信号与系统 Signal and System.

C1 Basics

① 信号运算. $\boxed{\text{☆只对自变量操作}}$

$\Rightarrow x(n) \rightarrow x(-\frac{n}{3}+2)$

- 加减乘除
- 微分 / 积分 / 差分 / 求和

- 时移
- 反转

☆尺度变换 { 连 / 离 (不同)

② 基础信号

转化成 $e^{j(\omega t+\varphi)}$ 处理.

1) $\sin(\omega t+\varphi)$ / $\cos(\omega t+\varphi)$

$\downarrow n$ $\quad \downarrow n \Rightarrow$ 条件周期

2) $x(t)=Ae^{at}$ / Ae^{an} $\Rightarrow$ 1) $\frac{\omega}{2\pi}=\frac{m}{\varphi}$ (有理数)

$\downarrow$

$a=j\omega_0$ $\quad$ 2) $\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{m}{N}$ (有理数) $\quad N \to T$

3) $u(n)$ / $u(t)$

$\updownarrow$ 差分. $\updownarrow$ 无 $t=0$. $\Rightarrow$ $h(t)$ 与 $s(t)$ 也是一样关系

$\Downarrow$ ☆可以靠积分求 $h(t)$ PPT P34.

4) $\delta(n)$ / $\delta(t)$

③ 系统性质

1) 无记忆 (即时) / 记忆 (动态)

$\Downarrow$ out 只与当前 in (恒等也无.) $\quad \Downarrow$ out 与之前/之后有关.

2) 可逆

$\Downarrow$

in 和 out 一一对应.

3) 因果系统 (现实)

$\Downarrow$

out 只取决于当前和之前的 in

无未来.

4) 稳定性

$\Downarrow$

in 有界 $\Rightarrow$ out 必有界.

☆⑤ 时变 $\to$ 变参数, 反转, 缩展. / 时不变.

$\Downarrow$

时移后进系统

= 先进系统后时移

$x(t)\to y(t)$

$\Rightarrow x(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$

☆证明. (易错!) ☆ 背

① $x_1(t) \to y_1(t)$, $x_2(t) \to y_2(t)$

② $x_2(t)=x_1(t-t_0)$ ↗ 自变量变换!

$y_2(t) = \times\times\times$ $x_1(t)$ 表示.

③ 比较 $y_1(t-t_0)$ 与 $y_2(t)$.

$\downarrow$

自变量变换

Ex: $y(n)=nx(n)$ $\Rightarrow$ 变

$y(t)=x(2t)$.

☆ 线性 / 非线性

$\Downarrow$ $x(t)\rightarrow y(t)$

- 齐次: $kx(t) \rightarrow ky(t)$ $\rightarrow$ "0"输入则"0"输出 $\Downarrow$ 快速判断线性 $\Downarrow$ Ex: $y(t)=x(t)+2$ 非线性.
- 叠加: $x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow y_1(t)+y_2(t)$

$\Downarrow$ 无输入 0 输出

证明严格按定义.

$(kx(t))=x(t)\cdots$

增量线性 (差值线性) { 零输入响应 / 零状态响应.

☆ C2 时域分析 (对LTI)

离散:

① 信号分解.

$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,\delta(n-k)$

$\Downarrow$ 基本单元即可求任意 $y(n)$.

$\Downarrow$

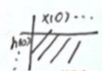
$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,h(n-k)$ (卷积)

$= x(n) * h(n)$

$\Downarrow$

1) 函数: 代入计算, 等比求和.

2) 值 (有限): 列表计算 ☆



起 n_{min} 主 $= n_{x\,min} + n_{h\,min}$. (上下标)

看PPT P17 例2.

② 卷积: 对 $A(n) * B(n)$

- 交换
- 结合
- 分配.

长度: $L_A + L_B - 1$

上下限 = A、B对应和

- 时移: $x(n-n_0)*h(n) = x(n)*h(n-n_0) = y(n-n_0)$
- 差分: $(x(n)-x(n-1))*h(n) = y(n)-y(n-1)$
- 求和: $\sum x(k)*h(n) = \sum y(t)$.

