КР 1

№1

$$A = \begin{pmatrix} -69 & -34 & -132 & -54 \\ 6 & -128 & 6 & 0 \\ -66 & 64 & 60 & 108 \end{pmatrix} = U_{3\times3}\Sigma_{3\times4}V^T_{4\times4}$$

Будем искать разложение для

$$B = A^T = \begin{pmatrix} -69 & 6 & -66 \\ -34 & -128 & 64 \\ -132 & 6 & 60 \\ -54 & 0 & 108 \end{pmatrix} = V_{4\times4}\Sigma^T_{4\times3}U^T_{3\times3}$$

1) $B^TB = \begin{pmatrix} 26257 & 3146 & -11374 \\ 3146 & 16456 & -8228 \\ -11374 & -8228 & 23716 \end{pmatrix}$

2) $\chi_{B^TB}(\lambda) = \begin{vmatrix} 26257-\lambda & 3146 & -11374 \\ 3146 & 16456-\lambda & -8228 \\ -11374 & -8228 & 23716-\lambda \end{vmatrix} =$

$= -(\lambda - 39204)(\lambda - 17424)(\lambda - 9801)$

3) $\chi_{B^TB}(\lambda) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \lambda = 39204 \\ \lambda = 17424 \\ \lambda = 9801 \end{array}\right.$ – собственные значения B^TB

4) Найдём сингулярные числа $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ матрицы B и собственные нормированные векторы u_1, u_2, u_3 матрицы B^TB

① $\lambda_1 = 39204 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{39204} = 198$

$$B^TB - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -12947 & 3146 & -11374 \\ 3146 & -22748 & -8228 \\ -11374 & -8228 & -15488 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{метод Гаусса}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

② $\lambda_2 = 17424 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{17424} = 132$

$$B^TB - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 8833 & 3146 & -11374 \\ 3146 & -968 & -8228 \\ -11374 & -8228 & 6292 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{метод Гаусса}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

③ $\lambda_3 = 9801 \Rightarrow \sigma_3 = \sqrt{9801} = 99$

$$B^TB - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 16456 & 3146 & -11374 \\ 3146 & 6655 & -8228 \\ -11374 & -8228 & 13915 \end{pmatrix} \rightarrow$$

метод Гаусса $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

По свойствам B^TB, $\{U_1, U_2, U_3\}$ - ОНБ

5) По доказанному, $V_i = \dfrac{BU_i}{\sigma_i}$, $i = \overline{1..3}$

① $V_1 = \dfrac{1}{198} \begin{pmatrix} -69 & 6 & -66 \\ -34 & -128 & 64 \\ -132 & 6 & 60 \\ -54 & 0 & 108 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6/11 \\ 7/11 \\ 6/11 \end{pmatrix}$

② $V_2 = \dfrac{1}{132} \begin{pmatrix} -69 & 6 & -66 \\ -34 & -128 & 64 \\ -132 & 6 & 60 \\ -54 & 0 & 108 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/11 \\ 7/11 \\ -6/11 \\ 0 \end{pmatrix}$

③ $V_3 = \dfrac{1}{99} \begin{pmatrix} -69 & 6 & -66 \\ -34 & -128 & 64 \\ -132 & 6 & 60 \\ -54 & 0 & 108 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/11 \\ -6/11 \\ 0 \\ 6/11 \end{pmatrix}$

$\{V_1, V_2, V_3\}$ ортонормированы.

