1장. 선형 시스템(Linear System)

연립일차방정식

선형 방정식(Linear Equations)

- **연립일차방정식(System of Linear Equations)**

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + y &= 2 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + y &= 2 \\ -3x + 3y &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + y &= 2 \\ -3x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ 2x - 2y + 4z &= 10 \\ 3x - 3y + 6z &= 15 \end{aligned}$$

$$x - y = 1$$

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 5 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ 2x + y &= 4 \\ 3x - y &= 15 \end{aligned}$$

선형 방정식(Linear Equations)

선형 방정식(Linear Equation)

직선의 방정식(Line Equation)

- $ax + by + c = 0$
  a와 b는 동시에 0이 아님

$$2x + y = 1 \qquad y = -2x + 1$$

$$3x - y = 1 \qquad x - y = 3$$

$$x = -1 \qquad y = -4$$

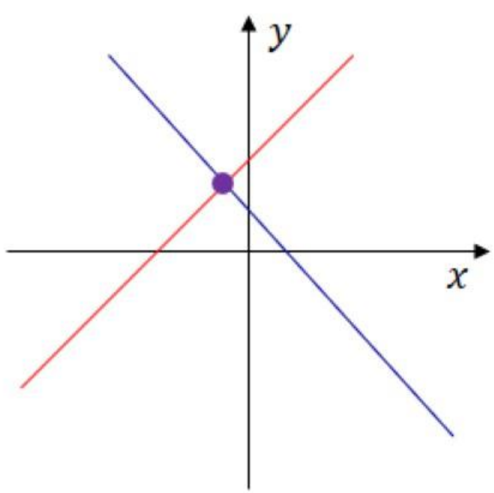
- 연립일차방정식(System of Linear Equations)
  $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0$
  - 2개의 직선이 교차할(한 점에서 만날) 조건: 유일한 해
  - 2개의 직선이 일치할 조건: 무수히 많은 해(부정: 不定)
  - 2개의 직선이 평행할 조건: 해가 없음(不能)

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

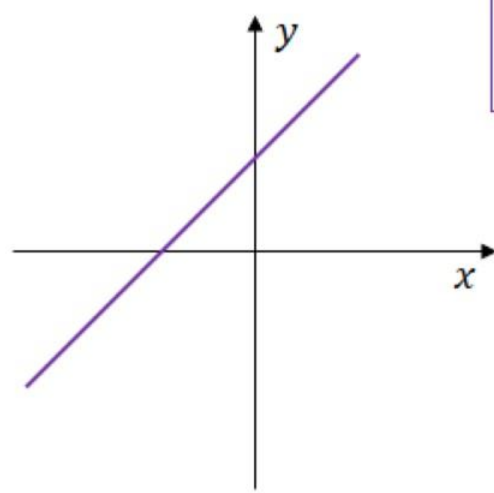
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

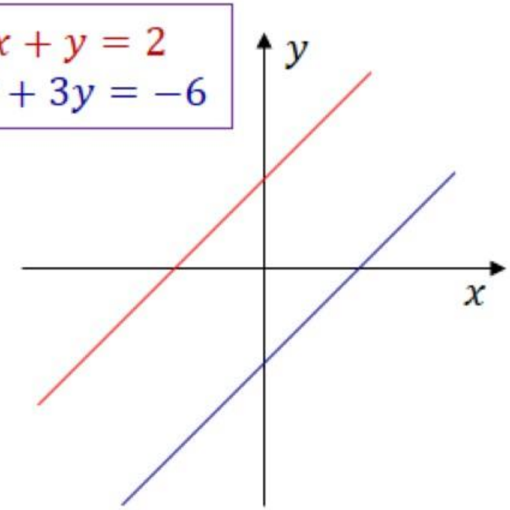
$$-x + y = 2 \qquad x + y = 1$$



$$-x + y = 2 \qquad -3x + 3y = 6$$



$$-x + y = 2 \qquad -3x + 3y = -6$$



선형 방정식(Linear Equations)

- **선형 방정식(Linear Equation)**
  - **평면의 방정식(Plane Equation)**
    - $ax + by + cz + d = 0$ (a, b, c 는 모두 0이 아님)
    - 연립일차방정식(System of Linear Equations)

