24 & 48-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(36-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 36-\lambda & 2\lambda-72 \\ 0 & 48 & 48-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(36-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 36-\lambda & 3\lambda-108 \\ 0 & 48 & -\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(36-\lambda)\Big(-\lambda(36-\lambda)-48(3\lambda-108)\Big)=$$

$$=(36-\lambda)(\lambda^2-180\lambda+5184)=(36-\lambda)(\lambda-144)(\lambda-36)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 36 \Rightarrow \sigma_1 = 6 \\ \lambda_2 = 144 \Rightarrow \sigma_2 = 12 \end{array}\right.$$

1) $\lambda_1 = 36$

$$\Rightarrow A^TA - 36E = \begin{pmatrix} 48 & 48 & 24 \\ 48 & 48 & 24 \\ 24 & 24 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{c.b.}: \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) $\lambda_2 = 144$

$$A^TA - 144E = \begin{pmatrix} -60 & 48 & 24 \\ 48 & -60 & 24 \\ 24 & 24 & -96 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -15 & 12 & 6 \\ 12 & -15 & 6 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 12 \\ 1 & 1 & -4 \\ 12 & -15 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -27 & 54 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{c.b.}: \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ базис из с.в.: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Найдём ОНБ из с.в. $\{u_i\}$

$$\exists\ u_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Г.-Ш.: $u_3' = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1/2}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Пусть $\Sigma = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & 4/\sqrt{18} \end{pmatrix}$

Найдём V_i: $V_i = \dfrac{Au_i}{\sigma_i}$

$$V_1 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \frac{1}{6\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \frac{1}{6\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

V_4 – дополнение V до ОНБ в $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} \\ 1/3 & 0 & 4/\sqrt{18} \end{pmatrix}^T$

② $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix}$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 8 & -8 \\ -1 & -1 & 7 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 208 & 112 & 8 \\ 112 & 160 & 104 \\ 8 & 104 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A^TA}(\lambda) = \begin{vmatrix} 208-\lambda & 112 & 8 \\ 112 & 160-\lambda & 104 \\ 8 & 104 & 100-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 96-\lambda & \lambda-48 & -96 \\ 104 & 56-\lambda & \lambda-4 \\ 8 & 104 & 100-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \dots = k\lambda(\lambda-144)(\lambda-324)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 324 \\ \lambda_2 = 144 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 18 \\ \sigma_2 = 12 \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

1)

$$A^TA - 324E = \begin{pmatrix} -116 & 112 & 8 \\ 112 & -164 & 104 \\ 8 & 104 & -224 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -14{,}5 & 14 & 1 \\ 14 & -20{,}5 & 13 \\ 1 & 13 & -28 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -0{,}5 & -6{,}5 & 14 \\ 14 & -20{,}5 & 13 \\ 1 & 13 & -28 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -13 & 28 \\ 14 & -20{,}5 & 13 \\ 1 & 13 & -28 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 13 & -28 \\ 0 & -202{,}5 & 405 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow c.l.\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $$A^TA - 144E = \begin{pmatrix} 64 & 112 & 8 \\ 112 & 16 & 104 \\ 8 & 104 & -44 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 14 & 1 \\ 7 & 1 & 6.5 \\ 1 & 13 & -5{,}5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -90 & 45 \\ 1 & 13 & -5{,}5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3/2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C.B.: \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u_2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $A^TA - 0E =$

$$= \begin{pmatrix} 208 & 112 & 8 \\ 112 & 160 & 104 \\ 8 & 104 & 100 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 26 & 14 & 1 \\ 14 & 20 & 13 \\ 1 & 13 & 12{,}5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 12 & -6 & -12 \\ 14 & 20 & 13 \\ 1 & 13 & 12{,}5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 27 & 27 \\ 1 & 13 & 12{,}5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -0{,}5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_3}{2} \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$C.B.: \left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u_3 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём V: $v_i = \dfrac{A u_i}{\sigma_i}$

$$v_1 = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \underset{1/18}{\frac{2}{12 \cdot 3}} \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 2 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$\{v_3; v_4\}$ — дополнение $\{v_1, v_2\}$ до онб $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ФСР}: \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T$$

