ROZDZIAŁ IV

ELEMENTARNE METODY GEOMETRYCZNE TEORII FUNKCYJ

§ 1. Przesuwanie biegunów. Przebieg funkcji holomorficznej w obszarze jest niejako przesądzony przez zachowanie się tej funkcji już w otoczeniu jednego jakiegokolwiek punktu obszaru. Jeżeli jednak zamiast obszaru rozważać będziemy dowolny zbiór otwarty, wówczas otrzymać możemy funkcję holomorficzną w całym tym zbiorze, definiując ją niezależnie w poszczególnych składowych zbioru. Interesujący przeto jest fakt, że każdą funkcję holomorficzną w dowolnym zbiorze otwartym G określić można jako granicę ciągu funkcyj wymiernych holomorficznych w G, a nawet — gdy zbiór G nie rozcina płaszczyzny i nie zawiera punktu ∞ — jako granicę ciągu wielomianów. Piękne to twierdzenie udowodnił Runge w drugiej połowie ubiegłego stulecia.

Dowód przebiega w trzech etapach: 1° funkcję holomorficzną $W(z)$, daną w zbiorze otwartym G, przedstawiamy na zbiorze domkniętym $F\subset G$ jako sumę całek krzywoliniowych postaci $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{W(\mathfrak{z})}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z}$ wzdłuż krzywych C, przebiegających w $G-F$; 2° całki te, rozważane jako funkcje zmiennej z, aproksymujemy jednostajnie na F przez funkcje wymierne, posiadające bieguny na krzywych C; 3° bieguny te „przesuwamy" poza dany zbiór otwarty G tak, by otrzymane funkcje wymierne stały się holomorficzne w G.

Pierwszy etap otrzymuje się wprost, na mocy lemmatu 10.1, Rozdz. III. Drugi opiera się na następującym prostym lemmacie:

(1.1) *Jeżeli $f(z)$ jest funkcją ciągłą na krzywej regularnej C nie mającej punktów wspólnych ze zbiorem domkniętym F, wówczas dla każdej liczby $\varepsilon>0$ istnieje funkcja wymierna $Q(z)$ posiadająca bieguny wyłącznie na C i taka, iż*

$$\left|\int_C \frac{f(\mathfrak{z})}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z}-Q(z)\right|\leqslant\varepsilon \qquad \textit{dla} \quad z\in F.$$

Dowód. Niech $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}(t)$, gdzie $a\leqslant t\leqslant b$, będzie równaniem krzywej C i niech M będzie kresem górnym $|\mathfrak{z}'(t)|$ w $[a,b]$. Funkcja $f[\mathfrak{z}(t)]/[\mathfrak{z}(t)-z]$ jest funkcją ciągłą zmiennych z i t, gdy z przebiega zbiór F, a t przedział $[a,b]$. Możemy więc podzielić przedział ten na skończoną ilość podprzedziałów $[t_i,t_{i+1}]$, gdzie $i=0,1,\dots,n-1$, tak by

$$\left|\frac{f[\mathfrak{z}(t)]}{\mathfrak{z}(t)-z}-\frac{f[\mathfrak{z}(t_i)]}{\mathfrak{z}(t_i)-z}\right|<\frac{\varepsilon}{M(b-a)} \qquad \textit{dla} \quad t_i\leqslant t\leqslant t_{i+1} \quad \textit{oraz} \quad z\in F.$$

Przyjmując tedy

$$Q(z)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f[\mathfrak{z}(t_i)]}{\mathfrak{z}(t_i)-z}[\mathfrak{z}(t_{i+1})-\mathfrak{z}(t_i)],$$

mamy dla $z\in F$

$$\left|\int_C \frac{f(\mathfrak{z})}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z}-Q(z)\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left[\frac{f[\mathfrak{z}(t)]}{\mathfrak{z}(t)-z}-\frac{f[\mathfrak{z}(t_i)]}{\mathfrak{z}(t_i)-z}\right]\cdot\mathfrak{z}'(t)\,dt\right|\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\cdot(b-a)=\varepsilon,$$

co należało dowieść.

W trzecim etapie dowodu twierdzenia Rungego oprzemy się na następującym lemmacie „o przesuwaniu biegunów":

(1.2) *Jeżeli F jest zbiorem domkniętym, zaś a,b dwoma punktami poza F takimi, że*

$$(1.3) \qquad 2\varrho(a,b)\leqslant\varrho(a,F) \quad \textit{oraz} \quad 2\varrho(a,b)\leqslant\varrho(b,F),$$

wówczas dla każdej liczby $\varepsilon>0$ i każdej funkcji wymiernej $P(z)$, posiadającej jedyny biegun w punkcie a, istnieje funkcja wymierna $Q(z)$, posiadająca jedyny biegun w punkcie b i spełniająca nierówność

$$(1.4) \qquad |P(z)-Q(z)|\leqslant\varepsilon \quad \textit{dla każdego} \quad z\in F.$$

Dowód. Rozróżnimy trzy przypadki:

(a) $a \neq \infty$, $b \neq \infty$. Funkcja $P(z)$ jest tedy (ob. Rozdz. III, tw. 7.5) wielomianem względem $1/(z-a)$, a poszukiwana funkcja $Q(z)$ ma być wielomianem względem $1/(z-b)$.

Przyjmiemy najpierw, iż $P(z)$ redukuje się do jednego wyrazu $1/(z-a)^n$.

Z drugiej[1]) z nierówności (1.3) wynika, iż dla $z \in F$ mamy $|(a-b)/(z-b)| \leqslant |(a-b)/\varrho(F,b)| \leqslant 1/2$. Zatem

$$\frac{1}{(z-a)^n} = \frac{1}{(z-b)^n} \frac{1}{\left(1-\dfrac{a-b}{z-b}\right)^n} = \frac{1}{(z-b)^n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k,$$

gdzie $A_k = (k+n-1)!/(n-1)!k!$, przy czym szereg w ostatnim członie powyższego związku jest zbieżny jednostajnie na F. Warunek (1.4) będzie więc spełniony, gdy obierając wartość N dostatecznie wielką, przyjmiemy

$$Q(z) = \frac{1}{(z-b)^n} \cdot \sum_{k=0}^{N} A_k \left(\frac{a-b}{z-b}\right)^k.$$

Jeżeli $P(z)$ jest dowolnym wielomianem względem $1/(z-a)$, t.zn. jest postaci $\sum\limits_{j=0}^{s} B_j/(z-a)^j$, wówczas na zasadzie otrzymanego już wyniku możemy określić dla każdego $j = 1, 2, \ldots, s$ funkcję $Q_j(z)$, która jest wielomianem względem $1/(z-b)$ i spełnia na zbiorze F nierówność

$$\left|\frac{1}{(z-a)^j} - Q_j(z)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{s \cdot |B_j|}.$$

Funkcja $Q(z) = B_0 + B_1 \cdot Q_1(z) + B_2 \cdot Q_2(z) + \ldots + B_s \cdot Q_s(z)$ jest wówczas także wielomianem względem $1/(z-b)$ i czyni zadość warunkowi (1.4).

(b) $a \neq \infty$, $b = \infty$. Funkcja $P(z)$ jest znów wielomianem względem $1/(z-a)$ i, jak poprzednio, wystarczy udowodnić twierdzenie, gdy $P(z)$ redukuje się do jednego wyrazu $1/(z-a)^n$. Poszukiwana funkcja $Q(z)$ musi jednak tym razem być wielomianem, ponieważ posiadać ma jedyny biegun w punkcie $b = \infty$.

[1]) Można tu zauważyć, iż w przypadkach (a) i (b) korzystamy tylko z drugiej nierówności (1.3), a w przypadku (c) tylko z pierwszej.

Z drugiej nierówności (1.3) wynika, iż dla $z \in F$

$$|a| = 1/\varrho(a,\infty) \geqslant 2/\varrho(\infty, F) \geqslant 2 \cdot |z|,$$

a więc $|z/a| \leqslant 1/2$. Szereg

$$\frac{1}{(z-a)^n} = \frac{(-1)^n}{a^n\left(1-\dfrac{z}{a}\right)^n} = \frac{(-1)^n}{a^n} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{z}{a}\right)^k,$$

gdzie $A_k = (k+n-1)!/(n-1)!k!$, jest przeto jednostajnie zbieżny na F i warunek (1.4) będzie spełniony, gdy dla dostatecznie wielkiej wartości N przyjmiemy

$$Q(z) = \frac{(-1)^n}{a^n} \sum_{k=0}^{N} A_k \left(\frac{z}{a}\right)^k.$$

(c) $a = \infty$, $b \neq \infty$. Funkcja $P(z)$ jest wówczas (por. Rozdz. III, tw. 7.5) wielomianem względem z, a pierwszy z warunków (1.3) wyraża obecnie, iż $|b| \geqslant 2/\varrho(\infty, F) \geqslant 2 \cdot |z|$ dla $z \in F$. Zbiór F zawiera się więc w kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(0; b/2)$. Niech $u = 1/(z-b)$. Koło $\overline{\mathrm{K}}(0; b/2)$ nie zawiera punktu b ani ∞, więc gdy z przebiega zbiór F, punkt u należy (por. Rozdz. I, tw. 14.9) do pewnego koła domkniętego $\overline{\mathrm{K}}(c; r)$, nie zawierającego punktu ∞ ani 0. Mamy więc $c \neq \infty$ oraz $r < |c|$.

Z drugiej strony, ponieważ $z = b + 1/u$, funkcja $P(z)$ jest wielomianem względem $1/u$. Poszukiwana funkcja $Q(z)$ ma być natomiast wielomianem względem $u = 1/(z-b)$. Dla uzasadnienia lemmatu w rozważanym przypadku wystarczy więc okazać, iż dla każdego $\eta > 0$ oraz każdej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ istnieje wielomian $R(u)$ taki, że

$$\left|\frac{1}{u^n} - R(u)\right| < \eta \quad \textit{dla} \ u \in \overline{\mathrm{K}}(c; r).$$

Otóż dla $u \in \overline{\mathrm{K}}(c; r)$ mamy $|u-c|/|c| \leqslant r/|c| < 1$; rozwinięcie

$$\frac{1}{u^n} = \frac{1}{c^n\left(1-\dfrac{c-u}{c}\right)^n} = \frac{1}{c^n} \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{c-u}{c}\right)^n, \quad \textit{gdzie} \ A_k = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!k!},$$

jest więc jednostajnie zbieżne w $\overline{\mathrm{K}}(c; r)$ i za $R(u)$ wystarczy przyjąć dostatecznie daleką sumę częściową tego rozwinięcia.

Możemy udowodnić teraz następujące twierdzenie aproksymacyjne:

(1.5) *Jeżeli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną w zbiorze otwartym G, wówczas dla każdego zbioru domkniętego $F \subset G$ oraz każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja wymierna $H(z)$, holomorficzna w G (t. j. o biegunach w dopełnieniu zbioru G) i spełniająca warunek*

$$(1.6)\qquad |W(z)-H(z)|<\varepsilon \quad \textit{dla} \quad z \in F.$$

Co więcej, jeżeli dany jest dowolny zbiór E, który zawiera się w dopełnieniu zbioru G i którego domknięcie posiada punkty wspólne ze wszystkimi składowymi tego dopełnienia, wówczas funkcja $H(z)$ może być tak określona, by wszystkie jej bieguny należały do zbioru E.

Dowód. Możemy przyjąć, że punkt ∞ nie należy do zbioru G; istotnie, w przeciwnym razie, stosując inwersję o środku w dowolnym punkcie nie należącym do zbioru G, moglibyśmy zbiór ten przekształcić na zbiór otwarty, który już punktu ∞ nie zawiera.

Niech Φ oznacza zbiór wszystkich punktów z, dla których

$$(1.7)\qquad 2\varrho(z, CG) \geqslant \varrho(z, F) \quad \textit{lub} \quad 2\varrho(z, CG) \geqslant \varrho(F, CG).$$

Zbiór Φ jest domknięty (por. Wstęp, § 11), zawiera F i zawarty jest w G. Na mocy lemmatu 10.1 (II), Rozdz. III, oraz lemmatu 1.1 istnieje więc funkcja wymierna $Q(z)$, której wszystkie bieguny leżą w $G-\Phi$ i która spełnia warunek

$$(1.8)\qquad |W(z)-Q(z)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \textit{dla} \quad z \in \Phi.$$

Funkcję tę przedstawić możemy w postaci $Q(z)=Q_1(z)+\ldots+Q_m(z)$, gdzie każda z funkcyj $Q_k(z)$ jest wymierna i posiada jeden tylko biegun. (Rozkład taki istnieje dla każdej funkcji wymiernej $Q(z)$ na mocy tw. 7.5, Rozdz. III; w rozważanym jednak przypadku wynika też bezpośrednio z metody konstrukcji funkcji $Q(z)$ na zasadzie lemmatu 10.1, Rozdz. III, oraz lemmatu 1.1.)

Weźmy pod uwagę którąkolwiek z funkcyj $Q_i(z)$, np. funkcję $Q_1(z)$. Niech a będzie jej biegunem i niech b będzie punktem dopełnienia zbioru G takim, że $\varrho(a,b)=\varrho(a, CG)$ (por. Wstęp, tw. 8.3). Ponieważ punkt a należy do $G-\Phi$, przeto żaden z warunków (1.7) nie jest spełniony dla $z=a$, a więc

$$(1.9)\qquad \begin{aligned} &2\varrho(a,b)=2\varrho(a, CG)<\varrho(a,F),\\ &2\varrho(a,b)=2\varrho(a, CG)<\varrho(F, CG)\leqslant\varrho(F,b). \end{aligned}$$

Niech teraz S oznacza tę składową zbioru CG, która zawiera punkt b. Z założenia każda składowa dopełnienia zbioru G posiada punkty wspólne z domknięciem zbioru E. Niech $c \in S \cdot \bar{E}$. Istnieje więc punkt $d \in E$ taki, iż

$$(1.10)\qquad \varrho(c,d)<\tfrac{1}{2}\varrho(F, CG).$$

Z drugiej strony, ponieważ b i c należą do tej samej składowej S, przeto (ob. Wstęp, tw. 9.1) wyznaczyć można ciąg punktów $b=p_1, p_2, \ldots, p_n=c$ tej składowej w ten sposób, by

$$(1.11)\qquad \varrho(p_k, p_{k+1})<\tfrac{1}{2}\varrho(F, CG) \quad \textit{dla} \quad k=1,2,\ldots,n-1.$$

Przyjmując dla symetrii $p_0=a$ oraz $p_{n+1}=d$, pokażemy przede wszystkim, iż dla $k=0,1,\ldots,n$

$$(1.12)\qquad 2\varrho(p_k, p_{k+1})<\varrho(p_k, F) \quad \textit{oraz} \quad 2\varrho(p_k, p_{k+1})<\varrho(p_{k+1}, F).$$

Istotnie, ponieważ punkty $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$ należą wszystkie do CG, przeto $\varrho(p_k, F)\geqslant\varrho(CG, F)$ dla $k\geqslant 1$ i związki (1.12) dla $k=1,2,\ldots,n$ wynikają natychmiast z (1.11) oraz z (1.10). Natomiast dla $k=0$ nierówności (1.12) są konsekwencją nierówności (1.9).

Stosując teraz kolejno do każdej pary punktów p_k, p_{k+1} lemmat 1.2 o przesuwaniu biegunów, wyznaczamy ciąg skończony funkcyj wymiernych $P_0(z)$, $P_1(z)$, ..., $P_n(z)$, $P_{n+1}(z)$, spełniających warunki następujące:

$$(1.13)\qquad P_0(z)=Q_1(z),$$

$$(1.14)\qquad |P_{k+1}(z)-P_k(z)|<\frac{\varepsilon}{2(n+1)m} \quad \textit{dla} \quad z \in F \quad \textit{oraz} \quad k=0,1,\ldots,n,$$

(1.15) *jedynym biegunem funkcji $P_k(z)$ jest punkt p_k.*

Przyjmując tedy $\widetilde{Q}_1(z)=P_{n+1}(z)$, stwierdzamy natychmiast na zasadzie (1.13) i (1.14), iż $|\widetilde{Q}_1(z)-Q_1(z)|<\varepsilon/2m$ na zbiorze F, przy czym $\widetilde{Q}_1(z)$ jest funkcją wymierną, której jedyny biegun $d=p_{n+1}$ należy do E. W ten sam sposób wszystkim pozostałym funkcjom $Q_2(z), \ldots, Q_m(z)$ przyporządkowujemy funkcje wymierne $\widetilde{Q}_2(z), \ldots, \widetilde{Q}_m(z)$ o biegunach wyłącznie w zbiorze E, tak by

$$(1.16)\qquad |\widetilde{Q}_i(z)-Q_i(z)|<\varepsilon/2m \quad \textit{dla} \quad z \in F \quad \textit{oraz} \quad i=1,2,\ldots,m.$$

Przyjmując więc $H(z)=\widetilde{Q}_1(z)+\widetilde{Q}_2(z)+\ldots+\widetilde{Q}_m(z)$, otrzymujemy funkcję wymierną $H(z)$, która nie posiada biegunów poza E i która, jak wynika z (1.16), spełnia warunek $|H(z)-Q(z)|<\varepsilon/2$ dla $z \in F$, a więc, z uwagi na (1.8), żądany warunek (1.6).

