№1467

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\chi(A) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(-7-\lambda)(4-\lambda) - 15\cdot 6 - 90 +$$
$$+ 12(\lambda+7) + 27(4-\lambda) + 25(4-\lambda) =$$

$$= -(16-8\lambda+\lambda^2)(\lambda+7) - 180 + 12\lambda + 84 + 108 - 27\lambda +$$
$$+ 100 - 25\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 40\lambda - 112 - 40\lambda + 112 =$$
$$= -\lambda^2(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} - \text{с.з.}$$

I $\boxed{\lambda_1 = 0;\ m(\lambda_1) = 2}$

$$B = A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \cancel{0} - x_2 + x_3 = \frac{1}{3} x_3 \\ x_2 = + \frac{2}{3} x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{c.b.}: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S(\lambda_1) = 1$$

II $\boxed{\lambda_2 = 1 \, , \, m(\lambda_2) = 1}$

$$\cancel{B = A - 1I = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 2 \end{pmatrix} \to}$$

$$B = \cancel{A} - E = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \Rightarrow \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} s(\lambda_2) = 1 \\ \text{с.в.: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{matrix}}$$

$m(\lambda_1) \neq s(\lambda_1) \Rightarrow$ $\boxed{\text{ЛО не диагонализируем}}$

$$\boxed{\tilde{J} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}$$

№1468.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\chi(A) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda+6)(\lambda-8) + 39 + 24 - 3(\lambda+6) +$$

$$+ 13\cdot 4\cdot(1-\lambda) - 6(8-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 48) + 49 - 49\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda-1)^3 = 0$$

$$\lambda = 1$$

I $\boxed{\lambda_1 = 0,\ m(\lambda_1) = 3.}$

$$B = A - E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 7 & -13 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} s(\lambda_1) = 1 \\ \text{с.в.: } \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{gathered}} \neq m(\lambda_1) \Rightarrow \boxed{\text{ЛО не диагонализируем}}$$

$$\boxed{J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

№1470.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\chi(A) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 2\lambda-2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -12 & 6 \\ 0 & -19-\lambda & 10 \\ 3\lambda-3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda+19)(1-\lambda)^2 - 120 \cdot 3(\lambda-1) +$$
$$+ 6 \cdot 3 \cdot (\lambda-1)(\lambda+19) =$$

$$= (\lambda-1)\Big(-(\lambda+19)(\lambda-1) - 360 + 18(\lambda+19)\Big) =$$

$$=(\lambda-1)\Big((\lambda+19)(-\lambda+1+18)-360\Big)=$$

$$=(\lambda-1)\Big((\lambda+19)(19-\lambda)-360\Big)=$$

$$=(\lambda-1)\left(361-\lambda^2-360\right)=(\lambda-1)(1-\lambda)(1+\lambda)=$$

$$=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$$

$$\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-1\end{cases}$$

(I) $\boxed{\lambda_1=1\,;\ m(\lambda_1)=2}$

$$B=A-E=\begin{pmatrix}6&-12&6\\10&-20&10\\12&-24&12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1=2x_2-x_3\\ x_2=x_2\\ x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow \boxed{\begin{gathered}\text{c.б.}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\\ s(\lambda_1)=2.\end{gathered}}$$

II $\boxed{\lambda_2 = -1, \quad m(\lambda_2) = 1}$

$$A + E = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 2 & -6 & 4 \\ 2 & -6 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5/2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = \frac{5}{2} x_3 \\ x_1 = \frac{x_3}{2} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} x_3 \\ x_2 = \frac{5}{6} x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{с.в.}: \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \\ s(\lambda_2) = 1 \end{array}}$$

$\forall i \quad m(\lambda_i) = s(\lambda_i) \Rightarrow$ ЛО диагонализируем.

$$T_{s\to e} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T_{s\to e}^{-1} \cdot A \cdot T_{s\to e}$$

№1472

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(A) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot \lambda^2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Ⅰ $\boxed{\lambda_1 = 1 ;\ m(\lambda_1) = 2}$

$$B = A - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $s(\lambda_1) = 1 \neq m(\lambda_1) \Rightarrow$ ЛО не диагонализируем.

С.В.: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ⅱ $\boxed{\lambda_2 = 0 ;\ m(\lambda_2) = 2}$

$$B = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{gathered} S(\lambda_2) = 2 \\ \text{c.b} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{gathered}}$$

$$\boxed{J = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

№1481

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi(A) = |A - \lambda E| = \cancel{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(2-\lambda)^3(\lambda+2) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

I $\boxed{\lambda_1 = 2,\ m(\lambda_1) = 3}$

$$B = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} S(\lambda_1) = 3 \\ \text{c. б.}: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{array}}$$

II $\boxed{\lambda_2 = -2 \, ; \, m(\lambda_2) = 1}$

$$B = A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{x_1 = x_2} \quad x_1 = x_1 \\ x_2 = -x_1 \\ x_3 = -x_1 \\ x_4 = -x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} & s(\lambda_2) = 1 \\ & \text{c.b}: \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}}$$

