概率论、数理统计和随机过程

↓ 几乎不考

只有一、二选填

(1) 随机事件及其概率 会用Wenn图

①

运算：$A-B$，$A\cup B$，$A\cap B(AB)$，$\bar{A}$

有A无B

关系：$A=B$，$A\subset B$，对立 $(AB=\varnothing, A\cup B=\Omega)$

等价 $A\subset B, B\subset A$

有A必有B

即 $A=\bar{B}$，$B=\bar{A}$

(互斥)互不相容 $(AB=\varnothing)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

② 概率 { 非负；规范(=1)；互斥则可加 ⇒ $P(A_1\cup A_2\cup\cdots A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

③ 条件概率：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

⇒ 乘法公式：

$P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$

④ 全概率公式：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A|B_i)$$

贝叶斯公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A|B_i)}=\frac{P(AB_i)}{P(A)}$$

⑤ 独立（对A-B）

$P(A|B)=P(A)$

或

$P(A)P(B)=P(AB)$

☆ A、B独立 → A、$\bar{B}$独立

$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$

$=P(A)-P(A)\cdot P(B)$

$=P(A)\cdot(1-P(B))$

$=P(A)\cdot P(\bar{B})$

(2) 随机变量及分布（不咋考，打基础）

分布：$F(x)=P(X\leq x)$ ☆ ≥ 用左右极限 <

⇒ $F(x_2)-F(x_1)=P(x_1<X<x_2)$

$\lim_{x\to\infty}F(x)=1$，$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$

离散型分布律：

列表：写出 X，P.

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

对 $Y=g(X)$，→函数处理

则 $P(Y=y_i)=P(g(X)=y_i)$ →多值时求和

代入即可

⇒ 分布函数：$F(x)=\sum_{x_k\leq x}P(X=x_k)$

阶梯跳跃

$$=\text{分段}\begin{cases}\cdots & x<x_1\\ \cdots & x_1\leq x<x_2\\ \cdots & \cdots\end{cases}$$

常见分布：

① 0-1：

X	0	1
P	p	1-p

$X\sim b(1,p)$

☆② 二项分布 $X\sim b(n,p)$ ⇒ n次独立重复实验中A发生次数.（有放回）

$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

中间最大（$\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=1$时）

⇒ n很大 p很小时：泊松近似.

$C_n^k p^k\cdot(1-p)^{n-k}\approx\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，$\lambda=np$.

查表.

③ 泊松分布 $X\sim P(\lambda)$.

$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$ ⇒ 单位时间内A发生次数（二项分布极限）

④ 几何分布 $X\sim G(p)$

$P(X=k)=q^{k-1}\cdot p$ ⇒ 实验进行到成功为止的第一次的次数

$=(1-p)^{k-1}\cdot p$

⑤ 负二项分布

⑥ 超几何分布 ⇒ 抽n个，里面次品数k（无放回）

$P(X=k)=\dfrac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

与二项分布期望同

连续型：

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\,dx$ →概率密度 ⇒分段做.

① 均匀分布 $X\sim U(a,b)$ ⇒ 计算还是用分布函数.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}\quad\Rightarrow F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{x-a}{x-b} & a\leq x\leq b\\ 1 & x>b.\end{cases}$$

② 指数分布 $X\sim e(\lambda)$ ☆无记忆性，s岁再活t年与s无关（寿命）

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq0\\ 0, & x<0.\end{cases}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

③ 正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x\in R$.

⇒ 使用 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1^2)$ 标准化计算. ⇒ $\Phi(x)$

上α分位点：

$P(X>x_\alpha)=\alpha$，x_α为α上分位

☆ 求分布律：$Y=g(X)$. →要利用变限积分求导

☆ 先求 $F(Y)$，再求导得：$f_Y(y)$.

↳ $f_Y(y)=\dfrac{dF_Y(y)}{dy}$

↓

$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(g(X)\leq y)=\int_{x|g(x)\leq y}f_X(x)\,dx$.

记得外面还要乘积分上限导数.