§ 2. Twierdzenie Rungego. Twierdzenie Cauchy'ego dla obszaru jednospójnego. Z tw. 1.5 wynika natychmiast

(2.1) ***Twierdzenie Rungego.*** *Każda funkcja $W(z)$, holomorficzna w zbiorze otwartym G, może być przedstawiona w tym zbiorze jako granica niemal jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyj wymiernych $\{H_n(z)\}$ o biegunach należących do dopełnienia zbioru G.*

Co więcej, jeżeli dany jest dowolny zbiór E, który zawiera się w dopełnieniu zbioru G i którego domknięcie posiada punkty wspólne ze wszystkimi składowymi tego dopełnienia, wówczas funkcje $H_n(z)$ mogą być tak określone, by wszystkie ich bieguny należały do zbioru E.

Dowód. Niech G_n oznacza zbiór punktów z zbioru G takich, że $\varrho(z, CG) > 1/n$, i niech $H_n(z)$ będzie funkcją wymierną, która nie posiada biegunów poza zbiorem E i która spełnia na zbiorze G_n nierówność $|H_n(z) - W(z)| \leqslant 1/n$. Funkcja taka istnieje na mocy tw. 1.5, gdyż $\bar{G}_n \subset G$.

Zbiory G_n tworzą ciąg wstępujący zbiorów otwartych, których sumą jest dany zbiór G; ponieważ zaś ciąg $\{H_n(z)\}$ jest zbieżny do $W(z)$ jednostajnie w każdym ze zbiorów G_n, więc tym samym (por. Rozdz. I, § 2) jest niemal jednostajnie zbieżny w całym zbiorze G.

Jeżeli zbiór otwarty G nie rozcina płaszczyzny (ob. Wstęp, § 9), wówczas w sformułowaniu tw. 2.1 przyjąć można jako zbiór E dowolny punkt dopełnienia zbioru G. Jeżeli ponadto zbiór G nie zawiera punktu ∞, wówczas przyjąć można, że zbiór E redukuje się wprost do punktu ∞. Ponieważ funkcja wymierna o jedynym biegunie w punkcie ∞ jest wielomianem, otrzymujemy przeto następujący szczególnie ważny przypadek twierdzenia Rungego:

(2.2) *Jeżeli zbiór otwarty G nie rozcina płaszczyzny i nie zawiera punktu ∞, wówczas każda funkcja holomorficzna w zbiorze G jest w tym zbiorze granicą niemal jednostajnie zbieżnego ciągu wielomianów.*

Ogólnie otrzymać możemy zbiór E spełniający warunki tw. Rungego, obierając dowolnie po jednym punkcie na każdej ze składowych dopełnienia zbioru G. Określony w ten sposób zbiór E jest wszakże nieprzeliczalny w przypadku, gdy zbiór CG zawiera nieprzeliczalną ilość składowych. Również jednak i w tym przypadku możemy przyjąć za zbiór E zbiór przeliczalny, a mianowicie dowolny zbiór przeliczalny wszędziegęsty w CG (Wstęp, tw. 4.5).

Z tw. 2.2 wyprowadzimy twierdzenie następujące, które nazywać będziemy *twierdzeniem Cauchy'ego dla obszaru jednospójnego* i które uważać można za uogólnienie twierdzenia Cauchy'ego dla prostokąta (Rozdz. II, tw. 4.1):

(2.3) *Jeżeli zbiór otwarty G nie rozcina płaszczyzny (w szczególności, jeżeli jest obszarem jednospójnym) i nie zawiera punktu ∞, wówczas całka krzywoliniowa każdej funkcji $W(z)$ holomorficznej w G znika wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej, przebiegającej w G.*

Każda zatem funkcja holomorficzna w zbiorze otwartym, nie rozcinającym płaszczyzny i nie zawierającym punktu ∞, posiada w tym zbiorze funkcję pierwotną.

Dowód. Niech $H_n(z)$ będzie ciągiem wielomianów niemal jednostajnie zbieżnym do $W(z)$ w G. Ponieważ każdy wielomian posiada funkcję pierwotną, zatem, w myśl tw. 2.2, Rozdz. II, całka jego znika wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej C, przebiegającej w G, i tym samym

$$\int_C W(z)\,dz = \lim_n \int_C H_n(z)\,dz = 0.$$

Do zastosowań i uogólnień twierdzenia Cauchy'ego w sformułowaniu (2.3) wrócimy jeszcze w końcowych §§ tego rozdziału.

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli $a > b > 0$ oraz $n > 0$, wówczas istnieje wielomian $P_n(z)$ taki, że w kole $K(0; n)$:

$$|P_n(z)| \leqslant 1/n, \quad \text{gdy} \quad \mathfrak{J}z \leqslant 0 \quad \text{lub} \quad \mathfrak{J}z \geqslant a,$$
$$|P_n(z)| \geqslant n, \quad \text{gdy} \quad \mathfrak{J}z = b.$$

2. *Przykład ciągu funkcyj holomorficznych, który w całej płaszczyźnie otwartej jest zbieżny do zera, ale nie jest zbieżny niemal jednostajnie.* Opierając się na wyniku ćwiczenia poprzedniego, zbudować ciąg wielomianów, który 1^0 jest zbieżny do zera w całej płaszczyźnie otwartej, 2^0 jest zbieżny jednostajnie w otoczeniu każdego punktu nie leżącego na osi rzeczywistej, lecz 3^0 nie jest zbieżny jednostajnie w otoczeniu żadnego punktu osi rzeczywistej (p. Rozdz. II, § 7, ćw. 2).

3. *Przykład ciągu funkcyj holomorficznych zbieżnego w całej płaszczyźnie otwartej, którego granica nie jest jednak funkcją holomorficzną.* Zbudować ciąg $\{P_n(z)\}$ wielomianów taki, że $\lim_n P_n(z) = 0$ na osi rzeczywistej, podczas gdy $\lim_n P_n(z) = 1$ poza tą osią.

4. Niech $0 < r < R$, $\varepsilon > 0$ i niech $Q(z)$ będzie funkcją holomorficzną w kole $K(0; R)$. Zbudować wielomian $P(z)$ spełniający warunki następujące: 1^0 $|P(z)| \leqslant \varepsilon$ dla $|z| \leqslant r$, 2^0 na każdym odcinku $[re^{i\theta}, Re^{i\theta}]$ istnieją dwa punkty $z_1 = z_1(\theta)$, $z_2 = z_2(\theta)$ takie, że $|P(z_1) + Q(z_1)| < \varepsilon$ oraz $|P(z_2) + Q(z_2)| > 1/\varepsilon$.

5. *Przykład funkcji $W(z)$ holomorficznej w kole* K(0;1) *takiej, że dla żadnej wartości θ nie istnieje granica $\lim\limits_{r\to1-} W(re^{i\theta})$ skończona ani nieskończona.* Niech $\{r_n\}$ będzie ciągiem rosnącym liczb dodatnich, dążącym do 1. Opierając się na ćw. 4, określić przez indukcję ciąg wielomianów $\{P_n(z)\}$ taki, że: (a) $|P_n(z)|<1/2^n$ dla $|z|\leqslant r_n$, (b) na każdym odcinku $[r_n e^{i\theta}, r_{n+1} e^{i\theta}]$ istnieją dwa punkty, w których wartość bezwzględna sumy $P_1(z)+P_2(z)+\ldots+P_n(z)$ jest odpowiednio $<1/2^n$ oraz $>2^n$. Szereg $\sum\limits_n P_n(z)$ jest wówczas niemal jednostajnie zbieżny w kole K(0;1) do funkcji holomorficznej, posiadającej żądaną własność.

6. Niech $\boldsymbol{H}$ będzie przestrzenią metryczną, której elementami są funkcje holomorficzne w kole K(0;1) (p. Rozdz. II, § 7, ćw. 3; Rozdz. I, § 2, ćw. 3).

Niech $0<r<1$, $\varepsilon>0$. Oznaczmy przez $\mathfrak{H}$ rodzinę wszystkich funkcyj $W(z)$ holomorficznych w K(0;1) takich, że na każdym odcinku $[re^{i\theta}, e^{i\theta}]$ istnieją punkty, w których odpowiednio $|W(z)|<\varepsilon$ oraz $|W(z)|>1/\varepsilon$. Dowieść, że funkcje holomorficzne w K(0;1), które nie należą do rodziny $\mathfrak{H}$, tworzą w przestrzeni $\boldsymbol{H}$ zbiór domknięty nigdzie gęsty.

Wywnioskować stąd (nie opierając się na wyniku ćw. 5), że istnieją funkcje $W(z)$ holomorficzne w kole K(0;1) takie, że granica $\lim\limits_{r\to1-} W(re^{i\theta})$, skończona ani nieskończona, nie istnieje dla żadnego θ i że własność tę posiadają wszystkie funkcje holomorficzne w kole K(0;1) z wyjątkiem funkcyj tworzących w przestrzeni $\boldsymbol{H}$ zbiór pierwszej kategorii (K i e r s t - S z p i l r a j n).

7. Niech $\boldsymbol{H}$ oznacza (jak w ćw. 6) przestrzeń, której elementami są funkcje holomorficzne w kole K(0;1). Niech $K_1, K_2, \ldots, K_n$ będzie dowolnym układem skończonym kół i niech $\mathfrak{W}$ oznacza rodzinę wszystkich funkcyj $W(z)$ holomorficznych w kole K(0;1), takich że na każdym promieniu koła K(0;1) istnieją punkty, w których $W(z)$ przyjmuje wartości należące odpowiednio do kół $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Dowieść, że funkcje, które nie należą do rodziny $\mathfrak{W}$, tworzą w przestrzeni $\boldsymbol{H}$ zbiór domknięty nigdzie gęsty.

Opierając się na tym, dowieść, że istnieją funkcje $W(z)$ holomorficzne w kole K(0;1), które przekształcają każdy promień tego koła na zbiór wszędzie gęsty na płaszczyźnie (t. zn. takie, że dla każdego θ krzywa $w=W(re^{i\theta})$, gdzie $0\leqslant r<1$, jest zbiorem wszędzie gęstym na płaszczyźnie) i że własność tę posiadają nawet wszystkie funkcje holomorficzne w kole K(0;1) z wyjątkiem funkcyj tworzących w przestrzeni $\boldsymbol{H}$ zbiór pierwszej kategorii (K i e r s t - S z p i l r a j n).

8. Dowieść, że istnieją funkcje holomorficzne w kole K(0;1), które w każdym wycinku tego koła przyjmują wszystkie wartości zespolone skończone, i że własność tę posiadają wszystkie funkcje holomorficzne w K(0;1) z wyjątkiem funkcyj tworzących w przestrzeni $\boldsymbol{H}$ (ćw. 6, 7) zbiór pierwszej kategorii (K i e r s t - S z p i l r a j n).

9. *Twierdzenie Morery* (ob. Rozdz. I, § 8) *dla koła.* Na to, aby funkcja $W(z)$ ciągła w zbiorze otwartym G była holomorficzna w G, konieczne jest i wystarcza, by $\int\limits_{(K)} W(z)\,dz=0$ dla każdego koła domkniętego $K\subset G$ (C a r l e m a n).

[*Wsk.* Skorzystać z twierdzeń: Rozdz. I, § 18, ćw. 1, oraz Rozdz. II, § 6, ćw. 8.]

§ 3. Gałąź logarytmu. Rozważania końcowe § 2 zastosujemy do gałęzi logarytmu funkcyj holomorficznych. Podobnie jak w rozdziałach poprzednich (Rozdz. I, § 11; Rozdz. II, § 1) używać będziemy terminu „gałąź" w znaczeniu „gałąź jednoznaczna".

Opierając się na tw. 2.3, możemy uzupełnić obecnie tw. 11.1, Rozdz. I, w sposób następujący:

(3.1) *Jeżeli G jest zbiorem otwartym, nie rozcinającym płaszczyzny (w szczególności obszarem jednospójnym), wówczas dla każdej funkcji $F(z)$ holomorficznej i nie znikającej nigdzie w zbiorze G istnieje w tym zbiorze gałąź holomorficzna* $\log F(z)$ *(a tym samym i gałąź holomorficzna* $[F(z)]^a$ *dla każdej wartości a).*

D o w ó d. Twierdzenie jest oczywiste, gdy zbiór G jest całą płaszczyzną, ponieważ wówczas, na zasadzie twierdzenia Liouville'a (Rozdz. II, tw. 5.11), funkcja $F(z)$ redukuje się do stałej. Możemy tedy założyć, iż $CG\neq0$. Możemy dalej przyjąć, że zbiór G nie zawiera punktu ∞, gdyż w przeciwnym przypadku, stosując inwersję o środku w dowolnym punkcie dopełnienia zbioru G, przekształcilibyśmy ten zbiór na zbiór otwarty, również nie rozcinający płaszczyzny, a ponadto nie zawierający już na pewno punktu ∞.

Ponieważ z założenia funkcja $F(z)$ nie znika nigdzie w zbiorze G, funkcja $F'(z)/F(z)$ jest wówczas holomorficzna w G i na zasadzie tw. 2.3 posiada funkcję pierwotną; istnienie gałęzi holomorficznej $\log F(z)$ w G wynika stąd z kolei na mocy tw. 2.6, Rozdz. II.

Szczególnym przypadkiem tw. 3.1 jest twierdzenie następujące, które stanowi bezpośrednie uogólnienie tw. 11.1, Rozdz. I:

(3.2) *W każdym zbiorze otwartym, nie rozcinającym płaszczyzny i nie zawierającym punktu* 0 *ani* ∞, *istnieje gałąź* $\log z$.

ĆWICZENIE. 1. Jeżeli C jest okręgiem koła zbieżności szeregu potęgowego, a Z zbiorem punktów, które są pierwiastkami sum cząstkowych tego szeregu, wówczas każdy punkt okręgu C jest punktem skupienia zbioru Z (J e n t z s c h).

[*Wsk.* Niech K będzie kołem zbieżności szeregu. Zakładając, że na C istnieje punkt a nie należący do $\bar{Z}$, oznaczmy przez K_0 takie otoczenie punktu a, w którym żadna z sum cząstkowych $s_n(z)$ nigdzie nie znika, a przez $\Phi_n(z)$ gałąź holomorficzną $[s_n(z)]^{1/n}$ w K_0. Ciąg $\{\Phi_n(z)\}$ jest ograniczony (Rozdz. III, § 2, ćw. 3 (b)) i — jeśli dobierzemy stosownie gałęzie Φ_n — zbieżny do 1 w K_0 (Rozdz. II, § 2, ćw. 2; I, § 3, ćw 2; III, § 8, ćw. 3). Mielibyśmy więc $a\in K_0\subset K$ (Rozdz. III, § 2, ćw. 3 (a)).]

§ 4. Wzór Jensena. Jako zastosowanie w najprostszym przypadku twierdzenia o istnieniu gałęzi logarytmu funkcji holomorficznej wyprowadzimy t.zw. wzór Jensena, który, pozwalając na oszacowanie ilości pierwiastków funkcji holomorficznej w kole, odgrywa ważną rolę w wielu rozważaniach teorii funkcyj.

(4.1) *Jeżeli $F(z)$ jest funkcją holomorficzną na kole domkniętym $K=\overline{\mathrm{K}}(0;R)$ i jeśli $F(0)\neq 0$, wówczas*

$$\text{(4.2)}\qquad \operatorname{Log}|F(0)|+\operatorname{Log}\frac{R^n}{|a_1a_2\ldots a_n|}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|F(Re^{i\theta})|\,d\theta,$$

gdzie $a_1,a_2,\ldots,a_n$ oznaczają pierwiastki funkcji $F(z)$ w kole K, przy czym każdy pierwiastek wypisany jest tyle razy, ile wynosi jego krotność.

