RÉDUCTION DES MATRICES

January 26, 2026

1 Rappels et notations

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ designe un corps commutatif.

1.1 Définition

Une matrice $m \times n$ est un tableau M forme de m lignes et n colonnes formes par les éléments de $\mathbb{K}$.
Si on note $a_{i,j}$ la coefficient de la i-ème lignes et j-ème colonnes de la matrice M, on note $M = (a_{i,j})$ pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. On désigne par $M_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice $m \times n$ a coefficient dans $\mathbb{K}$. Muni de l'addition et de la multiplication externe, $M_{m,n}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1.2 Définition(Produit de deux matrices)

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de AB n'est définie que si $n = p$ et dans ce cas AB est la matrice $c_{ij} \in M_{m,q}(\mathbb{K})$ définie par: pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq q$

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j} = (a_{i,1}\ a_{i,2}\ \cdots\ a_{i,n}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$$

Si $m = n$, on note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

1.3 Définition

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est :

- diagonale si $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$;
- triangulaire supérieur (resp. triangulaire inférieur) si tous les coefficient en dessous (resp. au dessus) du diagonal sont nuls, c-à-d, $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ (resp. $i < j$);
- triangulaire si elle est triengulaire supérieur ou inférieur.

1.4 Définition

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égale au produit de ses éléments diagonaux.

1.5 Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E. Si $u(b_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} b_k$ $(1 \leq j \leq n)$, la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée la matrice de u dans $\mathcal{B}$: $A = Mat(u, \mathcal{B})$.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, c-à-d,

$$e_1 = (1\ 0\ \cdots\ 0)^t, e_1 = (0\ 1\ \cdots\ 0)^t, \cdots, e_n = (0\ 0\ \cdots\ 1)^t \text{ où } (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)^t = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Si on A_j le produit Ae_j, alors A_j est la j-ème vecteurs colonnes de A et on note $A = [A_1 A_2 \cdots A_n]$

2 Résolution de système d'équation linéaire par la méthode de pivot de Gauss

Commençons par un exemple. Résolvons le système d'équation suivant:

$$(S_1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5\ (E_1) \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4\ (E_2) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= -1\ (E_2) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on a $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Utilisons la méthode par élimination. Commençons par éliminer x_3 par exemple. Gardons l'équation (E_1), remplaçons (E_2) par $(E_1) + (E_2)$ et (E_3) par $2(E_1) + (E_3)$. On a le système équivalent suivant:

$$(S_2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5\ (E_4) \\ 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 5x_4 &= 9\ (E_5) \\ 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 5x_4 &= 9\ (E_6) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on a $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$

Puis éliminons x_2. Gardons l'équation (E_5), remplaçons (E_4) par $3(E_4) - (E_5)$ et (E_6) par $(E_6) - (E_5)$. On a le système équivalent suivant :

$$(S_3) \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 6\ (E_7) \\ 5x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 5x_4 &= 9\ (E_8) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 0\ (E_9) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a donc exprimer x_2 et x_3 en fonction de x_1 et x_4. On a :

$\begin{cases} 3x_2 &= 9 - 5x_1 - 5x_4 \\ 3x_3 &= 6 - x_1 - 4x_4 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x_2 &= 3 - 5/3x_1 - 5/3x_4 \\ x_3 &= 2 - 1/3x_1 - 4/3x_4 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est appelée une matrice écholonnée réduite de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

2.1 Définition

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice. On dit qu'un certain coefficient a_{i_0,j_0} est un pivot de A si tous les coefficient se trouvant sur la j_0-ème colonne sont nuls sauf a_{i_0,j_0} qui est non nul. De plus s'il y a une coefficient non nul se trouvant sur la i_0-ème ligne possédant la meme propriété que a_{i_0,j_0}, ce coefficient ne peut plus être considérer comme pivot de A.

2.2 Définition

Une matrice A est dite une matrice échelonnée reduite si chaque ligne non nul de A contient un pivot.
Remarque:

- Chaque ligne non nul d'un matrice échelonnée réduite contient un pivot et un seul.
- Chaque colonne d'une matrice échelonnée réduite contient au plus un pivot.
- Le rang d'une matrice échelonnée réduite est le nombre de pivot de cette matrice.

2.3 Définition

Échelonnne une matrice $A = (a_{i,j})$ sous forme réduite, c'est la transformer en un matrice échelonnée réduite qui s'obtient par combinaison linéaire (et si nécessaire par permutation) des lignes de A.