(差分、求和 → 分配)

☆ tips: $x(n)*\delta(n)=x(n)$, ☆ $x(n)*u(n)=\sum_{-\infty}^{n} x(k)$,

$x(n-n_1)*\delta(n-n_2)=x(n-n_1-n_2)$

$u(n-1)=u(n)-\delta(n)$, $nu(n)=nu(n-1)$

连续: $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$

① 分解: $x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$

$\Downarrow$

$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$.

② 卷积 ☆☆☆ 要留意 <0 时取值, =0 带上 $u(t)$

$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$

☆要注意取值: $u(t)*u(t)=tu(t) \neq t$ → 小心含这个的 (很易错!)

- 交换
- 结合
- 分配

- 时延: $x(t-t_1)*h(t-t_2) = y(t-t_1-t_2)$ $\quad (-t_0, +t_0 \to y(t))$
- tips: $x(t)*\delta(t)=x(t)$, $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$

$u(t)*u(t)=tu(t)$, $x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$!

☆微分 / 积分:

整体积 / 微 $\Leftrightarrow$ 单独积 / 微其中一个 ($\int_{-\infty}^{t}$, $\frac{d}{dt}$)

$\Downarrow$ 求起来快, 可用上面公式.

激励信号: $x(n)$

$Sa(t)=\frac{\sin t}{t}$ / $\mathrm{sinc}(t) \cdot \frac{\sin\pi t}{\pi t}$

$s(t)$: $u(t)$ 响应.

频率特性/频率响应: $H(j\Omega)$

LTI 性质 (后面都可用)

① 记忆性.

$\Downarrow$

若无记忆, 则 $h(n)=k\,\delta(n)$

② 可逆: 若 V, 则 $h(t)*h_{逆}(t)=\delta(t)$ 可用来求逆.

☆③ 因果

- $n<0$, $h(n)=0$
- $t<0$, $h(t)=0$

LTI 因果充要条件.

☆④ 稳定. $\Leftrightarrow$ 绝对可积

- $\sum |h(k)| < \infty$
- $\int_{\infty} h(t)\,dt < \infty$.

框图: 看题例4.7 P167 ☆背下参数. PPT 40页

离散: 加法、乘法、延时

连续: 加法、乘法、积分.

① 差分方程为系统函数

② 系统函数 → I型 → II型. I→II时 会一起走

看一下模型, 留意 $\frac{1}{a_0}$、b_0 位置! 或 $\frac{1}{a_N}$, b_N.

连续的要先积分, 系数与微分相反. 两边. $y(0) \rightarrow y''$

C3 连续时间频域分析 (FT.FS)

$\Rightarrow$ 将 $e^{j\Omega t}$ 作为基础信号.

① 连续 + 周期 CFS

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_k\, e^{jk\Omega_0 t}$ $\quad H(jk\Omega_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-jk\Omega_0\tau}d\tau$

$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dot{A}_k\, H(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$

☆ $x(t)$ 实信号 $\Rightarrow \dot{A}_k = \dot{A}_{-k}$

$\dot{A}_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,e^{-jk\Omega_0 t}dt$ $\quad \Omega_0=\frac{2\pi}{T}$.

☆理解频谱 $\Rightarrow$ 时域 → 频域

$\dot{A}_k$ 幅度/相位与频率 $k\Omega_0$ 关系.

性质和FT同.

☆② CTFT

$\Rightarrow$ 令 $T\to\infty$ 则非周期 → 周期

☆ $X(j\Omega) = T_0\dot{A}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$ (连续变量)

频谱 $\Rightarrow$ 与 Ω 有关.

反变换: 代入FS

☆ $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega)\,e^{j\Omega t}d\Omega$

FT 存在的条件:

1) 平方可积: $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt < \infty$

2) 狄利赫赤利:

- $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|\,dt < \infty$
- 有限区间只有有限个极值点/间断点
- 极值 / 不连续值有限

常见信号例子：FT☆

1) $e^{-at}u(t)$ （a>0）会推

$\Rightarrow X(j\Omega)=\frac{1}{a+j\Omega}\Rightarrow te^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(a+j\Omega)^2} \Rightarrow \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(a+j\Omega)^n}$

