EXERCICES D'ALGEBRE 1

1 Théorie Naïve des ensemble

1.1 Exercice

1. Considérons les ensembles suivants : $A = \{1, 13, 25\}; B = \{\{1, 13\}, 25\}; C = \{\{1, 13, 25\}\}; D = \{, 1, 13, 25\}; E = \{25, 1, 13\}; F = \{\{1, 13\}, \{25\}\}; G = \{\{25\}, \{1, 13\}, 25\}; H = \{\{1\}, \{13\}, 25\}$.
   (a) Quelles sont les relations (d'égalité ou d'inclusion) qui existent entre ces ensembles ?
   (b) Déterminer $A \cap B;\ G \cup H;\ E \backslash G;\ C_D^A$
2. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E :
   (a) Montrer que :
   $$(A \cap B) \cup B^c = A \cup B^c (A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cap C) A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C).$$
   (b) Simplifier : $(A \cup B)^c \cap (C \cup A^c)^c; (A \cap B)^c \cup (C \cap A^c)^c$.
3. Démontrer la Proposition 1.3.

1.2 Exercice

Construisez des applications :

- Injective mais pas surjective ;
- Surjective mais pas injective ;
- Bijective ;
- Ni injective ni surjective.

1.3 Exercice

$E = [0, 1];\ F = [-1, 1];\ G = [0, 2]$. Soient f et g deux applications définies respectivement par :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \mapsto & G \\ x & \mapsto & 2 - x \end{array} ; \begin{array}{rcl} g : F & \mapsto & G \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array} .$$

(a) Déterminer $f(\{\frac{1}{2}\}),\ f^{-1}(\{0\}),\ g([1, -1]),\ g^{-1}([0, 2])$

(b) Les applications f et g sont-elles bijectives ? Justifier votre réponse.

1.4 Exercice

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. En déduire que le produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
4. Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous ensembles dénombrables d'un ensemble E. Montrer que la réunion $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est dénombrable.
5. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable. En déduire que l'ensemble des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
6. On dit qu'un nombre (réel ou complexe) est algébrique s'il est une racine d'un polynôme à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
7. Existe-il une bijection entre $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ et $\mathbb{Q} \cap]0, 1[$?

1.5 Exercice

1. En s'inspirant de la preuve du théorème 1.19, expliciter une bijection entre les intervalles $[a, b[$ et $]a, b[$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers est équipotent à $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ n'est ni dénombrable, ni équipotent à $\mathbb{R}$.
4. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^R$ n'est ni dénombrable, ni équipotent à $\mathbb{R}$.

1.6 Exercice

1. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalences :
   (i) Le parallélisme sur l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$;
   (ii) Sur $\mathbb{R}^2$, $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ si et seulement si $x + y = x' + y'$.
2. Montrer que les relations suivantes sont des relations d'ordres partiels :
   (i) L'inclusion sur l'ensemble des parties $P(E)$ d'un ensemble E ;
   (ii) La divisibilité sur l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$;
   (iii) Sur $\mathbb{R}^2$, $(x, y)\mathcal{T}(x', y')$ si et seulement si $|x' - x| \leq y' - y$.
3. Soit $E = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Considérons la relation binaire $\mathbb{R}$ sur E définie comme suit : Pour tout a et b dans E, $a\mathcal{R}b$ si et seulement si a et b appartiennent à une droite passant par (0, 0).
   (i) Soient (x, y) et (x', y') deux éléments de E. Montrer que $(x, y)\mathcal{R}(x', y')$ si et seulement si il existe un nombre réel non nul λ tel que $(x, y) = \lambda(x', y')$.
   (ii) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
   (iii) Notons par $[x, y]$ la classe d'équivalence d'un élément (x, y) de E. Vérifier qu'on a $[x, 1] = [y, 1]$ si et seulement si $x = y$.

(iv) Montrer qu'on a : $E/\mathcal{R} = \{[x,1] : x \in \mathbb{R}\} \cup \{[1,0]\}$

- (**Important.**) Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. On sait que la relation $\mathcal{R}$ définie pour tout a et b dans E, par :

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

est une relation d'équivalence.

(i) Montrer que l'application $\bar{f}$ de $E/\mathcal{R}$ dans F définie par $\bar{f}(\dot{a}) = f(a)$ est bien définie et est injective.

(ii) En déduire qu'on a $f = \bar{f} \circ g$ où l'application g est la projection canonique de E dans $E/\mathbb{R}$.

(iii) Montrer que si f est surjective, alors il existe une bijection entre $E/\mathbb{R}$ et F.

2 Equation linéaire et matrice

2.1 Exercice

1. (a) Déterminez si le vecteur $(1,3,5) \in \mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire de $(0,1,0), (1,4,1)$ et $(1,0,1)$.