Wyraz drugi po stronie lewej wzoru (4.2) napisany być może w postaci całki oznaczonej $\int_0^R\frac{n(r)}{r}dr$, gdzie $n(r)$ oznacza ilość pierwiastków funkcji $F(z)$ w kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(0;r)$.

Dowód. Zauważmy przede wszystkim, że skoro funkcja $F(z)$ jest holomorficzna na kole domkniętym $K=\overline{\mathrm{K}}(0;R)$, to istnieje koło otwarte $K_0=\mathrm{K}(0;R_0)$ o promieniu $R_0>R$, w którym funkcja $F(z)$ jest również holomorficzna i nie posiada pierwiastków poza wymienionymi wyżej punktami a_j. Funkcja

$$\Phi(z)=F(z)\cdot a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n/F(0)\cdot(a_1-z)(a_2-z)\ldots(a_n-z)$$

jest więc także holomorficzna w K_0, a nadto nigdzie w tym kole nie znika. W myśl więc tw. 3.1 istnieje w kole K_0 gałąź holomorficzna $\log\Phi(z)$. Niech $L(z)$ będzie taką gałęzią, przy czym ze względu na $\Phi(0)=1$ przyjąć możemy $L(0)=0$. Funkcja $L(z)/z$ jest więc też holomorficzna w K_0 i na mocy twierdzenia Cauchy'ego 2.3 mamy

$$\text{(4.3)}\qquad 0=\frac{1}{2\pi i}\int_{(K)}\frac{L(z)}{z}dz=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L(Re^{i\theta})\,d\theta;$$

ponieważ zaś $\Re L(z)=\operatorname{Log}|\Phi(z)|$, przeto przyrównywując do zera część rzeczywistą wyrazu po stronie prawej wzoru (4.3), otrzymujemy

$$\text{(4.4)}\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}\left|\frac{F(Re^{i\theta})\cdot a_1a_2\ldots a_n}{F(0)\cdot(a_1-Re^{i\theta})(a_2-Re^{i\theta})\ldots(a_n-Re^{i\theta})}\right|d\theta=0.$$

Z drugiej strony, na mocy wzoru (3.3), Rozdz. III, mamy dla $j=1,2,\ldots,n$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|a_j-Re^{i\theta}|\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}\left|1-\frac{a_j}{R}e^{-i\theta}\right|d\theta+\operatorname{Log}R=\operatorname{Log}R$$

i przez zlogarytmowanie wyrażenia podcałkowego w (4.4) otrzymujemy żądany wzór (4.2).

Ażeby pokazać, iż drugi wyraz lewej strony tego wzoru równy jest całce oznaczonej $\int_0^R\frac{n(r)\,dr}{r}$, zauważmy, iż można założyć, że $|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\ldots\leqslant|a_n|$. Przyjmując dla symetrii $a_{n+1}=R$, mamy wówczas

$$\int_0^R\frac{n(r)}{r}dr=\sum_{j=1}^{n}\int_{|a_j|}^{|a_{j+1}|}\frac{n(r)}{r}dr=\sum_{j=1}^{n}j\cdot\int_{|a_j|}^{|a_{j+1}|}\frac{dr}{r}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}j\cdot(\operatorname{Log}|a_{j+1}|-\operatorname{Log}|a_j|)=n\cdot\operatorname{Log}R-\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Log}|a_j|=\operatorname{Log}\frac{R^n}{|a_1a_2\ldots a_n|},$$

co należało udowodnić.

Tw. 4.1 uogólnić można łatwo na funkcje meromorficzne:

(4.5). *Jeżeli funkcja $F(z)$, meromorficzna na kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(0;R)$, nie posiada w punkcie 0 pierwiastka ani bieguna, wówczas oznaczając przez $a_1,a_2,\ldots,a_n$ pierwiastki, zaś przez $b_1,b_2,\ldots,b_m$ bieguny funkcji $F(z)$ w tym kole, mamy*

$$\text{(4.6)}\qquad \operatorname{Log}|F(0)|+\operatorname{Log}R^{n-m}\cdot\left|\frac{b_1\cdot b_2\ldots b_m}{a_1\cdot a_2\ldots a_n}\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|F(Re^{i\theta})|\,d\theta$$

lub, oznaczając przez $n(r)$ oraz $m(r)$ odpowiednio ilość pierwiastków oraz ilość biegunów w kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(0;r)$,

$$\text{(4.7)}\qquad \operatorname{Log}|F(0)|+\int_0^R\frac{n(r)-m(r)}{r}dr=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Log}|F(Re^{i\theta})|\,d\theta.$$

(Każdy pierwiastek i biegun funkcji $F(z)$ liczony jest tu i wypisany w ciągach $\{a_j\}$ i $\{b_k\}$ taką ilość razy, jaka odpowiada jego krotności.)

Dowód. Przyjmując $\Psi(z)=(z-b_1)(z-b_2)\dots(z-b_m)$, widzimy natychmiast, iż obydwie funkcje $F(z)\cdot\Psi(z)$ oraz $\Psi(z)$ są holomorficzne w kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(0;R)$, nie znikają w punkcie 0 i posiadają pierwiastki odpowiednio w punktach $a_1,a_2,\dots,a_n$ oraz $b_1,b_2,\dots,b_m$. Stosując do tych funkcyj wzór tw. 4.1 i odejmując stronami otrzymane równości, otrzymujemy żądane wzory (4.6) i (4.7).

Wzór (4.2) nosi nazwę *wzoru Jensena*. Nieco ogólniejsze wzory (4.6) i (4.7), nie wykraczające zresztą istotnie poza wzór (4.2), nazywają się niekiedy *wzorami Jensena-Nevanlinny*.

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli $a_1,a_2,\dots,a_n,\dots$ jest ciągiem pierwiastków $\neq 0$ funkcji $W(z)$ holomorficznej, ograniczonej i nieznikającej tożsamościowo w kole $\mathrm{K}(0;1)$, wówczas $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot\ldots\neq 0$, a więc $\sum_n(1-|a_n|)<+\infty$ (każdy pierwiastek występuje w ciągu $\{a_n\}$ tyle razy, ile wynosi jego krotność) (Blaschke).

[*Wsk.* p. Rozdz. I, § 7, ćw. 1.]

2. Jeżeli ciąg ograniczony $\{W_n(z)\}$ funkcyj holomorficznych w kole $K=\mathrm{K}(0;1)$ jest zbieżny w punktach pewnego ciągu $\{a_n\}$ takiego, że $a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot\ldots=0$, przy czym $a_n\neq 0$ dla $n=1,2,\dots$ oraz $a_i\neq a_j$ dla $i\neq j$, wówczas ciąg $\{W_n(z)\}$ jest zbieżny niemal jednostajnie w całym kole K.

3. Niech $W(z)$ będzie funkcją holomorficzną, nie znikającą tożsamościowo w kole $\mathrm{K}(0;1)$ i taką, że

$$|W(z)|\leqslant\exp\frac{A}{(1-|z|)^\sigma},$$

gdzie A i σ są stałymi dodatnimi. Wówczas, jeżeli $\{a_n\}$ oznacza ciąg pierwiastków funkcji W w kole $\mathrm{K}(0;1)$, to szereg $\sum_n(1-|a_n|)^{\sigma+1+\varepsilon}$ jest zbieżny dla każdej liczby $\varepsilon>0$ (Montel).

[*Wsk.* Zauważyć, że dla każdego m ilość pierwiastków a_n takich, iż $|a_n|\leqslant 1-2^{-m}$, nie przekracza liczby $B\cdot 2^{m(\sigma+1)}$, gdzie B jest pewną stałą.]

§ 5. Przyrosty logarytmu i argumentu wzdłuż krzywej.

Jeżeli $F(z)$ jest funkcją ciągłą na zbiorze E i wartości tej funkcji na E należą do pewnego koła K nie zawierającego punktu 0 ani ∞, wówczas na zbiorze tym istnieje gałąź $\log F(z)$. Istotnie, oznaczając przez $L(z)$ dowolną gałąź $\log z$ w K, spostrzegamy odrazu, że funkcja $L[F(z)]$ jest gałęzią $\log F(z)$ na E.

Opierając się na tej uwadze, pokażemy, że *jeżeli $F(t)$ jest funkcją ciągłą skończoną, nigdzie nie znikającą w przedziale $I=[a,b]$, wówczas istnieje w tym przedziale gałąź* $\log F(t)$. Niech w tym celu m będzie kresem dolnym wartości $|F(t)|$ na I. Ponieważ $m>0$, przeto przedział $[a,b]$ rozbić możemy na skończoną ilość podprzedziałów

$[a_0,a_1],[a_1,a_2],\dots,[a_{n-1},a_n]$, gdzie $a_0=a$, $a_n=b$, tak aby w żadnym z nich oscylacja funkcji F nie przekraczała liczby $\frac{1}{2}m$. Wartości, jakie funkcja przyjmuje na przedziale $[a_k,a_{k+1}]$, należą wtedy do koła $\mathrm{K}(F(a_k);m)$, nie zawierającego punktu 0, i przeto w każdym przedziale $[a_k,a_{k+1}]$ określić możemy gałąź $L_k(t)$ logarytmu $F(t)$. Dorzucając ewentualnie do funkcyj $L_k(t)$ odpowiednie wielokrotności całkowite $2\pi i$, możemy przyjąć, iż w każdym punkcie a_k, dla $k=1,2,\dots,n-1$, mamy $L_{k-1}(a_k)=L_k(a_k)$. Funkcje $L_k(t)$ wyznaczają tedy łącznie w całym przedziale $[a,b]$ pewną funkcję $L(t)$ jako gałąź $\log F(t)$.

Różnicę $L(b)-L(a)$ nazwiemy *przyrostem* $\log F(t)$ *na przedziale* I. Ponieważ dwie różne gałęzie $\log F(t)$ w $[a,b]$ mogą różnić się co najwyżej o stałą (Rozdz. I, tw. 11.2), przeto przyrost ten nie zależy od wyboru gałęzi $\log F(t)$ i jest określony jednoznacznie.

Istnienie gałęzi logarytmu funkcji równoważne jest (por. Rozdz. I, § 11) istnieniu gałęzi argumentu; analogicznie przeto możemy określić *przyrost* $\arg F(t)$ *na przedziale* I. Przyrosty te oznaczać będziemy odpowiednio przez $\Delta_I\log F(t)$ i $\Delta_I\arg F(t)$. Widoczne jest, iż

$$\Delta_I\arg F(t)=\frac{1}{i}\,\Im\Delta_I\log F(t).$$

Jeżeli funkcja $F(t)$, skończona, ciągła i nigdzie nie znikająca w przedziale I, posiada w nim pochodną ciągłą — lub ogólniej: jeżeli przedział I można rozbić na skończoną ilość podprzedziałów takich, iż w każdym z nich funkcja $F(t)$ posiada pochodną ciągłą — wówczas $F'(t)/F(t)$ jest pochodną gałęzi $\log F(t)$, przy czym

$$\Delta_I\log F(t)=\int_a^b\frac{F'(t)}{F(t)}\,dt. \tag{5.1}$$

Jeżeli $W(z)$ jest funkcją skończoną, ciągłą i nigdzie nie znikającą na krzywej C:

$$z=z(t),\qquad gdzie\qquad a\leqslant t\leqslant b, \tag{5.2}$$

wówczas przez *przyrosty* $\log W(z)$ oraz $\arg W(z)$ *wzdłuż krzywej* C rozumieć będziemy odpowiednio przyrosty $\log W[z(t)]$ i $\arg W[z(t)]$ na przedziale $I=[a,b]$ zmiennej t; przyrosty te oznaczać będziemy przez $\Delta_C\log W(z)$ i $\Delta_C\arg W(z)$. Jeżeli C jest krzywą regularną, a $W(z)$ funkcją holomorficzną na C (t.j. funkcją określoną i holomorficzną w pewnym zbiorze otwartym zawierającym krzywą C), wówczas ze wzoru (5.1) wynika, iż

$$\Delta_C \log W(z) = \Delta_I \log W[z(t)] = \int_a^b \frac{\frac{dW[z(t)]}{dt}}{W[z(t)]} dt = \tag{5.3}$$

$$= \int_a^b \frac{W'[z(t)]}{W[z(t)]} z'(t)\, dt = \int_C \frac{W'(z)}{W(z)} dz.$$

Jeżeli krzywa C, dana przez równanie (5.2), jest zamknięta, t.j. jeżeli $z(b)=z(a)$, wówczas każda gałąź $\log W[z(t)]$ przyjmuje na końcach przedziału $I=[a,b]$ wartości, które są wartościami logarytmu $W(z)$ w tym samym punkcie $z=z(a)=z(b)$ i różnić się przeto mogą co najwyżej o całkowitą wielokrotność $2\pi i$. Uwzględniając więc jeszcze wzór (5.3), otrzymujemy twierdzenie następujące:

(5.4) *Dla każdej funkcji $W(z)$, skończonej, ciągłej i nigdzie nie znikającej na krzywej zamkniętej C, mamy*

$$\Delta_C \log W(z) = i \Delta_C \arg W(z) = 2k\pi i.$$

Jeżeli nadto krzywa C jest regularna, a funkcja $W(z)$ holomorficzna na C, wówczas

$$\Delta_C \log W(z) = \int_C \frac{W'(z)}{W(z)} dz = 2k\pi i.$$

W obydwu wzorach k oznacza liczbę całkowitą.

W przypadku szczególnym, gdy C jest obwodem prostokąta, całką $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{W'(z)}{W(z)} dz$ zajmowaliśmy się już w Rozdziale III (§ 9); wartość tej całki miała wówczas wyraźną interpretację. W dalszym ciągu (§ 7) rozszerzymy tę interpretację na pewne przypadki ogólniejsze.

ĆWICZENIA. 1. Jeżeli $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ są funkcjami ciągłymi na krzywej zamkniętej C i $|\Phi(z)|<|\Psi(z)|$ na C, wówczas $\Delta_C \arg \Psi(z) = \Delta_C \arg [\Psi(z)+\Phi(z)]$.

2. Jeżeli $W(z)$ jest funkcją ciągłą, nigdzie nie znikającą w zbiorze otwartym G, wówczas na to, aby istniała gałąź $\log W(z)$ w G, konieczne jest i wystarcza, aby $\Delta_C \arg W(z)=0$ dla każdej krzywej zamkniętej przebiegającej w G. (Warunek ten jest ogólniejszy od warunku tw. 2.6, Rozdz. II, gdyż odnosi się do wszystkich funkcyj W ciągłych, nie koniecznie holomorficznych.)

§ 6. Indeks punktu względem krzywej. Jeżeli C jest dowolną krzywą zamkniętą (nie zawierającą punktu ∞), wówczas *indeksem punktu* $z_0 \neq \infty$, nie leżącego na C, względem tej krzywej nazywać będziemy liczbę

$$\frac{1}{2\pi i} \Delta_C \log(z-z_0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg(z-z_0),$$

całkowitą na mocy tw. 5.4. Przez *indeks punktu* ∞ względem dowolnej krzywej zamkniętej rozumieć będziemy liczbę **0**. Indeks punktu z_0 względem krzywej C oznaczać będziemy przez $\mathrm{ind}_C z_0$.

Indeks jest niezmiennikiem przekształceń liniowych płaszczyzny. Innymi słowy, jeżeli w przekształceniu liniowym punkt z_0 i punkt ζ_0, krzywa C i krzywa Γ odpowiadają sobie wzajemnie, to $\mathrm{ind}_C z_0 = \mathrm{ind}_\Gamma \zeta_0$. Istotnie, jeżeli θ jest kątem obrotu przekształcenia, z dowolnym punktem krzywej C, a ζ odpowiadającym mu punktem krzywej Γ, wówczas (por. Rozdz. I, § 14, str. 79)

$$\arg(\zeta-\zeta_0) = \theta + \arg(z-z_0).$$

Przyrost $\arg(\zeta-\zeta_0)$ wzdłuż krzywej Γ równy jest więc przyrostowi $\arg(z-z_0)$ wzdłuż krzywej C.