随机向量及其分布（二维为主）

$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)$ → 区域

① 联合分布

① 离散型：

联合分布律：列表

$X\backslash Y$	y_1	$\cdots$
x_1	p_{11}	
$\vdots$		p_{ij}

$F(x,y)=\sum\limits_{y_j\le y}\sum\limits_{x_i\le x} p_{ij}$

连续型：

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dx\,dy$

联合分布函数　　联合概率密度

$\Rightarrow f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)=1$

$P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$

区域积分 → 换元，二元积分工数。

积分结论：$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

$\int_0^{\infty} y^2 e^{-by}dy=\dfrac{2}{b^3}$

$\Rightarrow$ Ex：二维均匀 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in G\\ 0, & 其它\end{cases}$，二维正态…

② 边缘分布． ☆联合可推边缘，边缘不可推联合．

连续型：$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$　边缘分布函数

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,dy$．

$\Rightarrow\begin{cases}f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx.\end{cases}$

☆画图做．

边缘密度．

离散型：

$F_X(x)=\sum\limits_{x_i\le x}\sum\limits_{j=1}^{\infty} p_{ij}$ → $P(X\le x_i)$求和．→ 表中 x_i 所在行求和．

$P(X=x_i)$是

$\Rightarrow$ 二维正态分布边缘分布均为一维正态．

③ 条件分布：

$P(Y\le y\mid X=x)=\dfrac{P(X=x,\ Y\le y)}{P(X=x)}$

记为 ~~$F_{Y|X=x}$~~ $F_{Y|X}(y|x)$

用条件概率

$\begin{cases}离：\sum\limits_{y_j\le y} P(Y=y_j\mid X=x_i)\ \Rightarrow\ P(Y=y_i\mid X=x_i)=\dfrac{P_{ij}}{P_i}\\ 连：\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\,dy\end{cases}$

$\Rightarrow f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

④ 独立性：

☆ $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$

联合 ＝ 边缘 × 边缘．

$\begin{cases}离散：\forall x_i,y_i\quad P(X=x_i,Y=y_i)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_i)\\ 连续：☆ f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)\end{cases}$

⑤ 函数的分布．

$Z=$ ~~$g(X)$~~ $g(X,Y)$ / $g(X_1,X_2)$

离散型：

直接计算：$P(Z=z_k)=P(g(X,Y)=z_k)$．

连续型：先求 F_Z，再求导．

例题

$F_Z(z)=P(g(X,Y)\le z)$

$=\iint\limits_{G:\,g(x,y)\le z} f(x,y)\,dy\,dz$（画图）

$=f_X(x)\cdot f_Y(y)$．例题

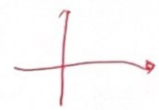
~~画图~~

$f_Z(z)=\dfrac{dF_Z(z)}{dz}$：别忘求导．

卷积公式：X、Y独立，$Z=X+Y$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,dy$

$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,dx$



☆ 数字特征 $\begin{cases}期望\\ 方差\\ 相关系数\\ 协方差\end{cases}$

期望：$\begin{cases}连：EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx\\ 离：EX=\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_k p_k\end{cases}$

☆ 计算公式：$E(c)=c$

$E(cX)=c\cdot E(X)$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

独立：$E(XY)=EX\cdot EY$．

$EX^2=(EX)^2+DX$

函数公式：$Y=g(X)$

☆ $EY=Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx$

$\cdots=\sum\limits_{k=1}^{\infty} g(x_k)\cdot P(X=x_k)$．

方差：

$DX=E(X-EX)^2$

$=EX^2-(EX)^2$

计算：$D(c)=0$

$D(aX+b)=a^2DX$

独立：$D(X+Y)=DX+DY$．

$D(X-Y)=DX+DY$

不独立：$D(X+Y)=DX+DY+2Cov(X,Y)$

切比雪夫：

$P(|X-\mu|>\varepsilon)\le\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

协方差＆相关系数：

$Cov(X,Y)=E((X-EX)(Y-EY))$　若独立，$Cov(X,Y)=0$．

$=\boxed{EXY-EX\cdot EY}$

$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}$．

$|\rho_{XY}|\le 1$，$=1$即线性相关，

正负表示相关性正负．

$\rho_{XY}=0\Rightarrow$ 独立．

计算：

① $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

② $Cov(X,X)=DX$

③ $Cov(X,c)=0$

④ $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$

☆ $Cov(-X,Y)=-Cov(X,Y)$

记忆：

分布	期望	方差
0-1分布	p	$p(1-p)$
二项分布	$n\cdot p$	$np(1-p)$
泊松分布	λ	λ
指数分布	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	μ	σ^2
均匀分布	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
几何分布	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

大数定理

①概率收敛：$\forall \varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty} P(|X_n-X|<\varepsilon)=1$

