# FORME QUADRATIQUE

## 1 Dual d'un espace vectoriel

Soit $E$ un espace vetoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

### 1.1 Définition

On appelle forme linéaire ($fl$) sur $E$ toute application lineaire f de $E$ vers $\mathbb{K}$, c-à-d, $f(\alpha X + y) = \alpha f(x) + f(y)$, pour tout $(x, y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Muni de l'addition des applications et des multiplications par des scalaires, l'ensemble de toute les formes linéaire sur $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, appelé dual de $E$ noté $E^*$. Le dual de $E^*$ est appele bidual de $E$ noté $E^{**}$.
**Exemple de fl:** Soit $E$ l'ensemble des fonctions réels continue sur $[0, 1]$.
E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application $\varphi$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx$ est une $fl$ sur $E$.

### 1.2 Proposition

Soit $E$ de dimension finie $n$ et $(b_1, \cdots, b_n)$ une base de $E$. Pour tout $i$, l'application $b_i^* : E \mapsto \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j, \ b_i^*(x) = x_i$$

est une $fl$ sur $E$.
De plus, $b_1^*, \cdots, b_n^*$ forment une base de $E^*$.
*Démostration:*

(a) Soient $x = \sum_{j=1}^n x_j b_j$ et $y = \sum_{j=1}^n$ des éléments de $E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda x + y = \sum_{(\lambda x_j + y_j) b_j}$, on a $b_i^*(\lambda x + y) = \lambda x_i + y_i = \lambda b_i^*(x) + b_i^*(y)$. Ainsi $b_i^*(\lambda x + y) = \lambda b_i^*(x) + b_i^*(y)$, d'où $b_i^*$ est une forme linéaire.

(b) Montrons que $(b_1^*, \cdots, b_n^*)$ est base de $E^*$.
Soit $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_1 b_1^* + \cdots + \lambda_n b_n^* = 0$. On a pour tout $i$, $(\lambda_1 b_1^* + \cdots + \lambda_n b_n^*) b_i = \lambda_i = 0$. Ainsi $b_1^*, \cdots, b_n^*$ est une base de $E^*$.

**Remarque:** Par construction pour tout $i$ et pour tout $j$, $b_i^*(b_j) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j} = 1$ et $i = j$ et 0 sinon.

### 1.3 Corollaire

Si $E$ est de dimension finie, alors $dim\, E = dim\, E^*$.

### 1.4 Proposition

La base $(b_1^*, \cdots, b_n^*)$ de $E$ définie précédement est appelé base dual de $(b_1, \cdots, b_n)$.

### 1.5 Définition

Soit $E_1$ un sev de $E$. On appelle orthogonale de $E_1$ (au sens du dual) le sev $E^{\perp}$ de $E^*$ définie par:

$$\forall f \in E^*, (f \in E_1^{\perp} \Leftrightarrow \forall x \in E_1, f(x) = 0).$$

Autrement dit, $E_1^{\perp} = \{f \in E^*;\ f/E_1 = 0\}$.
*Exemple:* Considérons l'espace $E = \mathbb{R}^3$. Soit $(e_1, e_2.e_3)$ une base de $E$ et $E_1$ un sev de $E$ engendré par $e_1 + e_2$. Soit $f = x_1 e_1^* + x_2 e_2^* + e_3^* \in E^*$. On a: $f \subset E_1^{\perp} \Leftrightarrow f(e_1 + e_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow f = x_1(e_1^* - e_2^*) + x_3 e_3^*$.
Donc $E_1^{\perp} =< e_1^* - e_2^*, e_3^* >$.

### 1.6 Proposition

On a:

(i) $0^{\perp} = E^*$ et $E^{\perp} = 0$;

(ii) Pour tout sev $E_1$ et $E_2$ de $E$,

- Si $E_1 \subset E_2$, alors $E_2^{\perp} \subset E_1^{\perp}$;
- $E_1^{\perp} + E_2^{\perp} \subset (E_1 \cap E_2)^{\perp}$, On a l'égalité si $E$ est de dimension finie.
- $(E_1 + E_2)^{\perp} = E_1^{\perp} \cap E_2^{\perp}$

