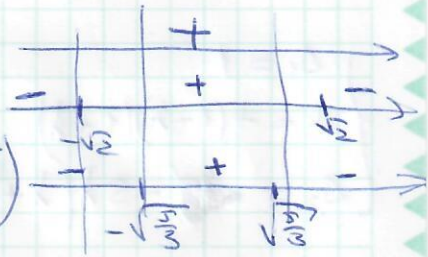
№1213

$$q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = 2 - \lambda^2 \\ \Delta_3 = 6 - 1 - 3\lambda^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = -(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}) \\ \Delta_3 = -3\left(\lambda - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(\lambda + \sqrt{\frac{5}{3}}\right) \end{cases}$$




По критерию Сильвестра, $q(x)$ положительно определена, если $\forall i \ \Delta_i > 0$, то есть

$$\lambda \in \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

Отрицательно-определена, если

$\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, но $\forall \lambda \ \Delta_1 = 2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ квадр. форма не является отрицательно определённой $\forall \lambda$

Ответ: 1) пол.-опред при $\lambda \in \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}; \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

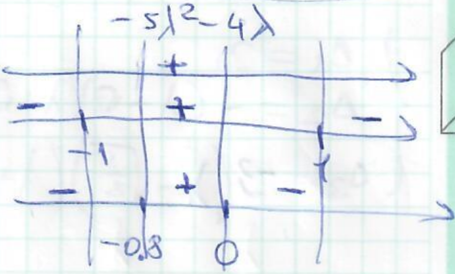
2) отриц-опред при $\lambda \notin \mathbb{R}$

№1214

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 4x_2 x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ \lambda & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = 1 - \lambda^2 \\ \Delta_3 = \underbrace{5 - 2\lambda - 2\lambda - 1 - 4 - 5\lambda^2}_{-5\lambda^2 - 4\lambda} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = +(1-\lambda)(1+\lambda) \\ \Delta_3 = -5\lambda\left(\lambda + \frac{4}{5}\right) \end{cases}$$




$$\left.\begin{array}{l} \forall i \ \Delta_i > 0 \iff \lambda \in \left(-\frac{4}{5}, 0\right) \\ \forall \lambda \ \Delta_1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по критерию Сильвестра,

$q(x)$ определена положительно при $\lambda \in \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$

$q(x)$ определена отрицательно при $\lambda \notin \mathbb{R}$.

Ответ:

№1.

$q(x)$ – положительно-определённая, если $\forall x \; q(x) > 0$.

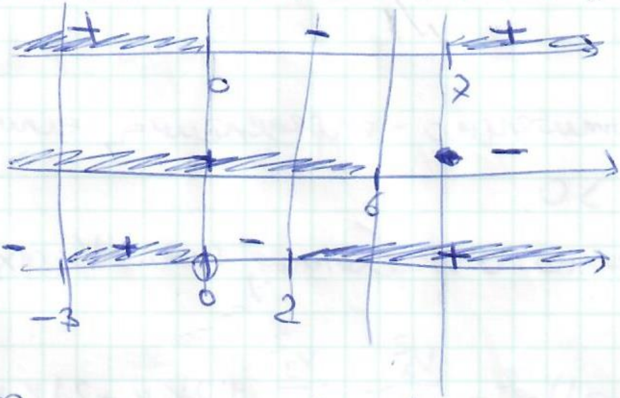
Отрицательно-определённая, если $\forall x \; q(x) < 0$

$$q(x) = (\lambda^2 - 7\lambda)x_1^2 - \frac{x_2^2}{\lambda} - \frac{x_3^2}{\lambda} + 2x_1x_2 + 2\lambda x_1 x_3$$

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 7\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & -\frac{1}{\lambda} & 0 \\ \lambda & 0 & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = \lambda^2 - 7\lambda \\ \Delta_2 = (\lambda^2 - 7\lambda)\left(-\frac{1}{\lambda}\right) - 1 \\ \Delta_3 = (\lambda^2 - 7\lambda)\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(-\frac{1}{\lambda}\right) - \lambda^2\left(-\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = \lambda(\lambda - 7) \\ \Delta_2 = 6 - \lambda \\ \Delta_3 = \frac{\lambda^2 + \lambda - 6}{\lambda} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_1 = \lambda(\lambda - 7) \\ \Delta_2 = 6 - \lambda \\ \Delta_3 = \frac{(\lambda+3)(\lambda-2)}{\lambda} \end{cases}$$




По критерию Сильвестра

$$\forall x \ q(x) > 0 \iff \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{cases} \iff \lambda \in (-3; 0)$$

$$\forall x \ q(x) < 0 \iff \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{cases} \iff \lambda \in (0; 2)$$

Ответ: 1) положительно-определённая при $\lambda \in (-3; 0)$

2) отрицательно-определённая при $\lambda \in (0; 2)$

№2.

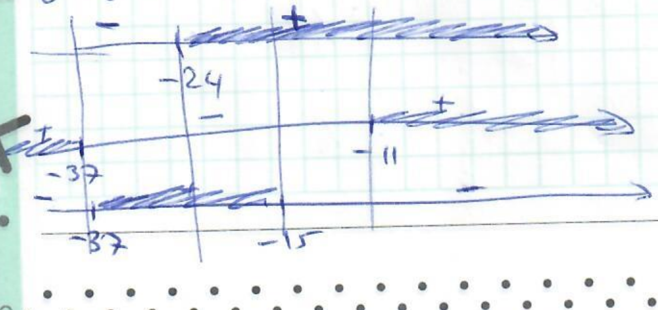
$$q(x) = (\lambda+24)x_1^2 + (\lambda+24)x_2^2 - 18x_3^2 - 26x_1x_2 - 12x_1x_3 - 12x_2x_3$$

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda+24 & -13 & -6 \\ -13 & \lambda+24 & -6 \\ -6 & -6 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = \lambda+24 \\ \Delta_2 = (\lambda+24)^2 - 13^2 \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda+24 & -13 & -6 \\ -13 & \lambda+24 & -6 \\ -6 & -6 & -18 \end{vmatrix} \overset{\substack{(1)-(2) \\ (3)-3(2)}}{=} \begin{vmatrix} \lambda+37 & -\lambda-37 & 0 \\ -13 & \lambda+24 & -6 \\ 33 & -3\lambda-78 & 0 \end{vmatrix} = \end{cases}$$

$$= (-\lambda-37)(-6)\cdot 33 - (-3\lambda-78)(-6)(\lambda+37)$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = \lambda+24 \\ \Delta_2 = \lambda^2+48\lambda+407 \\ \Delta_3 = -18\lambda^2-936\lambda-9990 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_1 = \lambda+24 \\ \Delta_2 = (\lambda+37)(\lambda+11) \\ \Delta_3 = -18(\lambda+37)(\lambda+15) \end{cases}$$



По критерию Сильвестра,

$\forall x \; q(x) > 0 \iff \forall i \; \Delta_i > 0 \iff \lambda \notin \mathbb{R}$

$\forall x \; q(x) < 0 \iff \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{cases} \iff \lambda < -37$

Ответ: 1) Положительно-определённая при $\lambda \notin \mathbb{R}$

2) отрицательно-определённая при $\lambda < -37$