⇒记为 $X_n \xrightarrow{P} X$

②大数定理：对 $X_1 \cdots X_n$ $\quad (\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty} X_n)$

~~$\bar{X}_n \xrightarrow{P} E\bar{X}_n$~~

+条件：$X_1 \cdots X_n$ $\boxed{\text{独立 同分布}}$

辛钦大数：$\bar{X}_n \xrightarrow{P} EX_k=\mu$ → 任一个的期望，没有一

③中心极限定理：☆

$X_1 \cdots X_n$ 独立同分布。 变量和标准化后 $\sim N(0,1)$

则标准化后 $Y_n=\dfrac{\sum X_i-\sum EX_i}{\sqrt{\sum DX_i}}$

$Y_n \sim N(0,1)$，$F_Y(x)=\Phi(x)$ 答题前说明 X_i 含义。

大于也一样做

$$\Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le a\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{D\sum X_i}} \le \frac{a-E\sum X_i}{\sqrt{D\sum X_i}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{a-E\sum X_i}{\sqrt{D\sum X_i}}\right)$$

抽样分布：

对样本 $X_1, X_2 \cdots X_n$

⇒独立，且服从同总体X的分布 → 分布律可用独立结论。
$$\begin{cases} P(X_1=x^{(1)}\cdots X_n=x^{(n)})=\prod_{i=1}^{n} P(X_i=x^{(i)}) \\ f(x_1\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i) \end{cases}$$

⇒结论：

①对任何总体X；$X_1, \cdots X_n$ 样本：($\mu \cdot \sigma^2$) → $S_n^2 \cdot \bar{X}$

$S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X})^2$

☆ $\begin{cases} E\bar{X}=\mu \\ D\bar{X}=\frac{\sigma^2}{n} \\ ES_n^2=\sigma^2 \end{cases}$

☆② 对正态总体 $\sim N(0,1)$（标准），$X_1 \cdots X_n$.

记定义：1. 令 $\chi^2=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$（平方和），$\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

$\begin{cases} \text{可加性：} \chi_1^2+\chi_2^2 \sim \chi^2(n_1+n_2) \text{（不对称）} \\ E(\chi^2)=n,\ D(\chi^2)=2n \text{ 背！} \end{cases}$

2. $X \sim N(0,1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，XY独立

对称 $T=\dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)$ $\quad ET=0$，$D(T)=\frac{n}{n-2}$

3. $X \sim \chi^2(m)$，$Y \sim \chi^2(n)$，XY独立

不对称 $F=\dfrac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}=\frac{X}{Y}\cdot\frac{n}{m} \sim F(m,n)$

⇒ $F_\alpha(n_2,n_1)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}$

☆③ 正态总体 $\sim N(\mu,\sigma^2)$

$X_1 \cdots X_n$

(1) $U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ 标准化

(2) $\bar{X}$、S^2 相互独立

样本均值 → 样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

(3) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

(1) $=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma}\right)^2$ （$\sim N(0,1)$）

(4) $T=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$ （(1)+(3)）

参数估计：$\begin{cases} k\text{阶原点距：} \alpha_k=EX^k \\ k\text{阶中心距：} \beta_k=E(X-EX)^k \end{cases}$

①矩估计 ⇒ 原点距

总体的k阶原点距 = 样本的k阶原点距

Ex:		
EX	$=$	$\bar{X}$
EX^2	$=$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ ⇒ 几个未知量 几个方程
$EX^k \cdots$	$=$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X^k$

②最大似然估计

(1) 似然函数：出现这个样本的概率

$L(\theta_1\cdots\theta_k)=\begin{cases} \text{离：} \prod_{i=1}^{n} P(X=x_i) \\ \text{连：} \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta_1\cdots\theta_k) \to \text{联合分布} \end{cases}$

(2) 求最大值点 $\begin{cases} \text{端点} \\ \text{极值点} \end{cases}$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial \theta}$ 解出 θ。

③评估：

代入上面算的，表示时用真值 θ → 证无偏

若总体 真值 未知，先假设 ← (1) 无偏性：$E(\hat{\theta})=\theta$ → 证明时分不同 θ 取值 → 证有偏

若无偏，$\forall\theta$；有偏 $\exists\theta$ 不满足 ⇒ 笔记例题

(2) 有效性：在无偏性基础上，方差越小越好

(3) 相合性：$\forall \varepsilon>0$ $\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}(X_1\cdots X_n)-\theta|<\varepsilon)=1$ 样本全知时取值为真值

区间估计 ☆全为双边

$1-\alpha$ 置信区间：$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 使

$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1-\alpha$.

