

ÉSPACES QUOTIENTS

1 Généralité

Soit A, B, C trois ensembles et $f : A \rightarrow B, g : A \rightarrow C$ deux applications.

Le problème qui se pose est de savoir si on peut trouver une application $h : C \rightarrow B$ tel que $f = h \circ g$.

Pour cela, on considère la condition

$$\forall x, y \in A, (g(x) = g(y) \Rightarrow f(x) = f(y)). \quad (1)$$

On a la proposition suivante

1.1 Proposition

Si f et g vérifie la condition (1), alors h existe et vice-versa.

Démonstration :

Supposons que (1) soit vérifiée. Soit $t \in C$.

Si t est égale à un certain $g(x)$ avec $x \in A$, nécessairement $h(t) = h(g(x)) = f(x)$. Montrons que $h(t)$ ne dépend pas de x choisie. Soit $y \in A$ tel que $t = g(y)$. Par hypothèse, $h(t) = h(g(y)) = f(y) = f(x)$. Donc $h(t)$ est bien définie si $t \in g(A)$. Supposons maintenant que $t \notin g(A)$. Choisissons un élément $b \in B$ et posons $h(t) = b$. h est ainsi défini est bien une application de C vers B vérifiant $h \circ g(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$.

Supposons maintenant que h existe et montrons que f et g vérifient la condition (1). Soit $x, y \in A$ tel que $g(x) = g(y)$. On a $h(g(x)) = h(g(y))$ ou encore $f(x) = f(y)$.

D'où (1).

1.2 Corollaire

Si f et g vérifient (1) et g surjective, h est unique.

1.3 Proposition

Supposons que f et g vérifient la condition (1)

$$\forall x, y \in A, (g(x) = g(y) \Leftrightarrow f(x) = f(y)). \quad (2)$$

Soit i l'injection canonique de $f(A)$ vers B , c-à-d, pour tout $u \in f(A)$, $i(u) = u$. Alors, il existe une bijection \bar{h} de $g(A)$ vers $f(A)$ et une seule telle que $f = i \circ \bar{h} \circ g$.

Démonstration :

Considerons les applications $f_1 : A \mapsto f(A), x \mapsto f_1(x) = f(x)$ et $g_1 : A \mapsto f(A), x \mapsto g_1(x) = g(x)$.

Soit $x, y \in A$ tels que $g_1(x) = g(y)$. On a $g(x) = g(y)$. D'après l'hypothèse, $f(x) = f(y)$ et par suite, $f_1(x) = f_1(y)$. f_1 et g_1 vérifient donc la condition (1). Ainsi, d'après prop 1.1, il existe une application $h_1 : g(A) \mapsto f(A)$ telle que $f_1 = h_1 \circ g_1$. Comme $f = i \circ f_1$, alors $\forall x \in A, f(x) = i \circ h_1 \circ g_1 = i \circ h_1 \circ g(x)$, ou encore $f = i \circ h_1 \circ g$. De plus, comme g_1 est surjective, le corollaire 1.2 implique que h_1 est unique.

Montrons enfin que h_1 est bijective.

- Soit $u \in f(A)$. $\exists x \in A$ tel que $u = f(x)$. Posons $t = g(x)$. On a $h_1(t) = f(x) = u$. Donc h_1 est surjective.
- D'autre part, soit $t, t' \in g(A)$ tels que $h_1(t) = h_1(t')$. Soit $x, x' \in A$ tel que $t = g(x)$ et $t' = g(x')$. D'après ce qui précéde, $f(x) = h_1(t)$ et $f(x') = h_1(t')$. Donc $f(x) = f(x')$. D'après (2), $g(x) = g(x')$ ou encore $t = t'$. h_1 est donc injective. Donc $\bar{h} = h_1$.