6) Дополним $\{V_1, V_2, V_3\}$ вектором V_4 до ОНБ

$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{6}{11} & \frac{7}{11} & \frac{6}{11} \\ -\frac{6}{11} & \frac{7}{11} & -\frac{6}{11} & 0 \\ -\frac{7}{11} & -\frac{6}{11} & 0 & \frac{6}{11} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 6 \\ -6 & 7 & -6 & 0 \\ -7 & -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow$

метод Гаусса $\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6/7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6/7 \end{pmatrix} \Rightarrow V_4 = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 0 \\ -6/7 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6/11 \\ 0 \\ -6/11 \\ 7/11 \end{pmatrix}$

⑦ Таким образом,

$$B = A^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -6/11 & -7/11 & \frac{6}{11} \\ 6/11 & 7/11 & -6/11 & 0 \\ 7/11 & -6/11 & 0 & -6/11 \\ 6/11 & 0 & 6/11 & 7/11 \end{pmatrix}}_{V_{4\times4}} \overbrace{\begin{pmatrix} 198 & 0 & 0 \\ 0 & 132 & 0 \\ 0 & 0 & 99 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\Sigma^T_{4\times3}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^T}^{U^T_{3\times3}}$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}}_{U_{3\times3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 198 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 132 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 99 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma_{3\times4}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -6/11 & -\frac{7}{11} & \frac{6}{11} \\ 6/11 & 7/11 & -6/11 & 0 \\ 7/11 & -6/11 & 0 & -6/11 \\ 6/11 & 0 & 6/11 & 7/11 \end{pmatrix}^T}_{V^T_{4\times4}}$$

— SVD разложение матрицы A.

№2.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -11 & 15 \\ -2 & 7 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & -8 & 12 \end{pmatrix}_{4\times 3} = F_{4\times r}\, G_{r\times 3},\ r = \mathrm{Rg}A$$

1) $$\begin{pmatrix} 4 & -11 & 15 \\ -2 & 7 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & -8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)+3(3)]{\substack{(1)+2(2) \\ (2)-2(3)}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{(3)/-1 \\ (4)/4}]{\substack{(1)/3 \\ (2)/-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-(2)]{\substack{(1)\leftrightarrow(3) \\ (3)-(2)}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)+4(2)} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = G_{2\times 3},\ \mathrm{rg}A = 2$$

2) Возьмём в качестве F столбцы матрицы A, соответствующие ведущим элементам G.

$$F_{4\times 2} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 7 \\ -1 & 4 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

3) Таким образом, $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 7 \\ -1 & 4 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{G}$ – разложение полного ранга матрицы A

4) По доказанному, $A^+ = (FG)^+ = G^+ F^+ =$

$$= \underbrace{\left(G^T (GG^T)^{-1}\right)}_{G^+} \underbrace{\left((F^T F)^{-1} F^T\right)}_{F^+}$$

① $- GG^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145 & 36 \\ 36 & 10 \end{pmatrix}$

$- (GG^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 145 & 36 \\ 36 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1450 - 36^2} \begin{pmatrix} 10 & -36 \\ -36 & 145 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{154} \begin{pmatrix} 10 & -36 \\ -36 & 145 \end{pmatrix}$$

$- G^T (GG^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{154} \begin{pmatrix} 10 & -36 \\ -36 & 145 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{154} \begin{pmatrix} 10 & -36 \\ -36 & 145 \\ 12 & 3 \end{pmatrix} = G^+$$

② $- F^T F = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 & 3 \\ -11 & 7 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 7 \\ -1 & 4 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -86 \\ -86 & 250 \end{pmatrix}$

$- (F^T F)^{-1} = \frac{1}{250 \cdot 30 - 86^2} \begin{pmatrix} 250 & 86 \\ 86 & 30 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{104} \begin{pmatrix} 250 & 86 \\ 86 & 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{52} \begin{pmatrix} 125 & 43 \\ 43 & 15 \end{pmatrix}$$

$$-\left(F^TF\right)^{-1}F^T = \frac{1}{52}\begin{pmatrix}125 & 43\\ 43 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -11\\ -2 & 7\\ -1 & 4\\ 3 & -8\end{pmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{52}\begin{pmatrix}125 & 43\\ 43 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2 & -1 & 3\\ -11 & 7 & 4 & -8\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{52}\begin{pmatrix}27 & 51 & 47 & 31\\ 7 & 19 & 17 & 9\end{pmatrix} = F^+$$