### 1.7 Proposition

Si $E$ est de dimension finie $n$ et $F$ un sev de $E$, alors

$$dim\, F^{\perp} = n - dim\, F.$$

*Démostration:*
D'après la proposition précédente, cette proposition est vrai si $F = 0$ ou $F = E$. Supposons que $F$ soit propre et $dim\, F = p (1 \leq p \leq n)$. Soit $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ une base de $E$ tel que $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ soit la base de $F$. Soit $(a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*)$ la base duale de $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Pour prouver la proposition, il suffit de montrer que $(a_{p+1}, \cdots, a_n)$ est une base de $F^{\perp}$. Pour tout $x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ et $\forall i > j,\ a_j^*(x) = x_1 a_j^*(a_1) + \cdots + x_n a_j^*(a_n) = x_j = 0$. Ce qui prouve que $\forall j > p$, on a $a_j^* \in F^{\perp}$.
D'autre part, soit $f \in F^{\perp}$. Comme $(a_1^*, \cdots, a_n^*)$ est une base $E^*$, $f$ peut s'écrire $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j^*$, on a $\forall i \leq p,\ f(a_i) = \alpha_i = 0$. Donc $(a_{p+1, \cdots, a_n})$ est une base de $F^{\perp}$.

# Détermination d'ue base duale et de l'orthogonal d'un sev

Soit $E$ un ev de dimension $n$ muni de la base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et $v_1, v_2, \cdots, v_p$ p vecteurs de $E$ linéairement indépendants.
On note $[v_1\, v_2\, \cdots\, v_n]$ la matrice d'ordre $n \times p$ dont la $j$-ème colonne est formé par les composants du vecteur $v_j$ dans la base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. Pour simplifier, on pose $A = [v_1\, v_2\, \cdots\, v_n]$.
On échelonné la matrice augmentée $(A|I_n)$ sous forme réduite.

(i) Si $p = n$, on obtient la matrice augmentée $(I_n|A^{-1})$.
Si $(v_1^*, v_2^*, \cdots, v_n^*)$ est une base dual de $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$, alors

$$[v_1^*\, v_2^*\, \cdots\, v_n^*] = (A^{-1})^t$$

c-a-d, les coefficient de la $j$-ème colonne de $A^{-1}$ sont les composant du vecteur $v_j^*$ dans la base dual $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e^*)$.

(ii) Si $p < n$, on obtient la matrice échelonné réduite de la forme $\left(\begin{array}{c|c} I_p & B_1 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right)$.
Si $F =< v_1, v_2, \cdots, v_n >$ et si on pose $(B_2)^t = [f_1\, f_2, \cdots, f_{n-p}]$, alors

$$F^{\perp} =< f_1, f_2, \cdots, f_{n-p} > .$$

c-à-d, les composants du vecteur $f_j$, dans la base duale $(e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*)$ sont les coefficients de la $j$-ème colonne de $(B_2)^t$.

# 2 Forme bilinéaire symetrique

Soit $E$ un ev sur $\mathbb{R}$ et $f : E \times E \mapsto \mathbb{R}$ une application.
Pour tout $x \in E$(resp. $y \in E$), on note $f_{x.}$(resp. $f_{.y}$) l'application de $E$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f_{x.}(y) = f(x, y)$(resp. $f_{.y}(x) = f(x, y)$).

## 2.1 Définition

$f$ est dite une forme bilinéaire sur $E$ si:

- $\forall x \in E,\ f_{x.}$ est une fl sur E;
- $\forall y \in E,\ f_{.y}$ est une fl sur E.

On dit que $f$ est symetrique si $\forall (x, y) \in E \times E, f(x, y) = f(y, x)$.
Notons que si $f$ est symetrique, alors $f_{x.} = f_{.x}$. Dans ce cas, on écrit simplement $f_x$.

## 2.2 Définition (Noyau d'une fbs)

Soit $f$ une fbs sur $E$. On appelle noyau de $f$ le sev $Ker\, f = \{x \in E;\ f_x = 0\} = \{x \in E; \forall y \in E;\ f(x, y) = 0$

## 2.3 Définition

Soit $E$ de dimension $n$, $(b_1, \cdots, b_n)$ une base de $E$ et $f$ une fbs sur $E$. On appelle matrice $f$ rélativement à la base $(b_1, \cdots, b_n)$ la matrice $A = (ai, j)$ où $a_{ij} = f(b_i, b_j)$.
Comme $f$ est symetrique, on $a_{ij} = a_{ji} \forall (i, j)$.