Z tw. 5.4 wynika, że

(6.1) $\mathrm{ind}_C a = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z-a}$ *dla każdej krzywej regularnej zamkniętej C oraz każdego punktu a poza C.*

Łatwo zauważyć, iż jeżeli C jest dowolną krzywą zamkniętą, wówczas dla każdego punktu a o dostatecznie wielkiej wartości bezwzględnej mamy $\mathrm{ind}_C a = 0$. W samej rzeczy, jeżeli K oznacza koło zawierające C, wówczas dla każdego punktu a zewnątrz tego koła istnieje w K gałąź $\arg(z-a)$, a więc $2\pi \cdot \mathrm{ind}_C a = \Delta_C \arg(z-a) = 0$.

Dla każdej krzywej zamkniętej C indeks punktu a względem C, uważany za funkcję punktu a, jest więc funkcją ciągłą w punkcie ∞. Dokładniej:

(6.2) *Jeżeli C jest dowolną krzywą zamkniętą, wówczas $\mathrm{ind}_C a$ posiada wartość stałą w każdej ze składowych dopełnienia krzywej C.*

D o w ó d. Ze względu na tw. 11.1 Wstępu wystarczy pokazać, iż $\mathrm{ind}_C a$ jest poza krzywą C funkcją ciągłą punktu a. W przypadku, gdy krzywa C jest regularna, ciągłość ta wynika bezpośrednio z tw. 6.1. Ażeby uogólnić tę własność na dowolne krzywe zamknięte, weźmy pod uwagę dowolny punkt a poza krzywą C i podzielmy C na skończoną ilość krzywych $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tak, by każda z nich zawierała się w pewnym kole posiadającym punkt a zewnątrz. Niech $K_1, K_2, \ldots, K_n$ będą kołami przyporządkowanymi w ten sposób krzywym $C_1, C_2, \ldots, C_n$ i niech K będzie otoczeniem punktu a, nie posiadającym punktów wspólnych z żadnym z tych kół. Dla każdego tedy punktu $\mathfrak{z} \in K$ istnieje gałąź $\arg(z-\mathfrak{z})$ w każdym z kół $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Jeżeli przeto z_{k-1}, z_k oznaczają odpowiednio początek i koniec krzywej C_k, wówczas dla $\mathfrak{z} \in K$ przyrost $\arg(z-\mathfrak{z})$ wzdłuż C_k pokrywa się z przyrostem wzdłuż odcinka $[z_{k-1}, z_k]$; zatem, oznaczając przez C_0 łamaną zamkniętą $[z_0, z_1, \ldots, z_n = z_0]$, mamy

$$\operatorname{ind}_C \mathfrak{z} = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg(z-\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{C_0} \arg(z-\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{dz}{z-\mathfrak{z}}$$

dla każdego punktu $\mathfrak{z} \in K$. Indeks $\operatorname{ind}_C \mathfrak{z}$ jest więc funkcją ciągłą $\mathfrak{z}$ w otoczeniu każdego punktu a poza krzywą C, co należało udowodnić.

Z drugiej strony indeks punktu względem krzywej zależy również w sposób ciągły od samej krzywej. Dokładniej:

(6.3) *Niech $\{C_n\}$ będzie ciągiem krzywych zamkniętych, danych odpowiednio przez równania $z = z_n(t)$ w przedziale $[a, b]$, i niech C oznacza krzywą zamkniętą $z = z(t)$ w tym samym przedziale. Wówczas, jeżeli ciąg $\{z_n(t)\}$ dąży jednostajnie do $z(t)$, to dla każdego punktu w_0, nie leżącego na C, mamy, poczynając od pewnej wartości n,*

$$\operatorname{ind}_{C_n} w_0 = \operatorname{ind}_C w_0.$$

Dowód. Podzielmy przedział $[a, b]$ na k części równych. Niech $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ będą punktami podziału i niech $C^{(j)}$ oznacza ogólnie łuk krzywej C w przedziale $[a_{j-1}, a_j]$, gdzie $j = 1, 2, \ldots, k$. Możemy założyć, że liczba k jest dostatecznie wielka na to, by każdy łuk $C^{(j)}$ zawierał się w pewnym kole $K^{(j)}$, nie zawierającym punktu w_0 ani punktu ∞.

Oznaczmy dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ oraz $j = 1, 2, \ldots, k$ przez $C_n^{(j)}$ łuk krzywej C_n w przedziale $[a_{j-1}, a_j]$, a przez $\Gamma_n^{(j)}$ krzywą zamkniętą $C^{(j)} + [z(a_j), z_n(a_j)] - C_n^{(j)} + [z_n(a_{j-1}), z(a_{j-1})]$. Ze względu na zbieżność jednostajną ciągu $\{z_n(t)\}$ do $z(t)$ w przedziale $[a, b]$ istnieje taka liczba N, że dla $n > N$ oraz $j = 1, 2, \ldots, k$ łuk $C_n^{(j)}$, a więc również i cała krzywa $\Gamma_n^{(j)}$, zawiera się w kole $K^{(j)}$. W każdym kole $K^{(j)}$ (jako nie zawierającym punktu w_0) istnieje gałąź $\arg(z-w_0)$, a przeto przyrost $\arg(z-w_0)$ wzdłuż każdej krzywej $\Gamma_n^{(j)}$ dla $n > N$ jest zerem.

Z drugiej strony, oznaczając przez $\Delta_n^{(j)}$ przyrost $\arg(z-w_0)$ wzdłuż krzywej $\Gamma_n^{(j)}$, mamy

$$\sum_{j=1}^{k} \Delta_n^{(j)} = \Delta_C \arg(z-w_0) - \Delta_{C_n} \arg(z-w_0) = \operatorname{ind}_C w_0 - \operatorname{ind}_{C_n} w_0,$$

a więc $\operatorname{ind}_C w_0 = \operatorname{ind}_{C_n} w_0$ dla $n > N$, co należało udowodnić.

Z tw. 6.2 wynika, iż $\operatorname{ind}_C \mathfrak{z}$ uważany za funkcję punktu $\mathfrak{z}$ posiada wartość stałą na każdym zbiorze spójnym E rozłącznym z krzywą C (każdy bowiem taki zbiór zawierać się musi w jednej ze składowych dopełnienia krzywej C). Wartość tę nazywamy *indeksem zbioru* E względem krzywej C i oznaczamy przez $\operatorname{ind}_C E$.

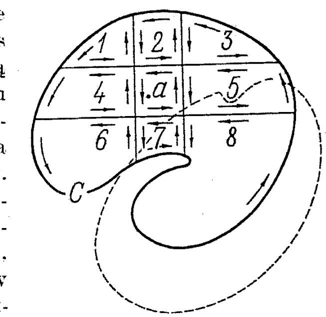
Uzupełnimy definicje powyższe paroma przykładami.

Dla każdego prostokąta I, w myśl wzorów (4.7), Rozdz. II, mamy $\operatorname{ind}_{(I)} z = 0$ dla $z \in CI$ oraz $\operatorname{ind}_{(I)} z = 1$ dla $z \in I^\circ$.

Jeżeli C oznacza okrąg $z = a + re^{i\theta}$, gdzie $a \neq \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, wówczas dla każdego punktu z leżącego „zewnątrz" okręgu mamy $\operatorname{ind}_C z = 0$, ponieważ punkt taki należy do tej składowej dopełnienia okręgu, która zawiera punkt ∞. Dla punktów z leżących „wewnątrz" okręgu, t. j. należących do tej składowej dopełnienia C, która zawiera środek a okręgu, mamy $\operatorname{ind}_C z = 1$, ponieważ

$$\operatorname{ind}_C a = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}\, d\theta}{re^{i\theta}} = 1.$$

Ogólnie, każda krzywa zamknięta bez punktów wielokrotnych dzieli płaszczyznę na dwa obszary; jeden z nich zawiera punkt ∞ i nazywa się *zewnętrznym* względem krzywej C, a drugi *wewnętrznym*. Wszystkie punkty obszaru zewnętrznego, jako zawierającego punkt ∞, posiadają indeks równy zeru, natomiast wszystkie punkty obszaru wewnętrznego posiadają indeks równy 1 lub -1 (orientując stosownie krzywą C, można przyjąć, iż indeks punktów obszaru wewnętrznego równy jest 1). Dowód tych twierdzeń, jakkolwiek bardzo intuicyjnych, wymaga rozważań dość subtelnych, które tu pominiemy. Zauważymy jednak, iż w przypadkach konkretnych, z jakimi spotykamy się w zagadnieniach teorii funkcyj (por. np. dalej §§ 8, 9), indeksy punktów oblicza się łatwo przy pomocy ad hoc stosowanych metod. Można np. posiłkować się schematem widocznym na rysunku.



Około danego punktu a, leżącego w obszarze wewnętrznym krzywej C, zakreślamy kwadrat I, zawarty również całkowicie w tym obszarze. Przedłużając boki tego kwadratu w obydwie strony do spotkania się z krzywą C, otrzymujemy podział obszaru wewnętrznego na dziewięć obszarów, które — poza kwadratem I — oznaczone zostały na rysunku cyframi $1,2,\dots,8$. Krzywe ograniczające te obszary, po stosownym zorientowaniu (jak na rysunku), oznaczymy przez $C_1, C_2, \dots, C_8$. Wówczas, przy odpowiednim zorientowaniu krzywej C,

$$(6.4)\qquad \mathrm{ind}_C\, a = \frac{1}{2\pi i}\int_{(I)} \frac{dz}{z-a} + \sum_k{}' \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{dz}{z-a} = 1 + \sum_k{}' \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{dz}{z-a}.$$

Otóż każdą z krzywych C_k można zamknąć w obszar jednospójny nie zawierający punktu a (na rysunku zaznaczone to jest dla krzywej C_8) i przeto, ponieważ w obszarze takim istnieje gałąź $\arg(z-a)$, mamy $2\pi\cdot\mathrm{ind}_{C_k} a = \Delta_{C_k}\arg(z-a) = 0$ dla $k=1,2,\dots,8$. Z (6.4) wynika więc, że $\mathrm{ind}_C\, a = 1$.

§ 7. Twierdzenie o residuach.

§ 7. Twierdzenie o residuach. Uzupełnimy obecnie rozważania o residuach z Rozdz. III, § 7.

(7.1) *Jeżeli $W(z)$ jest funkcją regularną (z pominięciem co najwyżej odosobnionego zbioru osobliwości) w zbiorze otwartym G, nie rozcinającym płaszczyzny i nie zawierającym punktu ∞, wówczas dla każdej krzywej regularnej zamkniętej Γ, przebiegającej w G i nie zawierającej punktów osobliwych funkcji $W(z)$, zachodzi wzór*

$$(7.2)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma W(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \mathrm{res}_{c_n} W\cdot \mathrm{ind}_\Gamma c_n,$$

gdzie $\{c_n\}$ oznacza ciąg punktów osobliwych funkcji $W(z)$ w G.

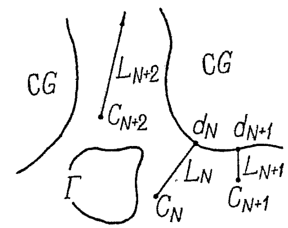
Wśród punktów tych co najwyżej skończona ilość posiada względem krzywej Γ indeks różny od zera i przeto szereg występujący po stronie prawej równości (7.2) redukuje się do sumy skończonej.

Dowód. Niech dla skrócenia $\varrho = \varrho(\Gamma, \mathrm{C}G)$ i $\varrho_n = \varrho(c_n, \mathrm{C}G)$; niech d_n oznacza punkt dopełnienia zbioru G taki, iż $\varrho_n = \varrho(c_n, d_n)$ (por. Wstęp, tw. 8.3). Ponieważ ciąg $\{c_n\}$ nie posiada punktów skupienia w G, zatem (o ile ciąg ten jest nieskończony) $\lim_n \varrho_n = 0$ i poczynając od pewnej wartości $n=N$ mamy $\varrho_n < \varrho$; tym samym

$$(7.3)\qquad \varrho(c_n, d_n) < \varrho(\Gamma, d_n) \quad \text{dla} \quad n \geqslant N.$$

Rozróżnimy teraz dwa przypadki. Jeżeli $d_n \neq \infty$, wówczas przez L_n oznaczymy odcinek $[c_n, d_n]$, który — jak widać natychmiast ze względu na (7.3) — nie posiada dla $n \geqslant N$ punktów wspólnych z Γ. Jeżeli natomiast dla pewnego $n \geqslant N$ mamy $d_n = \infty$, wówczas z (7.3) wynika, że $1/|c_n| < 1/|z|$ dla każdego punktu $z \in \Gamma$ i przeto krzywa Γ leży całkowicie wewnątrz koła $K(0; |c_n|)$; oznaczymy w tym przypadku przez L_n dowolną półprostą, wychodzącą

z punktu c_n i leżącą poza kołem $K(0; |c_n|)$. Łatwo zauważyć ze względu na $\varrho_n \to 0$, iż zbiór spójny $\sum_{n=N}^{\infty} L_n + \mathrm{C}G$ jest domknięty; nadto nie ma punktów wspólnych z krzywą Γ (p. rysunek), a ponieważ zawiera punkt ∞, więc (§ 6, str. 181, 183) indeks tego zbioru względem Γ jest równy zeru i w szczególności $\mathrm{ind}_\Gamma c_n = 0$ dla $n \geqslant N$. Wzór (7.2) okazuje się tedy równoważny wzorowi



$$(7.4)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma W(z)\,dz = \sum_{n=1}^{N-1} \mathrm{res}_{c_n} W\cdot \mathrm{ind}_\Gamma c_n.$$

Niech teraz $G_1 = G - \sum_{n=N}^{\infty} L_n$. Mamy $\mathrm{C}G_1 = \sum_{n=N}^{\infty} L_n + \mathrm{C}G$; zbiór G_1 jest zatem otwarty i nie rozcina płaszczyzny. Funkcja $W(z)$ posiada w G_1 skończoną co najwyżej ilość punktów osobliwych, mianowicie $c_1, c_2, \dots, c_{N-1}$. Funkcja $W(z) - \sum_{n=1}^{N-1} H_n(z)$, gdzie $H_n(z)$ oznacza część główną funkcji $W(z)$ w punkcie c_n, jest tedy (Rozdz. III, tw. 7.2) holomorficzna w G_1. W myśl więc twierdzenia Cauchy'ego w postaci (2.3) mamy

$$\int_\Gamma \Big[W(z) - \sum_{n=1}^{N-1} H_n(z)\Big]\,dz = 0,$$

skąd na mocy tw. 7.7, Rozdz. III, otrzymujemy natychmiast wzór (7.4), równoważny, jak zauważyliśmy, wzorowi (7.2).

Z uwagi na tw. 9.1, Rozdz. III, z powyższego *twierdzenia o residuach* wynika natychmiast, iż

(7.5) *Jeżeli $W(z)$ jest funkcją meromorficzną w zbiorze otwartym G, nie rozcinającym płaszczyzny i nie zawierającym punktu ∞, zaś $F(z)$ funkcją holomorficzną w G, wówczas dla każdej krzywej regularnej C, zamkniętej, przebiegającej w G i nie zawierającej pierwiastków ani biegunów funkcji W, mamy*

$$(7.6)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C F(z)\frac{W'(z)}{W(z)}\,dz = \sum_j{}' F(a_j)\cdot \mathrm{ind}_C\, a_j - \sum_j{}' F(b_j)\cdot \mathrm{ind}_C\, b_j,$$

gdzie $\{a_j\}$ oznacza ciąg pierwiastków, a $\{b_j\}$ ciąg biegunów funkcji $W(z)$ w G, przy czym każdy z tych pierwiastków oraz biegunów powtarza się w tych ciągach tyle razy, ile wynosi jego krotność.

W szczególności (przyjmując $F(z)=1$ tożsamościowo),

$$\text{(7.7)}\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{W'(z)}{W(z)}\,dz=\sum_j{}' \operatorname{ind}_C a_j-\sum_j{}' \operatorname{ind}_C b_j.$$

Spośród punktów a_j i b_j co najwyżej skończona ilość posiada względem krzywej C indeks różny od zera i przeto szeregi występujące po prawych stronach równości (7.6) *i* (7.7) *redukują się do sum skończonych.*

Tw. 7.5 uważać można za uogólnienie tw. 9.2, Rozdz. III.

