仿射集

仿射集 C：$\forall x_1, x_2 \in C$，直线 $x_1 x_2 \in C$ 无限长! ⇒ 线性方程组的解集 $Ax-b=0$。

仿射组合：$\sum_{i=0}^{k}\theta_k = 1$ 可为负数，$\sum_{i=0}^{k}\theta_k x_k$ 的点集合

仿射集第二定义：对 $\forall x$，若仿射组合仍在 X 中，任意 则 X 为仿射集

仿射包：对任意 C，构造最小仿射集 Ex: 两点 → 直线

直线：$y=\theta x_1+(1-\theta)x_2, \theta\in R$

线段：$y=\theta x_1+(1-\theta)x_2, \theta\in[0,1]$

凸集

① $\forall x_1, x_2 \in C$，线段 $x_1 x_2$ 在 C 中。

② $\forall x_1, x_2 \in C$，$\forall\theta\in[0,1]$，$\theta x_1+(1-\theta)x_2\in C$。

凸组合：$\sum_{i=1}^{k}\theta_i=1, \theta_i\in[0,1]$，$\sum_{i=1}^{k}\theta_i x_i$ 即凸组合

凸包：包含对象所有点凸集。 证不是凸用举一个反例

锥

锥：$\forall x\in C, \theta\geq 0, \theta x\in C$ 原点 可=0!!

凸锥：$\forall x_1, x_2\in C$，$\theta_1, \theta_2\geq 0$，$\theta_1 x_1+\theta_2 x_2\in C$

锥组合：$\theta_1\cdots\theta_k\geq 0$，$\theta_1 x_1+\cdots\theta_k x_k$

锥包：$x_1\cdots x_k\in C$，$\{\theta_1 x_1\cdots\theta_k x_k \mid \theta_1\cdots\theta_k\geq 0\}$ 最小锥集合

例子：

	仿	凸	凸锥
空集	√	√	√
单点集	√	√	X (原点可)
R^n 空间	√	√	√
R^n 子空间	√	√	√
任意直线	√	√	X (过原点可)
任意线段	X	√	X (只有一点可)

例子：

① 超平面：$\{x \mid a^T x = b\}$ $(a\neq 0, b\in R)$ 仿+凸

↓ 划分

② 半空间：$\{x \mid a^T x\leq b\}$ 不仿+凸

③ 球：$\{x \mid \|x-x_c\|\leq r\}$，$\{x \mid x_c+ru \mid \|u\|\leq 1\}$ 凸

④ 椭球：$\{x \mid (x-x_c)^T P^{-1}(x-x_c)\leq 1\}$ 凸

⑤ 范数：$\|x\|_p=(\sum x_i^p)^{\frac{1}{p}}$ ⇒ 无穷：最大元；0：非零个数。

$$\begin{cases}\|x-a\|^2=(x-a)^T(x-a)\\ \|tx\|=|t|\cdot\|x\|\\ \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|\end{cases}$$ 是个函数

⑥ 范数锥：$\{(x,t) \mid \|x\|\leq t\}$ 凸锥

范数球：$\{x \mid \|x-x_c\|\leq r\}$ 凸

⑦ 多面体：有限线性等式和不等式解集。

$\{x \mid a_j^T x\leq b_j, C_j^T x=d_j\}$ 凸

$\boxed{超与半交集}$

⑧ 单纯形：$v_1-v_0 \cdots v_k-v_0$ 线性无关 $v_0\cdots v_k$ ⇒ 一种多面体

$\{\theta_0 v_0+\cdots\theta_k v_k \mid \theta\geq 0, 1^T\theta=1\}$ 凸

$y=(\theta_1,\cdots,\theta_k)$，$B=(v_1-v_0, \ldots, v_k-v_0)$ 用 $x=v_0+yB\in C$，证，化出多个不等式

$$\begin{cases}A_1 x=A_1 v_0+y\\ A_2 x=A_2 v_0\\ 1^T A_1 x\leq 1^T A_1 v_0+1\end{cases}$$ $\left(AB=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}\right)$