## Expression de $f(x, y)$ dans la base $(b_i)_i$,

Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de $f$ rélativement à la base $(b_1, \cdots, b_n)$.
Si $x = \sum_i x_i b_i$ et $y = \sum_j y_j b_j$, alors

$$f(x, y) = \sum_i x_i \sum_j f(b_i, b_j) y_j = \sum_{i,j} f(b_i, b_j) x_i y_j.$$

Ainsi

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j.$$

Sous forme matricielle, on a $f(x, y) = X^t A Y$ où $X = (x_1, \cdots, x_n)^t, Y = (y_1, \cdots, y_n)^t$.

## 2.4 Définition

Le rang de la matrice $A$ est appelé le rang de $f$:

$$rang(f) = dimE - dim(Ker\, f) = dimE - dim(Ker\, A).$$

## 2.5 Proposition

Soit $(b_i)$ et $(b_i^{'})$ deux base de $E$, $f$ une fbs sur $E$, $A = Mat(f, (b_i))$ et $A^{'} = Mat(f, (b_i^{'}))$. Si $P$ est la matrice de passage de $b_i$ vers $b_i^{'}$, alors

$$A^{'} = P^t AP.$$

## 2.6 Définition

On dit qu'une fbs est non dégenerée, si $Ker\, f = 0$. Dans la cas contraire, on dit qu'elle est dégenerée.

## 2.7 Proposition

Si $E$ est de dimension finie, alors $f$ est non dégenerée *ssi* sa matrice est inversible.

## 2.8 Définition

On dit que les vecteurs $x, y$ sont orthogonaux rélativement à $f$ si $f(x, y) = 0$

## 2.9 Définition

Soit $X$ une partie non vide de $E$. On appelle orthogonal de $X$ rélativement à $f$ le sev de $E$ forme des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de $X$, noté $X^{\perp}$:

$$X^{\perp} = \{y \in E / \forall x \in X,\ f(x, y) = 0\}.$$

On note $v^{\perp}$ l'orthigonal de $\{v\}$ rélativement à $f$.

## 2.10 Définition

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \cdots, b_n)$ une base de $E$ et $f$ une fbs de $E$. On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativement à $f$ ou simplement une base f-orthogonale si $f(b_i, b_j) = 0$ pour tout couple $(i, j)$ tel que $i \neq j$.
On dit qu'elle est $f$-orthonormale si elle est $f$-orthogonale et si $f(b_i, b_i) = 1$ pour tout $i$.

# 3 Forme quadratique

## 3.1 Définition

On appelle forme quadratique (fq) sur une $\mathbb{R}ev$ $E$ toute application $q : E \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes:

1. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$;

2. L'application $f : E \times E \mapsto \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall (x, y) \in E \times E, f(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$$

   est une fbs sur E.

$f$ est appelé la forme polaire associée à $q$, et $q$ la fq associée à $f$;

$$\forall x \in E, q(x) = f(x, x).$$

Si $(a_{ij}) = Mat(f, (b_i))$, dans la base $(b_i)$, $q(x)$ a pour expression:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

**NB:** Si $f$ est une forme polaire de $q$, $f(x, y)$ se deduit de $q(x)$ en remplaçant $a_i x_i^2$ par $a_i x_i y_i$ pour tout $i$, et $2a_{ij}x_ix_j$ par $a_{ij}x_iy_j + a_{ji}x_jy_i$ pour tout i $<$ j.

### 3.2 Définition

Une fq positive si $q(x) \geq 0$ pour tout $x$.

### 3.3 Proposition

Si $q$ est une fq positive sur $E$ de forme polaire $f$, alors

$$\forall (x, y) \in E^2 (f(x, y))^2 \leq q(x)q(y).$$

## 4 Réduction(ou décomposition en carrée) d'une forme quadratique

Soit $E$ un $\mathbb{R}ev$ de dimension n, $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $E$. Soit $q$ une fq non nulle. Dans cette base $q$ est définie par

$$\forall x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i, \; q(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i + 2 \sum_{1 < i,j < n} a_{ij} x_i x_j;$$

### 4.1 Théorème

Il existe des fl $l_1, \cdots, l_n$ linéairement indépendants telle que

$$q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \cdots + \alpha_r l_r^2(x).$$

où $1 \leq r \leq n$ et tous les $\alpha_i$ sont tous non nul.

