Д35

№2

Пусть $A \sim \underline{n}$ — множество людей в группе.

$B \sim \underline{366}$ — наибольшее количество дней в году.

По условию, если A подходит, то $\forall f: A \to B$

функция, сопоставляющая человеку его день рождения

~~$\forall b \in B\ \exists a \in A: f(a) = b$~~

$\exists a_1, a_2 \in A: f(a_1) = f(a_2)$

Если n гарантирует выполнение условия, то $\exists a_1, a_2 \in A: f(a_1) = f(a_2)$ и $\forall b \in B\ \exists a_3 \in A: f(a_3) = b$, то есть невозможно „поменять" день рождения a_2 так, чтобы оно не совпадало ни с кем.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \forall b \in B\ \exists a \in A: f(a) = b & (1) \\ \exists b \in B: \exists a_1, a_2 \in A: f(a_1) = b \wedge f(a_2) = b & (2) \end{array}\right.$$

Т.к. $|B| = 366$, то $|A| \geq 366$ по (1).

Т.к. по (2) $\exists b: |f[\{b\}]| \geq 2$, то $|A| \neq 366$.

$\Rightarrow |A| > 366 \Rightarrow \min(|A|) = 367$

Ответ: 367.

№4

$1224 = 2 \cdot 612 = 2 \cdot 2 \cdot 306 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 153 =$

$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 51 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17$

Пусть $A = \{2, 2, 2, 3, 3, 17\}$

Пусть $B \in \mathcal{P}(A)$, ~~$\Leftrightarrow \exists B$~~

$\Rightarrow$ $x = \prod_{b \in B} b$ – произведение элементов B.

Тогда $x \mid 1224$, причём если $C = \{x \mid x = \prod_{b \in B} b\}$, то

$C \sim B$ и $\forall a \notin C \quad a \nmid 1224$

$\Rightarrow$ Искомое значение – $|\{B\}| = |\mathcal{P}(A)|$

Заметим, что $\forall B \in \mathcal{P}(A) \quad B = \{\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{0 \le n \le 3 \text{ штук}}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{0 \le m \le 2 \text{ штук}}, \underbrace{17, \ldots, 17}_{0 \le k \le 1 \text{ штук}}\}$

$\Rightarrow B = X \cup Y \cup Z$, где $X = \{2, 2, \ldots, 2\}$
$Y = \{3, \ldots, 3\}$ $\Rightarrow$
$Z = \{17, \ldots 17\}$

~~$|\{B\}| = |\{X\}| \cdot |\{Y\}| \cdot |\{Z\}|$~~

$\Rightarrow \underbrace{|\{B\}|}_{\text{все такие } B} = \underbrace{|\{X\}|}_{\text{все } X} \cdot \underbrace{|\{Y\}|}_{\text{все } Y} \cdot \underbrace{|\{Z\}|}_{\text{все } Z}$, т.к.

$(\{B\} \sim \{X\} \times \{Y\} \times \{Z\})$

$\forall x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 : (x_1 \neq x_2 \lor y_1 \neq y_2 \lor z_1 \neq z_2)$

$\Rightarrow B_1 \neq B_2$, то есть

$\exists f$ - биекция: $f: \{x\} \times \{y\} \times \{z\} \to \{B\}$.

По построению, $|\{x\}| = 4$; $|\{y\}| = 3$; $|\{z\}| = 2$

$\Rightarrow |\{B\}| = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Ответ: 24.

№5.

Пусть в i-й карман положено x_i монет. Тогда требуется, что $x_1 + x_2 + x_3 = 7$.

$\Rightarrow$ Кол.-во способов разложить 7 монет в 3 кармана равно кол.-ву способов выбрать $x_1, x_2, x_3 \in N$: $x_1 + x_2 + x_3 = 7$

Известно, что это $C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$

Ответ: 36.

№1.

Пусть A конечно. Тогда $A \setminus B$ конечно — противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A бесконечно (счётно или континуально).

