

1장. 행렬(Matrix)

행렬과 행렬의 연산

행렬(Matrix)

| | 월 | 화 | 수 | 목 | 금 | 토 | 일 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|
| 국어 | 2 | 3 | 2 | 4 | 1 | 4 | 2 |
| 영어 | 0 | 3 | 1 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| 수학 | 4 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 2 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 2 | 4 | 1 | 4 | 2 |
| 0 | 3 | 1 | 4 | 3 | 2 | 2 |
| 4 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 2 |

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

행렬(Matrix)

- 행렬(Matrix)

□ $(n \times m)$ 행렬: nm 개의 실수를 직사각형 형태로 나열한 배열, $A = [a_{ij}]_{n \times m} = [a_{ij}]$ $[A]_{n \times m}$

- n 차 정사각행렬(n -Square Matrix, 정방행렬)

□ $(n \times m)$ 행렬 $A = [a_{ij}]$ 에서 행과 열의 수가 같을 때($m = n$)

$$[A]_{n \times n} = [A]_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$(n \times n)$ 정사각행렬 A
 $(n \times n)$ 정방행렬 A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- 대각행렬(Diagonal Matrix)

$\forall x$: 모든 x 에 대하여

□ $(n \times n)$ 정사각행렬 $D = [d_{ij}]$, $\forall i \forall j \{i \neq j\} \Rightarrow (d_{ij} = 0)$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

d_{ii} : 대각 원소(Diagonal Element)
대각합(Trace): 대각 원소들의 합

d_{ii} 는 0일 수 있음

행(Row): 가로줄
열(Column): 세로줄
행렬의 크기(차원): $n \times m$
 a_{ij} : 원소, (i, j) 의 성분
스칼라(Scalar)
 $(A)_{ij}$
 i : 행 번호, j : 열 번호
행 행렬(벡터): $1 \times m$
열 행렬(벡터): $n \times 1$

- 단위행렬(Unit Matrix, Identity Matrix): I, E

대각행렬에서 대각 원소가 모두 1인 행렬, $\forall i \{a_{ii} = 1\}$

$$I = [I]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} = [\mathbf{0}]_n$$

영 행렬(Zero Matrix): $\forall i \forall j (a_{ij} = 0)$

행렬(Matrix)

● 행렬의 예

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = [1 \quad 0 \quad 3]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = [2]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

행렬(Matrix)

● 행렬의 상등(Equality)

□ $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ $B = [b_{ij}]_{s \times t}$

$(A = B) \Leftrightarrow (a_{ij} = b_{ij})$
 $(A = B) \Leftrightarrow (A)_{ij} = (B)_{ij}$

- $\{(n = s) \wedge (m = t)\} \wedge \{\forall i \forall j (a_{ij} = b_{ij})\} \Leftrightarrow (A = B)$
 - 행렬 A 의 크기와 행렬 B 의 크기가 같음
 - 행렬 A 의 (i, j) 성분(a_{ij})과, 행렬 B 의 (i, j) 성분(b_{ij})이 같아야 함

● 전치행렬(Transpose Matrix): A^T

□ $(n \times m)$ 행렬 $A = [a_{ij}]$ 에서 행과 열을 바꾼 $(m \times n)$ 행렬(A^T)을 전치행렬이라 함

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$

$(A)_{ij} = (A^T)_{ji}$

● 대칭행렬(Symmetric Matrix)

□ $(n \times m)$ 행렬 $A = [a_{ij}]$ 의 전치행렬이 행렬 A 와 같을 때($A^T = A$) 행렬 A 를 대칭행렬이라 함

$\forall i \forall j \{a_{ij} = a_{ji}\}$

$(A^T = -A)$: 반대칭(Skew-Symmetric) 행렬(대각 원소는 모두 0)

□ 행렬 $A = [a_{ij}]$ 가 대칭행렬이면 행렬 A 는 정사각행렬임

● 분할된 행렬(Partitioned Matrix), 부분행렬(Submatrix)

A, B : 대칭행렬
 $A + B$
 $A - B$

AA^T
 $A + A^T$
 $A - A^T$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & B \\ C & D \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$