叫置信度

⇒ 方法：① 求 θ 点估计 $\hat{\theta}$

② 构造 $g(\hat{\theta}, \theta) \sim$ 已知分布

③ 求 $P(a < g(\hat{\theta}, \theta) < b) = 1-\alpha$.

⇒ 正态总体：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1 \cdots X_n$ 样本

① σ^2 已知，求 μ 置信区间

构造 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

求解：$P\left(\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$

置信度

↳ 上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位点

② σ^2 未知，求 μ 置信区间

$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$

求解：$P\left(\left|\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = 1-\alpha$

③ σ^2

构造 $\dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ △

注：只有 χ^2 关于 y 轴不对称.

☆ 求解不同！

⇒ $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) < \dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ △

假设检验.

① 写假设 H_0 / H_1 $\alpha\uparrow, S\uparrow$

② 选观测值 算拒绝域 S（α 显著性水平）

③ 算观测值，与 S 比较.（$\in S$，拒 H_0；$\notin S$，接受 H_0）

P(拒绝 H_0 | H_0 成立) $= P(X_1 \cdots X_n \in S \mid H_0) \le \alpha$.

控制弃真错误 $P \le \alpha$（第一类）. ⇒ 想有充分证据的放 H_1

对正态总体： ☆拒绝域推导 ⇒ 用 H_1.

① 检 μ.

(1) σ 已知：

$U = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

与区间估计区分 μ/μ_0.

双边：$H_0: \mu = \mu_0$，$H_1: \mu \neq \mu_0$.

☆ $S = \left\{(x_1 \cdots x_n) \,\middle|\, \left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \ge u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}$

⇒ 代入 $\bar{x}$ / U 检验.

单边：$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_0: \mu \le \mu_0 \end{cases}$，$H_1: \mu > \mu_0$

⇒ $S = \left\{(x_1 \cdots x_n) \,\middle|\, \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \ge u_\alpha\right\}$

$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_0: \mu \ge \mu_0 \end{cases}$，$H_1: \mu < \mu_0$

☆ ⇒ $S = \left\{(x_1 \cdots x_n) \,\middle|\, \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le -u_\alpha\right\}$

(2) σ 未知：

$T = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$

双边：$H_0: \mu \neq \mu_0$；$H_1: \mu = \mu_0$

$S = \left\{x_1 \cdots x_n \,\middle|\, \left|\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$

单边：$H_0: \mu \le \mu_0$；$H_1: \mu > \mu_0$

$S = \left\{x_1 \cdots x_n \,\middle|\, \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} > t_\alpha(n-1)\right\}$

$H_0: \mu \ge \mu_0$；$H_1: \mu < \mu_0$

$S = \left\{x_1 \cdots x_n \,\middle|\, \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < -t_\alpha(n-1)\right\}$

② 方差

$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

☆双边：$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$；$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$S = \left\{\chi^2 \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{ 或 } \chi^2 \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$

☆ 单边：

$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2$，$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ 右

$S = \{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n-1)\}$

$H_0: \sigma^2 \ge \sigma_0^2$；$H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ 左

$S = \{\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

随机过程

有限维分布函数：☆在$X(t)$中，t为常数！

$F(x;t)=P(X(t)\le x)$

☆数字特征：对$X(t)$ ☆计算时$X(t)$中t已定！

记忆 均值函数：$m_X(t)=EX(t)=\begin{cases}\sum_{k}^{\infty} a_k P(X(t)=a_k)\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;t)dx\end{cases}$

均方差函数：$D_X(t)=E[X(t)-m_X(t)]^2$

$=EX^2(t)-m_X^2(t)$

区别随变的！

☆相关函数：$R_X(s,t)=EX(s)X(t)$

☆协方差函数：$C_X(s,t)=E(X(s)-m_X(s))(X(t)-m_X(t))$

$\Rightarrow C_X(s,t)=R_X(s,t)-m_X(s)m_X(t)$

$=EX(s)X(t)-m_X(s)m_X(t)$

典型随机过程：

①独立增量过程

$\boxed{\text{在时间区间不重叠时}}$：

$X(t_2)-X(t_1)$，$X(t_3)-X(t_2)\cdots$ 独立。

⇓

② 平稳独立增量：（与起点无关）。

$\forall s,t$，$X(t+h)-X(s+h)$与$X(t)-X(s)$服从同一分布

☆⇒性质：

若$X(0)=0$，且平稳独立

$\begin{cases}\text{均值：} m_X(t)=m\cdot t=\text{这}\ m_X(1)\cdot t\\ \text{方差：} D_X(t)=\sigma^2 t=D_X(1)\cdot t\\ \text{协方差：} Cov(s,t)=\sigma^2\cdot\min(s,t)=D_X(1)\cdot\min(s,t)\end{cases}$

