Д32

№1

$$45^{10} \underset{13}{\equiv} 6^{10} = 6^{1010_2} = 6^{2^1+2^3} = 6^{2^1}\cdot 6^{2^3} =$$

$$= 6^2 \cdot 6^8 \equiv$$

$$\underset{6^1}{6} \longrightarrow \underset{6^2}{36} \underset{13}{\equiv} 10 \longrightarrow \underset{6^4}{100} \underset{13}{\equiv} 9 \longrightarrow \underset{6^8}{81} \underset{13}{\equiv} 3$$

$$\equiv 10 \cdot 3 = 30 \underset{13}{\equiv} 4$$

Ответ: 4

№2

$\varphi(17) = 16$, т.к. 17 простое

$\Rightarrow \forall a \quad a^{16} \underset{17}{\equiv} 1$ по Т. Эйлера

$$\Rightarrow 30^{32} - 1 = 30^{2\cdot 16} = \underbrace{(30^2)^{16}}_{a^{16}} - 1 \underset{17}{\equiv} 1 - 1 \equiv 0$$

при $a = 30^2$

$\Rightarrow 30^{32} - 1 \underset{17}{\equiv} 0 \Leftrightarrow 30^{32} - 1$ делится на 17

ч.т.д.

№3

$$\begin{cases} x \underset{13}{\equiv} 2 \\ x \underset{19}{\equiv} 4 \end{cases}$$

НОД$(13,19) = 1 \Rightarrow$ Существует единственное решение по модулю $13 \cdot 19 = 247$

Найдём его по Китайской Теореме об остатках:

$M = 247$; $m_1 = 13$, $M_1 = 19$; $m_2 = 19$, $M_2 = 13$

Т.к. НОД$(m_1, M_1) = 1$ $\exists n_1 : M_1 n_1 \underset{m_1}{\equiv} 1$

• НОД$(13,19)$:

$19 = 13 \cdot 1 + 6$

$13 = 6 \cdot 2 + 1$

$\Rightarrow 1 = 13 - 6 \cdot 2$

$1 = 13 - 2(19 - 13 \cdot 1) = \cancel{13} \cdot 3 - 2 \cdot 19$ (0 в $\mathbb{Z}_{13}$)

$\Rightarrow 1 \underset{13}{\equiv} -2 \cdot 19 \underset{13}{\equiv} 11 \cdot 19$

$\Rightarrow n_1 = 11$

Аналогично:

НОД$(19,13) = 1$ $1 = 13 \cdot 3 - 2 \cdot \cancel{19}$ (0 в $\mathbb{Z}_{19}$)

$1 \underset{19}{\equiv} 13 \cdot 3 \Rightarrow n_2 = 3$

Пусть $X = 2 \cdot \underbrace{19}_{M_1} \cdot \underbrace{11}_{n_1} + 4 \cdot \underbrace{13}_{M_2} \cdot \underbrace{3}_{n_2}$ ⊜

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$X \underset{13}{\equiv} 2 \qquad\qquad X \underset{19}{\equiv} 4$$

⊜ $22 \cdot 19 + 12 \cdot 13 = 418 + 156 = 574 \underset{\underbrace{247}_{M}}{\equiv} 80$

Ответ: 80