Méthode pour échelonnée une matrice sous forme réduite

Soit $A = (a^0_{i,j})$ une matrice.

1. On choisit un coefficient non nul $a^0_{i_0,j_0}$ de A;
2. On transforme A en une matrice $A_1 = a^1_{i,j}$ comme suit:
$$a^1_{i_0,j_0} = a^0_{i_0,j_0} \quad a^1_{i,j} = a^0_{i_0,j_0}a^0_{i_0,j} - a^0_{i,j_0}a^0_{i_0,j} \quad (i,j) \neq (i_0,j_0)$$
$a^1_{i,j}$ est un déterminant issu de $a^0_{i_0,j_0}$
3. Si A_1 contient une ligne non nul autre que la i_0-ème ligne, on applique les étapes (1) et (2) a A_1 et on obtient une matrice $A_2 = a^2_{i,j}$.
On continue jusqu'a ce qu'on obtient une matrice échelonnée réduite.

NB: À la fin, on peut permuter les lignes pour que la premier pivot le plus a gauche se trouve sur la premier ligbne, le deuxieme pivot le plus a gauche a la deuxieme ligne et ainsi de suite. Si c'est necessaire on rend 1 tous les pivots.

Application: Recherche de l'inverse d'une matrice inversible

Soit A une matrice inversible. On échelonne sous forme réduite la matrice $A|I$ dite matrice augmenté au lieu de A seulement, ou I est une matrice unité de même ordre que A (les pivots doit être dans A). En tenant compte de la remarque précèdente, on obtient une matrice $I|B$. Alors $B = A^{-1}$.

Exemple: Cherchons la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On a $A|I = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$\equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$\equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3 Matrices semblables

3.1 Définition

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On dit qu'elles sont semblabes s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

3.2 Proposition

A et B sont semblables ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}$ et un endo u de $\mathbb{K}^n$ tels que $A = Mat(u, \mathcal{B}_0)$ et $B = Mat(u, \mathcal{B})$. $\mathcal{B}_0$ étant la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

3.3 Proposition

Si A et B sont semblables, alors A^p et B^p $(p \in \mathbb{N})$ sont égalemnet semblables.

3.4 Proposition

Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si $Ab_j = \sum_{k=1}^n \beta_{k,j} b_k$ $(1 \leq j \leq n)$, alors $B = (\beta_{i,j})$ est semblable a A.

Preuve:
Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Posons $b_j = \sum_{k=1}^n p_{k,j} e_k$.
$P = (p_{i,j})$ est la matrice de passage de $(B)_0$ vers $\mathcal{B}$.
Avec la notation précèdente on a $P = [b_1, b_2, \cdots, b_n]$. On a alors $APe_j = Ab_j$ pour tout j.
D'autre part, $PBe_j = \sum_{i=1}^n (\sum_{k=1}^n p_{i,k}\beta_{k,j})e_i = \sum_{k=1}^n \beta_{k,j} \sum_{i=1}^n p_{i,k}e_i = \sum_{k=1}^n \beta_{k,j}^k$.
Il en resulte que $APe_j = PBe_j$ pour tout j. Par suite $AP = PB$ ou encore $B = P^{-1}AP$.

4 Polynôme de matrice

4.1 Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i \in \mathbb{K}[t]$. On appelle polynôme de A associée à la polynôme $P(t)$ la matrice $P(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i$ où $A^0 = I$.

4.2 Proposition

Soit $P(t), Q(t)$ 2 polynôme, A une matrice carrée d'ordre n et λ un scalaire. On a:

1. $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$
2. $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$
3. $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$

En d'autres termes, l'application $\varphi_A : \mathbb{K}(t) \mapsto \mathbb{K}(A), P(t) \mapsto P(A)$ est une morphisme d'algèbres. De plus si $A \neq 0$, $Ker\,\varphi_A$ est un idéal de $\mathbb{K}[t]$ engendré par un polynôme non constant unitaire $w_A(t)$:

$$w_A(A) = 0 \text{ et } ker\,\varphi_A = \{P(t) = w_A(t)Q(t)/Q(t) \in \mathbb{K}[t]\}.$$

4.3 Définition

Le polynôme unitaire $w_A(t)$ (c-à-d, le coefficient de plus haut degré est egale à 1) est appelée la polynôme minimal de A.e

4.4 Définition

Tout polynôme non nul $P(t)$ tel que $P(A) = 0$ est appelée polynome annulateur de A.
Tout polynôme annulateur de A est donc divisible par $w_A(t)$.
Par exemple, $t^2 - 1$ est un polynôme annulateur de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ car $A^2 - 1 = 0$, et c'est le polynôme minimal.