$A = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]$

행렬(Matrix)

● 행렬의 연산

□ 행렬의 덧셈과 뺄셈

행렬 A 의 크기와 행렬 B 의 크기가 같아야 함

$$A = [a_{ij}]_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad B = [b_{ij}]_{n \times m} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2m} + b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{n \times m}$$

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2m} - b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \dots & a_{nm} - b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{n \times m}$$

$$(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij}$$

□ 행렬의 스칼라 곱

$$kA = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{nm} \end{bmatrix}$$

$$Ak = kA = [ka_{ij}]_{n \times m}$$

$$(-1)A = -A$$

행렬(Matrix)

● 행렬의 연산

□ 행렬의 덧셈과 뺄셈, 스칼라 곱셈

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = ?$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = ?$$

$$A = [1 \quad 0 \quad 3]$$

$$B = [1 \quad 0 \quad 3]$$

$$A + B = [2 \quad 0 \quad 6]$$

$$A - B = ?$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = ?$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(-2)A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

행렬(Matrix)

행렬의 연산

행렬의 곱셈

- $(m \times r)$ 행렬 A 와 $(r \times n)$ 행렬 B 의 곱셈의 결과는 $(m \times n)$ 행렬임
- $A \times B$ 또는 AB

행렬 A 의 열의 개수와 행렬 B 의 행의 개수가 같아야 함

• $AB = [c_{ij}] = [c_{ij}]_{m \times n}$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$(1 \times n)$ 행렬 v , $(n \times n)$ 행렬 M

• $vM = v'$

$(n \times 1)$ 행렬 v , $(n \times n)$ 행렬 M

• $Mv = v'$

□ $AB = A[b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n] = [Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_n]$

□ $AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ \vdots \\ a_m B \end{bmatrix}$

$[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$

벡터(Vector)

$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$
 $B = [a_{ij}]_{3 \times 2}$
 $AB = [c_{ij}]_{2 \times 2}$
 $BA = [d_{ij}]_{3 \times 3}$
 $AB \neq BA$

$AA = A^2$
 $AAA = A^3$
 $AA \dots A = A^n$
 $A^0 = I$

행렬(Matrix)

● 행렬의 연산

□ 행렬의 곱셈

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 9 \\ 2 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = [1 \quad 0 \quad 3] \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = [1 \quad 0 \quad 3] \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad AB = [10]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

행렬(Matrix)

● 행렬 연산의 성질

- $A + B = B + A$
- $A + (B + C) = (A + B) + C$
- $A + 0 = 0 + A = A \quad A - 0 = A \quad 0 - A = -A$
- $A + (-A) = A - A = (-A) + A = 0$
- $(-1)A = -A$
- $k(A + B) = kA + kB \quad k(A - B) = kA - kB$
- $(m + n)A = mA + nA \quad (m - n)A = mA - nA$
- $(mn)A = m(nA) = n(mA)$
- $(AB)C = A(BC) = ABC$
- $A(B + C) = AB + AC \quad A(B - C) = AB - AC$
- $(B + C)A = BA + CA \quad (B - C)A = BA - CA$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- $IA = A = AI$
- $0A = 0 \quad A0 = 0A = 0$
- $A^m A^n = A^{m+n} = A^n A^m \quad A^0 = I$
- $(A^m)^n = A^{mn}$

$$\begin{aligned} A - B &\neq B - A \\ A - B &= A + (-B) \\ B - A &= B + (-A) \end{aligned}$$

$$AB \neq BA$$

$$(kA = 0) \Rightarrow (k = 0) \vee (A = 0)$$

$$(AD = 0) \nRightarrow (A = 0) \vee (D = 0)$$

$$\begin{aligned} (B = C) &\Rightarrow (AB = AC) \\ (AB = AC) &\nRightarrow (B = C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & C &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ AD &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ AB = AC &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

행렬(Matrix)

