

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Olivier Sète

Jörg Liesen

21. Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
Vorwort	9
1 Grundlagen: Mengen und Logik	11
1.1 Mengen	11
1.2 Grundlagen der Logik	15
2 Zahlen	17
2.1 Zahlen und Zahldarstellung	17
2.2 Ungleichungen	18
2.3 Reelle Wurzeln	20
2.4 Absolutbetrag	20
2.5 Beispiele zum Lösen von Ungleichungen	21
2.6 Summenzeichen	22
2.7 Produktzeichen	25
3 Komplexe Zahlen 1	27
3.1 Definition und Grundrechenarten	27
3.2 Die Gaußsche Zahlenebene	28
3.3 Absolutbetrag und Konjugierte	29
3.4 Lösungen quadratischer Gleichungen	31
4 Vollständige Induktion	33
4.1 Induktion	33
4.2 Binomischer Lehrsatz	36
5 Abbildungen	39
5.1 Definition	39
5.2 Komposition von Abbildungen	42
5.3 Umkehrbarkeit	42
5.4 Eigenschaften reeller Funktionen	44
5.4.1 Symmetrie	44
5.4.2 Monotonie	45

5.4.3	Beschränktheit	46
6	Elementare Funktionen 1	47
6.1	Exponentialfunktion und Logarithmus	47
6.2	Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus	49
6.3	Tangens	53
7	Komplexe Zahlen 2	55
7.1	Polardarstellung	55
7.2	Vorteile der Euler- und Polardarstellungen	58
7.3	Komplexe Wurzeln	59
7.4	Lösungen quadratischer Gleichungen	60
8	Polynome	61
8.1	Rechenoperationen	62
8.2	Nullstellen von Polynomen	63
8.3	Reelle Polynome	65
8.4	Nullstellen berechnen	66
9	Rationale Funktionen	67
9.1	Komplexe Partialbruchzerlegung	68
9.2	Reelle Partialbruchzerlegung	71
9.3	Zusammenfassung	73
10	Vektorräume	75
10.1	Vektorräume	75
10.2	Teilräume	77
10.3	Linearkombinationen	78
10.4	Erzeugendensysteme	80
11	Basis und Dimension	83
11.1	Lineare Unabhängigkeit	83
11.2	Basis und Dimension	85
11.3	Koordinaten	88
12	Matrizen	91
12.1	Definition von Matrizen	91
12.2	Addition und Skalarmultiplikation	93
12.3	Matrizenmultiplikation	94
12.4	Inverse	96
12.5	Transposition	97

13 Lineare Gleichungssysteme	99
13.1 Matrixschreibweise eines linearen Gleichungssystems	99
13.2 Der Gauß-Algorithmus	100
13.3 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme	103
13.4 Struktur der Lösungsmenge	106
14 Weitere Anwendungen des Gauß-Algorithmus	109
14.1 Der Rang einer Matrix	109
14.2 Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme	109
14.3 Invertierbarkeit von Matrizen	112
14.4 Unterschiede zwischen Matrizen und Zahlen	114
15 Lineare Abbildungen	115
15.1 Definition und erste Eigenschaften	115
15.2 Kern und Bild	118
15.3 Dimensionsformel und Konsequenzen	120
16 Koordinaten und Matrixdarstellung	123
16.1 Koordinaten	123
16.2 Matrixdarstellung	125
16.3 Basiswechsel	127
17 Konvergenz von Zahlenfolgen	131
17.1 Zahlenfolgen	131
17.2 Konvergenz	133
17.3 Bestimmte Divergenz	135
18 Berechnung von Grenzwerten	137
18.1 Grenzwertsätze	137
18.2 Grenzwerte und Ungleichungen	139
18.3 Monotonie und Konvergenz	140
18.4 Wichtige Grenzwerte	141
19 Stetigkeit	143
19.1 Grenzwerte von Funktionen	143
19.2 Einseitige Grenzwerte von Funktionen	145
19.3 Stetigkeit	146
20 Sätze über stetige Funktionen	151
20.1 Bestimmung von Nullstellen	151
20.2 Existenz von Extremwerten	154