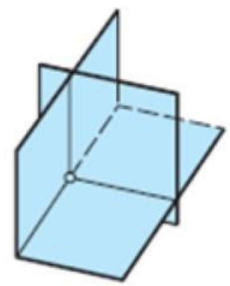
      $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$

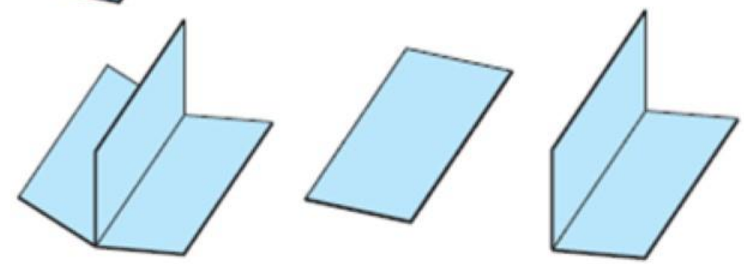
      – 2개의 평면이 서로 교차하면 교차의 결과는 직선임

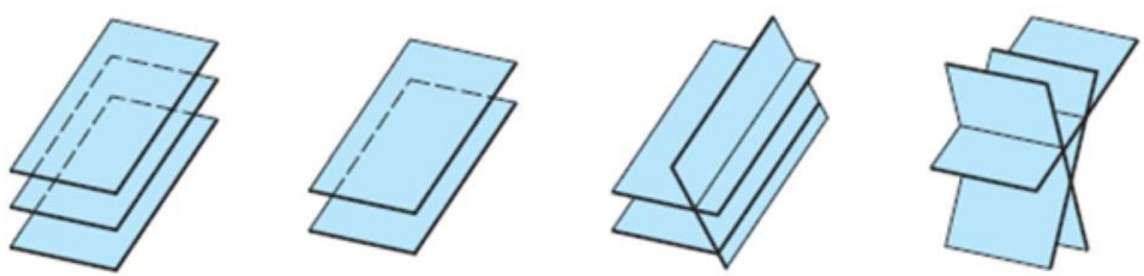
      – 유일한 해: 3개의 평면이 교차

      – 무수히 많은 해
        - 3개의 평면이 한 직선에서 만남
        - 3개의 평면이 일치
        - 2개의 평면이 일치하고 나머지 평면과 교차

      – 해가 없음
        - 3개의 평면이 평행
        - 2개의 평면이 일치하고 나머지와 평행
        - 2개의 평면이 평행하고 나머지 평면과 교차
        - 2개의 평면끼리 서로 교차하고 교차선이 서로 평행







선형 방정식(Linear Equations)

선형 방정식(Linear Equation)

일차방정식(First Order Equation, Linear Equation)

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$

– 이원 일차방정식: 변수가 2개인 일차방정식

$3x + 2z = 1$

$x - 2z^2 = 3$

$x - 2z = 3xz$

$cos(x) = 0$

연립일차방정식(Simultaneous Linear Equation)

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

일차방정식들의 유한집합

$$
\begin{array}{c}
3x + 2y = 1 \\
x - 2y = 3
\end{array}
$$

- 연립일차방정식(System of Linear Equations, Linear System)
  - 변수(미지수)가 n개인 m개의 연립일차방정식(System of m linear equations in n unknowns)
  - 동차 연립일차방정식(Homogeneous System of Linear Equations)
    $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$
  - 해(Solution), 해집합(Solution Set)
    소거법(Elimination Process, 선형 조합(Linear Combination)), 대입법, …
    동치(Equivalent): 다른 연립일차방정식이 같은 해집합을 가지면 서로 동치(같다)라고 함
    - 유일한 해: $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ $(s_1, s_2, \dots, s_n)$
    - 부정(무수히 많은 해)
    - 불능(해가 없음)
  - 연립 방정식이 적어도 하나 이상의 해를 가지면 일치(Consistent)한다라고 함
    연립 방정식이 해를 가지지 않으면 불일치(Inconsistent) 한다라고 함

$$
\begin{array}{c}
3x + 2y = 1 \\
3x - 6y = 9
\end{array}
$$

직선의 방정식

선형 방정식(Linear Equations)