$$\cancel{③\ A^+ = G^+F^+ = \frac{1}{154}\begin{pmatrix}125 & 43\\ 43 & 15\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{52}\begin{pmatrix}27 & 51 & 47 & 31\\ 7 & 19 & 17 & 9\end{pmatrix}} =$$

$$③\ A^+ = G^+F^+ = \frac{1}{154}\begin{pmatrix}10 & -36\\ -36 & 145\\ 12 & 3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{52}\begin{pmatrix}27 & 51 & 47 & 31\\ 7 & 19 & 17 & 9\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8008}\begin{pmatrix}18 & -174 & -142 & -14\\ 43 & 919 & 773 & 189\\ 345 & 669 & 615 & 399\end{pmatrix}$$

№3

$$\begin{cases} 4x+6y+12z-2t=0 \\ 3x+5y+15z+7t=4 \\ -x+y+8z-14t=1 \\ -2x+\ \ +9z-11t=2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 & -2 \\ 3 & 5 & 15 & 7 \\ -1 & 1 & 8 & -14 \\ -2 & 0 & 9 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

По доказанному, псевдорешением этой СЛАУ наименьшей длины является вектор

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 & -2 \\ 3 & 5 & 15 & 7 \\ -1 & 1 & 8 & -14 \\ -2 & 0 & 9 & -11 \end{pmatrix}^+}_{A^+} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найдём скелетное разложение A для поиска псевдобратной A^+:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 & -2 \\ 3 & 5 & 15 & 7 \\ -1 & 1 & 8 & -14 \\ -2 & 0 & 9 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{метод Гаусса}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

G

$$\Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 6 & 12 \\ 3 & 5 & 15 \\ -1 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{G}$$

$$\cancel{\Rightarrow A^+ = G^T(G^TG)^{-1}}$$

$$\Rightarrow A^+ = G^T(GG^T)^{-1}(F^TF)^{-1}F^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = G^T(GG^T)^{-1}(F^TF)^{-1}F^T \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{734928} \begin{pmatrix} -321985 \\ -284111 \\ 284397 \\ 133585 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,438 \\ -0,386 \\ +0,387 \\ +0,182 \end{pmatrix}$$

№4

$$f(x):\begin{cases} f(-2)=-11\ ;\ x_0=-2,\ y_0=-11 \\ f(0)=-2\ ;\ x_1=0,\ y_1=-2 \\ f(1)=9\ ;\ x_2=1,\ y_2=9 \\ f(2)=6\ ;\ x_3=2,\ y_3=6 \end{cases}$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{3} y_i \frac{(x-x_0)\ldots\cancel{(x-x_i)}\ldots(x-x_3)}{(x_i-x_0)\ldots\cancel{(x_i-x_i)}(x_i-x_3)}=$$