№ 66.54

$$A = \begin{pmatrix} 23 & -14 \\ 14 & -2 \end{pmatrix}$$

Найдём сингулярное разложение A.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 23 & 14 \\ -14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 & -14 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 725 & -350 \\ -350 & 200 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A^TA}(\lambda) = \begin{vmatrix} 725-\lambda & -350 \\ -350 & 200-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (725-\lambda)(200-\lambda) - 350^2 = \lambda^2 - 925\lambda + 22500 = 0$$

$$(\lambda - 900)(\lambda - 25) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 900 \\ \lambda_2 = 25 \end{array}\right. \text{ — с.з. } A^TA \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 30 \\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 5 \end{array}\right. \text{ — синг. числа } A.$$

$$\cancel{1)\ A^TA - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -7 & -14 \\ 14 & -32 \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{1)\ A^TA - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 695 & -350 \\ -350 & 170 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 139 & -70 \\ -35 & 17 \end{pmatrix}}$$

$$1)\ A^TA - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -175 & -350 \\ -350 & -700 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{с.в.: } \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2)\ A^TA-\lambda_2E=\begin{pmatrix}700 & -350\\ -350 & 175\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \text{с.в.}: \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$u_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{u_1,u_2\}$ — ОНБ из с.в. A^TA

$$\Rightarrow U=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & 1/\sqrt5\\ 1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix};\ \Sigma=\begin{pmatrix}30 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

$$\exists\ v_i=\frac{Au_i}{\sigma_i}$$

$\Downarrow$

$$v_1=\frac{1}{30\sqrt5}\begin{pmatrix}23 & -14\\ 14 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{30\sqrt5}\begin{pmatrix}-60\\-30\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$v_2=\frac{1}{5\sqrt5}\begin{pmatrix}23 & -14\\ 14 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{5\sqrt5}\begin{pmatrix}-5\\10\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{v_1,v_2\} - \text{ОНБ} \Rightarrow V=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & -1/\sqrt5\\ -1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\underbrace{\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & -1/\sqrt5\\ -1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}}_{=V}\underbrace{\begin{pmatrix}30 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}}_{=\Sigma}\underbrace{\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & 1/\sqrt5\\ 1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}^T}_{=U}$$

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & -1/\sqrt5\\ -1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & -1/\sqrt5\\ -1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}^T}_{S}\underbrace{\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & -1/\sqrt5\\ -1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & 1/\sqrt5\\ 1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}^T}_{O}$$

E, т.к. V ортогональна

$\Rightarrow A=SO$, где

$$S=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & -1/\sqrt5\\ -1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & -1/\sqrt5\\ -1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}^T=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-12 & -1\\ -6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & 10\\ 10 & 10\end{pmatrix}$$ — симметр. матрица

$$O=\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & -1/\sqrt5\\ -1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2/\sqrt5 & 1/\sqrt5\\ 1/\sqrt5 & 2/\sqrt5\end{pmatrix}^T=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/5 & -4/5\\ 4/5 & 3/5\end{pmatrix}$$ — ортогональная матрица

Ответ: $A=\begin{pmatrix}25 & 10\\ 10 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/5 & -4/5\\ 4/5 & 3/5\end{pmatrix}$

№6.

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\2&4&-1\\-1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}2&0&1\\2&4&-1\\-1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&1\\4&4&0\\-1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&1\\0&4&0\\-3&2&3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2&0&3\\0&4&0\\-3&2&0\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}2&0&3\\0&1&0\\-3&0&0\end{vmatrix}=+36\neq 0$$

$\Downarrow$

искомое представление существует.

Пусть $a_1=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$; $a_2=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}$; $a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ — столбцы A.

Ортогонализируем $\{a_1,a_2,a_3\}$ методом ортогонализации Грама – Шмидта:

$$\exists\ b_1=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$b_2=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}-\frac{6}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\overset{\cdot 3}{\sim}\begin{pmatrix}0\\12\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\8\\8\end{pmatrix}\sim$$

$$\overset{:4}{\sim}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}/b_2$$

$$b_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} - \frac{-3}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} - \frac{3}{9}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{\cdot 3}{\sim} \begin{pmatrix}3\\-3\\9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix} \overset{:3}{\sim} \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}_{b_3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = \left(a_2 - \frac{2}{3}b_1\right)\cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \\ b_3 = \left(a_3 + \frac{1}{3}b_1 - \frac{1}{3}b_2\right)\cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \end{cases}, \ \{b_1, b_2, b_3\} \text{ — ортогональные векторы}$$

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = \frac{2}{3}b_1 + \frac{4}{3}b_2 \\ a_3 = -\frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{3}b_2 + b_3 \end{cases}$$

Пусть $q_1 = \frac{1}{3}b_1$, $q_2 = \frac{1}{3}b_2$, $q_3 = \frac{1}{3}b_3$

Тогда $\{q_1, q_2, q_3\}$ — ОНБ $\Rightarrow Q = (q_1\, q_2\, q_3)$ — ортогональная матрица.