A	B	$A \setminus B$
счётно	конечно	счётно $\Rightarrow A \setminus B \sim A$
счётно	счётно	счётно $\Rightarrow A \setminus B \sim A$ конечно $\Rightarrow$ противоречие
континуально	конечно	континуально (*) $\Rightarrow A \setminus B \sim A$
континуально	счётно	континуально $\Rightarrow$ (*) $\Rightarrow A \setminus B \sim A$.

ч.т.д.

(*) Для построения биекции можно „пропускать" удалённые элементы, то есть каждый удалённый элемент „сдвигает" отображение.

№6.

$\alpha = cbcad$.

В латинском алфавите 26 букв. Пусть β — искомое слово

1) Если β начинается с $d, e, f, \ldots, z$.
Тогда $\beta > \alpha \Rightarrow$ Таких β 0 штук

2) Если β начинается с a или b, то
$\forall \beta \quad \beta < \alpha \Rightarrow$ Таких β $C_2^1\left(1 + C_{26}^1 + (C_{26}^1)^2 + (C_{26}^1)^3 + (C_{26}^1)^4\right)$

$\underbrace{a/b} \Rightarrow C_2^1$; $\underbrace{a/b}\underbrace{a\ldots z} \Rightarrow C_2^1 \cdot C_{26}^1$

$\underbrace{a/b}\underbrace{a - z}\underbrace{a - z} \Rightarrow C_2^1 \cdot C_{26}^1 \cdot C_{26}^1$

$\underbrace{a/b}\underbrace{a - z}\underbrace{a - z}\underbrace{a - z} \Rightarrow C_2^1 (C_{26}^1)^3$

$\underbrace{a/b}\underbrace{a - z}\underbrace{a - z}\underbrace{a - z}\underbrace{a - z} \Rightarrow C_2^1 \cdot (C_{26}^1)^4$

3) Если β начинается с 'c', то

$\beta < \alpha$ может быть при $\quad (C_{26}^1)^0 +$

3.1) $\beta = ca\underbrace{a\ldots z}\underbrace{a\ldots z}\underbrace{a\ldots z} \Rightarrow (C_{26}^1) + (C_{26}^1)^2 +$
$+ (C_{26}^1)^3$

3.2) $\beta = cb\underbrace{\quad}\underbrace{\quad}\underbrace{\quad}$

3.2.1) $\beta = cb\underbrace{a/b}\underbrace{a\ldots z}\underbrace{a\ldots z} \Rightarrow 1 + C_2^1 +$
$+ C_2^1 \cdot C_{26}^1 + C_2^1 \cdot (C_{26}^1)^2$

3.2.2) $\beta = cbc\underbrace{\quad}\underbrace{\quad} \Rightarrow 1$

3.2.2.1) $\beta = cbca\underbrace{\quad} \Rightarrow 1$

3.2.2.1.1) $\beta = cbca\underbrace{a\ldots c} \Rightarrow 1 + C_3^1$

$$\Rightarrow N = C_2^1\left(1 + C_{26}^1 + (C_{26}^1)^2 + (C_{26}^1)^3 + (C_{26}^1)^4\right) +$$
$$+ \left(1 + C_{26}^1 + (C_{26}^1)^2 + (C_{26}^1)^3\right) + \left(1 + C_2^1 + C_2^1 C_{26}^1 + C_2^1 (C_{26}^1)^2\right)$$
$$+ 1 + 1 + 1 + C_3^1 =$$
$$= 2(1 + 26 + 26^2 + 26^3 + 26^4) + (1 + 26 + 26^2 + 26^3) +$$
$$+ (1 + 2(1 + 26 + 26^2)) + 3 + 3 =$$

$= 2\cdot(475255) + 18279 + 1 + 2(703) + 6 =$

$= \boxed{970202}$

Ответ: 970202

№7.

а) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = S$

1) $n = 0 \Rightarrow S = (-1)^0 \cdot C_0^0 = 1$

2) $n > 0$ и n нечётно

$\Rightarrow S = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots - C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} - C_n^n$

Заметим, что в S чётное кол.-во слагаемых и

$\forall x = C_n^k$ - слагаемое в S $\exists y = -C_n^{n-k}$ - слагаемое в S.

и $\forall x = -C_n^k$ - слаг. в S $\exists y = C_n^{n-k}$ - слаг. в S.

Известно, что $C_n^k - C_n^{n-k} = 0$; $-C_n^k + C_n^{n-k} = 0$

$\Rightarrow \boxed{S = 0}$

3) $n > 0$ и n чётно.

$$S = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + C_n^{n-2} - C_n^{n-1} + C_n^n$$

По тождеству Паскаля,

$$S = C_{n-1}^0 - (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^0) + (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^1) - (C_{n-1}^3 + C_{n-1}^2) + \ldots +$$
$$+ (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-3}) - (C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^{n-2}) + C_{n-1}^{n-1}$$

$$S = C_{n-1}^0 - C_{n-1}^1 - C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - C_{n-1}^3 - C_{n-1}^2 + \ldots +$$
$$+ C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-3} - C_{n-1}^{n-1} - C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1} = 0$$

из C_n^k

• $\forall x = C_{n-1}^k$ – слаг. в S $\exists y = -C_{n-1}^k$ – слаг. в S,

из $-C_n^{k+1}$

а $x + y = 0$.

• $\forall x = -C_{n-1}^k$ – слаг. в S $\exists y = +C_{n-1}^k$ – слаг. в S,

из $-C_n^k$ из C_n^{k+1}

а $x + y = 0$

Ответ: 1 при $n = 0$, 0 – иначе.

b) $\sum_{2|k} C_n^k = C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} =$

по тождеству Паскаля

$= C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-1}^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor - 1} + C_{n-1}^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} =$

$$= \begin{cases} C_{n-1}^{0} + C_{n-1}^{1} + C_{n-1}^{2} + \ldots + C_{n-1}^{n-1} + \cancel{C_{n-1}^{n}}^{\,0}, & \text{если } n \text{ чётно} \\ C_{n-1}^{0} + C_{n-1}^{1} + C_{n-1}^{2} + \ldots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}, & \text{если } n \text{ нечётно} \end{cases}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \underset{\text{по доказанному}}{=} 2^{n-1}$$

Ответ: 2^{n-1}

№8.

Для перемещение из точки $(0;0)$ в точку $(m;n)$, двигаясь только вправо и вверх, небоходимо сделать $m+n$ шагов, при чём ровно m из них вправо и n — вверх.

$\Rightarrow$ Количество способов добраться из $(0;0)$ в $(m;n)$ равно кол-ву способов сделать ровно m шагов вправо и n — вверх в некотором порядке.

По определению, это $C_{n+m}^{n} = C_{n+m}^{m}$

Ответ: C_{n+m}^{n}

№9.

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) =$$

$$= \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} \cdot \frac{n!}{n!} =$$

$$= \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!\, n!} \cdot n! =$$

$$= \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!\,(\underbrace{a+n-1}-a+1)!} \cdot n! = C_{a+n-1}^{a-1} \cdot n!$$

$$\Rightarrow \underbrace{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{C_{a+n-1}^{a-1}}_{\in \mathbb{Z}} n!$$

$$\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{C_{a+n-1}^{a-1}}_{\in \mathbb{Z}} \cdot n! \in \mathbb{Z}$$

Пусть $k = C_{a+n-1}^{a-1} \in \mathbb{Z}$; $x = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)$

По доказанному, $x = k \cdot n! \Rightarrow x \vdots n!$

ч.т.д.

№10

Если чётных и нечётных цифр поровну, а число шестизначное, то в числе по 3 чётные и нечётные цифры, причём в старшем разряде не может стоять 0.