21 Differenzierbarkeit	159
21.1 Definition	159
21.2 Interpretation der Ableitung	161
21.3 Rechenregeln	162
22 Erste Anwendungen der Differenzierbarkeit	165
22.1 Ableitung der Umkehrfunktion	165
22.2 Nullstellen	166
22.3 Höhere Ableitungen	167
22.4 Regel von Bernoulli/de l'Hospital	168
23 Mittelwertsatz und Anwendungen	171
23.1 Extremwerte	171
23.2 Mittelwertsatz	174
23.3 Anwendungen des Mittelwertsatzes	175
24 Taylor-Approximation	179
24.1 Die Taylor-Approximation	179
24.2 Extremwerte	182
25 Anwendungen der Taylor-Approximation	185
25.1 Näherungsweise Berechnung von Funktionswerten	185
25.2 Fehlerabschätzung	187
25.3 Diskretisierung von Ableitungen	189
25.4 Taylorreihen	190
26 Elementare Funktionen 2	193
26.1 Exponential- und Logarithmusfunktion	193
26.2 Allgemeine Potenzfunktion	196
26.3 Komplexe Exponentialfunktion	198
27 Elementare Funktionen 3	199
27.1 Trigonometrische Funktionen	199
27.2 Arcus-Funktionen – Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen	201
27.3 Hyperbolische Funktionen	204
28 Das Integral	209
28.1 Integraldefinition und Flächenberechnung	209
28.2 Rechenregeln	214
28.3 Das Integral als Mittelwert der Funktion	215
29 Integrationsregeln 1	217
29.1 Stammfunktionen	217
29.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	218
29.3 Grundintegrale	220

29.4 Partielle Integration	221
30 Integrationsregeln 2 und Integration komplexer Funktionen	225
30.1 Substitutionsregel	225
30.2 Integration komplexer Funktionen	229
31 Uneigentliche Integrale und Integration rationaler Funktionen	231
31.1 Unbeschränkter Definitionsbereich	231
31.2 Unbeschränkte Funktion	234
31.3 Integration rationaler Funktionen	235
32 Die Determinante	239
32.1 Determinante und Volumenberechnung	239
32.2 Berechnung von Determinanten	242
32.3 Der Determinantenmultiplikationssatz	245
32.4 Charakterisierung invertierbarer Matrizen	246
33 Eigenwerte und Eigenvektoren	249
33.1 Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren	250
33.2 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren	252
33.3 Eigenvektoren und lineare Unabhängigkeit	256
34 Diagonalisierbarkeit	257
34.1 Definition und Charakterisierung	257
34.2 Anwendungen	261
35 Vektorräume mit Skalarprodukt 1	263
35.1 Norm	263
35.2 Skalarprodukte	264
35.3 Orthogonale Vektoren	267
35.4 Orthonormalbasen	268
35.5 Orthogonale Matrizen	270
35.6 Unitäre Matrizen	272
36 Vektorräume mit Skalarprodukt 2	273
36.1 Kürzeste Abstände und orthogonale Projektion	273
36.2 Das Gram-Schmidt-Verfahren	275
36.3 QR-Zerlegung	276
36.4 Lineare Regression	279
37 Reelle Fourieranalysis	281
37.1 Trigonometrische Polynome	281
37.2 Reelle Fourierapproximation	283

38 Approximation im quadratischen Mittel	289
38.1 Fourierkoeffizienten für gerade und ungerade Funktionen	289
38.2 Approximation im quadratischen Mittel	293
38.3 Fourierreihen	294
39 Komplexe Fourieranalysis	299
40 Reihen	303
40.1 Konvergenz von Reihen	303
40.2 Konvergenzkriterien	305
41 Absolut konvergente Reihen	309
41.1 Absolute Konvergenz	309
41.2 Konvergenzkriterien für absolute Konvergenz	309
41.3 Komplexe Reihen	312
42 Potenzreihen	313
42.1 Konvergenz von Potenzreihen	313
42.2 Ableitung von Potenzreihen	316
42.3 Taylor- und Potenzreihen	317
43 Lineare Differentialgleichungen	319
43.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	319
43.2 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung	321
43.3 Lineare skalare Differentialgleichungen 2. Ordnung	323
Index	327

Vorwort

Dieses Skript wurde für die im Wintersemester 2017/2018 erstmals an der TU Berlin gehaltene Vorlesung „Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“ (6+4 SWS) entwickelt.