● 행렬 연산의 성질

- $A + B = B + A$

- ① 행렬 $(A + B)$ 의 크기와 행렬 $(B + A)$ 의 크기가 같음
 A 가 $(m \times n)$ 행렬이라고 가정하면 덧셈 $(A + B)$ 이 성립하려면 B 가 $(m \times n)$ 행렬이어야 함
 $(A + B)$ 는 $(m \times n)$ 행렬이고 $(B + A)$ 도 $(m \times n)$ 행렬임
- ② 행렬 $(A + B)$ 와 행렬 $(B + A)$ 의 대응 원소가 같음
 $(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = (B)_{ij} + (A)_{ij} = (B + A)_{ij}$

- $(B = C) \rightarrow (AB = AC)$

- ① 행렬 AB 의 크기와 행렬 AC 의 크기가 같음
 A 가 $(m \times r)$ 행렬이고 B 와 C 가 $(r \times n)$ 행렬이라고 가정하면 AB 와 AC 는 $(m \times n)$ 행렬임
- ② 행렬 AB 와 행렬 AC 의 대응 원소가 같음
 $(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} = a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{ir}c_{rj} = (AC)_{ij}$

- $A(B + C) = AB + AC$

- ① 행렬 $A(B + C)$ 의 크기와 행렬 $(AB + AC)$ 의 크기가 같음
 $A(B + C)$ 가 $(m \times n)$ 행렬이라고 가정하면 A 가 $(m \times r)$ 행렬이고 $(B + C)$ 가 $(r \times n)$ 행렬임
 $(B + C)$ 가 $(r \times n)$ 행렬이면 B 와 C 가 $(r \times n)$ 행렬임
 AB 와 AC 는 $(m \times n)$ 행렬이고 $(AB + AC)$ 는 $(m \times n)$ 행렬임
- ② 행렬 $A(B + C)$ 와 행렬 $(AB + AC)$ 의 대응 원소가 같음
$$\begin{aligned}(A(B + C))_{ij} &= a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \cdots + a_{ir}(b_{rj} + c_{rj}) \\&= a_{i1}b_{1j} + a_{i1}c_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} + a_{ir}c_{rj} \\&= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{ir}c_{rj}) \\&= (AB)_{ij} + (AC)_{ij}\end{aligned}$$

행렬(Matrix)

● 행렬 연산의 성질

- $(B = C) \rightarrow (A + B = A + C)$

- ① 행렬 $(A + B)$ 의 크기와 행렬 $(A + C)$ 의 크기가 같음

- B 가 $(m \times n)$ 행렬이라고 가정하면 C 도 $(m \times n)$ 행렬이다.

- 덧셈 $(A + B)$ 와 $(A + C)$ 가 성립하려면 A 가 $(m \times n)$ 행렬이어야 함

- $(A + B)$ 는 $(m \times n)$ 행렬이고 $(A + C)$ 도 $(m \times n)$ 행렬임

- ② 행렬 $(A + B)$ 와 행렬 $(A + C)$ 의 대응 원소가 같음

- $(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = (A)_{ij} + (C)_{ij} = (A + C)_{ij}$

- $(B = C) \rightarrow (B - A = C - A)$

- $(X + A = B)$ 를 만족하는 행렬 X 는 유일하고 $(X = B - A)$ 이다.

$$X + A = B$$

$$X + A - A = B - A$$

$$X + 0 = B - A$$

$$X = B - A$$

$$Y + A = B = X + A$$

$$Y + A = X + A$$

$$Y + A - A = X + A - A$$

$$Y + 0 = X + 0$$

$$Y = X$$

행렬(Matrix)

● 행렬 연산의 성질

- $(A + B) + C = A + (B + C)$

$$((A + B) + C)_{ij} = (A + B)_{ij} + (C)_{ij} = \{(A)_{ij} + (B)_{ij}\} + (C)_{ij} = (A)_{ij} + (B + C)_{ij} = (A + (B + C))_{ij}$$

- $k(A + B) = kA + kB$

$$(k(A + B))_{ij} = k(A + B)_{ij} = k\{(A)_{ij} + (B)_{ij}\} = k(A)_{ij} + k(B)_{ij}$$

- $(AB)C = A(BC) = ABC$

① 행렬 $(AB)C$ 의 크기와 행렬 $A(BC)$ 의 크기가 같음

$(AB)C$ 가 $(m \times n)$ 행렬이라고 가정하면 AB 가 $(m \times r)$ 행렬이고 C 가 $(r \times n)$ 행렬임