Пусть в старшем разряде стоит $a \neq 0$. Выберем из оставшихся 5 мест два, в которых будут стоять цифры той же чётности, что и a: C_5^2 вариантов; в каждом разряде одна из 5-ти цифр. На остальные 3 разряда можно поставить любую из 5-ти цифр другой чётности.

Таким образом, $N = 9 \cdot C_5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 281250$

Ответ: 281250

• Множество всех таких чисел равномощно

$\cancel{\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \times P_2(5) \times [illegible] \{1,3,5,7,9\} \times \{0,2,4,6,8\}}$

$$\left(\{2,4,6,8\} \times P_2(5) \times \{0,2,4,6,8\}^2 \times \{1,3,5,7,9\}^3\right) \cup \left(\{1,3,5,7,9\} \times P_2(5) \times \{1,3,5,7,9\}^2 \times \{0,2,4,6,8\}^3\right)$$

№11.

Так как фрукты независимы, кол.-во способов разложить все фрукты равно произведению количеств способов разложить отдельные фрукты.

1) Пусть Иван получил x_1 яблок, Петр - x_2, Анна - x_3, Дарья - x_4.

Тогда кол.-во способов раздать яблоки равно кол.-ву способов выбрать x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 3 \text{ - груши} \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 2 \text{ - сливы} \end{cases}$$

Аналогично,

Известно, что кол.-во решений таких уравнений при $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$, $z_i \geq 0$

равно
$$\begin{cases} C_{6+4-1}^{4-1} = C_9^3 = 84 \\ C_{3+4-1}^{4-1} = C_6^3 = 20 \\ C_{2+4-1}^{4-1} = C_5^3 = 10 \end{cases}$$

$\Rightarrow N = 84 \cdot 20 \cdot 10 = 16800$

Ответ: 16800

№12

$(x^2+x^7+x^9)^{20}$

После раскрытия скобок в выражении останутся только члены вида kx^m, при чём $\begin{cases} m = 2x_1+7x_2+9x_3 = 57 \\ x_1+x_2+x_3 = 20 \end{cases}$

Здесь x_1 — кол.-во раз, сколько был выбран член x^2 при перемножении для получения x^m; x_2 — член x^7; x_3 — член x^9.

Заметим, что у этого уравнения единственное решение: $\begin{cases} x_1 = 17 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ при получении члена kx^{57} 17 раз был „взят" член x^2, 2 раза — x^7 и 1 раз x^9 в некотором порядке. Очевидно, что k — кол.-во способов сделать это, так как при перемножении скобок получились все „порядки" перемножений:

Из 20 скобок необходимо выбрать 17, из которых в x^{57} будет использован x^2, 2 скобки – x^7 и 1 скобка – x^9.

Очевидно, что $k = C_{20}^{17} \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = 3420$

Ответ: 3420

№13

~~Пусть в первый ...~~

Пусть в i-й карман положено x_i монет.

Тогда $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ x_3 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 + y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 = 7 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 4 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow C_{4+3-1}^{3-1} = C_6^2 = 15$

Ответ: 15.

№14

~~[illegible]~~ Зафиксируем 4 книги, которые должны остаться на месте. Способов сделать это — C_{10}^{4}.

Тогда оставшиеся 6 книг нужно переставить так, чтобы ни одна не осталась на своём месте. Количество способов сделать это — число беспорядков на множестве из 6 элементов — $6! \sum_{s=0}^{6} \frac{(-1)^s}{s!}$