5 Théorème de décomposition des noyaux

5.1 Théorème

Soit P, Q 2 polynôme de $\mathbb{K}[t]$ premier entre eux et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors

$$Ker\,PQ(A) = Ker\,PA \oplus Ker\,Q(A).$$

Plus généralement, si $P_1, P_2, \cdots, P_m$ sont des polynôme deux a deux premiers entre eux, alors

$$Ker\,P_1P_2\cdots, P_m(A) = Ker\,P_1(A) \oplus Ker\,P_2(A) \oplus \cdots \oplus Ker\,P_m(A).$$

6 Polynôme caracteristique

6.1 Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caracteristique de A et on note $\chi_A(t)$ le déterminant de la matrice $A - tI_n$ où I_n est la matrice unité d'ordre n:

$$\chi_A(t) = |A - tI_n|.$$

6.2 Proposition

On a :

(i) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré n. De plus, si $\chi_A(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(t^i)$, alors $\alpha_n = (-1)^n$, $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}tr(A)$ et $\alpha_0 = |A|$ où $tr(A)$ est la somme des éléments diagonaux de A appelée trace de A.

(ii) Si A et B sont semblables, $\chi_A(t) = \chi_B(t)$.

7 Valeurs propres et vécteurs propres d'une matrice

7.1 Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit λ est une valeur propres de $M_n(\mathbb{K})$, s'existe un vecteur non nul $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$. Un tel vecteur X est appelé vecteur propre da A associée a λ.

Si λ est une valeur propre de A, on note $Ker(A - \lambda I)$ l'ensemble de tous les vecteurs X tels que $AX = \lambda X$.

7.2 Théorème

Soit λ une valeur propre de A. Alors $Ker(A - \lambda I)$ est un *sev* de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ appelé sous espace propre de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ associée à λ. En outre, $\forall X \in Ker(A - \lambda I)$, $AX \in Ker(A - \lambda I)$.

7.3 Théorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors λ est une valeur propre de A ssi $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

7.4 Théorème

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ k valeurs propres distincts de A, $X_1, X_2, \cdots, X_k$ k vecteurs propres associée respectivement a $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$. Alors ces k vecteurs sont linéairement indépendants. De plus, si $E := Ker(A - \lambda_1 I) + \cdots + Ker(A - \lambda_k I)$, alors $E = Ker(A - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus Ker(A - \lambda_k I)$.

7.5 Proposition

λ est un valeur propre de A, *ssi* $\chi_A(\lambda) = 0$.

7.6 Proposition

Si A est d'ordre n, alors A a au plus n valeurs propres.

7.7 Définition

Soit λ une valeur propre de A. On appelle ordre de multiplicité de λ le plus grand entier m tel que $(t - \lambda)^m$ divise $\chi_A(t)$.

7.8 Proposition

Soit λ une valeur propre de A d'ordre de multiplicité m. Alors

$$1 \leq dim\, Ker(A - \lambda I) \leq m.$$

7.9 Définition

On dit que χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$ si χ_A a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$.

8 Diagonalisation

8.1 Définition

On dit qu'une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale B semblable à A.

8.2 Théorème

A est diagonalisable *ssi*, χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$ et $dim\, Ker(A - \lambda I) = m$ pour tout racine λ de χ_A d'ordre de multiplicité m.

8.3 Proposition

Soit $w_A(t)$ un polynôme minimal de A. Si λ est un valeur propre de A, alors $w_A(\lambda) = 0$.

8.4 Théorème

A est diagonalisable *ssi*, w_A a toute ses racines dans $\mathbb{K}$ et chaque racines sont simples.

9 Trigonalisation

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

9.1 Définition

On dit que A est triangularisable (ou Trigonalisable) s'il existe un matrice triangulaire B semblable à A.

9.2 Théorème

Si χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$, alors A est triangularisable. De plus,si B est une matrice triangulaire semblable a A, alors les éléments diagonaux de B sont les valeurs propres de A.