⑨ 半正定锥：

S^n、S_+^n、S_{++}^n 对称、+半正、+正。

定义 $\{x\in S^n \mid x\geq 0 / x>0\}$。

凸锥 (定义证：$x^T(\theta_1 x_1+\theta_2 x_2)x\geq 0, \theta>0$。

保凸运算：

① 交集：有限凸集交集为凸集。 用这些

② 仿射：$f(x)=Ax+b$，S 凸集，则 $f(S)=\{f(x) \mid x\in S\}$ 凸

③ 透视：$P(z,t)=\frac{z}{t}$。$\{z,t \mid t>0\}$ 为凸集 → P 是凸集

④ 线性分式：$f(x)=\frac{(Ax+b)}{(C^T x+d)}$

$\mathrm{dom} f=\{x \mid C^T x+d>0\}$ 凸 → f 凸

广义不等式

广义不等式：偏序 判定谁大

$x\leq_K y \Leftrightarrow y-x\in K$。

最小元：$y\in S \Rightarrow x\leq_K y$

极小元：$y\in S, y\leq_K x \Rightarrow y=x$。

K: 正常锥 (凸、闭、实、不含直线)

Ex: 正实数空间。

$(2,3)-(1,2)=(1,1)\in K \Rightarrow (2,3)\geq_K(1,2)$

共轭函数

共轭函数：$y^T x$ 与 $f(x)$ 最大差

$f^*(y)=\sup_{x\in \mathrm{dom} f}(y^T x-f(x))$

共轭 Ex: ① $f(x)=ax+b$

$f^*(y)=\sup_{x\in \mathrm{dom} f}(y^T x-ax-b)=\sup(y^T-a)x-b)=\begin{cases}-b, & y^T=a\\ +\infty, & y^T\neq a\end{cases}$

② $f(x)=-\log x$。

$f^*(y)=\sup_{x>0}(yx+\log x)$

求导，使 $f^*(y)=y-\frac{1}{x}=0$　$+\infty, y>0$

$x=\frac{1}{y} \Rightarrow f^*(y)=(-1)-\log(-y), -y>0$

凸函数

凸函数： f 表如时用

① $\mathrm{dom} f$ 是凸集，$\forall x, y\in \mathrm{dom} f$

$0\leq\theta\leq 1$ 有：← 二即为凹函数。

$f(\theta x+(1-\theta)x)\leq\theta f(x)+(1-\theta)f(x)$

② 对 $x\in \mathrm{dom} f$，向量 v (任意)，

$g(t)=f(x+tv)$ 凸 凹也行

→ f 凸 $(t \mid x+tv\in \mathrm{dom} f)$ t是常数，转为一维问题 与定义域相交 任意直线为凸

扩展值延伸：

$$f(x)=\begin{cases}f(x), & x\in \mathrm{dom} f\\ \infty, & x\notin \mathrm{dom} f\end{cases}$$