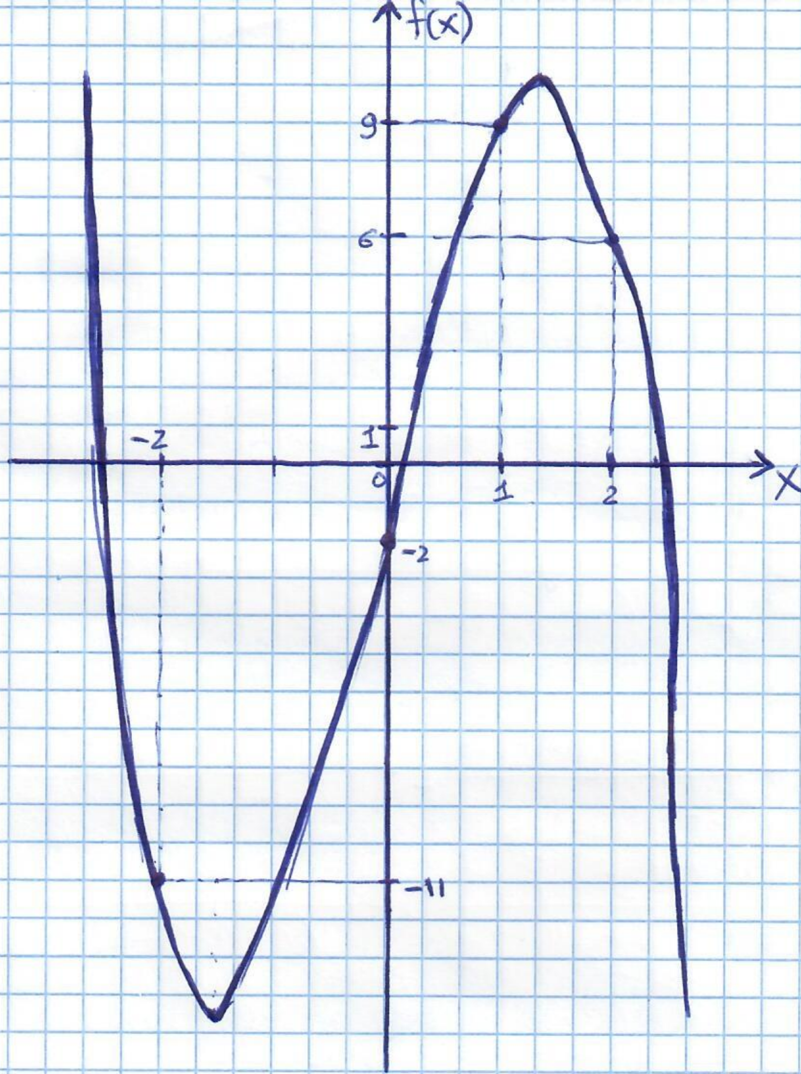
$$=-11\cdot\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-2-0)(-2-1)(-2-2)}-2\frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0-1)(0-2)}+$$

$$+9\frac{(x+2)(x-0)(x-2)}{(1+2)(1-0)(1-2)}+6\frac{(x+2)(x-0)(x-1)}{(2+2)(2-0)(2-1)}=$$

$$=-11\frac{x(x-1)(x-2)}{-24}-\overset{1}{\cancel{2}}\frac{(x+2)(x-2)(x-1)}{\cancel{4}_{2}}+$$

$$+\overset{3}{\cancel{9}}\frac{x(x+2)(x-2)}{-\cancel{3}_{1}}+\overset{3}{\cancel{6}}\frac{x(x-1)(x+2)}{\cancel{8}_{4}}=$$

$$=-\frac{55}{24}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{161}{12}x-2$$


f(x)
9
6
1
-2
0
1
2
x
-2
-11

№5.