   (b) Déterminez si le vecteur $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de $(0,1), (1,4)$ et $(1,0)$. Dans le cas où la réponse est affirmative, est-ce que la représentation en tant que combinaison linéaire est unique ?

2. Décrivez le sous-ensemble de R3 formé par toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u = (1,1,0)$ et $v = (0,1,1)$. Trouvez un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de u et v.

3. Soient $u = (\pi, 0)$ et $v = (0,2)$. Décrivez les sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

   (a) . $\{cu | c \in \mathbb{N}\}$.

   (b) . $\{cu | c \geq 0\}$.

   (c) . $\{cu + dv | c \in \mathbb{N} \text{ et } d \in \mathbb{R}\}$.

4. Est-ce que le vecteur $w = (1,0)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $u = (2,-1)$ et $v = (-1,2)$?

5. Si $u + v = (12,4,1)$ et $u - 2v = (1,0,2)$, calculez u et v.

6. Montrez que pour tout vecteur u, $0u = 0$.

7. Pour deux vecteurs u et $v \in \mathbb{R}^2$, quand est-ce qu'on a l'égalité $|u \cdot v| = \|u\|v\|$? l'égalité $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$?

8. Montrez que pour z, $w \in \mathbb{C}^n$ et $k \in \mathbb{K}$ on a :

   (a) $z \cdot w = w \cdot z$.

   (b) $(kz) \cdot w = z \cdot (kw)$.

   (c) $z \cdot (kw) = k(z \cdot w)$. (Comparer avel le cas réel).

9. (a) Soient $u = (a,b)$ et $v = (c,d)$ deux vecteurs du plan. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que tout élément de $\mathbb{R}^2$ soit une combinaison linéaire de u et v.

(b) Trouver quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ tels que tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ soit une combinaison linéaire de ces vecteurs.

10. Si $\|u\| = 5$ et $\|v\| = 3$, quelles sont la plus petite et la plus grande valeurs de $\|u - v\|$? Même question pour $u \cdot v$.

11. Est-il possible d'avoir trois vecteurs du plan dont les produits scalaires (deux à deux) sont tous strictement négatifs ? Quand est-il dans $\mathbb{R}^3$?

12. Soient x, y et z trois nombres réels tels que $x+y+z = 0$. Trouver l'angle que les vecteurs $u = (x, y, z)$ et $v = (z, x, y)$ font entre eux.

2.2 Exercice

Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, $\mathbb{K}$ désignera le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. Ecrire les deux problèmes suivants sous la forme $Ax = b$ où A est une matrice 2×2, puis donner une solution à chaque problème :

   (a) Alice est deux fois plus jeune que Bob et la somme de leur age est 33 ;

   (b) Les deux points $(2, 5)$ et $(3, 7)$ appartiennent à une droite d'équation $y = mx + c$. Trouver m et c.

2. Pour chacune des matrices suivantes, trouver le scalaire a pour que la matrice soit singulière (non inversible) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ o & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & a \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Soit A une matrice dans $M_3(\mathbb{K})$ telle qu'il existe un vecteur colonne non nul x dans $\mathbb{K}^3$ vérifiant $Ax = 0$.

   (a) Montrer que les vecteurs colonnes de A forment un plan P dans $\mathbb{K}^3$.

   (b) Montrer que P et x sont perpendiculaires.

4. Soit un système d'équations linéaires dans $\mathbb{K}^3$.

   (a) Montrer que ce système ne peut pas avoir exactement deux solutions.

   (b) Si (x, y, z) et (u, v, w) sont deux solutions du système, pouvez vous trouver un autre ?

5. Trouver les matrices matrices E et L telles que l'on ait :

$$EP_3 = P_2,\ LP_3 = I_4$$

où

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6. considérons les matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 & 0 \\ 0 & e & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que ;

$$L = E_1 E_2 E_3 = E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & F & 1 \end{pmatrix}$$

7. Calculons les inverses des trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \; K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $4K^{-1}$ et $7K^{-1}$.

8. Soit A et B deux matrices carrées de même dimension.
   (a) Montrer que $A(I + BA) = (I + AB)A$.
   (b) En déduire que $I + BA$ est inversible si et seulement si $I + AB$ l'est aussi.

9. Un sous ensemble de $M_n(\mathbb{K})$ est appelé un groupe de matrices si pour toutes A et B deux matrices de l'ensemble, on a : le produit AB et l'inverse de chaque élément sont dans l'ensemble.
   (a) Montrer que si G est un groupe de matrices, la matrice identité I_n est automatiquement dans G;
   (b) Montrer que : l'ensemble des matrices triangulaires inférieures telles que $a_{ii} = 1$; l'ensembles des matrices symétriques ; l'ensemble des matrices de permutations sont des groupes de matrices.
   (c) Donner plus de groupes de matrices.

