Résolution de système linéaire

Un système d'équation linéaire est un ensemble d'équation sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Forme matricielle

Un système d'équation linéaire peut aussi s'écrire sous forme $Ax = b\ ou\ A \in M_{mn}(\mathbb{K}),\ x \in \mathbb{K}^n\ et\ b \in \mathbb{K}^m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} ; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ et\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Définition

Le rang d'une matrice notée $rg(A)$ est le nombre maximum de vecteurs ligne (ou colonne) linéairement indépendant.
Rémarque:
Si $A \in M_{mn}(\mathbf{K})\ alors\ rg(A) \leq \min(m, n)$

Résolution de système linéaire avec matrice carrée

Décomposition en LU

On suppose que $A \in Gl_n(\mathbb{K})$ et on considère que le systeme linéaire $Ax = b$. L'idée est de décomposer $A = LU$ avec L un matrice triangulaire inférieur et U un matrice triangulaire supérieur.
Pour résoudre $Ax = b$ en 2 étape :

- Résoudre l'équation $Ly = b$ pour $y = Ux$
- Puis résoudre $Ux = y$

Il faut environ $\frac{2}{3}n^3$ pour calculer LU et pour résoudre un système triangulaire il faut n^2 opération.
Application:

Calcul de déterminant et inverse:
Une fois obtenu la décomposition LU on a

$$A = LU \equiv detA \ = \ detL\, detU$$

Or si $detL = 1$ $(resp\, detU = 1)$ on a :

$$detA \ = \ detU = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}(resp\, detA \ = \ detU = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}).$$

Pour l'inverse on note $A^{-1} = (x_1|x_2|\cdots|x_n)$ ou chacun des vecteurs x_i est solution de $Ax_i = e_i$.

Algorithme:
Entrée : A
Sortie : L,U

- **Si on suppose que les diagonales de L vaut 1** Composant de la matrice L :

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj})$$

  Composant de la matrice U :

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$$

- **Si on suppose que les diagonales de U vaut 1** Composant de la matrice L :

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}$$

  Composant de la matrice U :

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj})$$

Décomposition QR

On suppose que $A \in Gl_n(\mathbb{K})$. L'idée est de décomposer $A = QR$ avec Q un matrice orthogonale $(QQ^t = Q^tQ = I)$ et R un matrice triangulaire supérieur. Pour pouvoir faciliter la résolution de $Ax = b$. On écrit $Ax = b \equiv QRx = b$, on multiplie membre à membre par Q^t et on obtient $Rx = Q^tb$.
Remarque:
cette décomposition QR existe toujours.
Algorithme:
Entrée : A
Sortie : Q,R
Notons $[q_1, q_2, \cdots, q_n]$ *et* $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ les vécteurs colonnes réspectifs des matrices Q et A.
Pour trouver Q :

$$Posons\ u_1 = a_1\ ;\ q_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

Pour j=2,3,...,n:

$$u_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} < a_j, q_i > q_i \ ; \ q_j = \frac{u_j}{\|u_j\|}$$

Pour trouver R, on résout l'équation $R = Q^t A$.

Méthode de Cholesky

Théoreme

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive alors, il existe un unique $B \in M_n(\mathbf{R})$ triangulaire inférieur de coefficient diagonaux strictément positive tel que $A = BB^t$.
Cette décomposition est appelée décompositionn de Cholesky. **Algorithme**:
Entrée : A
Sortie : B
Diagonal :

$$b_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j} b_{jk}^2}$$

Non diagonaux :

$$b_{ij} = \frac{1}{b_{jj}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_i k b_{jk})$$

Calcul des valeurs propre et vecteurs propre

Détermination du polyônme caractéristique

Pour trouver les éléments propre de la matrice A, la méthode la plus simple consiste à trouver la polynôme caractéristique de A, à rechercher les zéros $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda n$ puis à résoudre le système linéaire $Ax = \lambda_i x$. Malheuresement, ce schema n'est pas satisfaisant pour les applications numeriques. Toutefois, la connaissance du polynôme caractéristique peut être elle même utile indépendement de la recherche des valeurs propres. Par la suite, on notera $P_A(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n (a_n \neq 0)$ le polynôme caractéristique de la matrice A.

Méthode de Leverrier

Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ les valeurs propres *i.e* les zéros de plynômes P_A. Introduisons les fonctions symétriques élementaires des racines x_i, *i.e* les n nombres

$$\begin{array}{rcc}
\sigma_1 & = & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
\sigma_2 & = & \sum_{i>j} x_i x_j \\
\sigma_3 & = & \sum_{i>j>k} x_i x_j x_k \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\sigma_n & = & x_1 x_2 \cdots x_n
\end{array}$$

Il est connu que les σ_i sont liées aux coefficient a_i du polynôme P_A par la rélation $\sigma_i = (-1)^i \frac{a_i}{a_0}$.
On sait que toutes fonction symétrique de racine peut s'éxprimer comme une fonction des σ_i,

donc comme une fonction des coefficient a_i. En particulier, considérons pour tout $k \in \mathbb{N}$ la somme de Newton des x_i:

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ S_2 & = & x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S_k & = & x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \end{array}$$

Les somme S_k sont reliée aux coefficient a_i par les formule dite de Newton

$$\begin{array}{ccc} a_1 & = & -a_0 S_1 \\ a_1 S_1 + 2a_2 & = & -a_0 S_1 \ (a_1 S_1 + a_0 S_2 = 2a_2) \\ a_1 S_2 + a_1 + 3a_3 & = & -a_0 S_3 \ (a_1 S_2 + a_2 S_1 + a_0 S_3 = 3a_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 S_{k-1} + a_2 Sk - 2 + \cdots + k a_k & = & -a_0 S_k \end{array}$$

Connaissant les S_k, il suffit de résoudre un système linéaire triangulaire pour calculer les coefficients $\frac{a_i}{a_0}$. or les S_k sont facilement accessible des que l'on connait la puissance A^k de la matrice A. en effet $S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ est égale à la trace de A. S_k n'est autre que la trace de A^k car si $x_1, X_2, \cdots, x_n$ sont les valeurs propres d'une matrice A, $x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k$ sont les valeurs propres de la matrice A^k. Nou avons donc une méthode qui fournit exactement les coefficient des polynôme caractéristique. Il faut fournir les puissances succéssives de A, calculer A^2 révient a calculer n^2 produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, soit éffectuer n^3 multiplication. Pour former $A_k = A.A^{k-1}$, en connaissant A^{k-1}, il faut également n^3 multiplication. Le cout total de la méthode est donc de l'ordre n^4 multiplication.