AB 가 $(m \times r)$ 행렬이면 A 가 $(m \times s)$ 행렬이고 B 가 $(s \times r)$ 행렬임

BC 는 $(s \times n)$ 행렬이고 $A(BC)$ 는 $(m \times n)$ 행렬임

② 행렬 $(AB)C$ 와 행렬 $A(BC)$ 의 대응 원소가 같음

$(AB = M)$, $(BC = N)$ 이라고 가정

$$(M)_{pq} = m_{pq} = a_{p1}b_{1q} + a_{p2}b_{2q} + \cdots + a_{ps}b_{sq} = \sum_{k=1}^s a_{pk}b_{kq}$$

$$(N)_{pq} = n_{pq} = b_{p1}c_{1q} + b_{p2}c_{2q} + \cdots + b_{pr}c_{rq} = \sum_{k=1}^r b_{pk}c_{kq}$$

$$((AB)C)_{ij} = (MC)_{ij} = m_{i1}c_{1j} + m_{i2}c_{2j} + \cdots + m_{ir}c_{rj}$$

$$= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{is}b_{s1})c_{1j} + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{is}b_{s2})c_{2j} + \cdots$$

$$+ (a_{i1}b_{1r} + a_{i2}b_{2r} + \cdots + a_{is}b_{sr})c_{rj}$$

$$= a_{i1}b_{11}c_{1j} + a_{i2}b_{21}c_{1j} + \cdots + a_{is}b_{s1}c_{1j} + a_{i1}b_{12}c_{2j} + a_{i2}b_{22}c_{2j} + \cdots + a_{is}b_{s2}c_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sr}c_{rj}$$

$$(A(BC))_{ij} = (AN)_{ij} = a_{i1}n_{1j} + a_{i2}n_{2j} + \cdots + a_{is}n_{sj}$$

$$= a_{i1}(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + \cdots + b_{1r}c_{rj}) + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + \cdots + b_{2r}c_{rj}) + \cdots$$

$$+ a_{is}(b_{s1}c_{1j} + b_{s2}c_{2j} + \cdots + b_{sr}c_{rj})$$

$$= a_{i1}b_{11}c_{1j} + a_{i1}b_{12}c_{2j} + \cdots + a_{i1}b_{1r}c_{rj} + a_{i2}b_{21}c_{1j} + a_{i2}b_{22}c_{2j} + \cdots + a_{i2}b_{2r}c_{rj} + \cdots + a_{is}b_{sr}c_{rj}$$

- $[I]_n[A]_{n \times m} = [A]_{n \times m} = [A]_{n \times m}[I]_m$

$$(IA)_{kj} = i_{k1}a_{1j} + i_{k2}a_{2j} + \cdots + i_{kk}a_{kj} + \cdots + i_{kn}a_{nj} = a_{kj} = (A)_{kj}$$

$$i_{pq} = \begin{cases} 1 & (p = q) \\ 0 & (p \neq q) \end{cases}$$

행렬(Matrix)

● 행렬 연산의 성질

- $(A^T)^T = A$
- $I^T = I$
- $(kA)^T = kA^T$
 $((kA)^T)_{ij} = (kA)_{ji} = k(A_{ji})$
 $(kA^T)_{ij} = k(A^T)_{ij} = k(A_{ji})$
- $(A + B)^T = A^T + B^T = B^T + A^T$
 $((A + B)^T)_{ij} = (A + B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij} = (A^T + B^T)_{ij} = (B^T + A^T)_{ij}$
 A 와 B 가 대칭행렬이면 $(A + B)^T$ 는 대칭행렬이다: $(A + B)^T = A + B$
- $(A - B)^T = A^T - B^T$
 $((A - B)^T)_{ij} = (A - B)_{ji} = (A)_{ji} - (B)_{ji} = (A^T)_{ij} - (B^T)_{ij} = (A^T - B^T)_{ij}$
- $(AB)^T = B^T A^T$
 - ① 행렬 $(AB)^T$ 의 크기와 행렬 $B^T A^T$ 의 크기가 같음
 A 가 $(m \times r)$ 행렬이고 B 가 $(r \times n)$ 행렬이라고 가정하면 AB 가 $(m \times n)$ 행렬이고 $(AB)^T$ 가 $(n \times m)$ 행렬임
 B^T 가 $(n \times r)$ 행렬이고 A^T 가 $(r \times m)$ 행렬이고 $B^T A^T$ 가 $(n \times m)$ 행렬임
 - ② 행렬 $(AB)^T$ 와 행렬 $B^T A^T$ 의 대응 원소가 같음
 $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri}$
 $(B^T = M)$ 이라고 하면 $(m_{ij} = b_{ji})$ 이고 $(A^T = N)$ 이라고 하면 $(n_{ij} = a_{ji})$ 이다.
 $(B^T A^T)_{ij} = (MN)_{ij} = m_{i1}n_{1j} + m_{i2}n_{2j} + \cdots + m_{ir}n_{rj}$
 $= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ri}a_{jr}$
 $= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri}$