9.3 Théorème (Théorème de Cayley Hamilton)

Si χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$, alors $\chi_A(A) = 0$.

9.4 Corollaire

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\chi_A(A) = 0$.

9.5 Corollaire

Si χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$ et $\chi_A(t) = (-1)^n(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_q)^{m_q}$, alors

$$M_{n,1}(\mathbb{R}) = Ker\,(A-\lambda_1 I)^{m_1} \oplus \cdots \oplus Ker\,(A-\lambda_q I)^{m_q}.$$

Dans la section suivante A est supposé Trigonalisable, λ une valeur propre de $A \in M_n(\mathbb{R})$ d'ordre de multiplicité m.

10 Recherche d'une base de $E_\lambda = Ker(A-\lambda I)^m$

Soit A ue matrice carrée d'ordre n et λ une valeur propre d'ordre de multiplicité m.
Notons $N_i = N_i(\lambda) = Ker(A-\lambda I)$ et $n_i = dim\,N_i$. Soit k le plus petit entier tel que $n_k = m$ ($k \leq m$).
On a $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_k = N_m$ et $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$.
De plus, en posant $d_1 = n_1$ et $d_i = n_i - n_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq k$, on a $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k \geq 1$.

Notons $F_1 = N_1$ et pour $2 \leq i \leq k$, le sous espace supplémentaire de N_{i-1} dans N_i : $N_i = N_{i-1} \oplus F_i$.

Donc $E_\lambda = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$ avec $dim\,F_i = d_i$.
Ainsi pour avoir une base de E_λ, on cherche une base de F_i, une base de $F_2, \ldots$, une base de F_k.

1-ère étape: Recherche d'une base de F_1

Pour cela échelonner sous forme réduite (ou pivoter) la matrice augmenté $(A-\lambda I)^t|I$ où I est la matrice unité d'ordre n. On obtient une matrice échelonnée reduite $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & C_1 \\ \hline 0 & B_1 \end{array}\right)$

- aucune ligne de A_1 n'est nulle;
- 0 est la matrice nulle et d_1 n'est autre que le nombre de ses lignes;
- B_1 est une matrice $d_1 \times n$.

Notons b_1 la vecteur transpose du premier vecteur ligne de B_1, b_2 le vecteur transposé du deuxième ligne de B_1, $\cdots b_{d_1}$ le vecteur transposé du dernier vecteur ligne de B_1. Si $d_1 = m$, $(b_1, b_2, \cdots, b_{d_1})$ est une base de E_λ. Sinon, on passe à l'étape suivante.

2-ème étape: Recherche d'une base de F_2

Pour cela échelonner sous forme réduite la matrice augmenté $\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & 0 \\ \hline B_1 & 0 & -I_{d_1} \end{array}\right)$.
On obtient la matrice échelonnée réduite $\left(\begin{array}{c|c|c} A_2 & C_2 & E_2 \\ \hline 0 & B_2 & D_2 \end{array}\right)$:

- d_2 est égal au nombre de lignes de la matrice nulle 0;
- B_2 est la matrice d'ordre $d_2 \times n$.

Soit b_{d_1+1} le vecteur transposé du premier vecteur ligne de B_2, $\cdots$, $b_{d_1+d_2}$ le vecteur transposé du dernier vecteur ligne de B_2.
Alors ces nouveaux vecteurs forment une base de F_2.
De plus, si $D_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,d_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{d_2,1} & \alpha_{d_2,2} & \cdots & \alpha_{d_2,d_1} \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{cases} (A-\lambda I)b_{d_1+1} & = & \alpha_{1,1}b_1 + \alpha_{1,2}b_2 + \cdots + \alpha_{1,d_1}b_{d_1} \\ (A-\lambda I)b_{d_1+2} & = & \alpha_{2,1}b_1 + \alpha_{2,2}b_2 + \cdots + \alpha_{2,d_1}b_{d_1} \\ \vdots & & \vdots \\ (A-\lambda I)b_{d_1+d_2} & = & \alpha_{d_2,1}b_1 + \alpha_{d_2,2}b_2 + \cdots + \alpha_{d_2,d_1}b_{d_1} \end{cases}$$

Si $d_1 + d_2 = m$, $(b_1, b_2, \cdots, b_{d_1+d_2})$ est une base de E_λ. Sinon, on passse a l'etape suivante.