$P_0(1,2);\ P_1(6,8);\ P_2(7,7),\ P_3(9,0)$

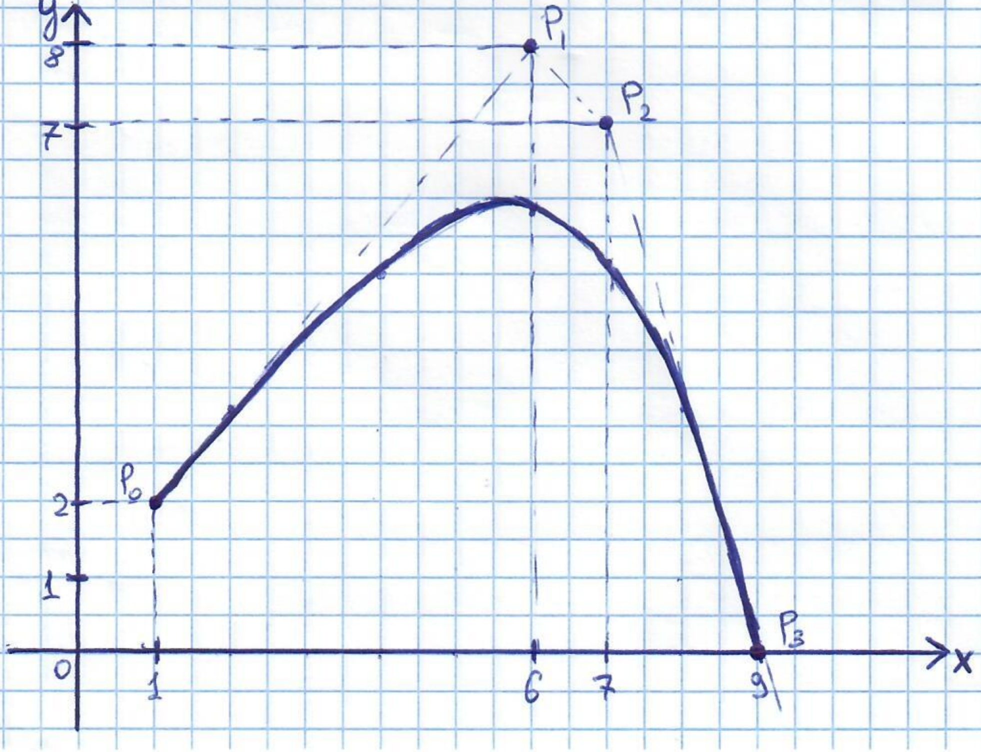
$$B(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\sum_{i=0}^{3}C_3^i(1-t)^{3-i}t^iP_i=$$

$$=C_3^0(1-t)^{3-0}t^0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+C_3^1(1-t)^{3-1}t^1\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}+$$

$$+C_3^2(1-t)^{3-2}t^2\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}+C_3^3(1-t)^{3-3}t^3\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix}=$$

$$=(1-t)^3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3(1-t)^2t\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}+3(1-t)t^2\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}+t^3\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5t^3-12t^2+15t+1\\t^3-21t^2+18t+2\end{pmatrix},\quad t=0\ldots1$$



№6.

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4x + 5 \sim q(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\left| f(x) - q(x) \right|_0 = \left| -2x^3 - 3x^2 + 4x + 5 - ax^2 - bx - c \right|_0 \xrightarrow[\text{на } [-2;3]]{} \min$$

По свойствам нормы, это эквивалентно

$$\left| \frac{1}{-2}\left(-2x^3 - 3x^2 + 4x + 5 - ax^2 - bx - c\right) \right| \to \min_{\text{на } [-2;3]}$$

$$\left| x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{c}{2} \right| \to \min_{\text{на } [-2;3]}$$

По доказанному, этому условию удовлетворяет многочлен

$$\overline{T_3}(x) = \frac{(3-(-2))^3}{2^{2\cdot 3 - 1}} T_3\left(\frac{2x - (3 + (-2))}{3 - (-2)}\right),$$ где $T_3(x)$ — 3-й многочлен Чебышёва первого рода: $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$$= \frac{5^3}{2^5} T_3\left(\frac{2x - 1}{5}\right) =$$

$$= \frac{5^3}{2^5}\left(4\left(\frac{2x-1}{5}\right)^3 - 3\,\frac{2x-1}{5}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{5^3}\cdot \cancel{4}\cdot (2x-1)^3}{\cancel{2^5}_{2^3}\cdot \cancel{5^3}} - \frac{3\cdot \cancel{5^3}^{5^2}\cdot (2x-1)}{2^5 \cdot \cancel{5}} =$$

$$= \frac{2^3x^3 - 3\cdot 2^2x^2 + 3\cdot 2x - 1}{2^3} - \frac{3\cdot 25\cdot 2x - 3\cdot 25}{32} =$$

$$= x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{63x}{16} + \frac{71}{32}$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{c}{2} =$$

$$= x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{63}{16}x + \frac{71}{32}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3/2 + a/2 = -3/2 \\ -2 + b/2 = -63/16 \\ -5/2 + c/2 = 71/32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -\frac{31}{8} = -3{,}875 \\ c = \frac{151}{16} = 9{,}4375 \end{cases}$$