10. Ecrire une matrice dans $M_3(\mathbb{K})$ de votre choix.
   (a) Trouver deux matrices B et C telles que : $A = B+C$ et B et C soient respectivement symétrique et anti-symétrique.
   (b) Ré-écrire B et C en fonction de A et A^T.

11. Factoriser les matrices suivantes (de la forme $A = LU$ ou $PA = LU$) :

3 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

3.1 Exercice

1. Donnez un exemple montrant que la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas forcément un espace vectoriel.

2. Soit $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ muni de l'addition par composante et de la multiplication par un scalaire par composante. Vérifiez que V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Notons $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ le sous-ensemble des suites à support fini, i.e., les suites dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Montrez que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

3. Est-ce que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0\}$$
. Expliquez.

4. Décidez, dans chacun des cas suivant, si $V = \mathbb{R}^2$ muni des lois d'additions et de multiplications par un scalaire données sont des espaces vectoriels sur R ou non (justifiez en cas de réponse négative) :

   i) $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ et $k(a, b) = (ka, b)$.
   ii) $(a, b) + (c, d) = (a + b)$ et $k(a, b) = (ka, kb)$.
   iii) $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ et $k(a, b) = (k^2a, k^2b)$.

5. Considérons le système d'equations linéaires en les inconnus $x_1, \cdots, x_n$ et à coefficients dans $\mathbb{R}$ suivant :
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\ldots a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$$
Un tel système est dit homogène (toutes les monômes ont le même degré, ici 1). Montrez que l'ensemble de toutes les solutions de ce système forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Si le systéme linéaire n'est pas homogène, est-ce que l'ensemble des solutions forme toujours un espace vectoriel ? Si oui, démontrez, si non donnez un contre-exemple.

6. Soit $V = F(E, \mathbb{K})$ comme dans Exemples 3.1.10 avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrez que le sous ensemble W de $F(E, \mathbb{K})$ des fonctions bornées dans V est un sous-espace vectoriel. On rappelle qu'une fonction f á valeur réelle est bornée s'il existe un nombre réel $M \in \mathbb{R}$ tel que $|fx| \leq M$ pour tout $x \in E$.

7. Donnez un système générateur de $\mathbb{C}^2$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, puis en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

8. Soit $V = \mathbb{R}^4$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Déterminez si v = (3, 9, -4, -2) appartient au sous-espace de V engendré par $u_1 = (1, -2, 0, 3), u2 = (2, 3, 0, -1)$ et $u_3 = (2, -1, 2, 1)$.

9. Décrivez les espaces colonnes des matrices suivantes :

   a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

10. a) Décrivez un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$ contenant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais pas $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

    b) Si un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$ contient A et B, est-ce que ce sous-espace doit contenir I_2 ?

    c) Décrivez un sous-espace de $M_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice diagonale non-nulle. Une matrice carée est dite diagonale si tous ses coefficients qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls.

11. Vrai ou faux, justifiez votre réponse :

    a) L'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{K})$ forme un sous-espace vectoriel.

    b) L'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{K})$ forme un sous-espace vectoriel.

    c) L'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui ne sont pas symétriques forme un sous-espace vectoriel.

12. Vrai ou faux, justifiez votre réponse :

    a) Les éléments b qui ne sont pas dans $C(A)$ (pour une matrice A) forme un sous-espace.

    b) Si $C(A) = 0$, alors A est la matrice nulle.

    c) Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors $C(2A) = C(A)$.

    d) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $C(A - I_n) = C(A)$

3.2 Exercice

1. Considérons $\mathbb{R}^4$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrez que les vecteurs suivants sont indépendants : $(6,2,3,4), (0,5,-3,1)$ et $(0,0,7,-2)$.

2. Montrez que deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux est un multiple de l'autre.

3. Donnez une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = \{(a,a,b) | a, b \in \mathbb{R}\}$.

4. Soit le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $V = \mathbb{Q}^3$ et $W \subseteq V$ le sous-espace engendré par $E = \{(1,2,3), (2,3,4), (3,5,7$ Montrez que E n'est pas une base de V mais que $\{(1,2,3), (2,3,4)\}$ en est une.

5. Montrez que l'ensemble suivant est un R-espace vectoriel : $V = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} | \exists S \subseteq \mathbb{N} \text{ fini, pour tout } n \in \mathbb{N} \backslash S, f(n) = 0\}$. Trouvez une base de V.