2 Quotient d'un groupe par un sous groupe

Soit G un groupe (supposé additif) non nécessairement abélien et H un sous groupe de G . On définit une relation \equiv sur G par

$$\forall x, y \in G, x \equiv y \Leftrightarrow -x + y \in H$$

. **Remarque:** Si la loi utilisée est multiplicative, \equiv est défini par

$$\forall x, y \in G, x \equiv y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

2.1 Proposition

\equiv est une relation d'équivalence ayant les propriétés suivantes :

- (1) $\bar{x} = x + H := \{x + h \mid h \in H\}$;
- (2) Pour tout $x, y \in G$, $(x + y) + H = x + (y + H)$;
- (3) Pour tout $h \in H$, $h + H = H$

On note G/H l'ensembles des classes d'équivalences de \equiv .

Démonstration:

Montrons d'abord que \equiv est une relation d'équivalence.

$\forall x \in G$, on a $-x + x = 0 \in H$. donc $x \equiv x$.

D'autre part, soit $x, y \in G$ tels que $x \equiv y$. On a $-x + y \in H$.

Par suite $-(-x + y) = -y + x \in H$ tels que $x \equiv y$, c-a-d, $y \equiv x$.

Enfin, soit $x, y, z \in G$ tel que $x \equiv y$ et $y \equiv z$. Alors $-x + z = (-x + y) - (y - z) \in H$ ou encore $x \equiv z$.

On en conclut que \equiv est une relation d'équivalence.

Soit maintenant $x, y \in G$. Alors

$$y \in \bar{x} \Leftrightarrow x \equiv y \Leftrightarrow -x + y \in H \Leftrightarrow \exists h \in H, -x + y = h \Leftrightarrow y \in x + H.$$

D'où $\bar{x} = x + H$.

De plus, pour tout z ,

$$\begin{aligned} z \in (x + y) + H &\Leftrightarrow -(x + y) + z \in H \Leftrightarrow (-y - x) + z \in H \\ &\Leftrightarrow -y + (-x + z) \in H \Leftrightarrow -x + z \in y + H \\ &\Leftrightarrow z \in x + (y + H). \end{aligned}$$

Enfin, soit $h \in H$. Pour tout w ,

$$w \in H \Leftrightarrow -h + w \in H \Leftrightarrow w \in h + H.$$

Ce qui prouve que $h + H = H$.

2.2 Définition

Une relation d'équivalence R est compatible avec la loi de G si

$$\forall x, y, x', y' \in G, (xRy \text{ et } x'Ry' \Rightarrow (x + x')R(y + y'))$$

2.3 Définition

On dit que H est distingué dans G si $\forall x \in G, x + H - x \subset H$.

En particulier, tout sous groupes d'un groupe abélien est distingué.

2.4 Lemme

Soit A et B 2 partie (non nécessairement des sous groupes) de G et $x \in G$. Alors

$$A \subset B \Leftrightarrow x + A \subset x + B \Leftrightarrow A + x \subset B + x$$

Démonstration :

L'implication $A \subset B \Rightarrow x + A \subset x + B$ est évidente. Supposons que $x + A \subset x + B$ et soit $a \in A$. Alors il existe $b \in B$ tel que $x + a = x + b$. En ajoutant à gauche par $-x$, on a $a = b$. Donc $A \subset B$. Ce qui nous donne la première équivalence. On fait de même pour $A \subset B \Rightarrow A + x \subset B + x$.

2.5 Proposition

\equiv est compatible avec la loi de G ssi H est distingué.

Démonstration :

Supposons que \equiv soit compatible avec la loi de G . Soit $x \in G$ et $y \in x + H - x$. On a $y + x \in x + H$ ou encore $y + x \equiv x$. Comme $-x \equiv -x$, alors $y + x - x \equiv x - x$, donc $y \equiv 0$, c-à-d, $y \in H$.

Reciproquement, supposons que H soit distingué. Soit $x, y, x', y' \in G$ tel que $x \equiv y$ et $x' \equiv y'$. On a $y + y' \in (x + H) + (x' + H) = (x + (x' + H)) + H = (x + x') + H$.

Donc $y + y' \equiv x + x'$.