Ответ: $-6x^2 - 3{,}875x + 9{,}4375$

№7. (I способ)

$$f(x)=\sqrt{4x+3} \sim g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$\|h\|_T=\sqrt{\int_0^4 \frac{h^2(x)}{\sqrt{1-\frac{(2x-4)^2}{16}}}dx}$$

Скалярное произведение, соответствующее

$$\|h\|_T - (f,g)=\int_0^4 \frac{f(x)\,g(x)}{\sqrt{1-\frac{(2x-4)^2}{16}}}dx$$

По доказанному, $g(x)$ - проекция $f(x)$ на подпространство, натянутое на $\{1, x, x^2, x^3\}$ - базис пространства многочленов степени ≤ 3 - со скалярным произведением (f,g).

1) Построим ортогональный базис путём применения процесса ортогонализации Грама-Шмидта к $\{1, x, x^2, x^3\}$

- $b_1=1$
- $b_2=x-\frac{(1,x)}{(1,1)}1=x-\frac{\int_0^4 \frac{1\cdot x}{\sqrt{1-\frac{(2x-4)^2}{16}}}dx}{\int_0^4 \frac{1\cdot 1}{\sqrt{1-\frac{(2x-4)^2}{16}}}dx}\cdot 1=$

$$= x - \frac{4\pi}{2\pi} \cdot 1 = x - 2$$

$$- b_3 = x^2 - \frac{(x^2, 1)}{(1,1)} \cdot 1 - \frac{(x^2, x-2)}{(x-2, x-2)}(x-2) =$$

$$= x^2 - \frac{12\pi}{2\pi} - \frac{16\pi}{4\pi}(x-2) = x^2 - 6 - 4x + 8 =$$

$$= x^2 - 4x + 2$$

$$- b_4 = x^3 - \frac{(x^3, 1)}{(1,1)} \cdot 1 - \frac{(x^3, x-2)}{(x-2, x-2)}(x-2) - \frac{(x^3, x^2-4x+2)}{(x^2-4x+2, x^2-4x+2)}(x^2-4x+2)$$

$$= x^3 - \frac{40\pi}{2\pi} - \frac{60\pi}{4\pi}(x-2) - \frac{24\pi}{4\pi}(x^2-4x+2) =$$

$$= x^3 - 20 - 15(x-2) - 6(x^2-4x+2) =$$

$$= x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

2) $$q(x) = \frac{(b_1, f)}{\underbrace{(b_1, b_1)}_{2\pi}} b_1 + \frac{(b_2, f)}{\underbrace{(b_2, b_2)}_{4\pi}} b_2 + \frac{(b_3, f)}{\underbrace{(b_3, b_3)}_{4\pi}} b_3 + \frac{(b_4, f)}{(b_4, b_4)} b_4 =$$

$$= \frac{(1, \sqrt{4x+3})}{(1,1)} \cdot 1 + \frac{(x-2, \sqrt{4x+3})}{(x-2, x-2)}(x-2) +$$

$$+ \frac{(x^2-4x+2, \sqrt{4x+3})}{(x^2-4x+2, x^2-4x+2)}(x^2-4x+2) +$$

$$+ \frac{(x^3-6x^2+9x-2, \sqrt{4x+3})}{(x^3-6x^2+9x-2, x^3-6x^2+9x-2)}(x^3-6x^2+9x-2) =$$

$$\approx \frac{20,036}{2\pi} + \frac{8,056}{4\pi}(x-2) + \frac{-0,847}{4\pi}(x^2-4x+2) +$$

$$+ \frac{0,180}{4\pi}(x^3-6x^2+9x-2) \approx$$

$$\approx 3,189 + 0,641(x-2) - 0,067(x^2-4x+2) +$$

$$+ 0,014(x^3-6x^2+9x-2) \approx$$

$$\approx 0,014x^3 - 0,154x^2 + 1,04x + 1,743$$

№7 (II способ)

$$f(x) = \sqrt{4x+3} \sim g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\|h\|_T = \sqrt{\int_0^4 \frac{h^2(x)}{\sqrt{1-\frac{(2x-4)^2}{16}}}\,dx}$$