Zanotujemy także następujący wariant wzoru Cauchy'ego, który otrzymać możemy np., podstawiając $W(z)=z-a$ w równość (7.6):

(7.8) *Jeżeli $F(z)$ jest funkcją holomorficzną w zbiorze otwartym G, nie rozcinającym płaszczyzny i nie zawierającym punktu ∞, wówczas dla każdej krzywej zamkniętej C przebiegającej w G oraz dla każdego punktu $a\in G$ nie leżącego na C mamy*

$$F(a)\cdot\operatorname{ind}_C a=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{F(z)}{z-a}\,dz.$$

Tw. 7.5, a w szczególności wzór (7.7), zastosowane być mogą do obliczenia, ile razy funkcja holomorficzna przyjmuje pewną wartość. Ograniczając się do funkcji holomorficznej w kole, udowodnimy twierdzenie następujące:

(7.9) *Niech W będzie funkcją ciągłą na kole domkniętym $K=\overline{\mathrm{K}}(a;r)$ i holomorficzną w jego wnętrzu, Γ krzywą, na którą funkcja W przekształca okrąg C koła K, i wreszcie w_0 dowolną wartością, nie przyjmowaną przez funkcję W na okręgu C, t.j. nie leżącą na krzywej Γ.*

Wówczas, oznaczając przez h ilość razy, jaką funkcja przyjmuje wartość w_0 wewnątrz koła K, mamy

$$\text{(7.10)}\qquad h=\operatorname{ind}_\Gamma w_0=\frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg[W(z)-w_0].$$

Dowód. Niech $\{r_n\}$ będzie dowolnym ciągiem rosnącym liczb, dążącym do r, i niech h_n oznacza ilość razy, jaką funkcja przyjmuje wartość w_0 w kole $\mathrm{K}(a;r_n)$. Niech C_n oznacza okrąg koła $\mathrm{K}(a;r_n)$, a Γ_n krzywą, na jaką $W(z)$ przekształca ten okrąg. Zakładając, że wartość w_0 nie jest przyjmowana na okręgu C_n, będziemy mieli na mocy twierdzeń 7.5 i 5.4

$$h_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{(W(z)-w_0)'}{W(z)-w_0}\,dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_{C_n}\arg[W(z)-w_0]=\frac{1}{2\pi}\Delta_{\Gamma_n}\arg(w-w_0).$$

Ponieważ zaś dla wartości n dostatecznie wielkich mamy z pewnością $h_n=h$, przeto korzystając jeszcze z tw. 6.3, otrzymujemy równość (7.10).

W twierdzeniu 7.9 moglibyśmy — rzecz prosta — zastąpić koło domknięte przez dowolny obszar domknięty, ograniczony przez krzywą zamkniętą. Dowód jednak — identyczny z dowodem tw. 7.9, jeżeli idzie o treść analityczną — wymagałby znacznie subtelniejszych rozważań topologicznych, związanych z aproksymacją brzegu obszaru przez krzywe regularne przebiegające wewnątrz obszaru.

ĆWICZENIA. 1. Obliczyć całkę krzywoliniową funkcji $1/(1-2z)(z-2)$ wzdłuż elipsy $x^2+xy+y^2-4x-2y+4-a=0$ dla $a=1$ oraz $a=4$.

2. Jeżeli $z_1,z_2,\dots,z_m$ jest układem m różnych punktów na płaszczyźnie otwartej i $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m$ układem m liczb, wówczas istnieje zawsze jeden i tylko jeden wielomian stopnia $\leqslant m-1$, przyjmujący w punktach z_j odpowiednio wartości η_j. Sprawdzić, że wielomianem tym jest

$$\sum_{k=1}^{m}{}'\frac{\eta_k}{\omega'(z_k)}\,\frac{\omega(z)}{z-z_k},$$

gdzie $\omega(z)=(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)$. Wielomiany w ten sposób określone nazywają się *wielomianami interpolacyjnymi Lagrange'a*.

Niech $W(z)$ będzie funkcją holomorficzną na kole domkniętym $K=\overline{\mathrm{K}}(0;R)$, zaś $z_1,z_2,\dots,z_m$ układem m różnych punktów wewnątrz tego koła. Pokazać, iż wielomian interpolacyjny Lagrange'a, przyjmujący w punktach z_j wartości $W(z_j)$, dany jest wewnątrz koła K przez wzór

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(K)}\frac{\omega(\mathfrak{z})-\omega(z)}{\omega(\mathfrak{z})}\,\frac{W(\mathfrak{z})}{\mathfrak{z}-z}\,d\mathfrak{z}.$$

3. Jeżeli $W(z)$ jest funkcją holomorficzną na kole domkniętym $\overline{\mathrm{K}}(0;1)$ i $P_m(z)$ oznacza wielomian interpolacyjny stopnia $\leqslant m-1$, przyjmujący w punktach $\exp(2k\pi i/m)$ dla $k=0,1,\dots,m-1$ te same wartości co $W(z)$, wówczas $\{P_m(z)\}$ dąży jednostajnie do $W(z)$ w kole $\overline{\mathrm{K}}(0;1)$ gdy $m\to\infty$.

4. Udowodnić, że dla $0<\mu<1$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{\exp 2\mu k\pi i}{a-k}=\frac{\exp(2\mu-1)a\pi i}{\sin a\pi},$$

gdzie a jest dowolną liczbą nie całkowitą (Kronecker).

[*Wsk.* Rozważyć całkę $\exp[(2\mu-1)z\pi i]/(z-a)\sin\pi z$ wzdłuż okręgu o promieniu $n+\frac{1}{2}$ i środku 0 i przejść do granicy przy $n\to\infty$ (Rozdz. I, § 18, ćw. 5).]

5. *Wariant twierdzenia Rouché* (por. Rozdz. III, tw. 10.2). Niech $\Phi(z)$ i $\Psi(z)$ oznaczają funkcje meromorficzne w obszarze jednospójnym G nie zawierającym punktu ∞ i niech $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ oraz $\{a_j'\}$, $\{b_j'\}$ oznaczają pierwiastki i bieguny odpowiednio funkcyj $\Psi(z)$ oraz $\Psi(z)+\Phi(z)$ w obszarze G. Niech C będzie dowolną krzywą zamkniętą przebiegającą w G i nie przechodzącą przez żaden z tych pierwiastków ani biegunów.

Wówczas, jeżeli $|\Phi(z)|<|\Psi(z)|$ na krzywej C, to

$$\sum_j a_j \operatorname{ind}_C a_j - \sum_j b_j \operatorname{ind}_C b_j = \sum_j a'_j \operatorname{ind}_C a'_j - \sum_j b'_j \operatorname{ind}_C b'_j,$$

(przy czym każdy pierwiastek i biegun występuje w ciągach pierwiastków i biegunów tyle razy, ile wynosi jego krotność).

[*Wsk*. Por. § 5, ćw. 1.]

§ 8. Metoda residuów w obliczaniu całek oznaczonych.

Posługujemy się często twierdzeniem o residuach przy obliczaniu wartości całek rzeczywistych. Dla zilustrowania metody podamy obliczenie całki $\int_0^{+\infty} x^\alpha Q(x)\,dx$, gdzie α jest liczbą rzeczywistą nie całkowitą, a $Q(x)$ funkcją wymierną nie posiadającą biegunów w punktach rzeczywistych nieujemnych. Zakładamy, iż całka ta ma wartość skończoną, lub — co jest równoważne — że

$$(8.1) \qquad z^{\alpha+1}Q(z)\to 0 \quad \textit{gdy} \quad z\to 0 \quad \textit{oraz gdy} \quad z\to\infty.$$

Wyznaczyć bowiem można dwie liczby całkowite p i q w ten sposób, że $z^pQ(z)$ oraz $z^qQ(z)$ dążą do granic skończonych i różnych od zera, gdy z dąży odpowiednio do 0 i do ∞. Warunek, że całka $\int_0^{+\infty} x^\alpha Q(x)\,dx$ jest skończona, jest więc równoważny warunkowi, że $z^{\alpha-p+1}\to 0$ gdy $z\to 0$ oraz że $z^{\alpha-q+1}\to 0$ gdy $z\to\infty$, co z kolei równoważne jest warunkowi (8.1).

Niech G oznacza płaszczyznę otwartą z wyłączeniem dodatniej półosi rzeczywistej $x\geqslant 0$. W obszarze G możemy określić (por. np. Rozdz. I, tw. 11.1) gałąź holomorficzną $L(z)$ logarytmu z w ten sposób, by dążyła do zera, gdy $z\to 1$ przez wartości półpłaszczyzny górnej. Przez z^α rozumieć będziemy (por. Rozdz. I, § 11) funkcję $\exp[\alpha L(z)]$. Przyjmując $z=x+iy$, mamy

$$(8.2) \quad \lim_{y\to 0+} z^\alpha Q(z) = x^\alpha Q(x), \quad \lim_{y\to 0-} z^\alpha Q(z) = e^{2\alpha\pi i}\cdot x^\alpha Q(x) \quad \textit{dla} \quad x>0.$$

Niech teraz $\varepsilon<\pi$ będzie dowolną liczbą dodatnią i niech $C_\varepsilon(r')$, $C_\varepsilon(r'')$ oznaczają odpowiednio łuki okręgów $C(r')=\mathrm{C}(0;r')$, $C(r'')=\mathrm{C}(0;r'')$, dane przez równania:

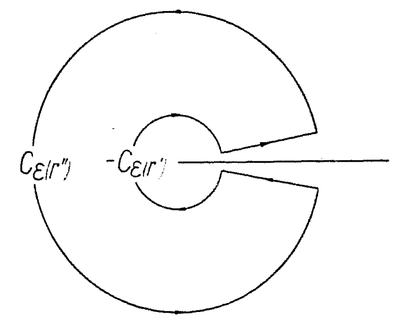
$$z=r'e^{i\theta}, \qquad z=r''e^{i\theta}, \qquad \textit{gdzie} \qquad \varepsilon\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\varepsilon.$$

Weźmy pod uwagę krzywą zamkniętą, złożoną z tych dwu

łuków oraz dwu odcinków (p. rysunek):

$$(8.3) \quad C_\varepsilon = C_\varepsilon(r',r'') = C_\varepsilon(r'') + [r''e^{-i\varepsilon}, r'e^{-i\varepsilon}] - C_\varepsilon(r') + [r'e^{i\varepsilon}, r''e^{i\varepsilon}],$$

zakładając, iż promień r'' jest dostatecznie wielki, a promień r' i ε dostatecznie małe na to, aby na krzywej tej nie leżał żaden z biegunów funkcji $Q(z)$. Oznaczając teraz przez $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bieguny, położone w skończoności, funkcji $z^\alpha Q(z)$, lub — co jest równoważne — funkcji $Q(z)$, mamy w myśl tw. 7.1 „o residuach"



$$(8.4) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon(r',r'')} z^\alpha Q(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} R_j \operatorname{ind}_{C_\varepsilon} b_j,$$

gdzie R_j oznacza residuum funkcji $z^\alpha Q(z)$ w punkcie b_j. Z drugiej strony, w myśl (8.2) i (8.3),

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon(r',r'')} z^\alpha Q(z)\,dz = \int_{C(r'')} z^\alpha Q(z)\,dz - \int_{C(r')} z^\alpha Q(z)\,dz + (1-e^{2\alpha\pi i})\cdot\int_{r'}^{r''} z^\alpha Q(z)\,dz$$

i przechodząc do granicy, gdy $r'\to 0$ oraz $r''\to\infty$, otrzymujemy z uwagi na (8.1)

$$(8.5) \qquad \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ r'\to 0,\, r''\to\infty}} \int_{C_\varepsilon(r',r'')} z^\alpha Q(z)\,dz = (1-e^{2\alpha\pi i})\cdot\int_0^{+\infty} z^\alpha Q(z)\,dz =$$
$$= -2ie^{\alpha\pi i}\cdot\sin\alpha\pi\int_0^{+\infty} z^\alpha Q(z)\,dz.$$

Wreszcie, gdy bieguny b_j znajdują się w pierścieniu $\mathrm{P}(0;r',r'')$, wówczas

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon(r',r'')}\frac{dz}{z-b_j} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(r'')}\frac{dz}{z-b_j} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C(r')}\frac{dz}{z-b_j} = 1.$$

Gdy więc r'' jest dostatecznie wielkie, a ε oraz r' dostatecznie małe, we wzorze (8.4) wszystkie indeksy $\operatorname{ind}_{C_\varepsilon} b_j$ są równe 1, co zresztą można także sprawdzić bezpośrednio posługując się metodą §6, zważywszy, że wszystkie bieguny b_j znajdą się w obszarze „wewnętrznym" krzywej $C_\varepsilon(r', r'')$. Korzystając zatem z (8.5), otrzymujemy

$$\int_0^{+\infty} z^a Q(z)\,dz = -\frac{\pi e^{-a\pi i}}{\sin a\pi}\cdot \sum_j R_j.$$

ĆWICZENIA. 1. Obliczyć całki:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t\,dt}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$ $(a>0,\ b>0,\ a\neq b)$, (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t\,dt}{(t^2+a^2)^2}$ $(a>0)$,

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin nt\,dt}{t(t^2+a^2)}$ $(a>0,\ n>0)$, (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-a^2}{t^2+a^2}\,\frac{\sin t}{t}\,dt$ $(a>0)$.

[*Wsk.* ad (a): Całkę napisać można w postaci $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}\,dt}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}$; rozważmy całkę wyrażenia $e^{iz}/(z^2+a^2)(z^2+b^2)$ wzdłuż krzywej utworzonej z górnego półokręgu koła $K(0;R)$ i ze średnicy tego koła; przechodzimy do granicy wraz z $R\to+\infty$. Analogicznie obliczamy pozostałe całki.]

2. Niech $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{Log} t)^k}{1+t^4}\,dt$ $(k=0,1,\ldots)$. Obliczyć całki I_0 oraz I_1 i znaleźć związek rekurencyjny między I_k $(k\geq 2)$ a $I_0, I_1, \ldots, I_{k-1}$.

[*Wsk.* Całkujemy $(\operatorname{Log} z)/(1+z^4)$ wzdłuż krzywej zamkniętej utworzonej z górnych półokręgów kół $K(0;r)$ i $K(0;R)$ (gdzie $0<r<R$) oraz dwu odcinków osi rzeczywistej; przechodząc do granicy wraz z $r\to 0$ i $R\to\infty$, otrzymamy I_0 oraz I_1.]

3. Obliczyć całki

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{(1+t^2)^2}\,dt$, gdzie $-1<p<3$,

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{-p}\,dt}{1+2t\cos\theta+t^2}$, gdzie $-1<p<1$, $-\pi<\theta<\pi$.

4. Obliczyć wartość główną całki $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}\,dt}{1-t}$, gdzie $0<p<1$ (jeżeli funkcja $F(t)$ jest nieskończona w punkcie c wewnątrz przedziału $[a,b]$, wówczas przez *wartość główną* całki $\displaystyle\int_a^b F(t)\,dt$ rozumiemy granicę $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+}\Big[\int_a^{c-\varepsilon} F(t)\,dt + \int_{c+\varepsilon}^b F(t)\,dt\Big]$).

§ 9. Twierdzenie i wzór Cauchy'ego dla pierścienia.

W Rozdz. III, §4, udowodniliśmy rozwijalność funkcji na szereg potęgowy w otoczeniu każdego punktu, w którym funkcja jest holomorficzna. Nie zostało jednak udowodnione, iż funkcja holomorficzna w pewnym kole rozwija się na szereg potęgowy w całym tym kole. Dowód tego twierdzenia w postaci nieco ogólniejszej, mianowicie dla rozwinięć Laurenta, oprzemy na następujących wariantach twierdzenia i wzoru Cauchy'ego, które nazwiemy odpowiednio *twierdzeniem* i *wzorem Cauchy'ego dla pierścienia*.

(9.1) *Jeżeli $W(z)$ jest funkcją ciągłą w pierścieniu domkniętym $\overline{P}(z_0; r_1, r_2)$, gdzie $0<r_1<r_2<\infty$, i holomorficzną wewnątrz tego pierścienia, wówczas*

$$\int_{C_1} W(z)\,dz = \int_{C_2} W(z)\,dz \tag{9.2}$$

oraz

$$W(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{W(z)}{z-\mathfrak{z}}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{W(z)}{z-\mathfrak{z}}\,dz \quad dla \quad \mathfrak{z}\in P(z_0; r_1, r_2), \tag{9.3}$$

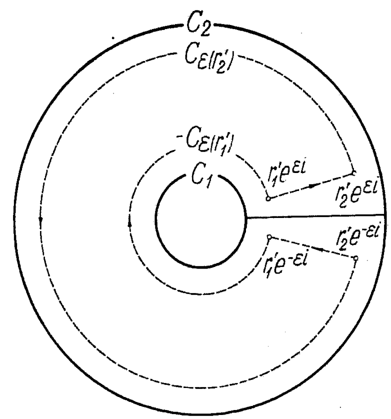
gdzie $C_1 = C(z_0; r_1)$ *i* $C_2 = C(z_0; r_2)$.