③ 一阶条件：f 可微，$\mathrm{dom} f$ 凸集，$\forall x, y\in \mathrm{dom} f$

$f(y)\geq f(x)+\nabla f(x)^T(y-x)$。

构造 $z=\theta x+(1-\theta)y$ 定义 ① 证。

$f(x)/f(y)\geq f(z)+f'(z)(x-z)$。

$\Rightarrow \theta f(x)+(1-\theta)f(y)\geq f(z)=f(\theta x+(1-\theta)y)$。

④ f 二阶可微：≤ 0 凹 $\mathrm{dom} f$ 凸 最常用

$\nabla^2 f(x)\geq 0 \Leftrightarrow f$ 凸

⑤ 上境图为凸集

保凸运算

① 非负加权求和：f_i 全凸，$w>0$。

$f=w_1 f_1+w_2 f_2+\cdots f_m w_m$ 凸

f_1+f_2、αf_1、$\int w f$ 积分 凸。

② 复合仿射映射：

f 凸，$Ax+b\in \mathrm{dom} f$。

$g(x)=f(Ax+b)$ 凸 A可以=0

③ 逐点最大：$f_1\sim f_m$ 凸

$g(x)=\max(f_1(x)\cdots f_m(x))$ 凸

④ 逐点上确界：$y\in A$，$f(x,y)$ 是 x 凸

$g(x)=\sup_{y\in A} f(x,y)$ 凸

⑤ 逐点最小化：C 凸集，$f(x,y)$ 凸，→ 非空，否则只保凹

$g(x)=\inf_{y\in C} f(x,y)$

⑥ 复合：$f(x)=h(g(x))$。

f 凸 $\begin{cases}h 凸且非减, g 凸\\ h 凸且非增, g 凹\end{cases}$。

f 凹 $\begin{cases}\tilde{h} 凹且非减, g 凹\\ \tilde{h} 凹且非增, g 凸\end{cases}$

⑦ 透视：f 凸，$\mathrm{dom} f$ 凸，$t>0$

$g(x,t)=t\cdot f(\frac{x}{t})$ 凸。

补：下水平集：

$C_\alpha=\{x\in \mathrm{dom} f \mid f(x)\leq\alpha\}$

f 凸则凸集，为 X 点集

拟凸函数

拟凸函数： 拟凸优化局部未必是全局最优。 拟凹：$-f$。

① $\mathrm{dom} f$ 凸，S_α 凸 ⇒ 拟凸

② $f(\theta x+(1-\theta)y)\leq\max\{f(x), f(y)\}$

③ $f(y)\leq f(x) \Rightarrow \nabla f^T(x)(y-x)\leq 0$。

④ $f''(x)\geq 0$ 或 $y^T\nabla^2 f(x)y\geq 0$。

拟线性：既拟凹又拟凸

一阶时：① 非减 ② 非增

③ < t 非增，> t 非减 有可拟凸

范数：$f(x)=(\sum_{i}^{n} x^p)^{\frac{1}{p}}$ = 所有范数凸，零范数不是范数

$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=\left(\frac{f(x)}{x_i}\right)^{1-p}$

$\Rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{1-p}{f(x)}\cdot\left(\frac{f^2(x)}{x_i x_j}\right)^{1-p}$ 不对等

$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i\partial x_i}=\frac{1-p}{x_i}\left(\frac{f(x)}{x_i}\right)^{1-p}$ 即对角

④ 二阶实例 $x\in R^n$：不一定用，可能 $x^T A x$ 直接出

1. 一阶导 + 二阶导
2. 写出 Hessian ⇒ $\nabla^2 f(x)_{ij}=\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}$ $n\times n$ 矩阵
3. 证正定性。 ⇒ Cauchy：$(a^T a)(b^T b)\geq(a^T b)^2$。

Ex: $f(x)=\log(e^{x_1}+\cdots+e^{x_n})$

1. $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=\frac{e^{x_i}}{\sum_{k=1}^{n} e^k}$，二阶 $\begin{cases}H_{ii}=\frac{e^{x_i}\sum_{k}^{n} e^k-e^{x_i}e^{x_i}}{(\sum_{k}^{n} e^k)^2}\\ H_{ij}=\frac{-e^{x_i}e^{x_j}}{(\sum e^k)^2}\end{cases}$

2. $H=\frac{1}{\sum e^k}\cdot\begin{bmatrix}e^{x_1}\sum e^k & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & e^{x_n}\sum e^k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}e^{x_1}\\ \vdots\\ e^{x_n}\end{bmatrix}[e^{x_1}\cdots e^{x_n}]$

令 $z=\begin{bmatrix}e^{x_1}\\ \vdots\\ e^{x_n}\end{bmatrix}$，$H=C\cdot 1^T z\, diag(z)-z^T\cdot z$。

3. $V^T H V=1^T z V^T diag(z)V-V^T z\cdot z^T V$

$a_i=v_i\sqrt{z_i}$，$b_i=\sqrt{z_i}$

$=\sum^{n} z_i\times\sum^{n} v_i^2 z_i-\sum v_i z_i^2\geq 0$

$b^T b$　$a^T a$　$a^T b$

线性代数

线性代数：R^n → n 维向量。

① 正定：$A\geq 0 \Leftrightarrow x^T A x\geq 0$ 或 $A=x^T x$ 实正定必对称，逆非对称但不一定正定

② 转置：$a^T b=b^T a=a\cdot b$ (向量内积R)

$C^T=C$ (常数)，$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

③ 求导：$\frac{\partial a^T x}{\partial x}=a$，$\frac{\partial x^T B x}{\partial x}=(B+B^T)x$

$=\frac{\partial x^T a}{\partial x}$

$\frac{\partial a^T x b}{\partial x}=ab^T$，$\frac{\partial a^T x^T b}{\partial x}=ba^T$