2) ~~δ~~ $u(t)$ 不绝对可积，借 积分性质

$\Rightarrow X(j\Omega)=\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}$

3) $\delta(t)$

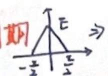
$\Rightarrow X(j\Omega)=1$ 还得看！滚动

☆4) $e^{j\Omega_0 t}$

$X(j\Omega)=2\pi\delta(\Omega-\Omega_0)$

5) $\begin{cases}\sin\Omega_0 t \Rightarrow \frac{\pi}{j}[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)]\\ \cos\Omega_0 t \Rightarrow \pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)]\end{cases}$

☆6) 方波 $x(t)=\begin{cases}1, & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0, & \frac{\tau}{2}<|t|\end{cases}$ → 非周期



$\Rightarrow \frac{E\tau}{2}Sa(\frac{w\tau}{4})$ （要考）

☆ 三角形是两个半大方波卷积

$\Rightarrow X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots=\frac{2\sin(\frac{\Omega\tau}{2})}{\Omega}=\tau\,\mathrm{sinc}(\frac{\Omega\tau/2}{\pi})$

$=\tau\,Sa(\frac{\tau}{2}\Omega)$

☆7) $Sa(t)\Rightarrow \pi[u(w+1)-u(w-1)]=\begin{cases}\pi, & |w|<1\\ 0, & |w|>1\end{cases}$

sinc ⇔ $\begin{cases}1, & |w|<1\\ 0, & |w|>1\end{cases}$

☆性质

1) 线性、反转 ⇒ 直接套(同)

2) 卷积、相乘

$x(t)*y(t)\Leftrightarrow X(j\Omega)Y(j\Omega)$

$x(t)y(t)\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(j\Omega)*Y(j\Omega)$

3) 时移、移频、尺度变换

$x(t-t_0)\Leftrightarrow X(j\Omega)\cdot e^{-j\Omega t_0}$

$x(t)e^{j\Omega_0 t}\Leftrightarrow X(j(\Omega-\Omega_0))$

$x(at)\Leftrightarrow \frac{1}{|a|}X(\frac{j\Omega}{a})$

☆6) 对偶：

$x(t)\to X(j\Omega)$

~~$2\pi x(-\Omega)\to X(jt)$~~

$X(jt)\to 2\pi x(-\Omega)$

4) 微分、积分

$\frac{dx(t)}{dt}\Rightarrow j\Omega X(j\Omega)\Rightarrow \frac{d^n x(t)}{dt^n}\to (j\omega)^n X(\omega)$

$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau \Rightarrow \frac{1}{j\Omega}X(j\Omega)+\pi X(0)\delta(\Omega)$ → 可用 $u(t)$ 卷积证明

$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=x(t)*u(t)$

$tx(t)\Rightarrow j\frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$

微分、积分 不可反用

5) 帕斯瓦尔：

$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\Omega)|^2d\Omega$

⇓ ☆

③对周期信号：$\boxed{FT}$：$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k\cdot e^{jk\Omega_0 t}$ ①先分解

$X(j\Omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k\cdot\delta(\Omega-k\Omega_0)$ ②再填上去

FS系数

⇓

周期性方波：$A_k=\frac{\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k\pi}$　　$\Omega_0=\frac{2\pi}{T}$

$\Rightarrow X(j\Omega)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(k\Omega_0\tau/2)}{k}\delta(\Omega-k\Omega_0)$

$A_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-j\Omega_0 tk}dt$

④ FA 分析

⇒ 在频域求 $x(t)$、$y(t)$、$h(t)$ 关系（反变换 → 一般用分式展开即可）

⇓

$H(j\Omega)=\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}$

⇒ 微分方程：⇒ 看例子 P128/P129

很好推

$H(j\Omega)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k(j\Omega)^k}{\sum_{k=0}^{N}a_k(j\Omega)^k}$ → $x(t)$，→ 微分次数，→ $y(t)$

结合看框图写的

⑤无失真、理想滤波 → 相位&幅度

失真：系统对子信号影响不同

⇒不失真：影响相同

⇓ 幅度　相位

$y(t)=kx(t-t_0)$

⇕

$H(j\Omega)=ke^{-j\Omega t_0}$ 条件

$|H(j\Omega)|=k$，$\varphi=-\Omega t_0$ ⇒ 群时延：$-\frac{d\varphi(\Omega)}{d\Omega}=t_0$