대칭행렬: $A^T = A$

행렬(Matrix)

● 행렬의 연산

□ 행렬의 일차 결합(Linear Combination)

- 크기가 같은 행렬 A_1, A_2, \dots, A_n 과 실수 c_1, c_2, \dots, c_n 이 주어질 때 다음을 일차 결합이라 함
 $c_1 A_1 + c_2 A_2 + \dots + c_n A_n$
- $(m \times n)$ 행렬 A , $(n \times 1)$ 행렬 x
 - 행렬의 곱 Ax 는 행렬 A 의 열벡터와 x 의 원소들의 일차 결합으로 표현할 수 있음

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

$$= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\blacksquare A(kx) = k(Ax)$$

$$A(kx) = (kx_1)a_1 + (kx_2)a_2 + \dots + (kx_n)a_n = k(x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n) = k(Ax)$$

$$\blacksquare A(x + y) = Ax + Ay$$

$$\begin{aligned} A(x + y) &= (x_1 + y_1)a_1 + (x_2 + y_2)a_2 + \dots + (x_n + y_n)a_n \\ &= (x_1a_1 + x_2a_2 + \dots + x_na_n) + (y_1a_1 + y_2a_2 + \dots + y_na_n) = Ax + Ay \end{aligned}$$

$$\blacksquare A(k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n) = k_1Ax_1 + k_2Ax_2 + \dots + k_nAx_n$$

행렬(Matrix)

● 행렬의 연산

□ 행렬의 일차 결합(Linear Combination)

- 행렬의 일차 결합으로 행렬의 곱을 표현하기
 - ($m \times r$) 행렬 A , ($r \times s$) 행렬 B , ($s \times 1$) 행렬 x

$$AB = [c_{ik}]$$

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ir}b_{rk} = \sum_{j=1}^r a_{ij}b_{jk}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix}$$

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_r] \quad B = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_s]$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad a_r = \begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{r2} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad b_s = \begin{bmatrix} b_{1s} \\ b_{2s} \\ \vdots \\ b_{rs} \end{bmatrix}$$

$$AB = [Ab_1 \quad Ab_2 \quad \cdots \quad Ab_s]$$

$$Ab_k = b_{1k}a_1 + b_{2k}a_2 + \cdots + b_{rk}a_r$$

$$= b_{1k} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + b_{2k} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + b_{rk} \begin{bmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{1k} + a_{12}b_{2k} + \cdots + a_{1r}b_{rk} \\ a_{21}b_{1k} + a_{22}b_{2k} + \cdots + a_{2r}b_{rk} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{1k} + a_{m2}b_{2k} + \cdots + a_{mr}b_{rk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{mk} \end{bmatrix}$$

$$Bx = x_1b_1 + x_2b_2 + \cdots + x_sb_s$$

$$A(Bx) = (AB)x = A(x_1b_1 + x_2b_2 + \cdots + x_sb_s) = x_1(Ab_1) + x_2(Ab_2) + \cdots + x_s(Ab_s)$$

행렬(Matrix)

● 역행렬(Inverse Matrix): A^{-1}

□ 정사각행렬 A 에 대해 $AB = BA = I$ 를 만족하는 행렬 B 를 행렬 A 의 역행렬이라 함
 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

□ 가역행렬(Invertible Matrix 또는 Nonsingular Matrix)

- 역행렬이 존재하는 행렬을 가역행렬이라 함(행렬이 가역이다)

□ 특이행렬(Singular Matrix)

- 역행렬이 존재하지 않는 행렬을 특이행렬 또는 비가역행렬이라 함

□ 역행렬이 존재하면 유일(Unique)하다.