Es basiert unter anderem auf den folgenden Quellen:

- Dirk Ferus, Vorlesungsskript „Analysis I für Ingenieurwissenschaften“, TU Berlin, Institut für Mathematik, Version vom 23.01.2007.
- Volker Mehrmann, Jörg Rambau, Ruedi Seiler, Vorlesungsskript „Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“, TU Berlin, Institut für Mathematik, Version vom 10.10.2008.
- Kurt Meyberg, Peter Vachenhauer, Höhere Mathematik 1, 4. Auflage, Springer Verlag, 1997.
- Christian Karpfinger, Höhere Mathematik in Rezepten, 2. Auflage, Springer Spektrum, 2017.

Jedes Kapitel des Skripts enthält den Stoff einer 90-minütigen Vorlesung. Kleingedruckte Textabschnitte sind Ausblicke, die typischerweise nicht in den Vorlesungen behandelt werden.

Unser besonderer Dank gilt Konstantin Fackeldey, Frank Lutz, Christian Mehl, und Gabriele Penn-Karras, die bei der Entwicklung des Skripts durch viele konstruktive Diskussionen und wichtige Beiträge geholfen haben. Für hilfreiche Kommentare bedanken wir uns bei Christian Kreusler, Patrick Winkert und Jan Zur.

Verbesserungsvorschläge und Fehlerhinweise sind jederzeit willkommen. Bitte senden Sie diese an

`sete@math.tu-berlin.de`

Jörg Liesen und Olivier Sète
TU Berlin, Institut für Mathematik
(Stand: 21. Oktober 2019)

An die Lehrenden. Jedes Kapitel des Skripts enthält den Stoff einer 90-minütigen Vorlesung. Kleingedruckte Textabschnitte sind Ausblicke, die typischerweise nicht in den Vorlesungen behandelt werden.

Vorlesung 1 ist bewusst kürzer gehalten, damit vorweg Organisatorisches zur Veranstaltung besprochen werden kann.

Vorlesung 2 ist etwas zu lang. Hier kann etwas gekürzt werden, oder das Ende (Produkte, und ggf. Summen) kann in Vorlesung 3 beendet werden.

Vorlesung 1

Grundlagen: Mengen und Logik

Mengen begegnen uns vornehmlich als Lösungsmengen von Gleichungen oder Ungleichungen und als Definitionsbereiche von Funktionen (Vorlesung 5).

1.1 Mengen

Wir geben eine kurze Einführung in die Sprache der Mengenlehre und die elementaren Operationen mit Mengen.

Definition 1.1 (Menge). Eine *Menge* ist die Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder Denkens zu einem Ganzen.

Mengen werden typischerweise auf zwei Arten angegeben: Durch Aufzählung aller Elemente, zum Beispiel

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

(\mathbb{N} ist die Menge der *natürlichen Zahlen*), oder durch Angabe einer Eigenschaft, zum Beispiel

$$\mathbb{N} = \{n \mid n \text{ ist eine natürliche Zahl}\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 4\}.$$

Ist A eine Menge, und a ein *Element* von A , so schreiben wir

$$a \in A$$

(lies: a ist Element von A). Ist a nicht Element von A , so schreiben wir $a \notin A$ (lies: a ist nicht Element von A). Zum Beispiel ist $2 \in B$ und $1 \notin B$.

Beispiel 1.2. 1) $\{1, 2, 3, 4\} = \{2, 3, 1, 4\} = \{1, 3, 1, 2, 3, 4\}$.

Bei Mengen kommt es nicht auf die Reihenfolge der Elemente an, und jedes Element wird nur einmal gezählt.

2) Die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen ist

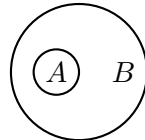
$$U = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\} = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Zum Beispiel sind $11 \in U$ und $2 \notin U$.