幅频特性常数　相频为过原点直线

理想滤波（低通）：通、阻带

响应：

$H(j\Omega)=\begin{cases}1, & |\Omega|<\Omega_c\\ 0, & |\Omega|>|\Omega_c|\end{cases}$ → 中间即截止频率

⇓

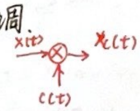
$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c}e^{j\Omega t}d\Omega=\frac{\Omega_c}{\pi}Sa(\Omega_c t)$

加上幅、相：$1\to ke^{-j\Omega t_0}$

$h(t)=\frac{k\Omega_c}{\pi}Sa(\Omega_c(t-t_0))$

⑥调制与解调

⇒ 幅度调制



1) 双边带正弦幅度调制

看图 PPT52

$c(t)=\cos(\Omega_0 t+\theta)$

$x_c(t)=x(t)c(t)$ ⇒ 效果：在频谱上：幅度减半，带宽加倍，移至 $\pm\Omega_0$ 两处。

解调：条件：$\begin{cases}x(t)\text{带限于}\Omega_m\\ \Omega_0>\Omega_m\end{cases}$

方法：$r(t)=x(t)\cos^2\Omega_0 t$

再乘 $c(t)=\frac{1}{2}x(t)+\frac{1}{2}x(t)\cos 2\Omega_0 t$

过理想低通

$\Omega_m<\Omega_c<2\Omega_0-\Omega_m$

增益为2 ⇒ 处理掉

$R(j\Omega)=\frac{1}{2}X(j\Omega)+\frac{1}{4}X(j(\Omega-2\Omega_0))+\frac{1}{4}X(j(\Omega+2\Omega_0))$

同步解调：

$c_1(t)$ 与 $c_2(t)$ 相位变化必同步，频率相同

2) 带载波正弦

$y(t)=[A+x(t)]\cos w_0 t$

⇒ 包络解调

3) 脉冲调制

看书 P240

⑦ 采样/抽样　☆ $\Omega_s=\frac{2\pi}{T}$ ⇒ 采样频率，T 抽样间隔　→ here

1) 采样方法

⇒ 冲激串：$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$

⇒ $x_p(t)=x(t)p(t)$ ⇓

$\boxed{P(j\Omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-n\Omega_s)}$ 周期冲激序列

⇓

$X_p(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j\Omega-k\Omega_s)$

⇒ 相当于以 Ω_s 周期延拓，幅度 $\times\frac{1}{T}$

2) 恢复

☆条件：奈奎斯特定理：

(1) $x(t)$ 带限于 Ω_m

⇒ $|\Omega|>\Omega_m$ 时，$X(j\Omega)=0$

(2) $\Omega_s\ge 2\Omega_m$ = Nyquist 频率

⇓ 用低通滤波

此时可唯一确定（完全恢复）

增益为T　内插函数

3) 时域内插恢复 → 本质：理想低通

$x(t)=x_s(t)*h(t)\to h(t)=\boxed{Sa(\frac{\Omega_s}{2}t)}$ 增益为T

$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)h(t-nT)$　$=T\frac{\Omega_c}{\pi}Sa(\Omega_c t)$

看 Nyquist Ω 计算（作业）✓

对 $x_1(t)\to w_1$，$x_2(t)\to w_2$

$\Rightarrow w_s=2w_m$，$T_s=\frac{1}{f_s}$，$f_s=2f_m$

⇓

$w=2\pi f$

1) $f_1(\alpha t)$，$\alpha\ne 0$

⇒ $w_m=|\alpha|w_{m1}$　$F_1=\frac{1}{|\alpha|}F_1(j\frac{w}{\alpha})$ ↗代 $|\alpha|w_m$