Dowód. Możemy przyjąć oczywiście $z_0=0$. Niech G oznacza zbiór tych punktów pierścienia $P(0; r_1, r_2)$, które nie leżą na półosi rzeczywistej dodatniej. Oznaczmy przez $C_\varepsilon(r_1')$ i $C_\varepsilon(r_2')$ łuki okręgów, dane odpowiednio przez równania:

$$z = r_1' e^{\theta i} \quad oraz \quad z = r_2' e^{\theta i}, \qquad gdzie \qquad \varepsilon \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \varepsilon;$$

zakładamy, iż $r_1 < r_1' < r_2' < r_2$ oraz $0<\varepsilon<\pi$. Weźmy pod uwagę krzywą zamkniętą (p. rysunek)

$$C_\varepsilon(r_1', r_2') = C_\varepsilon(r_2') + [r_2' e^{-\varepsilon i}, r_1' e^{-\varepsilon i}] - C_\varepsilon(r_1') + [r_1' e^{\varepsilon i}, r_2' e^{\varepsilon i}], \tag{9.4}$$



złożoną z dwu łuków oraz dwu odcinków. Krzywa ta przebiega w obszarze jednospójnym G i w myśl tw. Cauchy'ego w postaci (2.3) mamy

$$\int_{C_\varepsilon(r_1', r_2')} W(z)\,dz = 0.$$

Rozkładając odpowiednio do (9.4) lewą stronę tej równości na cztery całki i przechodząc do granicy, najpierw wraz z $\varepsilon\to 0$ (przy czym suma całek wzdłuż odcinków staje się zerem), a następnie wraz z $r_1'\to r_1$ oraz $r_2'\to r_2$, otrzymujemy wzór (9.2).

Niech teraz $\mathfrak{z}$ będzie dowolnym punktem pierścienia $\mathrm{P}(z_0;r_1,r_2)$. Funkcja $[W(z)-W(\mathfrak{z})]/(z-\mathfrak{z})$ jest ciągła wówczas względem z w całym pierścieniu domkniętym $\overline{\mathrm{P}}(z_0;r_1,r_2)$ i holomorficzna w jego wnętrzu. Możemy więc podstawić we wzorze (9.2) funkcję tę zamiast $W(z)$. Otrzymujemy

$$(9.5)\qquad \int_{C_1}\frac{W(z)-W(\mathfrak{z})}{z-\mathfrak{z}}\,dz=\int_{C_2}\frac{W(z)-W(\mathfrak{z})}{z-\mathfrak{z}}\,dz;$$

ponieważ zaś (§ 6, str. 183) $\displaystyle\int_{C_1}\frac{dz}{z-\mathfrak{z}}=0$ oraz $\displaystyle\int_{C_2}\frac{dz}{z-\mathfrak{z}}=2\pi i$, zatem z (9.5) wynika wzór

$$\int_{C_2}\frac{W(z)}{z-\mathfrak{z}}\,dz-\int_{C_1}\frac{W(z)}{z-\mathfrak{z}}\,dz=W(\mathfrak{z})\cdot\left[\int_{C_2}\frac{dz}{z-\mathfrak{z}}-\int_{C_1}\frac{dz}{z-\mathfrak{z}}\right]=2\pi i\cdot W(\mathfrak{z}),$$

równoważny wzorowi (9.3).

(9.6) *Funkcja $W(z)$ holomorficzna w pierścieniu $\mathrm{P}(z_0;r_1,r_2)$ rozwija się w pierścieniu tym na szereg Laurenta niemal jednostajnie zbieżny.*

D o w ó d. Korzystając z tw. 9.1, stosujemy w istocie tę samą metodę co w dowodzie nieco słabszego twierdzenia 5.7, Rozdz. III. Możemy przy tym oczywiście przyjąć, iż $z_0=0$.

Niech $r_1<r_1'<r_2'<r_2$ i niech $\mathfrak{z}\in\mathrm{P}(0;r_1',r_2')$. Wówczas, przyjmując ogólnie $C(r)=\mathrm{C}(0;r)$, mamy w myśl tw. 9.1

$$(9.7)\qquad W(\mathfrak{z})=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(r_2')}\frac{W(z)}{z-\mathfrak{z}}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C(r_1')}\frac{W(z)}{z-\mathfrak{z}}\,dz.$$

Dla punktów z na okręgu $C(r_1')$ mamy $|z/\mathfrak{z}|=r_1'/|\mathfrak{z}|<1$, a dla z na okręgu $C(r_2')$ analogicznie $|\mathfrak{z}/z|=|\mathfrak{z}|/r_2'<1$. Zatem

$$\int_{C(r_2')}\frac{W(z)}{z-\mathfrak{z}}\,dz=\int_{C(r_2')}\frac{W(z)}{z}\,\frac{dz}{1-\frac{\mathfrak{z}}{z}}=\int_{C(r_2')}\left[\frac{W(z)}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathfrak{z}}{z}\right)^n\right]dz=\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{z}^n\int_{C(r_2')}\frac{W(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

i analogicznie

$$\int_{C(r_1')}\frac{W(z)}{z-\mathfrak{z}}\,dz=-\int_{C(r_1')}\frac{W(z)}{\mathfrak{z}}\,\frac{dz}{1-\frac{z}{\mathfrak{z}}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mathfrak{z}^{n+1}}\int_{C(r_1')}z^n W(z)\,dz.$$

Podstawiając te rozwinięcia w (9.7), otrzymujemy w pierścieniu $\mathrm{P}(0;r_1',r_2')$ rozwinięcie funkcji $W(\mathfrak{z})$ na szereg Laurenta

$$(9.8)\qquad W(\mathfrak{z})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\mathfrak{z}^n$$

o spółczynnikach a_n, danych przez całki występujące w dwu wzorach poprzednich. Z uwagi na jednoznaczność rozwinięć na szereg Laurenta (por. Rozdz. III, § 4) spółczynniki te są te same dla rozwinięć funkcji $W(\mathfrak{z})$ we wszystkich pierścieniach $\mathrm{P}(0;r_1',r_2')$, gdzie $r_1<r_1'<r_2'<r_2$. Równość (9.8) spełniona jest więc dla całego danego pierścienia $\mathrm{P}(0;r_1,r_2)$, a zbieżność niemal jednostajna szeregu występującego w tej równości jest już konsekwencją tw. 4.3, Rozdz. III.

Z tw. 9.6 wynika w szczególności, iż funkcja holomorficzna w pewnym otoczeniu pierścieniowym punktu z_0 rozwija się w całym tym otoczeniu na szereg Laurenta. Jeżeli ponadto założymy, iż funkcja jest holomorficzna również w punkcie z_0, wówczas część główna jej rozwinięcia znika (por. np. tw. 4.9, Rozdz. III) i rozwinięcie jej staje się szeregiem potęgowym. Zatem:

(9.9) *Funkcja holomorficzna w kole rozwija się w całym tym kole na szereg potęgowy.*

Analogicznie uzupełnić możemy twierdzenia Rozdz. III, § 13, dotyczące funkcyj dwu zmiennych. Mianowicie:

(9.10) *Na to, aby funkcja $F(z,w)$ była holomorficzna w iloczynie kartezjańskim $\mathrm{K}(z_0;r_1)\times\mathrm{K}(w_0;r_2)$ dwu kół, konieczne jest i wystarcza, aby rozwijała się w nim na szereg niemal jednostajnie zbieżny postaci*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z)\,(w-w_0)^n,\ \textit{jeżeli}\ w_0\neq\infty,\qquad \textit{lub}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z)/w^n,\ \textit{jeżeli}\ w_0=\infty,$$

gdzie $a_n(z)$ są funkcjami holomorficznymi w $\mathrm{K}(z_0;r_1)$.

D o w ó d. D o s t a t e c z n o ś ć warunku jest widoczna. W celu udowodnienia, iż jest k o n i e c z n y, załóżmy, iż funkcja $F(z,w)$ jest holomorficzna w otoczeniu dwukołowym $\mathrm{K}(z_0;r_1)\times\mathrm{K}(w_0;r_2)$, przy czym możemy oczywiście przyjąć, iż $w_0=z_0=0$. Na mocy tw. 9.9 mamy w otoczeniu tym rozwinięcie

(9.11) $$F(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)\, w^n$$

o spółczynnikach $a_n(z)$, danych przez całki (por. Rozdz. III, tw. 4.6):

(9.12) $$a_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(\varrho_2)} \frac{F(z,\mathfrak{w})}{\mathfrak{w}^{n+1}}\, d\mathfrak{w},$$

gdzie ϱ_2 jest dowolną liczbą dodatnią mniejszą od r_2, a $C(\varrho_2)=\mathrm{C}(0;\varrho_2)$. Z (9.12) wynika przede wszystkim, na mocy tw. 5.7, Rozdz. II (jak w rozumowaniu Rozdz. III, § 13), iż funkcje $a_n(z)$ są holomorficzne w kole $\mathrm{K}(0;r_1)$. Z drugiej strony, oznaczając przez ϱ_1 dowolną liczbę dodatnią mniejszą od r_1, a przez $M(\varrho_1,\varrho_2)$ kres górny $|F(z,w)|$ dla $|z|\leqslant\varrho_1$ i $|w|\leqslant\varrho_2$, mamy z (9.12), że $|a_n(z)|\leqslant M(\varrho_1,\varrho_2)/\varrho_2^n$ dla $|z|\leqslant\varrho_1$. Szereg występujący we wzorze (9.11) jest więc niemal jednostajnie zbieżny w każdym otoczeniu dwukołowym $\mathrm{K}(0;\varrho_1)\times\mathrm{K}(0;\varrho_2)$, gdy $0<\varrho_1<r_1$ i $0<\varrho_2<r_2$, a tym samym w całym otoczeniu dwukołowym $\mathrm{K}(0;r_1)\times\mathrm{K}(0;r_2)$.

Twierdzeniu 9.10 nadać możemy jeszcze postać następującą:

(9.13) *Na to, aby funkcja $F(z,w)$ była holomorficzna w otoczeniu dwukołowym $\mathrm{K}(z_0;r_1)\times\mathrm{K}(w_0;r_2)$, gdzie $z_0\neq\infty$, $w_0\neq\infty$, koniecznie jest i dostateczne, by w otoczeniu tym rozwijała się na szereg podwójny niemal jednostajnie (i bezwzględnie) zbieżny postaci $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}(z-z_0)^m(w-w_0)^n$. Spółczynniki tego szeregu dane są przez wzór*

$$a_{m,n}=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{C_1}\left[\int\limits_{C_2}\frac{F(\mathfrak{z},\mathfrak{w})}{(\mathfrak{z}-z_0)^{m+1}(\mathfrak{w}-w_0)^{n+1}}\,d\mathfrak{w}\right]d\mathfrak{z},$$

gdzie C_1, C_2 są dowolnymi okręgami zawartymi odpowiednio w kołach $\mathrm{K}(z_0;r_1)$, $\mathrm{K}(w_0;r_2)$ i spółśrodkowymi odpowiednio z okręgami tych kół.

D o w ó d. Dostateczność warunku jest oczywista. W celu udowodnienia jego k o n i e c z n o ś c i przyjmiemy $z_0=w_0=0$. Funkcja $F(z,w)$, holomorficzna w otoczeniu dwukołowym $\mathrm{K}(0;r_1)\times\mathrm{K}(0;r_2)$, rozwija się w otoczeniu tym na szereg (9.11) o spółczynnikach $a_n(z)$ holomorficznych w kole $\mathrm{K}(0;r_1)$ i danych przez wzór (9.12). W kole tym mamy więc $a_n(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_{m,n}z^m$, gdzie $a_{m,n}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{C_1}\frac{a_n(\mathfrak{z})\,d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}^{m+1}}$, przy czym C_1 oznacza dowolny okrąg $\mathrm{C}(0;\varrho_1)$ o promieniu $\varrho_1<r_1$. Podstawiając w tę całkę wyrażenie na $a_n(\mathfrak{z})$ z (9.12), otrzymujemy

(9.14) $$a_{m,n}=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{C_1}\left[\int\limits_{C_2}\frac{F(\mathfrak{z},\mathfrak{w})}{\mathfrak{z}^{m+1}\mathfrak{w}^{n+1}}\,d\mathfrak{w}\right]d\mathfrak{z},$$

gdzie C_2 oznacza dowolny okrąg $\mathrm{C}(0;\varrho_2)$ o promieniu $\varrho_2<r_2$. Oznaczając przez $M(\varrho_1,\varrho_2)$ kres górny wartości $|F(z,w)|$ dla $|z|\leqslant\varrho_1$, $|w|\leqslant\varrho_2$, mamy więc $|a_{m,n}|\leqslant M(\varrho_1,\varrho_2)/\varrho_1^m\varrho_2^n$. W otoczeniu dwukołowym $\mathrm{K}(0;\varrho_1)\times\mathrm{K}(0;\varrho_2)$ szereg podwójny $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}z^m w^n$ jest tedy bezwzględnie i niemal jednostajnie zbieżny, przy czym

(9.15) $$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}z^m w^n=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}z^m\Big)w^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)\,w^n=F(z,w).$$

Ponieważ zaś o ϱ_1 i ϱ_2 zakładamy tylko, że $0<\varrho_1<r_1$ oraz $0<\varrho_2<r_2$, zatem rozważany szereg podwójny jest niemal jednostajnie i bezwzględnie zbieżny w całym otoczeniu dwukołowym $\mathrm{K}(0;r_1)\times\mathrm{K}(0;r_2)$ i równość (9.15) zachodzi w całym tym otoczeniu.

Jeżeli funkcja $W(z)$ jest holomorficzna w otoczeniu punktu $z_0\neq 0$, przy czym $W'(z_0)\neq 0$, wówczas (por. Rozdz. III, tw. 12.4) jest jednoznacznie odwracalna w pewnym otoczeniu punktu z_0. Jej funkcja odwrotna, którą oznaczymy przez $F(w)$, jest holomorficzna w pewnym otoczeniu punktu $w_0=W(z_0)$ i rozwija się przeto w pewnym otoczeniu tego punktu na szereg potęgowy o środku w_0. Przyjmując dla prostoty $w_0=z_0=0$, znajdziemy dla spółczynników tego rozwinięcia wyrażenia, które w pewnych przypadkach okazują się szczególnie dogodne rachunkowo. Niech więc

(9.16) $$F(w)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n,$$

i niech $\overline{\mathrm{K}}(0;R)$ będzie kołem domkniętym, w którym funkcja W jest holomorficzna, jednoznacznie odwracalna i nigdzie nie znikająca poza punktem 0. Oznaczmy przez M kres dolny wartości $|W(z)|$ na okręgu $C=\mathrm{C}(0;R)$.

Weźmy z drugiej strony pod uwagę koło $\mathrm{K}(0;r)$ o promieniu $r\leqslant M$ dostatecznie małym na to, by funkcja W przyjmowała w kole $\mathrm{K}(0;R)$ każdą wartość $w\in\mathrm{K}(0;r)$.