- 3) Die leere Menge \emptyset enthält kein Element. Alternative Schreibweise: $\{ \}$.

Definition 1.3 (Operationen mit Mengen). Seien A, B Mengen.

- 1) A heißt *Teilmenge* von B , falls gilt: $x \in A \Rightarrow x \in B$ (lies: aus $x \in A$ folgt $x \in B$).
Schreibweise: $A \subseteq B$.
Man findet des Öfteren auch die Schreibweise $A \subset B$, die je nach Autor Teilmenge ($A \subseteq B$) oder echte Teilmenge ($A \subseteq B$ und $A \neq B$) bedeuten kann.



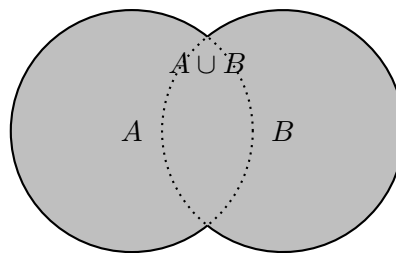
Zum Beispiel ist $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, und für jede Menge gilt $A \subseteq A$.

- 2) Die Mengen A und B sind *gleich*, geschrieben $A = B$, wenn sie die gleichen Elemente haben. Daher gilt $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gelten.
Zum Beispiel ist $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{1, 1, 2\}$, aber $\{1, 2\} \neq \{1, 2, 3\}$ (hier gilt nur \subseteq und $\{1, 2\} \neq \{1, 3\}$).
- 3) Die *Vereinigungsmenge* oder kurz *Vereinigung* von A und B ist

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Ein Gleichheitszeichen mit Doppelpunkt steht für eine Definition. Der Doppelpunkt steht auf der Seite, die definiert wird.

Die Vereinigung enthält alle Elemente von A und alle Elemente von B :

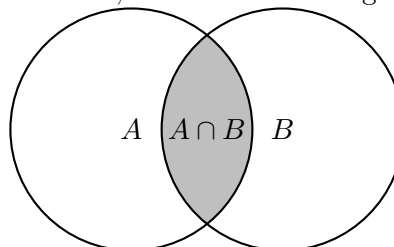


Zum Beispiel ist $\{1, 2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

- 4) Die *Schnittmenge* (auch *Durchschnitt* oder *Schnitt*) von A und B ist

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Der Schnitt enthält alle Elemente, die in beiden Mengen gleichzeitig sind:

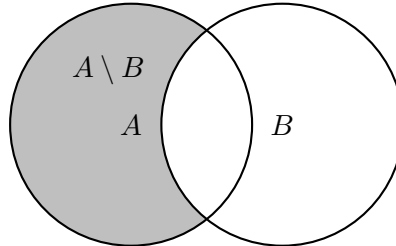


Zum Beispiel ist $\{1, 2\} \cap \{1, 3\} = \{1\}$.

- 5) Die *Differenzmenge* (auch *Differenz*) von A und B ist

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Diese Differenzmenge entsteht, indem man aus der Menge A alle Elemente von B entfernt:



Zum Beispiel ist $\{1, 2\} \setminus \{1, 3\} = \{2\}$.

- 6) Das *kartesische Produkt* von A und B ist die Menge aller (geordneten) Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Zum Beispiel ist $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Menge aller Punkte der Ebene.

Allgemeiner definiert man das kartesische Produkt der n Mengen A_1, \dots, A_n als

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\},$$

also als die Menge der geordneten n -Tupel.

Beispiel 1.4. Seien $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 3\}$, dann ist

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}.$$

Beachten Sie, dass die Reihenfolge in den Paaren wichtig ist: Der erste Eintrag ist aus A , der zweite aus B . Daher ist zum Beispiel $(3, 2)$ nicht in $A \times B$.