- 행렬 B 가 행렬 A 의 역행렬이고 행렬 C 가 행렬 A 의 역행렬이면 ($B = C$)이다.

행렬 B 가 행렬 A 의 역행렬: $BA = I$
 행렬 C 가 행렬 A 의 역행렬: $AC = I$
 $C = IC = (BA)C = B(AC) = BI = B$

□ $(AB = I) \Rightarrow (B = A^{-1}), (BA = I) \Rightarrow (A = B^{-1})$

$$\begin{array}{llllll} AB = I & A^{-1}(AB) = A^{-1}I & (A^{-1}A)B = A^{-1}I & (I)B = A^{-1}I & B = A^{-1} \\ BA = I & (BA)A^{-1} = IA^{-1} & B(AA^{-1}) = IA^{-1} & B(I) = IA^{-1} & B = A^{-1} \end{array}$$

$(AB = I) \Rightarrow A$ 와 B 는 서로의 가역행렬

A^{-1} 가 존재하는 경우

A^{-1} 가 존재하는가?

□ 2차 정사각행렬의 역행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

행렬(Matrix)

● 역행렬(Inverse Matrix): A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(2 * 3 - (-5 * -1))} \begin{bmatrix} 3 & -(-5) \\ -(-1) & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(6 - 1)} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A^{-1} 가 존재하는가?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [a_1 \ a_2 \ 0] \quad BA = B[a_1 \ a_2 \ 0] = [Ba_1 \ Ba_2 \ 0] \neq I$$

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ir}b_{rk} = \sum_{j=1}^r a_{ij}b_{jk}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

행렬 A 의 i 번째 행이 $[0 \ \dots \ 0]$ 이면 AB 의 i 번째 행 $[0 \ \dots \ 0]$ 이다.

행렬 A 의 k 번째 열이 $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 이면 AB 의 k 번째 열이 $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다.

행렬(Matrix)

● 역행렬(Inverse Matrix)의 성질

$$\square (A^{-1} = B) \Leftrightarrow (AB = I)$$

$$\square A \text{가 가역행렬이면 } A^{-1} \text{는 가역행렬이고 } (A^{-1})^{-1} = A \text{이다.}$$

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

$$\square I^{-1} = I$$

$$I^2 = I = I^2$$

$$\square A \text{와 } B \text{가 가역행렬이면 } AB \text{는 가역행렬이고 } (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \text{이다.}$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}(I)B = B^{-1}B = I$$

$$\square (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

$$\square A \text{가 가역행렬이면 } A^k \text{는 가역행렬이고 } (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k \text{이다.}$$

$$A^k \{(A^{-1})^k\} = (AA \dots AA)(A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}A^{-1}) = I$$

$$\square (n \geq 2) \text{인 모든 자연수 } n \text{에 대하여 } (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \text{이다.}$$

$$(A^n)^{-1} = (AAA \dots A)^{-1} = A^{-1}A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1} = (A^{-1})^n$$

(수학적 귀납법)

$$\textcircled{1} (k=2) \text{일 때 성립: } (A^2)^{-1} = (AA)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2$$

$$\textcircled{2} (k=n-1) \text{일 때 성립한다고 가정: } (A^{n-1})^{-1} = (A^{-1})^{n-1}$$

$$\textcircled{3} (k=n) \text{일 때 성립함을 증명: } (A^n)^{-1} = (AA^{n-1})^{-1} = (A^{n-1})^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^{n-1}A^{-1} = (A^{-1})^n$$

$$\square A \text{가 가역행렬이면 } kA \text{는 가역행렬이고 역행렬은 } (kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1} \text{이다.}$$

$$(kA)(k^{-1}A^{-1}) = k^{-1}(kA)A^{-1} = k^{-1}k(A)A^{-1} = I = kk^{-1}(A^{-1})(A) = k(k^{-1}A^{-1})(A) = (k^{-1}A^{-1})(kA)$$

$$\begin{aligned} A^{-1}A^{-1} &= (A^{-1})^2 = A^{-2} \\ A^{-1}A^{-1}A^{-1} &= (A^{-1})^3 = A^{-3} \\ A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1} &= (A^{-1})^n = A^{-n} \end{aligned}$$