Będziemy więc mieli dla $w\in\mathrm{K}(0;r)$, w myśl tw. 7.5 zastosowanego do koła (por. analogiczne rozumowanie w dowodzie tw. 14.1, Rozdz. III):

$$F(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} z\frac{W'(z)}{W(z)-w}\,dz,$$

skąd

$$F'(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} z\frac{W'(z)}{[W(z)-w]^2}\,dz=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{W(z)-w}\right)dz.$$

Całkując przez części wzdłuż okręgu C (t. zn. całkując przez części względem zmiennej θ w przedziale $[0,2\pi]$ po podstawieniu $z=R\exp i\theta$), mamy

$$F'(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{dz}{W(z)-w}$$

i, ponieważ $|w|<r<M$, otrzymujemy rozwinięcie funkcji $F'(w)$ na szereg potęgowy w kole $K(0;r)$:

$$F'(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{1}{W(z)}\,\frac{dz}{1-[w/W(z)]}=\sum_{n=1}^{\infty} w^{n-1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{dz}{[W(z)]^n}.$$

Porównując to rozwinięcie z (9.16), widzimy, że

$$na_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{dz}{[W(z)]^n}. \tag{9.17}$$

Otóż, ponieważ funkcja $W(z)$ nie znika nigdzie w kole $\overline{K}(0;R)$ poza punktem 0, całka po prawej stronie wzoru (9.17) równa jest na mocy tw. 7.1 residuum funkcji $1/[W(z)]^n$ w tym punkcie. Dla obliczenia tego residuum przyjmijmy $G(z)=z/W(z)$. Funkcja $G(z)$ jest holomorficzna na kole domkniętym $\overline{K}(0;R)$ i sprawdzamy, że dla $n\geqslant 1$ spółczynnik przy $1/z$ w rozwinięciu funkcji $1/[W(z)]^n=[G(z)]^n/z^n$ na szereg Laurenta o środku 0 jest spółczynnikiem przy z^{n-1} w rozwinięciu funkcji $[G(z)]^n$ na szereg potęgowy. Spółczynnik ten równy jest (por. Rozdz. III, § 1)

$$\frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[G(z)]^n\right\}_{z=0},$$

skąd na mocy (9.17)

$$a_n=\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[G(z)]^n\right\}_{z=0}=\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[z/W(z)]^n\right\}_{z=0}.$$

Podstawiając te wyrażenia w (9.16) zamiast a_n, otrzymujemy szereg, który nosi nazwę *szeregu Lagrange'a*.

ĆWICZENIA. 1. Funkcja $\exp\left[\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)u\right]$, gdzie u jest liczbą dowolną, posiada w punkcie $z=0$ rozwinięcie $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(u)\cdot z^n$ zbieżne w całej płaszczyźnie z wyłączeniem punktów 0 i ∞. Pokazać, że

$$I_n(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(n\theta-u\sin\theta)\,d\theta.$$

Funkcje $I_n(u)$ noszą nazwę *funkcyj Bessela*.

2. W rozwinięciu Laurenta funkcji $\sin\left[\left(z+\frac{1}{z}\right)u\right]$ w punkcie 0 spółczynniki przy z^n i z^{-n} są sobie równe i wyrażają się przez całkę $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin(2u\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta$.

3. Jeżeli funkcja meromorficzna na kole domkniętym $\overline{K}(0;1)$ i holomorficzna w jego wnętrzu rozwija się wewnątrz tego koła na szereg potęgowy $\sum\limits_n a_n z^n$ i posiada dokładnie jeden biegun z_0 na okręgu $C(0;1)$, wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/a_{n+1}=z_0$.

[*Wsk.* Funkcję daną przedstawić można w postaci sumy szeregu potęgowego $\sum\limits_n b_n z^n$, zbieżnego w kole o promieniu $\varrho>1$, oraz wielomianu względem $1/(z-z_0)$.]

4. Uogólnić twierdzenie ćw. 3, jak następuje: Jeżeli funkcja meromorficzna na kole domkniętym $\overline{K}(0;1)$ rozwija się wewnątrz tego koła na szereg potęgowy $\sum\limits_n a_n z^n$ i jeżeli wśród biegunów tej funkcji na okręgu $C(0;1)$ istnieje jeden biegun z_0 o krotności większej od wszystkich pozostałych, wówczas $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/a_{n+1})=z_0$.

5. Niech $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots$ będzie ciągiem rosnącym liczb całkowitych dodatnich, zaś $\{P_k(z)\}$ ciągiem wielomianów takich, że dla każdego k stopień wielomianu $z^{m_k}P_k(z)$ jest $<m_{k+1}$. Dowieść, że jeśli wówczas szereg

$$W(z)=z^{m_1}P_1(z)+z^{m_2}P_2(z)+\dots+z^{m_k}P_k(z)+\dots \tag{*}$$

jest niemal jednostajnie zbieżny w kole $K(0;1)$, to rozwinięcie funkcji $W(z)$ na szereg potęgowy w tym kole otrzymuje się formalnie, wykonywując mnożenia i znosząc nawiasy po prawej stronie równości (*).

Zbudować przykład, wskazujący, że założenie niemal jednostajnej zbieżności szeregu (*) jest tu istotne, t. zn. że twierdzenie przestaje być na ogół prawdziwe dla zbieżności zwykłej, nawet gdy o szeregu (*) założyć, że jest zbieżny do funkcji holomorficznej w kole $K(0;1)$.

6. Pierwiastek z t. zw. *równania Keplera* $z=a+w\sin z$ (jako funkcja parametru w) dany jest w otoczeniu punktu $w=0$ przez szereg

$$z=a+w\sin a+w^2\frac{1}{2!}\frac{d\sin^2 a}{da}+w^3\frac{1}{3!}\frac{d^2\sin^3 a}{da^2}+\dots$$

7. Rozwinąć na szereg potęgowy parametru w w otoczeniu punktu $w=0$ pierwiastki z równań:

(a) $z-we^z=0$, (b) $z=a+we^z$.

Obliczyć promienie zbieżności tych szeregów.

8. Niech $W(z)$ będzie funkcją holomorficzną w otoczeniu punktu $z=0$, przy czym $W(0)=w_0$ i $W'(0)\neq 0$; niech dalej $H(z)$ będzie dowolną funkcją holomorficzną w otoczeniu punktu 0. Wówczas w otoczeniu punktu w_0

$$H(W^{-1}(w))=\sum_n a_n(w-w_0)^n,$$

gdzie $a_0=H(0)$, $a_n=\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{H'(z)\cdot[z/W(z)]^n\}_{z=0}$ dla $n\geqslant 1$ (*Szereg Lagrange'a w postaci uogólnionej*).

9. Jeżeli z oznacza pierwiastek równania (a), ćw. 7, to w otoczeniu punktu $w=0$ mamy $\sin z=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n!}w^n$, gdzie $b_n=n^{n-1}-\binom{n-1}{2}n^{n-3}+\binom{n-1}{4}n^{n-5}-\dots$

10. Na to, aby funkcja rzeczywista $W(x)$, określona dla $0 \leq x < 1$, dała się rozszerzyć jako funkcja holomorficzna na koło $K(0;1)$, konieczne jest i wystarcza, aby była różnicą dwu funkcyj, z których każda jest granicą ciągu wielomianów o spółczynnikach nieujemnych, zbieżnego jednostajnie w każdym przedziale $[0,r]$ dla $0<r<1$.

§ 10. Definicja analityczna obszaru jednospójnego.

Zarówno w twierdzeniu Cauchy'ego 2.3 o całce krzywoliniowej, jak i w tw. 3.1 o gałęzi logarytmu funkcji holomorficznej, istotne jest założenie, iż rozważany tam zbiór otwarty nie rozcina płaszczyzny. W samej rzeczy, obydwa te twierdzenia można odwrócić, otrzymując w ten sposób kryteria analityczne nierozcinania płaszczyzny przez zbiór otwarty. Mianowicie:

(10.1) *Na to, aby zbiór otwarty G nie zawierający punktu ∞ nie rozcinał płaszczyzny, konieczne jest i wystarcza, aby całka krzywoliniowa każdej funkcji holomorficznej w zbiorze G znikała wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej, przebiegającej w tym zbiorze.*

(10.2) *Na to, aby zbiór otwarty G nie rozcinał płaszczyzny, konieczne jest i wystarcza, aby dla każdej funkcji $W(z)$, holomorficznej i nigdzie nie znikającej w G, istniała w G gałąź $\log W(z)$.*

Dowód tych twierdzeń oprzemy na lemmacie następującym, z którego korzystać będziemy również przy dowodzie twierdzeń ogólniejszych (por. dalej, § 12).

(10.3) *Jeżeli S jest składową dopełnienia zbioru otwartego G, nie zawierającą punktu ∞, wówczas istnieje w G łamana zamknięta C (bez punktów wielokrotnych) taka, iż* $\operatorname{ind}_C S \neq 0$.

Dowód. Możemy założyć (usuwając ewentualnie punkt ∞ ze zbioru G), że G nie zawiera punktu ∞.

W myśl tw. 9.6 Wstępu zbiór CG możemy wówczas przedstawić w postaci sumy dwu zbiorów domkniętych rozłącznych F_1 i F_2 w ten sposób, by zbiór F_1 zawierał zbiór S a nie zawierał punktu ∞. Na mocy tedy twierdzeń 10.3 i 10.2 Wstępu istnieje układ skończony nie zachodzących na siebie kwadratów $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ takich, iż

(10.4) $$F_1 \subset \Big(\sum_{j=1}^{n} Q_j\Big)^{\circ},$$ (10.5) $$F_2 \cdot \sum_{j=1}^{n} Q_j = 0,$$

(10.6) *brzeg zbioru $\sum_{j=1}^{n} Q_j$ składa się ze skończonej liczby rozłącznych łamanych zamkniętych $C_1, C_2, \dots, C_m$ bez punktów wielokrotnych, o bokach zorientowanych zgodnie ze zwrotami kwadratów Q_j przyległych do tych boków.*

Niech $\mathfrak{z}$ będzie dowolnym punktem wewnętrznym jednego z kwadratów Q_j, np. kwadratu Q_1. Mamy wówczas

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(Q_j)} \frac{dz}{z-\mathfrak{z}} = \begin{cases} 1 & \textit{dla } j=1, \\ 0 & \textit{dla } j=2,3,\dots,n, \end{cases}$$

a więc

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{(Q_j)} \frac{dz}{z-\mathfrak{z}} = 1.$$

W sumie po stronie lewej tej równości znoszą się całki wzdłuż niebrzegowych boków kwadratów Q_j i w rezultacie z uwagi na (10.6)

(10.7) $$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} \frac{dz}{z-\mathfrak{z}} = 1.$$

Wzór powyższy udowodniony został dla punktów $\mathfrak{z}$ położonych wewnątrz kwadratów Q_j, ale przez ciągłość rozszerza się natychmiast na wszystkie punkty zbioru $\sum_{j=1}^{n} Q_j$, które nie leżą na brzegu tego zbioru, a więc w szczególności, w myśl (10.4), na wszystkie punkty $\mathfrak{z} \in S \subset F_1$.

Niech teraz $\mathfrak{z}$ będzie punktem zbioru S. Ze wzoru (10.7) wynika, iż dla jednej przynajmniej z łamanych C_j, np. dla C_1, odpowiednia całka po lewej stronie tego wzoru jest różna od zera. Znaczy to, że $\operatorname{ind}_{C_1} S = \operatorname{ind}_{C_1} \mathfrak{z} \neq 0$, a ponieważ z uwagi na (10.4) i (10.5) wszystkie łamane C_j przebiegają w G, zatem łamana C_1 jest żądaną łamaną C.

Przechodząc z kolei do dowodu twierdzeń 10.1 i 10.2, widzimy natychmiast, iż konieczność warunków sformułowanych w tych twierdzeniach zawiera się już w twierdzeniach 2.3 i 3.1. Z drugiej strony, warunek tw. 10.1 pociąga za sobą na mocy tw. 2.6, Rozdz. II, warunek tw. 10.2. Wystarczy tedy udowodnić tylko dostateczność warunku tw. 10.2.

Załóżmy więc, iż zbiór G rozcina płaszczyznę; pokażemy, iż istnieje wówczas w G funkcja holomorficzna nigdzie nie znikająca, dla której nie istnieje jednak odpowiednia gałąź logarytmu. Możemy przyjąć przy tym (stosując ewentualnie inwersję), iż punkt ∞ nie należy do G.

Niech a będzie dowolnym punktem tej składowej dopełnienia zbioru G, która nie zawiera punktu ∞, i niech C będzie krzywą regularną zamkniętą, przebiegającą w G i taką, iż

$$2\pi i \cdot \mathrm{ind}_C a = \int\limits_C \frac{dz}{z-a} \neq 0.$$

Krzywa taka istnieje na mocy lemmatu 10.3. Z uwagi więc na tw. 2.6, Rozdz. II, w zbiorze G nie można określić gałęzi $\log(z-a)$, jakkolwiek funkcja $z-a$ jest oczywiście holomorficzna i nie znika nigdzie w tym zbiorze.

W tw. 10.1 i 10.2 zamiast „zbiór otwarty“ podstawić możemy w szczególności „obszar“. Twierdzenia te zawierają tedy pewną definicję analityczną jednospójności obszaru. Przez definicję analityczną pewnej własności rozumiemy tu, z grubsza mówiąc, każdą taką definicję, z której widoczne jest natychmiast, iż własność ta jest niezmiennikiem przekształceń wiernych (p. dalej, Rozdz. V, § 1).

*§ 11. Twierdzenie Jordana dla łamanej zamkniętej.

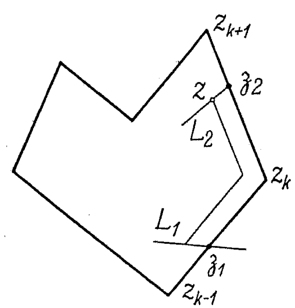
Wspomniane na końcu § 6 twierdzenie Jordana o rozcinaniu płaszczyzny przez krzywą zamkniętą udowodnimy dla linii łamanych w postaci następującej:

(11.1) *Dopełnienie linii łamanej zamkniętej bez punktów wielokrotnych* $L=[z_0, z_1, \dots, z_n = z_0]$ *jest sumą dwu obszarów rozłącznych* G_1 *i* G_2. *Oznaczając przez* G_1 *ten z tych obszarów, który zawiera punkt* ∞, *mamy*

(11.2) $$\mathrm{ind}_L G_1 = 0, \qquad |\mathrm{ind}_L G_2| = 1.$$

Łamana L *jest przy tym wspólnym brzegiem obszarów* G_1 *i* G_2.

Dowód. Udowodnimy przede wszystkim, iż dopełnienie łamanej C zawiera co najwyżej dwie składowe. Dowód opiera się na następującej elementarnej konstrukcji geometrycznej.



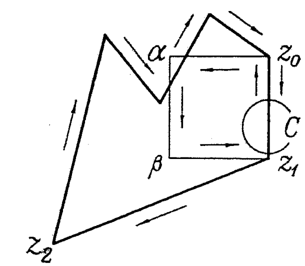
Niech $[z_{k-1}, z_k]$ i $[z_k, z_{k+1}]$ będą dwoma kolejnymi bokami łamanej L i niech $\mathfrak{z}_1 \neq z_{k-1}$ i $\mathfrak{z}_2 \neq z_{k+1}$ będą odpowiednio dowolnymi punktami tych boków. Niech dalej L_1 będzie odcinkiem, dla którego $\mathfrak{z}_1$ jest jedynym punktem wewnętrznym wspólnym z łamaną L, zaś L_2 odcinkiem, dla którego $\mathfrak{z}_2$ jest jedynym punktem wspólnym z tą łamaną (p. rys.). Wówczas każdy punkt $z \neq \mathfrak{z}_2$ odcinka L_2, dostatecznie bliski punktu $\mathfrak{z}_2$, połączyć można z odcinkiem L_1 (t. j. z jakimś punktem tego odcinka) przy pomocy łamanej, rozłącznej z L i złożonej z dwu odcinków odpowiednio równoległych do boków $[z_{k-1}, z_k]$ oraz $[z_k, z_{k+1}]$.

Konstrukcję tę możemy rozszerzyć natychmiast przez indukcję, jak następuje. Niech a będzie dowolnie ustalonym punktem wewnętrznym boku $[z_0, z_1]$ i niech $[c_1, c_2]$ będzie odcinkiem, zawierającym a wewnątrz i nie posiadającym poza punktem a żadnych innych punktów wspólnych z łamaną L; każdy z odcinków $[a, c_1]$ i $[a, c_2]$ zawiera się, oczywiście z pominięciem punktu a, w jednej ze składowych dopełnienia L. Składowe te oznaczymy odpowiednio przez G_1 i G_2.

Niech następnie T będzie dowolnym odcinkiem, który posiada dokładnie jeden punkt wspólny z L. Wówczas każdy punkt tego odcinka można połączyć z jakimś punktem odcinka $[c_1, c_2]$ łamaną, która nie posiada punktów wspólnych z L.