Сделаем замену координат $x' = \frac{x-2}{2}$

$$2x' = x - 2$$

$$x = 2x' + 2$$

$$\Rightarrow f(x') = \sqrt{4(2x'+2)+3} = \sqrt{8x'+11}$$

$$g(x') = a(2x'+2)^3 + b(2x'+2)^2 + c(2x'+2) + d$$

$$\|h\|_T = \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{h^2(x')}{\sqrt{1-\frac{(2(2x'+2)-4)^2}{16}}}\,d(2x'+2)} =$$

$$= \sqrt{2\int_{-1}^{1} \frac{h^2(x')}{\sqrt{1-x'^2}}\,dx'}$$

~~По данному, для этого скалярн~~

Соответствующее скалярное произведение

$$(f,g) = 2\int_{-1}^{1} \frac{f(x')\,g(x')}{\sqrt{1-x'^2}}\,dx'$$

По доказанному, ортогональный базис пространства многочленов степени ≤ 3 с этим скалярным произведением ~~образуют~~ образуют многочлены Чебышева первого рода: $\{T_0, T_1, T_2, T_3\} = \{1, x', 2x'^2 - 1, 4x'^3 - 3x'\}$

Тогда $q(x') = \sum\limits_{i=0}^{3} \frac{(T_i, f)}{(T_i, T_i)} T_i(x')$.

Известно, что $(T_i, T_i) = \begin{cases} 2\pi/2, & i \neq 0 \\ 2\pi, & i = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow q(x') = \frac{(1, \sqrt{8x'+11})}{2\pi} + \frac{(x', \sqrt{8x'+11})}{\pi} x +$$

$$+ \frac{(2x'^2 - 1, \sqrt{8x'+11})}{\pi} (2x'^2 - 1) +$$

$$+ \frac{(4x'^3 - 3x', \sqrt{8x'+11})}{\pi} (4x'^3 - 3x') \cancel{\approx}$$

$$\approx \frac{20,036}{2\pi} + \frac{4,028}{\pi} x' + \frac{-0,424}{\pi}(2x'^2 - 1) + \frac{0,09}{\pi}(4x'^3 - 3x') \approx$$

$$\approx 3,189 + 1,282x' - 0,135(2x'^2 - 1) + 0,029(4x'^3 - 3x') \approx$$

$$\approx 0,115x'^3 - 0,27x'^2 + 1,196x' + 3,324$$

$$\Rightarrow q(x) \approx 0,115\left(\frac{x-2}{2}\right)^3 - 0,27\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 1,196\left(\frac{x-2}{2}\right) + 3,324 \approx$$

$$\approx 0,014x^3 - 0,154x^2 + 1,04x + 1,743$$

№8.

$$x^2(2q+4)+xy(4q+4)+y^2(1-8q)=1 -$$

уравнение кривой второго порядка.

В зависимости от q это может быть пара прямых, точка, парабола, гипербола или эллипс. С учётом теоремы Минковского, это уравнение задаёт единичную окружность относительно какой-то нормы тогда и только тогда, когда это эллипс.

Рассмотрим уравнение как квадратичную форму, заданную матрицей

$$A=\begin{pmatrix}2q+4 & 2q+2\\ 2q+2 & 1-8q\end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}2q+4-\lambda & 2q+2\\ 2q+2 & 1-8q-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2q+4-\lambda)(1-8q-\lambda)-(2q+2)^2=$$

$$=\lambda^2-\lambda(5-6q)-(38q+20q^2)$$

$$\chi_A(\lambda)=0 \iff \lambda^2-\lambda(5-6q)-(38q+20q^2)=0$$

$$D=(5-6q)^2+4\cdot(38q+20q^2)=116q^2+92q+25$$

$$D'=92^2-4\cdot 116\cdot 25=-3136<0$$

$\Rightarrow \forall q \;\; D>0 \Rightarrow \chi_A(\lambda)$ всегда имеет два решения, то есть A имеет два вещественных собственных значения

$$\lambda_1,\lambda_2=\frac{(5-6q)\pm\sqrt{116q^2+92q+25}}{2}$$

Следовательно, в некотором базисе (из собственных векторов) матрица A имеет вид $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$. Квадратичная форма при этом имеет канонический вид $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$, а уравнение задаёт кривую $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2=1$.