$=D_X(\min(s,t))$

③维纳过程 $W(t)$

条件：&性质

$\begin{cases}W(0)=0\\ E(W(t))=0\\ \text{平稳独立增量}\\ W(t)\sim N(0,\sigma^2 t)\end{cases}$

可推理

$m(t)=0$

$D(t)=\sigma^2 t$

$C_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$

☆单增

若$x_i>x_j$，$W(x_i)-W(x_j)\ge 0$

④泊松过程

条件&性质

$\begin{cases}N(0)=0\\ \text{独立增量且平稳（齐次）}\\ P_k(t)=P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\ ☆\end{cases}$

推理

若$N(t)\sim P(\lambda t)$

$\Rightarrow\begin{cases}m(t)=\lambda t\\ D(t)=\lambda t\\ COV(N(t),N(s))=\min(t,s)\cdot\lambda\end{cases}$

☆单增的，含义为事件计数！

即 若$t_1>t_2$，$N(t_1)\ge N(t_2)$

⇓

$\Rightarrow P(N(t_1)-N(t_2)\cdots)$

$=P(N(t_1-t_2)\cdots)$

马尔可夫过程：过去与未来无关&独立。

$P(X(t_n)\le x_n\mid X(t_1)\cdots X(t_{n-1}))=P(X(t_n)\le x_n\mid X(t_{n-1})=x_{n-1})$

⇒马氏性。

对$N(0)=0$的独立增量过程均有（如维纳、泊松）

⇓ 看例题。

马尔可夫链：离散化的马尔可夫过程。

转移概率（n步） 定义就是条件概率！

$P_{ij}(m,m+n)=P(X_{m+n}=j\mid X_m=i)\Rightarrow$ 写成矩阵 P

每一行和为1 同一起点所有可能

$\begin{pmatrix}P_{11}(m,m+n) & \cdots\\ \cdots & P_{xx}(m,m+n)\end{pmatrix}$

齐次性：起点无关。

$P_{ij}(m,m+n)=P_{ij}(0,n)=P_{ij}(n)$ $n=1$时可省。

⇓

齐次用1步矩阵：$P(1)$

⇒ 求解只需初始分布＋一步矩阵（多）。

初：$P_j(0)=P(X_0=a_j)$

$P_j(n)=\sum_{i=1}^{\infty}P_i(0)\cdot P_{ij}(n)$

⇓

多步的计算：

$P_{ij}(u+v)=\sum_{k=1}^{\infty}P_{ik}(u)P_{kj}(v)$

$\Rightarrow P_{ij}(n)=P_{ij}^n(1)$

$=\boxed{P_{ij}^n(1)}$

⇒ 乘法公式（常用）：

$P(A_1、A_2、A_3\cdots A_n)$

$=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1,A_2\cdots A_{n-1})$ ⇒再用马氏性。

特殊在笔记 $\begin{cases}X_5|X_0=0\\ \text{未知}X_0\end{cases}$

矩阵：

$P(n)=P^n(1)$

用矩阵乘法！

遍历性：

$\forall i,j$，$\lim_{n\to\infty}P_{ij}(n)=\pi_j$（与i无关） ⇒ 矩阵 $\begin{bmatrix}\pi_1 & \cdots & \pi_j & \cdots\\ \pi_1 & \cdots & \pi_j & \cdots\\ \cdots & & & \\ \pi_1 & \cdots & \pi_j & \end{bmatrix}$

每列元素相等

每行相同

$\pi=(\pi_1,\pi_2\cdots\pi)$为极限分布。

↳ $\pi_j>0$且$\sum_{j=1}^{N}\pi_j=1$

充分性：

$\exists m$ 使$\forall i,j$，$P_{ij}(m)>0$

某一步转移矩阵全不为0。

联立。

此时，求π（行向量）。

$\pi=\pi P$ → 1步矩阵

$\Rightarrow \pi_j=\sum_{i=1}^{N}\pi_i\cdot P_{ij}$