$\forall i \quad s(\lambda_i) = m(\lambda_i) \Rightarrow$ $\boxed{\text{AO диагонализируем}}$

$$\boxed{\begin{aligned} T_{s \to e} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ J &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

№1483

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi(A) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 - 1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

I $\boxed{\lambda_1 = 1 \; ; \; m(\lambda_1) = 2}$

$$B = A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} s(\lambda_1) = 2 \\ c.б.: \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{array}}$$

II $\boxed{\lambda_2 = -1 \, ; \, m(\lambda_2) = 2}$

$$B = A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} s(\lambda_2) = 2 \\ c.б.: \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{array}}$$

$\forall i \quad m(\lambda_i) = s(\lambda_i) \Rightarrow$ ЛО диагонализируем.

$$T_{s\to e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

№40.2

По определению, λ — с.з., если

~~$\exists f \neq 0 : f(x) = \lambda x$~~

$\exists f \neq 0 : \quad Ax = \lambda x$

$$f(ax+b) = \lambda f(x)$$

Пусть $\deg f = N \leq n \Rightarrow f \in \mathbb{R}_n[x]$

Пусть $f = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_N x^N$

$$k_0 + k_1(ax+b) + k_2(ax+b)^2 + \ldots + k_N(ax+b)^N \overset{(*)}{=}$$
$$= \lambda(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_N x^N)$$

$\cdot\ (ax+b)^c = \sum\limits_{k=0}^{c} C_c^k a^k b^{c-k} x^k$

$\Rightarrow$ в $(*)$ при x^i $(\forall i = \overline{0, N})$:

$$\sum_{j=i}^{N} k_j C_j^i a^i b^{j-i} = \lambda k_i$$

при x^N: $k_N C_N^N a^N b^{N-N} = \lambda k_N$

$$\Rightarrow k_N a^N = \lambda k_N$$

$$\lambda = a^N \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda \in \{a^N \mid N \le n\}$. Другие значения невозможны: уравнение для x^N не будет выполнено.

Докажем, что $\forall \lambda \in \{a^N \mid N \le n\}\ \exists f^{\neq 0}$:

$$f(ax+b) = \lambda f(x)$$

Уравнения для x^i, $i = \overline{0, N-1}$ образуют СЛАУ относительно $k_0, k_1, \ldots, k_N$. Если она имеет решение, то такой f существует: $f = k_0 + k_1 x + \ldots + k_N x^N$.

$$\sum_{j=i}^{N} k_j C_j^i a^i b^{j-i} = \lambda k_i$$

$$k_i \overset{1}{\cancel{C_i^i}} a^i \overset{1}{\cancel{b^{i-i}}} + \sum_{j=i+1}^{N} k_j C_j^i a^i b^{j-i} = \lambda k_i$$

$$k_i (a^i - \lambda) + \sum_{j=i+1}^{N} k_j C_j^i a^i b^{j-i} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a^0-\lambda & C_1^0 a^0 b^1 & \cdots & C_n^0 a^0 b^N \\ & a-\lambda & \neq 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a^N-\lambda \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_N \end{pmatrix} = 0$$

Если $\lambda = a^N$, то

$$A = \begin{pmatrix} a^0 - a^N & & & \\ & a - a^N & & \neq 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a^{N-1} - a^N \\ & & & 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

~~$\Rightarrow Rg A = N$ (при $a \neq$~~

1) $a \neq 0 \Rightarrow Rg A = N \Rightarrow$

$\Rightarrow (N+1) - N = 1$ вектор ФСР.

ненулевое решение есть $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ такое f существует и $f \neq 0$

$\Rightarrow a^N$ - собственное значение

2) $a = 0 \Rightarrow \forall N \ \lambda = a^N = 0$

$\Rightarrow f(b) = \lambda f(x) \Leftrightarrow f(b) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ – любой многочлен : $f(B)=0$

Например, $f = B - x$

ч.т.д.

№40.4

~~① Если λ – собственное~~

Доказать:

$$\exists \lambda : Ax = \lambda x \Leftrightarrow \exists \psi : A^{-1}x = \psi x$$

Док-во

I $\Rightarrow$

1) Если A не вырожден, то есть $\det A \neq 0$, то $\forall x \neq 0$ $Ax \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \lambda \neq 0$.

2) дано: $Ax = \lambda x \mid \cdot A^{-1}$ справа

$$\underbrace{A^{-1}A}_{E}x = A^{-1}\lambda x$$

$$x = A^{-1}\lambda x$$

$$x = \lambda(A^{-1}x) \quad \Big| \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$$

$$A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$$

Пусть $\psi = \frac{1}{\lambda}$. Т.к. $\lambda \neq 0$ по t_3

$$\forall\lambda\ \exists\psi = 1/\lambda$$

$A^{-1}x = \psi x$ – такое ψ найдено

ч.т.д.

II $\Leftarrow$

Применим I для A^{-1}:

$$\exists\lambda: A^{-1}x = \lambda x \Longrightarrow \exists\psi: (A^{-1})^{-1}x = \psi x$$

$$\exists\lambda: A^{-1}x = \lambda x \Longleftrightarrow \exists\psi: Ax = \psi x$$

ч.т.д.