Это эллипс тогда и только тогда, когда $\lambda_1>0$ и $\lambda_2>0$.

$$\begin{cases} \dfrac{(5-6q)+\sqrt{116q^2+92q+25}}{2} > 0 \\ \dfrac{(5-6q)-\sqrt{116q^2+92q+25}}{2} > 0 \end{cases}$$

Т.к. $\sqrt{116q^2+92q+25} > 0$, система эквивалентна неравенству

$$(5-6q)-\sqrt{116q^2+92q+25} > 0$$

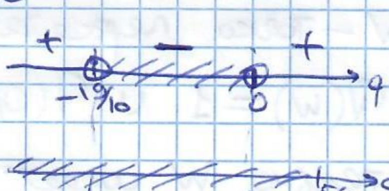
$$\sqrt{116q^2+92q+25} < 5-6q$$

$$\begin{cases} 116q^2+92q+25 < (5-6q)^2 \\ 5-6q \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 116q^2+92q+25 < 36q^2-60q+25 \\ q \leq 5/6 \end{cases}$$

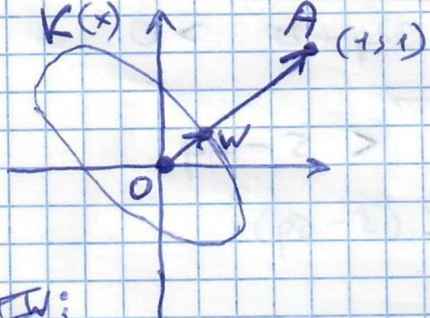
$$\begin{cases} 80q^2+152q < 0 \\ q \leq 5/6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 80q\left(q+\frac{19}{10}\right) < 0 \\ q \leq 5/6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q\left(q+\frac{19}{10}\right) < 0 \\ q \leq 5/6 \end{cases}$$



$\Rightarrow q \in \left(-\frac{19}{10}; 0\right)$

Так как сигнатура квадратичной формы ~~[illegible]~~ инвариантна к смене базиса, исходное уравнение также задаёт эллипс при $q \in \left(-\frac{19}{10}; 0\right)$



~~Найдём W:~~

~~$\begin{cases} OA: y = x \\ K: x^2(2q+4) + xy(4q+4) + y^2(1-8q) = 1 \end{cases}$~~

Пусть $O(0,0)$; $K(x)$ – заданная единичная окружность; OA – вектор $\binom{1}{1}$; ν – норма, соответствующая единичной окружности K.

Пусть $\nu(OA) = \nu\binom{1}{1} = k$.

Пусть W – точка пересечения K и OA.

Тогда $\nu(W) = 1$ и $\nu(OA) = k\nu(W)$.

Следовательно, W имеет координаты $\binom{1/k}{1/k}$.

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{k}\right)^2(2q+4)+\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}(4q+4)+\left(\frac{1}{k}\right)^2(1-8q)=1$$

$$\frac{1}{k^2}\left(2q+4+4q+4+1-8q\right)=1$$

$$k^2=9-2q \Rightarrow k=\sqrt{9-2q}.$$

Ответ: 1) при $q\in\left(-\frac{19}{10};0\right)$

2) $\nabla\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ не определена при

$q\in\left(-\infty;-\frac{19}{10}\right]\cup\left[0;+\infty\right)$ и

$\nabla\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\sqrt{9-2q}$ при $q\in\left(-\frac{19}{10};0\right)$