в матричной форме

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3q_1 \\ a_2 = 2q_1 + 4q_2 \\ a_3 = -q_1 + q_2 + 3q_3 \end{cases} \Rightarrow (a_1\, a_2\, a_3) = (q_1\, q_2\, q_3)\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\0 & 4 & 1\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{R}$$

Ответ:

№7

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & -4 \\ 5 & 5 & 7 & -7 \\ 1 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 & 136 & 56 \\ 136 & 148 & 80 \\ 56 & 80 & 52 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A^TA}(\lambda) = \begin{vmatrix} 160-\lambda & 136 & 56 \\ 136 & 148-\lambda & 80 \\ 56 & 80 & 52-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 4^3 \begin{vmatrix} 40-\varphi & 34 & 14 \\ 34 & 37-\varphi & 20 \\ 14 & 20 & 13-\varphi \end{vmatrix} =$$

пусть $\varphi = \lambda/4$

$$= 4^3 \begin{vmatrix} 6-\varphi & \varphi-3 & -6 \\ 6 & -3-\varphi & 2\varphi-6 \\ 14 & 20 & 13-\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= 4^3 \begin{vmatrix} -\varphi & 2\varphi & -2\varphi \\ 6 & -3-\varphi & 2\varphi-6 \\ 14 & 20 & 13-\varphi \end{vmatrix} = 4^3\varphi \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 6 & -3-\varphi & 2\varphi-6 \\ 14 & 20 & 13-\varphi \end{vmatrix} =$$

$$\cancel{= 4^3\varphi \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 6 & -3-\varphi & -12 \\ 14 & 20 & 33-\varphi \end{vmatrix} =}$$

$$= 4^3\varphi \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 9-\varphi & \varphi-9 \\ 14 & 48 & 33-\varphi \end{vmatrix} = -4^3\varphi \begin{vmatrix} 9-\varphi & 0 \\ 48 & 81-\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -4^3\varphi(9-\varphi)(81-\varphi) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi_2 = 9 \\ \varphi_1 = 81 \\ \varphi_3 = 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \lambda_2 = 9 \cdot 4 = 36 \\ \lambda_1 = 81 \cdot 4 = 324 \\ \lambda_3 = 0 \cdot 4 = 0 \end{array}\right.$ – собственные значения A^TA

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sigma_1 = 18 \\ \sigma_2 = 6 \\ \sigma_3 = 0 \end{array}\right.$ – сингулярные числа A.

1) $A^TA - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -164 & 136 & 56 \\ 136 & -176 & 80 \\ 56 & 80 & -272 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} -164 & 136 & 56 \\ -28 & -40 & 136 \\ 56 & 80 & -272 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -41 & 34 & 14 \\ 7 & 10 & -34 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 94 & -190 \\ 7 & 10 & -34 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 94 & -190 \\ 0 & -648 & 1296 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\to \text{c.b.: } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$u_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $A^T A - \lambda_2 E =$

$$= \begin{pmatrix} 124 & 136 & 56 \\ 136 & 112 & 80 \\ 56 & 80 & 16 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 12 & -24 & 24 \\ 12 & -24 & 24 \\ 56 & 80 & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 192 & -96 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{c.b.: } \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$u_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3) $A^T A - \lambda_3 E =$

$$= \begin{pmatrix} 160 & 136 & 56 \\ 136 & 148 & 80 \\ 56 & 80 & 52 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 24 & -12 & -24 \\ 24 & -12 & -24 \\ 56 & 80 & 52 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 108 & 108 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{с.в.: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$u_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$ — ортогональная матрица, т.к. $\{u_1, u_2, u_3\}$ — ОНБ (u_1, u_2, u_3 — с.в. длины 1, отвечающие разным с.з. самосопряжённого оператора A^TA).