2) $f_1(t)+f_2(t)$

⇒ $w_m=\max(w_1,w_2)$

3) $f_1(t)*f_2(t)$

⇒ $w_m=\min(w_1,w_2)$

4) $f_1(t)\cdot f_2(t)$

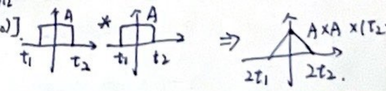
⇒ $w_m=w_1+w_2$

5) $f_1^2(t)$

⇒ $w_m=2w_1$

☆三角脉冲感觉要考

⇒ 两个半大方波（门函数卷积）



倒过来 $Sa^2(t)$ → 频域三角脉冲

☆ 反变换（反转）：

$X(jt)\leftrightarrow 2\pi x(-\Omega)$

频域门函数 → 时域 $\frac{\times Sa\times}{2\pi}$

C4 离散频域分析 ⇒ DFT / DTFT / DFS

① DFS ⇒ D+周期 , $k=[0,N-1]$
主值周期

$$x(n)=\sum_{k=\langle N\rangle} A_k e^{j(\frac{2\pi}{N})kn}$$ ①分解 和FS形式相同.

$$A_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x(n)e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn}$$ ②写.

⇒矩形脉冲序列：$x(n)=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & N_1<|n|<N/2\end{cases}$.

$$A_k=\frac{1}{N}\cdot\frac{\sin[\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})k]}{\sin(\pi k/N)}.$$

$$\Rightarrow \frac{2N_1+1}{N}$$

② DTFT ⇒ D+ 非周期 ☆基本单位是 e^{jwn}

$$\begin{cases}X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jwn}\\ x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{jw})e^{jwn}dw\end{cases}$$ 和FT形同.

$X(e^{j(w+2\pi)})=X(e^{jw})$ 以2π为周期.

差分方程转化：

$$☆H(e^{jw})=\frac{\sum b_k(e^{-jwk})}{\sum a_k(e^{-jwk})}=\frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})}$$

$\to x(n)$，$\to y(n)$ △有负号

常见信号：

1) $a^n u(n)$ ⇒ $|a|<1$

$$\Rightarrow X(e^{jw})=\frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

实在不记得就代公式计算；⇒无穷级数求解.
几何级数（等比用）
$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots=\frac{a}{1-r}$ $(|r|<1)$

2) $\delta(n)$
$\Rightarrow X(e^{jw})=1$

3) $u(n)$
$$\Rightarrow X(e^{jw})=\frac{1}{1-e^{-jw}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2\pi k)$$

4) $(n+1)a^n u(n)$
$$\Rightarrow X(e^{jw})=\frac{1}{(1-ae^{-jw})^2}.$$

5) 矩形：$x(n)=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|\ge N_1\end{cases}$ $R_{N_1}(n)$ ⇒矩形窗函数. $R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$\Rightarrow X(e^{jw})=\frac{\sin(N_1+\frac{1}{2})w}{\sin(\frac{w}{2})}$$

6) e^{jw_0n} ⇒可求 $\begin{cases}\sin w_0n\\ \cos w_0n\end{cases}$
⇒均匀冲激串：
$$2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(w-w_0-2\pi n).$$

性质：和 FT基本相同，$t\to n$，背！ 特殊：周期性 w以2π为周期

③ DFT → D+周期/非

周期信号：

$$X(e^{jw})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k\,\delta(w-\frac{2\pi}{N}\cdot k)$$

当 $x(n)=\sum_{k=\langle N\rangle}A_k e^{jkw_0n}$

☆非周期有限长信号： ⇒N个点 DTFT采样 $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$ DFT.

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$ IDFT

⇒性质： $A_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\langle N\rangle}x(n)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot kn}$

1) 线性

2) 时移 → 圆周时移. 周期延拓-时移-截回去.
$x_1(n)=\tilde{x}(n-n_0)R_N(n)$
⇓
$X_1(k)=W_N^{kn_0}X(k)$ → 类似FT.

3) 卷积 → 圆周卷积
$x(n)\otimes y(n)\to X(k)\cdot Y(k)$

3) 圆周卷积☆

$f(n)=x(n)\otimes y(n)$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)[y((n-m))_N\cdot R_N(n)]$$

⇒先周期延拓，再反转，再右移
看P70 PPT 例13. 要取0点.