$R^{m\times n}$ → 实 $m\times n$ 矩阵

④ $(A+B)^T=A^T+B^T$，$(AB)^T=B^T A^T$

⑤ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

优化问题标准形式：

$\min\ f_0(x)$

s.t. $f_i(x)\boxed{\le}0,\ i=1,\cdots m$

$h_i(x)=0,\ i=1\cdots p.$

定义域：$D=\bigcap_{i=0}^{m}\mathrm{dom} f_i\cap\bigcap_{i=1}^{p}\mathrm{dom} h_i$

3个的交集！

可行：满足s.t.的约束的$x\in D$可行.

有一个及以上可行点→问题可行，否则不可行.

可行集：可行点集合. 若$f_0(x)\equiv 0$，

最优值：$p^*=\inf\{f_0(x)\mid 2个约束\}$ $\Rightarrow x^*=0$（可理） $\begin{cases}\infty(空集)\\ \infty,不可行\\ -\infty,无下界\end{cases}$

最优解：$x^*\in D,\ f_0(x^*)=p^*$，集合为最优集.

次优解：$f_0(x)\le p^*+\varepsilon$，$x$为$\varepsilon$-次优

ε-次优集

局部最优：$f_0(x)=\inf\{f_0(z)\mid 2约束,\ \|z-x\|_2\le R\}$

$\min f_0(z)$ $\|z-x\|_2\le R.$

s.t. $f_i(z)\le 0,\ h_i(z)=0,$

半定规划

$\min\ C^Tx$

s.t. $x_1F_1+\cdots x_nF_n+G\preceq 0$ 后$x\in C\cdot X$

$Ax=b$

$\Updownarrow$

$\min\ \mathrm{tr}(CX)=\mathrm{tr}(Cxx^T)$

s.t. $\mathrm{tr}(A_iX)=b_i$

$X\succeq 0$ $X=xx^T$

向量优化

$\min\ f_0(x)$

s.t. $g_i(x)\le 0$

$h_i(x)=0.$

$O\Rightarrow$可行解集合.

x^*最优：$O\subseteq f_0(x^*)+K.$

$\Downarrow$ 满足

Pareto最优：

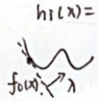
$f_0(x)$是O中极小元

标量化后求解Pareto最优：

$\min\ \lambda^Tf_0(x)$ $(\lambda\succ K\cdot 0)$

s.t. $f_i(x)\le 0$ 每个λ对应一种Pareto

$h_i(x)=0$



$\Rightarrow$Pareto.

KKT条件：(5个) 条件：$p^*=d^*$即可.(slater) 有标准形式

① $f_i(x)\le 0$
② $h_i(x)=0$ 原问题可行

每个$\lambda\ge 0$. ③ $\lambda\ge 0$ 对偶问题可行

不等约束④ $\lambda_if_i(x)=0$ 互补松弛

每个元素一条！

⑤ $\nabla f_0(x)+\sum\lambda_i\nabla f_i(x)+\sum v_i\nabla h_i(x)=0$ 稳定性 → $L(x,\lambda^*,v^*)$求导为0.

$f_0(x^*)=g(\lambda^*,v^*)$

$=f_0(x^*)+\sum\lambda_i^*f_i(x^*)+\sum v_i^*h_i(x^*)$

$=f_0(x^*)$ 互补松弛.

⇒最优解必满足KKT，解方程即可.

Ex: $\min f_0(x)$

s.t. $x\ge 0$

①转标准：$0-x\le 0.$

②写KKT:

$\begin{cases}x_i^*\ge 0\\ \lambda_i^*\ge 0\\ \lambda_i^*(-x_i^*)=0\\ \nabla f_0(x^*)-\lambda^*=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_i^*\ge 0\\ \nabla f_0(x^*)\ge 0\\ x_i(\nabla f_0(x^*))=0.\end{cases}$

Ex: $\min \frac{1}{2}x^TPx+q^Tx+r$

s.t. $Ax=b$

$\Rightarrow\begin{cases}Ax^*=b\\ Px^*+q+A^Tv^*=0.\end{cases}$

重新式化：无意对偶→有意义.