선형 방정식(Linear Equation)

- 연립일차방정식(System of Linear Equations)
  - 모든 연립일차방정식은 해가 없거나, 유일해를 갖거나, 무수히 많은 해를 가짐
    그 외의 다른 가능성은 없음(어떻게 증명할 것인가?)
  - 연립일차방정식의 풀이 방법
    - **기본 행 연산(Elementary Row Operations)**
      - 하나의 행(방정식의 양변)에 영이 아닌 상수를 곱한다.
      - 두 개의 행(방정식)을(위치를) 서로 바꾼다.
      - 하나의 행(방정식의 양변)에 상수를 곱하여 다른 행(방정식)에 더한다.

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 3x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 3x + 2y &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 2 \\ 3x + 2y &= 3 \\ 5x &= 5 \\ x &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y &= 1 \\ -x &= -1 \\ -y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 0y &= 1 \\ 0x + y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x + 3y &= -3 \\ 3x + 2y &= 3 \\ 5y &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

첨가행렬
(Augmented matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1행에 2를 곱하여 2행에 더함}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2행에 1/5을 곱함}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{2행에 -1을 곱하여 1행에 더함}} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1행에 -1을 곱함}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1행과 2행을 바꿈}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

선형 방정식(Linear Equations)

● 연립일차방정식(Linear System)의 풀이 방법

$$x + 2y + 3z = 9$$
$$x + 2y - 2z = 4$$
$$2x + y + z = 5$$
$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{8}{3}, z = 1$$

- 0이 아닌 상수를 어떤 식의 양변에 곱한다.
- 두 식의 위치를 바꾼다.
- 어떤 식에 상수(0이 아닌)를 곱하여 다른 식에 더한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

컴퓨터 프로그램으로 풀려면?

첨가행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

기본 행 연산(Elementary Row Operations)
- 0이 아닌 상수(실수) c를 i-행에 곱한다($E_i(c)$).
- i-행과 j-행의 위치를 바꾼다(E_{ij}).
- i-행에 0이 아닌 실수 c를 곱하여 j-행에 더한다($E_{ij}(c)$).

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1행과 3행 바꿈: E_{13} 3행=(2행*-1)+3행: $E_{23}(-1)$ 3행=(3행*1/5): $E_3(1/5)$ 1행과 2행 바꿈: E_{12}

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 8/3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4/3 \\ 8/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2행=(1행*-2)+2행: $E_{12}(-2)$ 2행=(3행*-5)+2행: $E_{32}(-5)$ 2행=(2행*−1/3): $E_2(-1/3)$ 1행=(2행*−2)+1행:$E_{21}(-2)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 \\ 8/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1행=(3행*2)+1행: $E_{31}(2)$

소거법(Elimination): 기본 행 연산으로 각 행의 변수를 소거하는 방법

선형 방정식(Linear Equations)

행사다리꼴(Row Echelon Form) 행렬

다음 세 가지의 조건을 모두 만족하는 행렬을 행사다리꼴 행렬이라고 함

- 모든 원소가 0이 아닌 행에서 맨 처음 나오는 0이 아닌 수는 1이다(선도 1, Leading 1).
- 모든 원소가 0인 행이 있다면 그 행은 모든 원소가 0이 아닌 행의 아래쪽에 있어야 한다.
- 모든 원소가 0이 아닌 연속된 두 행에서, 아래쪽 행의 선도 1은 위쪽 행의 선도 1보다 오른쪽에 있어야 한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

행사다리꼴 행렬에서 선도 1이 있는 열에서 선도 1 아래의 모든 원소들은 0임

Gauss Elimination

기약 행사다리꼴(Reduced Row Echelon Form) 행렬

행사다리꼴 행렬이 다음의 조건을 만족하면 기약 행사다리꼴 행렬이라고 함

- 선도 1을 포함하는 열의 나머지 원소들은 모두 0이어야 한다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan Elimination

기약 행사다리꼴 행렬에서 선도 1이 있는 열에서 선도 1을 제외한 모든 원소들은 0임

연립일차방정식의 풀이
첨가행렬을 기본 행 연산을 사용하여 기약 행사다리꼴로 나타낼 수 있다면 해를 구할 수 있음

선형 방정식(Linear Equations)