행렬(Matrix)

● 퀴즈(Quiz)

- 행렬 B 가 가역행렬일 때 $(AB^{-1} = B^{-1}A)$ 는 $(AB = BA)$ 와 동치이다.
 - $(AB^{-1} = B^{-1}A)$ 이면 $(AB = BA)$ 이다.
 - $(AB = BA)$ 이면 $(AB^{-1} = B^{-1}A)$ 이다.
- $(A^4 = \mathbf{0})$ 이면 $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$ 이다.
- $(A^{n+1} = \mathbf{0})$ 이면 $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n$ 이다.

행렬(Matrix)

● 역행렬(Inverse Matrix)의 성질

- A 가 대칭행렬이면 A^T 이 대칭행렬이다.
- A 가 가역행렬이면 A^T 는 가역행렬이고 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ 이다.

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I, (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$$

$$(A^{-1})^T \text{는 } A^T \text{의 역행렬이다}((A^{-1})^T = (A^T)^{-1}).$$

- A 가 가역 대칭행렬이면 A^{-1} 이 대칭행렬이다.

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

- AA^T 와 $A^T A$ 는 대칭행렬이다.

$$(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$$

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

- A 가 가역행렬이면 AA^T 와 $A^T A$ 는 가역행렬이다.

A 가 가역행렬이면 A^T 도 가역행렬이다. 즉, A^{-1} 와 $(A^T)^{-1}$ 가 존재한다.

$$A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1}$$

- A 와 B 가 대칭행렬일 때, AB 가 대칭행렬인 것은 $(AB = BA)$ 와 동치이다.

$$A \text{와 } B \text{가 대칭행렬} \Rightarrow A^T = A, B^T = B$$

$$\textcircled{1} (AB = BA) \Rightarrow AB \text{가 대칭행렬}$$

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

$$\textcircled{2} AB \text{가 대칭행렬} \Rightarrow (AB = BA)$$

$$(AB)^T = AB$$

$$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$B^T A^T = (AB)^T$$

$$\text{대칭행렬: } A^T = A$$

$$(AB = BA): \text{교환 가능(Commute)}$$

행렬(Matrix)

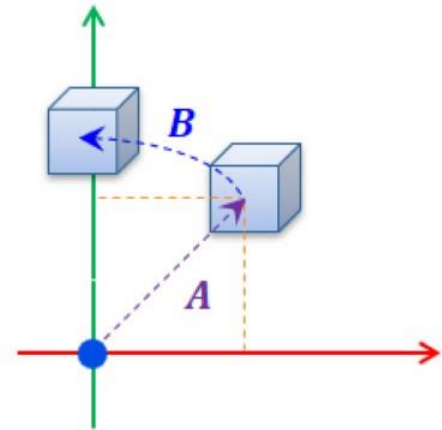
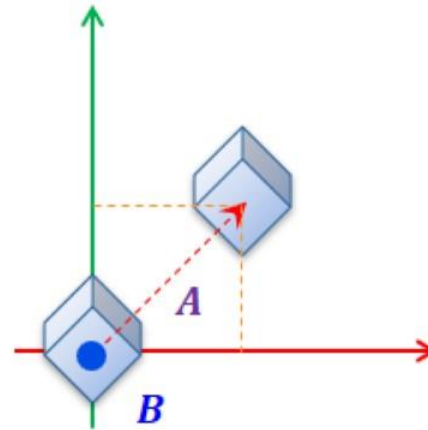
행렬의 연산

행렬의 곱

- $A v_1 = v_2$

행렬의 곱의 교환법칙

- $AB \neq BA$



역행렬(Inverse Matrix)