Ex: $\min\ f_0(Ax+b)$

$\Downarrow$

$\min f_0(y)$ $L(x,y,v)$

s.t. $y=Ax+b.$ $=f_0(y)-v^Ty+v^TAx+v^Tb.$

$\Rightarrow g(v)=\begin{cases}-f_0^*(v)+b^Tv,\ v^TA=0.\\ -\infty,\ 其它\end{cases}$

Ex: $\min\|Ax-b\|$同样：

$\min\|y\|$

s.t. $y=Ax-b.$

$L(x,y,v)=$

$\|y\|-v^Ty+v^TAx-v^Tb$

$g(v)=\inf L(x,y,v)$

$=\begin{cases}-v^Tb+f^*(v),\ v^TA=0\\ -\infty\end{cases}$

等价问题：

① 二范数：$\min\|Ax-b\|\overset{等价}{\Longleftrightarrow}\min(Ax-b)^T(Ax-b)$

② 松驰变量：$f_i(x)\le 0\Longleftrightarrow f_i(x)+s_i=0,\ s_i\ge 0.$

③ 消等式：$h_i(x)=0\overset{解}{\Longleftrightarrow}x=\varphi(z)$，代回原式

④ 消线性等式：$Ax+b=0\Longleftrightarrow x=x_0+Fz$，代回原式.

⑤ 引入等式约束：$f_0(Ax+b)\Longleftrightarrow f_0(y),\ y=Ax+b\ \ldots$

Lagrange对偶（必须是标准形式优化问题）.

$\min\ f_0(x)$

s.t. $f_i(x)\le 0$

$h_i(x)=0$

① Lagrange函数：

写出来后把同一变量的并一起 ← $L(x,\lambda,v)=f_0(x)+\underbrace{\sum_{i=1}^{m}\lambda_if_i(x)}_{\lambda^Tf(x)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{p}v_ih_i(x)}_{v^Th(x)}$

② 对偶函数：

$g(\lambda,v)=\inf_{x\in D}L(x,\lambda,v)=\inf_{x\in D}\left(f_0(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_if_i(x)+\sum_{i=1}^{p}v_ih_i(x)\right)$

一定是凹函数，对于λ,v是仿射的逐点下确界

⇒也可用定义（利用仿射既凸又凹）.

$\forall\lambda\ge 0,\ \forall v,\ g(\lambda,v)\le p^*$

先观察$g(\lambda,v)$ $\begin{cases}可否-\infty\\ 不可\begin{cases}求导代入\\ 令三项=0,其余即p^*\\ 含x\end{cases}\end{cases}$

扰动及灵敏度分析.

$\min f_0(x)$

s.t. $f_i(x)\le 0\to f_i(x)\le u_i$ $f_0(x)$凸

$h_i(x)=0\to h_i(x)=v_i$

$p^*\longrightarrow p^*(u,v).$ $p^*(u,v)$凸(关于u,v).

$\Rightarrow f_0(x)\ge p^*(0,0)-\lambda^{*T}u-v^{*T}v.$

⇒由λ、v可决定u,v对估计的影响.

鞍点：

$p^*=d^*\Leftrightarrow$有鞍点 $f(\tilde w,z)\le f(\tilde w,\tilde z)\le f(w,\tilde z)$

极大极小不等式： $\Uparrow$ 则$(\tilde w,\tilde z)$为鞍点.

$\sup_{z\in Z}\inf_{w\in W}f(w,z)\le\inf_{w\in W}\sup_{z\in Z}f(w,z).$ 强对偶时，

$\tilde x=\lambda^*,\ \tilde\lambda=\lambda^*$

凸优化问题：

标准形式：

$\min\ f_0x$ → 凸函数

s.t. $f_i(x)\boxed{\le}0$ → 小于号

$a_i^Tx=b_i$ → 仿射等式.

⇒可行解集必为凸

任意局部最优为全局最优：反证法

x局优，$\exists y, f_0(y)<f_0(x)$，$z=(1-\theta)x+\theta y.$

$f_0(z)<f(x)$，令$\theta=\frac{R}{2\|y-x\|_2}$，则$\|z-x\|_2<R$，矛盾.