3-ème étape: Recherche d'une base de F_3

Comme précédement chelonner sous forme réduite la matrice augmenté $\left(\begin{array}{c|c|cc} A_2 & C_2 & E_2 & 0 \\ \hline B_2 & 0 & 0 & -I_{d_2} \end{array}\right)$

On obtient une matrice réduite $\left(\begin{array}{c|c|c} A_3 & C_3 & E_3 \\ \hline 0 & B_3 & D_3 \end{array}\right)$:

- d_3 est égal au nombre de lignes de la matrice nulle 0,
- B_3 est une matrice d'ordre $d_3 \times n$.

Soit $b_{d_1+d_2+1}$ le vecteur transposé du premier vecteur ligne B_3, $\cdots b_{d_1+d_2+d_3}$ le vecteur transposé du dernier vecteur ligne de B_3.
Alors ces nouveaux vecteurs forment une base de F_3.
De plus, si $D_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,d_1+d_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{d_3,1} & \alpha_{d_3,2} & \cdots & \alpha_{d_3,d_2+d_1} \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{cases} (A-\lambda I)b_{d_1+d_2+1} & = & \alpha_{1,1}b_1 + \alpha_{1,2}b_2 + \cdots + \alpha_{1,d_1+d_2}b_{d_1+d_2} \\ (A-\lambda I)b_{d_1+d_2+2} & = & \alpha_{2,1}b_1 + \alpha_{2,2}b_2 + \cdots + \alpha_{2,d_1+d_2}b_{d_1+d_2} \\ \vdots & & \vdots \\ (A-\lambda I)b_{d_1+d_2+d_3} & = & \alpha_{d_3,1}b_1 + \alpha_{d_3,2}b_2 + \cdots + \alpha_{d_3,d_2+d_1}b_{d_1} + d_{d_2} \end{cases}$$

Si $d_1 + d_2 + d_3 = m$, $(b_1, b_2, \cdots, b_{d_1+d_2+d_3})$ est une base de E_λ. Sinon, on continue jusqu'à ce que l'on obtienne au total m vecteurs qui forment une base de E_λ.

11 Recherche d'une matrice triangulaire

Soit A une matrice triangulaire : $\chi_A = (-1)^n(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_p)^{m_p}$. Par la méthode utilisé à la secction précédente, on obtient la base $(b_1, \cdots, b_{m_1})$ de E_{λ_1}, une base $(b_{m_1+1}, \cdots, b_{m_1+m_2})$ de E_{λ_2} et ainsi de suite. On obtient alors la nouvelle base $(b_1, \cdots, b_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Grâce à la méthode précédente qui nous permet de calculer $(A-\lambda I)b_j$ (b_j etant un vecteur associé à λ) et en Utilisant la prop 3.4, on obtient une matrice triangulaire semblable à A^n pour tout n et également une matrice triangulaire semblable à e^A.

NB: Pour chaque λ, il faut dresser un tableau $((A-\lambda I)^k b_j)_{k,j}$ sur tous les vecteurs b_j associé à λ.

12 Applications

12.1 Calcul de l'exponentielle d'une matrice

12.1.1 Définition

On appelle exponentielle d'une matrice carrée A la matrice $e^A = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} A^k$.
Soit A la matrice triangulaire dans $\mathbb{R}$ et $(b_1, \cdots, b_n)$ une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ obtenu en utilisant la section 10.
Si λ est la valeur propre associé à b_j, on a:

$$e^A b_j = e^{(A-\lambda I)+\lambda I} b_j = e^\lambda \sum_k \frac{1}{k!}(A-\lambda I)^k b_j = \sum_k \beta_{k,j} b_k.$$

En posant $P = [b_1 b_2 \cdots b_n]$ et $B = (\beta_{k,j})$, alors la prop 3.4 implique que

$$e^A = PBP^{-1}.$$

12.2 Résolution d'un système d'equation differentielles linéaires

On constate le système differentiel

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j(t) = x_i^{'}(t) \ (1 \le i \le n)$$

Ce systeme s'ecrit

$$AX(t) = X^{'}(t)$$

où $A = (a_{i,j})$ et $X(t) = (x_1(t) x_2(t) \cdots x_n(t))^t$.

12.2.1 Proposition

Le systeme $AX(t) = X^{'}(t)$ a pour solution générale $X(t) = e^{tA} X_0$ où X_0 est un vecteur arbitraire.
Si A est diagonalisable, le calcul de e^{tA} se fait comme e^A.