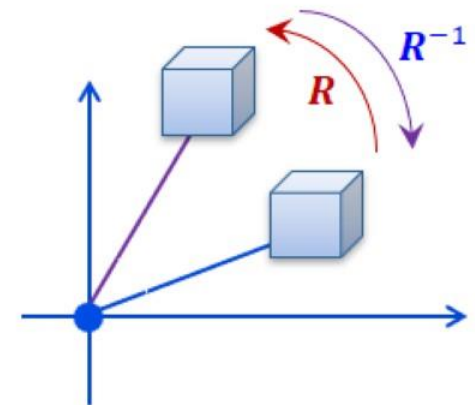
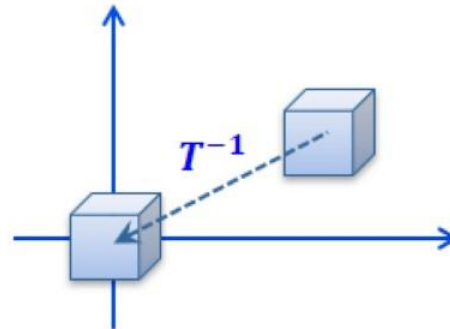
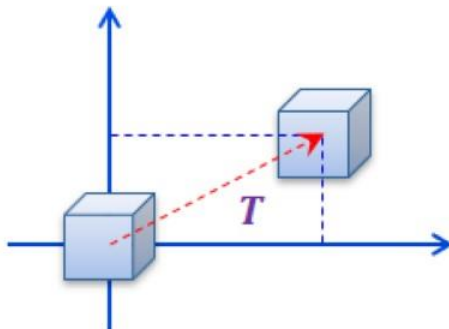
역행렬은 **역변환**을 의미

- $A v_1 = v_2, (A^{-1})v_2 = (A^{-1})(A v_1) = (A^{-1}A)v_1 = v_1$

$$A A^{-1} = A^{-1}A = I$$

평행이동 변환과 역행렬

회전 변환과 역행렬



행렬(Matrix)

● 행렬의 연산

□ 행렬의 곱의 결합법칙

- $A(BC) = (AB)C$

$$A_1 v_{i1} = v_{i2}$$

$$A_2 v_{i2} = v_{i3}$$

$$A_3 v_{i3} = v_{i4}$$

...

$$A_n v_{i(n-1)} = v_{in}$$

$$n = 5, i = 10,000$$

$$(15 * 5) * 10,000 = 750,000$$

$$A_1 v_{i1} = v_{i2}$$

$$A_2(A_1 v_{i1}) = v_{i3}$$

$$A_3(A_2(A_1 v_{i1})) = v_{i4}$$

...

$$A_n(A_{(n-1)} \cdots A_3((A_2(A_1 v_{i1})))) = v_{in}$$

$$(A_n A_{(n-1)} \cdots A_3 A_2 A_1) v_{i1} = v_{in}$$

$$M = A_n A_{(n-1)} \cdots A_3 A_2 A_1$$

$$M v_{i1} = v_{in}$$

$$n = 5, i = 10,000$$

$$(45 * 4) + 15 * 10,000 = 150,180$$

$$n = 10, i = 10,000$$

$$(15 * 10) * 10,000 = 1,500,000$$

$$n = 10, i = 10,000$$

$$(45 * 9) + 15 * 10,000 = 150,405$$

벡터와 행렬의 곱: 15번 연산



행렬과 행렬의 곱: 45번 연산

행렬(Matrix)

● 퀴즈(Quiz)

- (10×1) 열벡터 x 와 y 가 주어질 때 v 를 최소의 곱셈과 덧셈 연산을 사용하여 계산하기 위한 방법은?

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{10} \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}$$

$$v = xx^T(I + yy^T)x$$

- $(n \times n)$ 행렬 A 가 가역행렬이고, $(n \times 1)$ 열벡터 b, c 에 대하여 $c^T A^{-1} b \neq -1$ 일 때 다음이 성립함을 증명하라.

$$(A + bc^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}bc^T A^{-1}}{1 + c^T A^{-1} b}$$