2.6 Proposition

On a les équivalence:

$$H \text{ distingué dans } G \Leftrightarrow \forall x \in G, x + H = H + x \Leftrightarrow \forall x \in G, x + H - x = H$$

. *Démonstration :* En appliquant le lemme, on a:

$$\begin{aligned} H \text{ distingué dans } G &\Leftrightarrow \forall x \in G, x + H - x \subset H \text{ et } -x + H + x \subset H \\ &\Leftrightarrow \forall x \in G, x + H \subset H + x \text{ et } H + x \subset x + H \\ &\Leftrightarrow \forall H + x = x + H \\ &\Leftrightarrow \forall H = x + H - x \end{aligned}$$

2.7 Proposition

Si H est distingué, la loi défini par $\forall x, y \in G, \bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$ est bien définie sur G/H appelée loi quotient. Muni de cette loi quotient, G/H a une structure de groupe appelée groupe quotient.

Démonstration :

Soit $x, y, x', y' \in G$ tels que $\bar{x} = \bar{x}'$ et $\bar{y} = \bar{y}'$. Pour que la loi soit définie, il faut que $\overline{x+y} = \overline{x'+y'}$. Or, d'après la proposition précédente, \equiv est compatible avec la loi de G . Donc $x' + y' \equiv x + y$, c-a-d, $\overline{x'+y'} = \overline{x+y}$.

On peut vérifier facilement que G/H muni de cette loi est un groupe.

2.8 Définition

Soit G et G' deux groupes et f une application de G vers G' . On dit que f est un morphisme de groupe si $\forall x, y \in G, f(x+y) = f(x) + f(y)$. Si de plus f est bijective, on dit que f est une isomorphisme de groupes. Si un tel isomorphisme existe, on dit que G et G' sont isomorphismes.

2.9 Proposition

Si H est un sous groupe distingué de G , alors l'application $\pi : G \mapsto G/H, x \mapsto \bar{x} = x + H$ est un morphisme de groupe appelée surjection canonique.

2.10 Proposition

Soit f un morphisme du groupe G vers un groupe G' , alors $G/Ker f$ et $Im f$ sont isomorphismes.

Démonstration :

D'abord, comme $Ker f$ est un sous groupe distingué de G , alors $G/Ker f$ est un sous groupe. Considérons alors la surjection canonique π de G sur $G/Ker f$. Soit $x, y \in G$. On a :

$$\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow -x + y \in Ker f \Leftrightarrow f(-x + y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

. D'après la prop 1.3, il existe une bijection \bar{f} de $\pi(G) = G/Ker f$ sur $Im f$, définie par

$$\forall \bar{x} \in G/Ker f, \bar{f}(\bar{x}) = f(x)$$

. De plus, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in G/Ker f$,

$$\bar{f}(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{f}(\overline{x+y}) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{y})$$

. Donc \bar{f} est un isomorphisme de groupes car $Im f$ est un sous groupe de G' .

3 Quotient d'un anneau par un idéal

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et I un sous groupe de $(A, +)$. Puisque $(A, +)$ est abélien, I est distingué dans A et on peut donc considérée la groupe quotient $A/I = \{\bar{a} = a + I; a \in A\}$ muni de la loi quotient $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$.

3.1 Définition

On dit que I est un idéal à gauche (resp. à droite) de A si $\forall a \in A, aI \subset I$ (resp. $Ia \subset I$). C'est un idéal bilatère s'il est à la fois idéal à gauche et idéal à droite.

3.2 Définition

Si I est un idéal bilatère, la loi défini par $\forall x, y \in A, \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}$ est bien défini sur A/I appelée produit quotient. De plus $(A/I, +, \cdot)$ est un anneau appelée anneau quotient.

3.3 Définition

Soit A et A' deux anneaux et f une application de A vers A' . On dit que f est un morphisme d'anneaux si

$$\forall x, y \in A, f(x) + f(y) = f(x + y) \text{ et } f(x)f(y) = f(xy)$$

3.4 Proposition

Si f est un idéal bilatère de A , alors l'application $\pi : A \mapsto A/I, x \mapsto \bar{x} = x + I$ est un morphisme d'anneaux appelée surjection canonique.

Si f est un morphisme d'anneaux de A vers A' , on peut vérifier facilement que $Ker f$ est idéal bilatère de A .