### 4.2 Définition

Réduire une fq $q$, c'est transformer $q(x)$ sous la forme

$$q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \cdots + \alpha_r l_r^2(x).$$

appelé forme réduite de $q$, les $\alpha_i$ étant tous non nul et les $l_i$ sont linéairement indépendants.

### 4.3 Proposition

Soit $q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \cdots + \alpha_r l_r^2(x)$ une forme réduite de $q$. Alors

$$Ker\, f - \{x \in E; \; l_1(x) = \cdots = l_r = 0\}$$

### 4.4 Proposition

Soit $q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \cdots + \alpha_r l_p^2(x)$. une forme réduite de $q$. Alors $rang(q) = p$.

### 4.5 Proposition

Soit $f$ une fbs non nulle sur $E$ de dimesion finie. Alors $E$ admet une base $f$-orthogonale.

### 4.6 Proposition

Soit $f$ une fbs non nul sur $E$ de dimension n, de fq $q$ et de rang $p$. Alors il existe une base $f$-orthogonale et unique couple d'entier $(r, s)$ tels que $r + s = p$ et dans cette base, $q(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{p} x_i^2$.
$(r, s)$ est appelé signature de $f$ ou de $q$.

### 4.7 Proposition

Si $f$ est une fbs non dégenerée et positive, alors $E$ admet une base $f$-orthonormale.

### 4.8 Proposition

$E$ admet une base $f$-orthonormale *ssi* $f$ a pour signature $(n, 0)$, n étant la dimension de $E$.

### 4.9 Recherche d'une base $f$-orthogonale et d'une base de $Ker\, f$

Soit $f$ une fbs sur $E$ de dimension n, $(e_i)$ une base de $E$ et $q$ la fq dont la forme réduite est $q(x) = \alpha_1 l_1^2(x) + \cdots + \alpha_p l_p^2(x)$.

On resout le systeme d'equation linéaires $(S) = \begin{cases} l_1(x) & = & t_1 \\ \vdots & & \vdots \\ l_p(x) & = & t_p \end{cases}$

où $t_1, \cdots, t_p$ sont des variables.
Sous forme matricielle, on a $AX = T$ où $A$ est une matrice d'ordre $p \times n, X = (x_1\, x_2\, \cdots\, x_n)^t$ et $(t_1\, t_2\, \cdots\, t_p)^t$ avec $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
On resout $(S)$ par la methode de pivot de Gauss.

- On échelonne la matrice augmentée $(A|I_p)$ sous forme réduite. On obtient $(B|Q)$.
- Comme $(S)$ devient $BX = QT$, alors on peut exprimer $p$ variables $x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}$ en fonction de $n - p$ autres variables $x_{j_1}, \cdots, x_{j_{n-p}}$ et des variables $t_1, t_2, \cdots, t_p$. Alors $(S)$ a pour solution
$$X = x_{j_1} b_1 + x_{j_2} + \cdots + x_{j_{n-p}} b_{n-p} + t_1 b_{n-p+1} + \cdots + t_p b_n.$$
$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ est une base $f$-orthogonale et $(b_1, b_2, \cdots, b_{n-p})$ est une base de $Ker\, f$.

## Autres méthode de Recherche d'une base $f$-orthogonale et d'une base de $Ker\, f$

Posons $A = [l_1\, l_2\, \cdots\, l_p]$
On échelonne la matrice augmentée $(A|I_n)$ sous forme réduite.
On obtient une matrice echelonne reduite de la forme $\left(\begin{array}{c|c} I_p & B_1 \\ \hline 0 & B_2 \end{array}\right)$.

En posant $B_1^t = [b_1 \cdots b_p]$ et $B_2^t = [b_1 \cdots b_n]$, alors $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ est une base $f$-orthogonale de $E$ et $(b_{p+1}, \cdots, b_n)$ est une base de $Ker\, f$.