기약 행사다리꼴(Reduced Row Echelon Form) 행렬

- 미지수가 세 개인 연립방정식의 예

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$0x + 0y + 0z = 1$
$0 \neq 1$
불일치

$x + 0y + 3z = -1$
$0x + y - 4z = 2$
$0x + 0y + 0z = 0$

$x - 5y + z = 4$
$0x + 0y + 0z = 0$
$0x + 0y + 0z = 0$

평면의 방정식

행사다리꼴 행렬에서 선도 1에 대응되는 변수를 선도변수라고 하고 나머지 변수들은 자유변수라고 함

$x = -3z - 1$
$y = 4z + 2$

$x = 5y - z + 4$

$x = -3t - 1$
$y = 4t + 2$
$z = t$

$x = 5s - t + 4$
$y = s$
$z = t$

$0x + 0y + 0z = 0$ 이 식은 연립방정식의 풀이에 영향을 주지 않으므로 제거할 수 있음

기약 행사다리꼴 행렬에서 자유변수가 있다면 무수히 많은 해를 가짐

선형 방정식(Linear Equations)

- **기약 행사다리꼴(Reduced Row Echelon Form) 행렬**
  - 모든 행렬의 기약 행사다리꼴 행렬은 유일함(Proof by Thomas Yuster)
- **행사다리꼴(Row Echelon Form) 행렬**
  - 행사다리꼴 행렬은 유일하지 않음(기본 행연산의 순서에 따라 달라짐)
  - 모든 원소가 0인 행의 수가 같고 선도 1은 같은 위치에 나타남(축 위치: Pivot position, 축 열: Pivot column)

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 11\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}3 & 11\\1 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & \frac{11}{3}\\1 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & \frac{11}{3}\\0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & \frac{11}{3}\\0 & 1\end{bmatrix}$$

1행과 2행 바꿈: E_{12} 1행=(1행*1/3): $E_1(1/3)$ 2행=(1행*-1)+2행: $E_{12}(-1)$ 2행=(2행*3): $E_2(3)$

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 11\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 4\\0 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

2행=(1행*-3)+2행: $E_{12}(-3)$ 2행=(2행*-1): $E_2(-1)$ 1행=(2행*-4)+1행: $E_{21}(-4)$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

2행=(1행*-2)+2행: $E_{12}(-2)$ 1행=(2행*-3)+1행: $E_{21}(-3)$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 7\\1 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & \frac{7}{2}\\0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

2행=(2행*-3)+1행: $E_{21}(-3)$ 1행=(1행*-1/2): $E_1(1/2)$ 1행=(2행*-7/2)+1행: $E_{21}(-7/2)$

선형 방정식(Linear Equations)

- **기약 행사다리꼴(Reduced Row Echelon Form) 행렬**
  - 3 × 3 행렬의 기약 행사다리꼴(8개)

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&*\\0&1&*\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&*&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&*&*\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&*\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

  - 4 × 4 행렬의 기약 행사다리꼴(16개)

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&*\\0&1&0&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&*&0\\0&1&*&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&*&*\\0&1&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&*&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&*&0&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&*&*&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&*&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&1&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

선형 방정식(Linear Equations)

선형 방정식(Linear Equation)

가우스-요르단 소거법(Gaussian-Jordan Elimination)

- 방정식의 개수가 적은 연립일차방정식의 경우(손을 사용한 해법)

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\
&2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1 \\
&5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5 \\
&2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6
\end{aligned}
$$

기약 행사다리꼴로 바꾸는 과정
전진(Forward) 단계: 선도 1 아래부분을 모두 0으로
후진(Backward) 단계: 선도 1 윗부분을 모두 0으로

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix} \quad E_{12}(-2)\ \ E_{14}(-2)
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix} \quad E_2(-1)\ \ E_{23}(-5)\ \ E_{24}(-4)
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad E_{34}\ \ E_3\left(\frac{1}{6}\right)
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{32}(-3)\ \ E_{21}(2)
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\
&x_3 + 2x_4 = 0 \\
&x_6 = 1/3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\
&x_3 = -2x_4 \\
&x_6 = 1/3
\end{aligned}
$$