$\Rightarrow$ Кол.-во способов переставить 10 книг так, чтобы 4 остались на месте — $C_{10}^{4} \cdot 6! \cdot \sum_{s=0}^{6} \frac{(-1)^s}{s!} =$

$$= \frac{\overset{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{10!}}{4!\cdot \cancel{6!}} \cdot \cancel{6!} \cdot \left(\cancel{\frac{1}{1}} + \cancel{\frac{-1}{1}} + \frac{1}{2} + \frac{-1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{-1}{120} + \frac{1}{720} \right)$$

$$= 5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 \left(\frac{4}{8} + \frac{-1}{6} + \frac{2}{6\cdot8} + \frac{-3}{8\cdot5\cdot9} + \frac{1}{8\cdot9\cdot10} \right) =$$

$$= (4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot9\cdot10 - 5\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 + 2\cdot5\cdot7\cdot9\cdot10 - 3\cdot6\cdot7\cdot10 + 5\cdot6\cdot7) =$$

$$= 75600 - 25200 + 6300 - 1260 + 210 = \boxed{55650}$$

№15.

Кол-во взаимно простых — $\varphi(2020) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во не взаимно простых: $2020-\varphi(2020)=$

$=2020-\varphi(2^2\cdot 5\cdot 101)=$

$=2020-(2^2-2^1)\cdot 4\cdot 100=2020-2\cdot 4\cdot 100=$

$=2020-800=1220$

Ответ: 1220

№3.

Возьмём много (например, 2022) числа вида $11\ldots11$. По принципу Дирихле, среди них есть хотя бы два числа x_1 и x_2, дающие одинаковые остатки при делении на 2021: $x_1=2021q_1+r$

$x_2=2021q_2+r$

Без ограничения общности, $x_2>x_1$

Тогда $x_2-x_1=2021(q_2-q_1)=\underbrace{11\ldots11}_{m}\underbrace{00\ldots00}_{n}$

$2021(q_2-q_1)=11\ldots11\cdot 10^n$, где n — некоторое число ($n\in\mathbb{N}$)

Т.к. 2021 $\not\vdots$ 10, то если $2021k = 11..11 \cdot 10^n$,

то $11...11 \vdots 2021$

ч.т.д.

№16

$$0 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_6 \le a_7 \le 9$$

Пусть $x_1 = a_1 - 0$
$x_2 = a_2 - a_1$
$\vdots$
$x_7 = a_7 - a_6$
$x_8 = 9 - a_7$

Тогда: $x_1 + x_2 + \ldots + x_8 = 9$
$\forall i \; x_i \geq 0$

Известно, что у такого уравнения

$C^9_{9+8-1} = C^9_{16} = 11440$ решений,

при чём нетрудно заметить, что множество решений этого уравнения биективно множеству всех решений $0 \le a_1 \le \ldots \le 9$ (x_i можно рассматривать как „увеличение" при переходе от числа i к числу $i+1$ в цепочке неравенств.

Ответ: 1440

№7.

а) 1) Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

2) $$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = \frac{\left(\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k\right) - 1}{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k + \cancel{C_{n+1}^{n+1}}^{1} - 1}{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n+1}^k}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!\cdot(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!(n+1-k)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n+1-k}}_{u} \overset{*}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}}_{v}$$

ч.т.д.

(*) Рассмотрим $X = \left\{ \frac{C_n^k}{n+1-k} \middle| \forall k \in N \wedge k \le n \right\} (u = \Sigma X)$

Тогда $a = \frac{C_n^k}{n+1-k} \in X$ и $b = \frac{C_n^{n-k}}{k+1} \in X$.

Известно, что $C_n^k = C_n^{n-k}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{C_n^{n-k}}{n+1-k};\ b = \frac{C_n^k}{k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \left\{ \frac{C_n^{n-k}}{n+1-k} \,\middle|\, \forall k \in N \wedge k \le n \right\} = \left\{ \right.$$

$$= \left\{ \frac{C_n^k}{k+1} \,\middle|\, \forall k \in N \wedge k \le n \right\}.$$

$$\Rightarrow u = \sum X = v$$

(учитывая „симметрию" C_n^k относительно $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ в любом слагаемом можно заменить C_n^k на C_n^{n-k}, а затем заменить переменную суммирования: $k := n-k$).

Ответ: $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$