Niech teraz $\mathfrak{z} \neq \infty$ będzie dowolnym punktem nie leżącym na L i niech b będzie pierwszym punktem wspólnym odcinka $[\mathfrak{z}, a]$ z łamaną L. Odcinek $[\mathfrak{z}, b]$ nie posiada tedy poza b punktów wspólnych z L, a więc, jak poprzednio, punkt $\mathfrak{z}$ można połączyć z jakimś punktem bądź odcinka $[a, c_1]$, bądź odcinka $[a, c_2]$, przy pomocy łamanej rozłącznej z L. Każdy zatem punkt $\mathfrak{z} \neq \infty$ płaszczyzny należy bądź do zbioru G_1, bądź do zbioru G_2. Tym samym jednak punkt ∞ musi należeć również do jednego z tych dwu zbiorów i łamana L dzieli płaszczyznę na co najwyżej dwa obszary.

Pokażemy teraz, że w każdym otoczeniu każdego punktu $c \in L$ znajdują się punkty o różnych indeksach, dokładniej: o indeksach różniących się o 1. Wystarczy przy tym oczywiście ograniczyć się do rozważenia punktów c, które nie są wierzchołkami łamanej L. Tym samym udowodnione będzie, iż obszary G_1 i G_2 istotnie są różne oraz iż $|\mathrm{ind}_L G_1 - \mathrm{ind}_L G_2| = 1$. Zakładając przeto, iż obszar G_1 zawiera punkt ∞, będziemy mieli $\mathrm{ind}_L G_1 = 0$, a więc $|\mathrm{ind}_L G_2| = 1$.



Niech tedy c będzie punktem wewnętrznym któregokolwiek z boków łamanej L, np. boku $[z_0, z_1]$. Ponieważ przy przekształceniu liniowym płaszczyzny indeksy punktów względem krzywej nie ulegają zmianie (por. § 6, str. 181), przeto, stosując ewentualnie obrót płaszczyzny, przyjąć możemy dla prostoty, iż bok $[z_0, z_1]$ jest równoległy do jednej z osi spółrzędnych. Niech Q będzie tym z dwu kwadratów o boku $[z_0, z_1]$, którego zwrot dodatni przeciwny jest zwrotowi odcinka $\overrightarrow{[z_0, z_1]}$, i niech β, z_1, z_0, α będą kolejnymi wierzchołkami tego kwadratu (p. rysunek).

Oznaczmy przez L_0 łamaną $(z_0, a, \beta, z_1, z_2, \ldots, z_n = z_0)$. Dla każdego punktu $\mathfrak{z}$ leżącego poza łamaną L_0 oraz poza obwodem kwadratu Q mamy

$$\int_{L_0} \frac{dz}{z-\mathfrak{z}} = \int_{L} \frac{dz}{z-\mathfrak{z}} + \int_{(Q)} \frac{dz}{z-\mathfrak{z}},$$

a więc

(11.3) $$\operatorname{ind}_{L_0} \mathfrak{z} = \operatorname{ind}_L \mathfrak{z} + \operatorname{ind}_{(Q)} \mathfrak{z}.$$

Oznaczmy teraz przez K dowolne otoczenie punktu c rozłączne z L_0 (na rysunku okrąg koła K oznaczony jest przez C). Indeks $\operatorname{ind}_{L_0}\mathfrak{z}$ posiada tą samą wartość A dla wszystkich punktów $\mathfrak{z} \epsilon K$, i z uwagi na (11.3)

$$\operatorname{ind}_L \mathfrak{z} = \operatorname{ind}_{L_0} \mathfrak{z} - \operatorname{ind}_{(Q)} \mathfrak{z} = \begin{cases} A & dla \quad \mathfrak{z} \epsilon K \cdot CQ \\ A-1 & dla \quad \mathfrak{z} \epsilon K \cdot Q^\circ. \end{cases}$$

W każdym otoczeniu punktu c istnieją tedy punkty, których indeksy względem L różnią się o 1, skąd, jak zauważyliśmy wyżej, wynikają już równości (11.2). Zarazem udowodniliśmy, iż każdy punkt łamanej L jest punktem skupienia obydwu obszarów G_1 i G_2, a ponieważ obszary te nie mogą oczywiście posiadać punktów brzegowych poza L, zatem łamana ta jest ich wspólnym brzegiem.

Z dwu obszarów, na jakie łamana zamknięta bez punktów wielokrotnych dzieli płaszczyznę, ten, który zawiera punkt ∞, nazywamy *zewnętrznym*; drugi z nich nazywamy *wewnętrznym*. Na mocy twierdzenia 11.1 indeks obszaru wewnętrznego względem danej łamanej jest równy $+1$ lub -1. Jeżeli indeks ten jest równy $+1$, wówczas mówimy, iż łamana jest *zorientowana dodatnio*.

Opierając się na twierdzeniu Jordana dla linii łamanej, otrzymujemy natychmiast z tw. 7.9 wniosek następujący:

(11.4) *Jeżeli funkcja W, ciągła na kole domkniętym K i holomorficzna w jego wnętrzu, jest jednoznacznie odwracalna na okręgu koła K i przekształca ten okrąg na łamaną zamkniętą L, wówczas funkcja ta jest jednoznacznie odwracalna na całym kole K i przekształca wnętrze tego koła na obszar wewnętrzny łamanej L.*

Opierając się na twierdzeniu Jordana dla dowolnych krzywych zamkniętych, moglibyśmy oczywiście usunąć z tw. 11.4 założenie, że funkcja W przekształca okrąg na łamaną. Z odwracalności funkcji W na okręgu koła K wynika bowiem w każdym razie, że funkcja ta przekształca ten okrąg na pewną krzywą zamkniętą L bez punktów wielokrotnych, i tw. 11.4, w ogólniejszym sformułowaniu, orzekałoby, że funkcja W przekształca w sposób jedno-jednoznaczny wnętrze koła K na obszar wewnętrzny krzywej L.

Również koło domknięte K możemy zastąpić w tw. 11.4 przez dowolny obszar domknięty, ograniczony przez krzywą zamkniętą bez punktów wielokrotnych (por. uwagę, str. 187).

ĆWICZENIE. 1. Jeżeli funkcja W, ciągła na kole domkniętym K i meromorficzna w jego wnętrzu, posiada dokładnie jeden biegun (jednokrotny) wewnątrz K, jest jednoznacznie odwracalna na okręgu koła K i przekształca ten okrąg na łamaną zamkniętą L zorientowaną ujemnie, wówczas funkcja W jest jednoznacznie odwracalna na całym kole K i przekształca wnętrze tego koła na obszar zewnętrzny łamanej L.

*§ 12. Definicja analityczna stopnia spójności obszaru.

Jako uogólnienie twierdzeń § 10 podamy kryterium analityczne n-spójności obszaru. Udowodnimy przede wszystkim następujące uzupełnienie lemmatu 10.3:

(12.1) *Jeżeli $S_1, S_2, \ldots, S_n$ są n różnymi składowymi dopełnienia obszaru G, nie zawierającymi punktu ∞, wówczas wyznaczyć można w G układ n krzywych regularnych zamkniętych $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takich, iż*

(12.2) $$\operatorname{ind}_{C_k} S_j = \begin{cases} 0 & dla \quad k \neq j, \\ 1 & dla \quad k = j, \end{cases} \qquad gdzie \quad k, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dowód. Jak w dowodzie lemmatu 10.3 przyjąć możemy, że G nie zawiera punktu ∞.

Oznaczając wówczas przez S_0 tę składową dopełnienia obszaru G, która zawiera punkt ∞, połączymy ją przede wszystkim ze składowymi $S_2, S_3, \ldots, S_n$ przy pomocy linij rozłącznych z S_1. W tym celu niech $a_2, a_3, \ldots, a_n, a_0$ oznaczają odpowiednio jakiekolwiek punkty brzegowe składowych $S_2, S_3, \ldots, S_n, S_0$. Każdemu z punktów a_j (gdzie $j = 2, 3, \ldots, n, 0$) przyporządkujemy pewien punkt $b_j \epsilon G$ w ten sposób, by odcinki $[a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], [a_0, b_0]$ były rozłączne z S_1.

Łączymy następnie punkty $b_2, b_3, \ldots, b_n$ z punktem b_0 przy pomocy odpowiednio łamanych $L_2, L_3, \ldots, L_n$, przebiegających w G. Niech

$$G_1 = G - [a_0, b_0] - \sum_{k=2}^{n} \{[a_k, b_k] + L_k\}.$$

Zbiór G_1 jest otwarty, przy czym, jak łatwo dowodzimy, S_1 jest składową dopełnienia tego zbioru. W myśl lemmatu 10.3 przeprowadzić możemy w zbiorze $G_1 \subset G$ łamaną zamkniętą C_1 bez punktów wielokrotnych taką, iż $\operatorname{ind}_{C_1} S_1 \neq 0$; na mocy tw. 11.1 mamy więc dokładnie $\operatorname{ind}_{C_1} S_1 = 1$ przy założeniu, że łamana C_1 została zorientowana dodatnio. Ponieważ zaś $S_2, S_3, \ldots, S_n$ zawierają się w tej składowej dopełnienia zbioru G_1, która zawiera zbiór S_0, a więc punkt ∞, zatem $\operatorname{ind}_{C_1} S_j = 0$ dla $j = 2, 3, \ldots, n$. Analogicznie określamy pozostałe krzywe C_k tak, aby warunki (12.2) były spełnione.

Udowodnimy z kolei lemmat, który uważany być może za uogólnienie tw. 2.3:

(12.3) *Jeżeli dopełnienie zbioru otwartego G, nie zawierającego punktu ∞, ma dokładnie $n+1$ składowych, wówczas oznaczając przez $S_1, S_2, \ldots, S_n$ te składowe, które nie zawierają punktu ∞, a przez $C_1, C_2, \ldots, C_n$ układ krzywych w G spełniających warunki* (12.2), *mamy*

$$\int_C W(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_C S_j \cdot \int_{C_j} W(z)\,dz \tag{12.4}$$

dla każdej funkcji holomorficznej $W(z)$ i każdej krzywej regularnej zamkniętej C, przebiegającej w zbiorze G.

Dowód. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą punktami obranymi dowolnie odpowiednio na składowych $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Na mocy twierdzenia Rungego 2.1 funkcja $W(z)$ może być przedstawiona w zbiorze G jako granica niemal jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyj wymiernych $\{H_p(z)\}$ o biegunach co najwyżej w punktach $a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$. W myśl twierdzenia o residuach 7.1 mamy więc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C H_p(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_C a_j \cdot \operatorname{res}_{a_j} H_p = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_C S_j \cdot \operatorname{res}_{a_j} H_p \tag{12.5}$$

dla każdej krzywej regularnej zamkniętej C przebiegającej w G, a w szczególności

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} H_p(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_{C_k} S_j \cdot \operatorname{res}_{a_j} H_p = \operatorname{res}_{a_k} H_p \qquad \text{dla} \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Podstawiając ostatnie wyrażenia w (12.5), mamy

$$\int_C H_p(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}_C S_j \cdot \int_{C_j} H_p(z)\,dz$$

i, przechodząc do granicy wraz z $p \to \infty$, otrzymujemy (12.4).

Możemy teraz podać następujące uogólnienie tw. 10.2:

(12.6) *Na to, aby dopełnienie obszaru G posiadało co najwyżej $n+1$ składowych, konieczne jest i dostateczne, aby istniał układ n funkcyj $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_n(z)$, holomorficznych, nigdzie nie znikających w G i takich, iż dla każdej funkcji $W(z)$, holomorficznej i nigdzie nie znikającej w G, istnieje gałąź $\log\{W(z)/[\Phi_1(z)]^{h_1} \ldots [\Phi_n(z)]^{h_n}\}$, gdzie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ są liczbami całkowitymi (zależnymi na ogół od $W(z)$).*

Dowód. Stosując ewentualnie inwersję, przyjąć możemy, iż G nie zawiera punktu ∞.

1^0 Udowodnimy najpierw konieczność warunku twierdzenia. Załóżmy, iż dopełnienie obszaru G zawiera dokładnie $m+1$ składowych i oznaczmy przez $S_1, S_2, \ldots, S_m$ te spośród tych składowych, które nie zawierają punktu ∞. Przez $a_1, a_2, \ldots, a_m$ oznaczymy punkty wybrane odpowiednio na składowych $S_1, S_2, \ldots, S_m$, a przez $C_1, C_2, \ldots, C_m$ układ krzywych regularnych zamkniętych przebiegających w G i spełniających warunek

$$\operatorname{ind}_{C_k} S_j \begin{matrix} =0 & \text{dla} & k \neq j \\ =1 & \text{dla} & k=j \end{matrix}, \quad \text{gdzie } k, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{12.7}$$

Układ taki istnieje na zasadzie lemmatu 12.1.

Załóżmy teraz, że $m \leqslant n$, i niech $W(z)$ będzie funkcją holomorficzną, nigdzie nie znikającą w G. W myśl lemmatu 12.3 dla każdej krzywej zamkniętej regularnej C przebiegającej w G mamy

$$\int_C \frac{W'(z)}{W(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{ind}_C S_j \cdot \int_{C_j} \frac{W'(z)}{W(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{m} h_j \cdot \int_C \frac{dz}{z-a_j}, \tag{12.8}$$

gdzie $h_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} \frac{W'(z)}{W(z)}\,dz$ są w myśl tw. 5.4 liczbami całkowitymi.

Przyjmując $F(z) = W(z)/(z-a_1)^{h_1}(z-a_2)^{h_2} \ldots (z-a_m)^{h_m}$, mamy

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{W'(z)}{W(z)} - \sum_{j=1}^{m} \frac{h_j}{z-a_j}$$

i z równości (12.8) otrzymujemy

$$\int_C \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = \int_C \frac{W'(z)}{W(z)}\,dz - \sum_{j=1}^{m} h_j \cdot \int_C \frac{dz}{z-a_j} = 0.$$

Na mocy tw. 2.6, Rozdz. II, istnieje więc w G gałąź $\log F(z)$, t. j. $\log\{W(z)/(z-a_1)^{h_1} \ldots (z-a_m)^{h_m}\}$. Ponieważ $m \leqslant n$, funkcje zaś $z-a_1, \ldots, z-a_m$ są holomorficzne i nigdzie nie znikają w G, przeto warunek twierdzenia jest spełniony.

2^0 Przechodząc do dowodu dostateczności warunku twierdzenia, załóżmy, że $S_1, S_2, \ldots, S_m$ jest układem m składowych zbioru CG i że żadna z tych składowych nie zawiera punktu ∞. Podobnie jak w dowodzie konieczności warunku oznaczymy przez $a_1, a_2, \ldots, a_m$

punkty wybrane dowolnie na tych składowych, a przez $C_1, C_2, \ldots, C_m$, krzywe regularne zamknięte, przebiegające w G i spełniające warunki (12.7).

Załóżmy teraz, że dla obszaru G określony został układ n funkcyj $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_n(z)$, holomorficznych, nigdzie nie znikających w G, takich, iż dla każdej funkcji $W(z)$ istnieje w G gałąź $\log\{W(z)/[\Phi_1(z)]^{h_1}[\Phi_2(z)]^{h_2}\ldots[\Phi_n(z)]^{h_n}\}$ przy stosownym obiorze stałych całkowitych $h_1, h_2, \ldots, h_n$. W szczególności każdemu układowi m stałych całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_m$ odpowiada taki układ n stałych całkowitych $h_1, h_2, \ldots, h_n$, iż istnieje w G gałąź

$$\log\{(z-a_1)^{\alpha_1}\ldots(z-a_m)^{\alpha_m}/[\Phi_1(z)]^{h_1}\ldots[\Phi_n(z)]^{h_n}\},$$

t. zn. w myśl tw. 2.6, Rozdz. II, że

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \int_C \frac{dz}{z-a_j} - \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \int_C \frac{\Phi_i'(z)}{\Phi_i(z)}\, dz = 0$$

dla każdej krzywej regularnej zamkniętej C, przebiegającej w G. Podstawiając w tej równości kolejno zamiast C krzywe C_k i przyjmując dla skrócenia $\beta_{k,i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\Phi_i'(z)}{\Phi_i(z)}\, dz$, otrzymujemy na zasadzie (12.7) układ m równań liniowych

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{k,i} \cdot h_i = a_k, \qquad gdzie \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Układ ten musi być rozwiązalny względem h_i przy każdym doborze stałych całkowitych a_k, co jest jednak możliwe tylko wtedy, gdy $m \leqslant n$, a przeto uzasadnia dostateczność rozważanego warunku.