最优解x^*性质：$\forall y,\ \nabla^Tf(x^*)(y-x^*)\ge 0$

⇒可用于求最优解：

① $\min f_0(x)$ s.t. $Ax=b$ ⇒ 令$y=x+v$可行, $\nabla^Tf(x^*)v\ge 0.$ $\nabla^Tf(x^*)v=0.$ $\Downarrow$ $\begin{cases}v=0,\ y=x^*=bA^{-1},唯一可行\\ v\ne 0,\ \nabla f^T(x^*)=0的点\end{cases}$

② $\min f_0(x)$ s.t. $x\ge 0$ 素数思想求解常用.

⇒令$y=0\Rightarrow\nabla^Tf_0(x^*)\le 0$ $\Rightarrow\nabla^Tf_0(x^*)=0$

⇒若$\nabla^Tf_0(x^*)\le 0$，则$\nabla^Tf_0(x^*)y$无下界

用共轭表示对偶函数：(针对简单问题)

Ex: $\min f(x)$, s.t. $x=0$. 原理：$\inf(f(x))=-\sup(-f(x))$

$g(v)=\inf_x(f(x)+v^Tx)$

$=-\sup_x((-v^T)x-f(x))=-f^*(-v)$

$\min f_0(x)$

s.t. $Ax\le b, Cx=d$ $\Rightarrow g(\lambda,v)=-b^T\lambda-d^Tv-f_0^*(-A^T\lambda-C^Tv)$

$\Downarrow$

对偶问题：凸优化问题.

$\max\ g(\lambda,v)$ → 只关注非$-\infty$情况

s.t. $\lambda\ge 0$

最优值$d^*\le p^*$ $\lambda\ge 0$ $\lambda\ge 0\cdots$

对偶可行：$\lambda\ge 0$且$g(\lambda,v)>-\infty$.

对偶间隙：p^*-d^* Slater弱化：

强对偶：$d^*=p^*$ 若$f_i(x)$仿射，则D非空即强dual

↑充分条件

slater条件：$f_i(x)\underset{n}{<}0,\ Ax=b.$ 原问题要凸

若$\exists x\in\mathrm{relint}D$，若$x$严格可行 ⇒凸基本都满足

证最优性 $\begin{cases}凸问题+\ \nabla^Tf(x^*)(y-x^*)\ge 0\\ 强对偶+\ \text{KKT}.\end{cases}$

Tips：举反例.

KKT不成立别担心（$\lambda<0$）（尤其是例题2题）验验slater，用dual d^*求解

线性规划标准化.

$\min c^Tx$ $\Rightarrow x=x^+-x^-$ 不等式引入松弛变等式.

s.t. $Ax=b$ $x^+\ge 0,\ x^-\ge 0$

$x\ge 0$

1. $\{x, 2023+2024x\}$ 集合（仿、子、凸锥、不是）
2. $-\log(e^{x_1}+e^{x_2})-x_1^2+3x_2$ $(x_1\ge 0)$（凸、凹、仿、不是）

记得把取的条件也加上不等约束里.

线性规划：凸 $\xrightarrow[特例]{P=0}$ 二次规划 QP 凸

$\min\ c^Tx+d$

s.t. $Gx\preceq h$ 全仿射.

$Ax=b.$

$\min\frac{1}{2}x^TPx+q^Tx+r$ $(P\in S_+^n)$

s.t. $Gx\preceq h$

$Ax=b$

可行空间为多面体. $\Downarrow$ 特例

线性分式规划（拟凸）.

二次约束二次规划QCQP.

$\min\ \dfrac{c^Tx+d}{e^Tx+f}$

s.t. $Gx\preceq h$

$Ax=b.$

$\xleftarrow[特例]{P_0,P_i=0}$ $\min\frac{1}{2}x^TP_0x+q_0^Tx+r_0$

s.t. $\frac{1}{2}x^TP_ix+q_i^Tx+r_i\le 0$

$Ax=b.$

$\Updownarrow$ 转为线性规划

$\min\ c^Ty+dz$ $(y=\frac{x}{e^Tx+f}$ $z=\frac{1}{e^Tx+f})$

s.t. $Gy\preceq hz$

$Ay=bz$

$e^Ty+fz=1$

$z\ge 0$

广义不等式约束优化：

$\min f_0x$

s.t. $f_i(x)\preceq_{K_i}0$

$Ax=b.$