3.5 Proposition

Soit $f : A \mapsto A'$ un morphisme d'anneaux. Alors il existe un isomorphisme d'anneaux $f : A/Ker f \mapsto Im f$. En d'autres termes, les anneaux $A/Ker f$ et $Im f$ sont isomorphes.

4 Quotient d'un espace vectoriel par un sous espace vectoriel

Considérons un espace vectoriel $(E, +, \times)$ sur un corps \mathbb{K} et F un sous groupe de $(E, +)$, F étant un sous groupe distingué du groupe abélien $(E, +)$, on peut considérée le groupe quotient $E/F = \bar{x} = x + F; x \in E$ muni de la loi quotient $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$.

4.1 Proposition

Si F est un sous espace vectoriel de E , la loi défini par $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda \times \bar{x} = \overline{\lambda \times x}$ est bien une loi externe sue E/F . De plus, $(E/F, +, \times)$ est bien un espace vectoriel sur \mathbb{K} appelée espace vectoriel quotient.

4.2 Définition

On suppose E de dimension n et F un *sev* de E . On appelle codimension de F l'entier $\text{codim } F = n - \dim F$.

4.3 Proposition

Si E est de dimension finie, $\dim(E/F) = \text{codim } F$.

4.4 Proposition

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev et f une application linéaire de E vers F . L'application $f : E/\text{Ker } f \mapsto \text{Im } f, \bar{x} \mapsto f(x)$ est un isomorphisme d'ev.

5 Morphismes d'algèbre

5.1 Définition

Une $\mathbb{K}-algebre$ est quadruplet $(A, +, \cdot, \times)$ tel que

- $(A, +, \cdot)$ est un anneau;
- $(A, +, \times)$ est \mathbb{K} -ev.

Soit A et A' deux algèbres et f un morphisme d'algèbre de A vers A' , c-à-d,

$$\forall x, y, z \in A, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(xy + \lambda z) = f(x)f(y) + \lambda f(z).$$

Comme dans les sections précédentes, on a la propriété suivante

5.2 Proposition

L'application $\bar{f} : A/\text{Ker } f \mapsto \text{Im } f, \bar{x} \mapsto f(x)$ est un isomorphisme d'algèbre vérifiant la relation $f = i \circ \bar{f} \circ \pi$ où π est la surjection canonique de A sur $A/\text{ker } f$ et i l'injection canonique de $\text{Im } f$ dans A' .

6 Quotient par un polynôme

Soit \mathbb{K} un corps commutatif et $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes de var X. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré d ($d > 0$). L'ensemble $(P) = P\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Donc $\mathbb{K}[X]/(P)$ noté tout simplement $\mathbb{K}[X]/P$ est un anneau quotient. En notant \bar{A} la classe d'un polynôme A , on a

$$\bar{A} = \bar{B} \Leftrightarrow P|(A - B)$$

6.1 Proposition

$\mathbb{K}[X]/P$ est une $\mathbb{K}-algebre$ de dimension d de base canonique $(1, \bar{X}, \dots, \bar{X}^{d-1})$. On a en particulier $\mathbb{K}[X]/P \simeq \mathbb{K}^d$.

Démonstration :

Soit $\bar{A} \in \mathbb{K}[X]/P$ et $R = a_0 + a_1X + \dots + a_{d-1}X^{d-1}$ le reste de la division euclidienne de A par P . On a $\bar{A} = \bar{R} = a_0\bar{1} + a_1\bar{X} + \dots + a_{d-1}\bar{X}^{d-1}$. Ce qui prouve que $\bar{1}, \bar{X}, \dots, \bar{X}^{d-1}$ engendre $\mathbb{K}[X]/P$.

D'autre part, soit $a_0\bar{1} + a_1\bar{X} + \cdots + a_{d-1}\overline{X^{d-1}} = 0$. Alors P divise $a_0 + a_1X + \cdots + a_{d-1}x^{d-1}$. Comme $\deg P = d$, alors $a_0 + a_1X + \cdots + a_{d-1}X^{d-1} = 0$. Par consequent, $a_i = 0$ pour tout i . Ainsi $(\bar{1}, \bar{X}, \dots, \overline{X^{d-1}})$ est une base de $\mathbb{K}[X]/P$.