☆DFT分析： → L_x+L_y-1 ☆0~N 位置
1) 补长（补0至L）→则取前 L_x+L_y-1 点.
2) X, Y (DFT)
3) $F(k)=X_L(k)\cdot Y_L(k)$
4) IDFT. ⇒就是圆周卷积，
P242页图. 取前 N+M-1个点 L要≥N+M-1

☆FFT
⇒ $\begin{cases}长序列拆成短序列的N^2变化\\ 利用对称性、周期性\end{cases}$

☆ $W_N^{k+\frac{N}{2}}=-W_N^k$；$W_N^{(k+N)n}=W_N^{kn}$

只考虑基2 $(N=2^M)$ $W_{\frac{N}{2}}^{kn}=W_N^{2kn}$

☆①按时间抽取

1) 分组：奇偶分

$\begin{cases}x_1(r)=x(2r)\\ x_2(r)=x(2r+1)\end{cases}$ ⇒ $r=0\sim\frac{N}{2}-1$ W_N^{2rk}
⇓

$$☆\boxed{X(k)}=\sum_{r=0}^{N/2-1}\underbrace{x(2r)}_{x_1(r)}W_{\frac{N}{2}}^{rk}+\sum_{r=0}^{N/2-1}\underbrace{x(2r+1)}_{x_2(r)}W_{\frac{N}{2}}^{rk}\cdot W_N^k$$ 证明要会.

$$=\boxed{X_1(k)+W_N^kX_2(k)}$$

后$\frac{N}{2}$：

$$\boxed{X(k+\frac{N}{2})}=\sum_{n=0}^{N/2-1}x_1(n)W_{\frac{N}{2}}^{n(k+\frac{N}{2})}+\sum_{n=0}^{N/2-1}x_2(n)W_{\frac{N}{2}}^{n(k+\frac{N}{2})}\cdot W_N^{(k+\frac{N}{2})}$$

$$=\boxed{X_1(k)-W_N^kX_2(k)}$$ 前后算

②按频率抽取. ☆

1) 分组 前后分.

$\begin{cases}x_1(n)=x(n)+x(n+\frac{N}{2})\\ x_2(n)=[x(n)-x(n+\frac{N}{2})]\cdot W_N^n\end{cases}$ △.
⇓

$$\boxed{\begin{aligned}X(2r)&=DFT[x_1(n)]\\ X(2r+1)&=DFT[x_2(n)]\end{aligned}}$$

证明： 前后分.

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n+\frac{N}{2})W_N^{k(n+\frac{N}{2})}$$ 对称性.

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)+(-1)^kx(n+\frac{N}{2})]W_N^{kn}$$

分奇偶：

$$X(2r)=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)+x(n+\frac{N}{2})]W_N^{2rn}$$ △ 奇偶算.

$$X(2r+1)=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)-x(n+\frac{N}{2})]W_N^{(2r+1)n}$$ △

$\to W_N^{2rn}\cdot W_N^n$

FFT实际计算，
划分成两点！
⇒多层蝶形运算 ⇒ $N^2\to N\log_2N$

$2\times\frac{N}{2}\times\log_2N$ 运算 结数 层

IDFT：
⇒利用DFT完成.

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

$$=\frac{1}{N}[\sum_{n=0}^{N-1}X^*(k)W_N^{kn}]^*$$ 共轭.

$$=\frac{1}{N}[DFT(X^*(k))]^*$$

$$\frac{n+(r-1)!}{n!(r-1)!}a^nu(n)$$

$$\Rightarrow(\frac{1}{1-ae^{-jw}})^r.$$

PPT P71页
⇓
DFT分析. 圆周卷积
⇓
放入 0-N 的主值周期
再操作.

一般认为激励信号是右边信号
⇓
$n<0$，$x(n)=0$.

C5 Z变换

$e^{j\omega n} \Rightarrow z^n = (r \cdot e^{j\omega})^n$

双边Z变换：

☆ $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$ 无穷级数 x(n)为系数.

⇒与DTFT：

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n) \cdot r^{-n}] \cdot e^{-j\omega n}$

$= DTFT(x(n) \cdot r^{-n})$

⇒与DFT： $r=1$， $z = e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot k}$.