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $v_i = \dfrac{Au_i}{\sigma_i}$, то есть

$$v_1 = \frac{1}{3 \cdot 18} \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{3 \cdot 6} \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

v_3, v_4 — ортонормированное дополнение $\{v_1, v_2\}$ до ОНБ $\mathbb{R}^4$:

$\Rightarrow v_3, v_4$ — ФСР СЛАУ $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} x = 0$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{ФСР}: \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow V_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad V_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ — ОНБ $\Rightarrow$

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ортогональная матрица

$$V_i = \frac{AU_i}{\sigma_i} \Rightarrow V_i \sigma_i = AU_i$$

$\Downarrow$ в матричной форме

$$V\Sigma = AU \Rightarrow A = V \Sigma U^T$$

сингулярное разложение

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

№9

$$k = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 5x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$A^T = A$ в ОНБ $\Rightarrow \exists\, U \in O_3(\mathbb{R})$; V — диагональная матрица:

искомое

$A = UVU^T$; U — ортогональное преобразование.

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -1 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+2) \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -2-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+2)\left(\lambda(5-\lambda) + 2 - 4(5-\lambda)\right) =$$

$$= (\lambda+2)\left(5\lambda - \lambda^2 + 2 - 20 + 4\lambda\right) = (\lambda+2)\left(-\lambda^2 + 9\lambda - 18\right) =$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 3 \quad - \text{c.з } A \\ \lambda_3 = 6 \end{array} \right.$$

$$1)\ A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{с.в.}: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\sim \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$2)\ A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{с.в.}: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \sim \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3) $A-\lambda_3 E=\begin{pmatrix}-5 & -3 & -1\\ -3 & -5 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\to$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 8 & -4\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & -1/2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ с.в.: $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}\sim$

$\sim\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$ — ОНБ из с.в. A,

так как A — самосопряжённый ($A=A^T$ в ОНБ)

$\Rightarrow U=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6\\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6\\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3\end{pmatrix}$ — матрица перехода от изначального ОНБ к ОНБ из с.в. (ортогональная замена координат).

$V=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow K'=-2x_1^2+3x_2^2+6x_3^2$

$\mathrm{Rg}\,K=3;\ i_+=2;\ i_-=1$

$\begin{cases}e_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2\\ e_2'=\frac{\sqrt{3}}{3}e_1-\frac{\sqrt{3}}{3}e_2+\frac{\sqrt{3}}{3}e_3\\ e_3'=-\frac{\sqrt{6}}{6}e_1+\frac{\sqrt{6}}{6}e_2+\frac{\sqrt{6}}{3}e_3\end{cases}$ линейное преобразование:

№ из письма

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 5 & -13 \end{pmatrix}$$

$A = SO - ?$, где O — ортогональный оператор,
S — самосопряжённый оператор,

То есть необходимо найти представление матрицы A в виде произведения ортогональной матрицы и симметрической матрицы в ОНБ.

По теореме о полярном разложении, это возможно всегда.

$$A^T A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 5 & -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 26 & -72 \\ -72 & 218 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -36 \\ -36 & 109 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{A^TA}(\lambda) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -36 \\ -36 & 109-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{(13-\lambda)(98-\lambda) - 36^2 = \lambda^2 - 101\lambda - 152} =$$

$$= (13-\lambda)(109-\lambda) - 36^2 = \lambda^2 - 122\lambda + 121 =$$

$$= (\lambda - 121)(\lambda - 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 121\\ \lambda_2 = 1\end{array}\right. \text{ — с.з. } A^TA$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sigma_1 = 11\\ \sigma_2 = 1\end{array}\right. \text{ — сингулярные числа } A.$$

$$1)\ A^TA - \lambda_1 E = \begin{pmatrix}-108 & -36\\ -36 & -12\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix} \cancel{\Rightarrow \text{с.б.}} \left\{\cancel{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{с.б.} \left\{\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\} \qquad \cancel{u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

$$2)\ A^TA - \lambda_2 E = \begin{pmatrix}12 & -36\\ -36 & 108\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow \text{с.б.} \left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix}11 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Пусть $v_i = \frac{Au_i}{\sigma_i}$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{11\sqrt{10}\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -7\\ 5 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{1\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1 & -7\\ 5 & -13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}^T$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}^T}_{S}\underbrace{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}^T}_{O}$$

E

$$S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -11 & -2 \\ -22 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 45 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$ — матрица симметрического оператора

$$O = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ — матрица ортогонального оператора

Ответ:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix};\ O = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$