일반해

$$
\begin{aligned}
&x_1 = -3r - 4s - 2t \\
&x_2 = r, x_3 = -2s, x_4 = s, x_5 = t \\
&x_6 = 1/3
\end{aligned}
$$

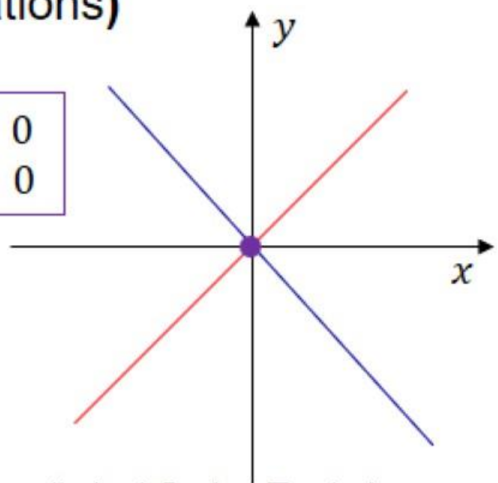
선형 방정식(Linear Equations)

선형 방정식(Linear Equation)

동차 연립일차방정식(Homogeneous System of Linear Equations)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= 0 \\ a_2x + b_2y &= 0 \end{aligned}$$



- 모든 동차 연립일차방정식은 일치함(적어도 하나 이상의 해를 가짐)
  단순해(Trivial Solution): $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$
- 모든 동차 연립일차방정식은 단순해만 가지거나 무수히 많은 해를 가짐
  원점을 지나는 두 개의 직선의 방정식의 경우
- n개의 미지수를 갖는 기약 행사다리꼴이 r개의 0이 아닌 행을 가지면, $(n-r)$개의 자유변수를 가짐
  - r개의 0이 아닌 행은 선도변수를 가지므로 $(n-r)$개의 자유변수를 가짐
  - m개의 방정식과 n개의 미지수를 갖는 동차 연립일차방정식에서, $(m<n)$이면 $(r<n)$이다.
    방정식의 개수가 미지수의 개수보다 작다면 적어도 하나의 자유변수가 있고 무수히 많은 해를 가짐
- 방정식의 개수보다 미지수가 더 많은 동차 연립일차방정식은 무수히 많은 해를 가짐

$$\begin{aligned} &x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \\ &2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = 0 \\ &5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 0 \\ &2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &x_1 = -3r - 4s - 2t \\ &x_2 = r,\ x_3 = -2s,\ x_4 = s,\ x_5 = t \\ &x_6 = 0 \end{aligned}$$

$r = s = t = 0 \longrightarrow$ 단순해

$$\begin{aligned} &x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \\ &x_3 = -2x_4 \\ &x_6 = 0 \end{aligned}$$

선형 방정식(Linear Equations)

선형 방정식(Linear Equation)

가우스 소거법(Gaussian Elimination followed by Back-Substitution)

- 방정식의 개수가 많은 연립일차방정식의 경우(컴퓨터를 사용한 해법)
  첨가행렬을 기약 행사다리꼴로 바꾸는 과정은 많은 연산이 필요함
  첨가행렬을 행사다리꼴로 바꾸고 역대입법(Back-substitution)을 적용하는 것이 효율적임

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0\\
&2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 = -1\\
&5x_3 + 10x_4 + 15x_6 = 5\\
&2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 = 6
\end{aligned}
$$

컴퓨터를 사용한 풀이에서 실수 표현의 오차를 고려해야 함

$$
\begin{bmatrix}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ⅓\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

행사다리꼴

$$
\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0\\
&x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 1\\
&x_6 = ⅓
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 = -3r - 4s - 2t\\
&x_2 = r, x_3 = -2s, x_4 = s, x_5 = t\\
&x_6 = ⅓
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5\\
&x_3 = 1 - 2x_4 - 3x_6\\
&x_6 = ⅓
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 2x_5\\
&x_3 = -2x_4\\
&x_6 = ⅓
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5\\
&x_3 = -2x_4\\
&x_6 = ⅓
\end{aligned}
$$