$X(k) = X(z)$

⇒DFT是Z变换单位圆上的采样

☆收敛域：

特征 使无穷级数收敛的z的取值. ☆方便判断

① 不收敛则无Z变换，收敛域+X(z)才能唯一确定 x(n)

② 有限长序列收敛域：除 $z=0$、$|z|=\infty$ 外平面.

③ u(n) 右边序列：收敛域为最外极点外部（因果序列）☆

左边序列：收敛域为最内极点内部（反因果）

⇓

双边序列：左+右，环形区域.

④ 稳定序列收敛域含单位圆 ⇒判方向

☆⑤性质：⇒ 快速求Z变换.

1) 线性：$a_1 x_1(n) + b x_2(n) \rightarrow a X(z) + b X_2(z)$, $R = R_1 \cap R_2$.

☆2) 时移：$x(n-n_0) \rightarrow z^{-n_0} X(z)$ ， R，无穷原点/原点变.

3) 频移：$e^{j\omega_0 n} x(n) \rightarrow X(e^{-j\omega_0} z)$ ，R

4) Z域尺度变换：$z_0^n x(n) \rightarrow X(\frac{z}{z_0})$ ， $|z_0|R$

5) 反转：$x(-n) \rightarrow X(z^{-1})$ ， $\frac{1}{R}$

☆6) 卷积：$x_1(n) * x_2(n) \rightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$ ， $R_1 \cap R_2$

7) Z微分：$n x(n) \rightarrow -z \frac{dX(z)}{dz}$ ， R

8) 求和：$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \rightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$

☆9) 初值定理：$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$ 允许.

10) 终值定理：因果序列，除了 $z=1$ 一阶极点，其它极点在单位圆内，则：

$x(\infty) = \lim_{z\to 1} [(z-1) X(z)]$

都是因果序列

⇒应用：① $z=1$ 是 $(z-1)X(z)$ 收敛域内判因果.

② 不Z反变换求 $x(0)$、$x(\infty)$.

⑥常见信号：

1) $a^n u(n) \Rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$ ， $|z|>|a|$

2) $-a^n u(-n-1) \Rightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}$ ， $|z|<|a|$

3) $n a^n u(n) \Rightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ ， $|z|>|a|$

4) $-n a^n u(-n-1) \Rightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ ， $|z|<|a|$

5) $\delta(n) \Rightarrow 1$ ，全

6) $u(n) \Rightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}$ ， $|z|>1$.

6) 三角函数（单边

$\cos\omega_0 n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right) = \frac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$

$\sin\omega_0 n = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right) = \frac{1-\sin\omega_0 z^{-1}}{1-\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$

⇓

利用1)，令 $a = e^{j\omega_0}$

看例14运算技巧.

☆单边Z变换：⇒分析增量线性系统.

$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$ ⇒只看求和区间，不看收敛域

☆移位性质：

$x(n-n_0) \rightarrow z^{-n_0} X(z) + z^{-n_0} \sum_{n=-n_0}^{-1} x(n) z^{-n}$ Z变前.

↓ $m = n - n_0$ 换元.

$\sum_{m=-n_0}^{\infty} x(m) z^{-m-n_0} = z^{-n_0} \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m) z^{-m} + z^{-n_0} X(z)$

⇒ 常用：$x(n-1) = z^{-1} X(z) + x(-1)$

$x(n-2) = z^{-2} X(z) + z^{-1} x(-1) + x(-2)$

分析增量线性系统：单边 ⇒易错!

(1) 差分方程两端Z变换，表示 Y(z).

(2) 代入初始条件、X(z)，解 Y(z). ⇒ 与X(z)有关的是0状态

与X(z)无关的是0输入

(3) Z反变换.

Z反变换： 工具

⇒不会考定义 $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega}) r^n e^{j\omega n} d\omega$

$= \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$

① 幂级数展开

⇒ 大除法，除出 z^n 的系数

⇓ → 收敛域看出.

要跟据左右边判断 z^n 正负幂

正幂 ↙ ↘ 负幂

② 部分分式展开

⇒ 拆成简单的再转化

☆收敛域要是交集

子域

差分方程：

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum b_k z^{-k}}{\sum a_k z^{-k}}$ → x(n) → y(n)

零极点图 Z域分析

⇒

因果稳定 LTI

⇒所有极点在单位圆内.

连续：