Weitere wichtige Beispiele von Mengen sind *Intervalle*. Intervalle sind Teilmengen der reellen Zahlen von einer der folgenden Formen, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ ist:

$$\begin{aligned}]a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{(offenes Intervall),} \\ [a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \text{(halboffenes Intervall),} \\]a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{(halboffenes Intervall),} \\ [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{(abgeschlossenes Intervall).} \end{aligned}$$

Ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall $[a, b]$ heißt auch *kompaktes* Intervall. Für unbeschränkte Intervalle schreibt man

$$\begin{aligned}]a, +\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} && \text{(offenes Intervall),} \\ [a, +\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} && \text{(halboffenes Intervall),} \\]-\infty, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} && \text{(offenes Intervall)} \\]-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} && \text{(halboffenes Intervall),} \end{aligned}$$

sowie

$$]-\infty, \infty[:= \mathbb{R}.$$

Beachten Sie, dass die Symbole $\infty = +\infty$ und $-\infty$ keine reellen Zahlen sind und daher in keinem Intervall enthalten sind.

1.2 Grundlagen der Logik

Definition 1.5. Eine *Aussage* ist ein Satz, dem genau einer der beiden Wahrheitswerte „wahr“ (w) oder „falsch“ (f) zugeordnet werden kann.

Beispiel 1.6. 1) „Berlin ist eine Stadt.“ (wahre Aussage)
 2) „ $3 + 7 = 11$.“ (falsche Aussage)
 3) „Berlin!“ (keine Aussage)
 4) „ $x^2 - 1 = 0$ “ ist keine Aussage, da x nicht erklärt ist. Wir machen daraus Aussagen durch Quantifizierung:
 (a) „Es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 - 1 = 0$.“ (wahre Aussage)
 (b) „Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 - 1 = 0$.“ (falsche Aussage)

Die *Negation* der Aussage A ist „nicht A “ und wird mit $\neg A$ bezeichnet. Ist A wahr, so ist $\neg A$ falsch, und ist A falsch, so ist $\neg A$ wahr. Dies kann übersichtlich in einer *Wahrheitstafel* festgehalten werden:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beispiel 1.7. 1) „ $3 + 7 = 11$ “ ist falsch, also ist „ $\neg(3 + 7 = 11)$ “ bzw. „ $3 + 7 \neq 11$ “ wahr.
 2) A : „Alle Schafe sind weiß.“
 $\neg A$: „Nicht alle Schafe sind weiß.“
 Anders formuliert bedeutet $\neg A$: „Es gibt ein Schaf, das nicht weiß ist.“
 Wir merken uns für die Negation: Aus „für alle“ wird „es gibt“ und umgekehrt.
 3) B : „Es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -1$.“ (falsche Aussage)
 $\neg B$: „Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \neq -1$.“ (wahre Aussage)

Die Aussage „ A und B “ ist wahr, wenn beide Aussagen einzeln wahr sind, und die Aussage „ A oder B “ ist wahr, sobald beide Aussagen oder auch nur eine von beiden wahr ist. Die zugehörigen Wahrheitstafeln sind:

A	B	A und B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

A	B	A oder B
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Die *Implikation* (Folgerung) $A \Rightarrow B$ (lies „aus A folgt B “ oder „wenn A , dann B “) ist wie folgt definiert:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Beispiel 1.8. 1) „Wenn heute Mittwoch ist, dann ist morgen Donnerstag.“ Diese Implikation ist wahr (egal ob heute nun Mittwoch ist oder nicht.)
 2) „Wenn $1 = 0$, dann ist $1 = 1$.“ Diese Implikation ist wahr.

Zwei Aussagen sind *äquivalent*, $A \Leftrightarrow B$, falls Sie den gleichen Wahrheitswert haben:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Die Aussage $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn „ $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ “ wahr ist.

Beispiel 1.9. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$. (wahre Aussage)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$. (falsche Aussage)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $(x = 1 \text{ oder } x = -1) \Leftrightarrow x^2 = 1$. (wahre Aussage)

Bemerkung 1.10. Die Äquivalenz ist besonders wichtig beim Lösen von Gleichungen. Multiplizieren wir zum Beispiel beide Seiten der Gleichung

$$2x = 4$$

(für reelles x) mit $\frac{1}{2}$, so erhalten wir die äquivalente Gleichung $x = 2$, also

$$2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

Die Aussagen sind äquivalent, da wir hin und zurück kommen. Multiplizieren wir jedoch mit 0 (Null), so erhalten wir $0 \cdot x = 0$. Nun gilt keine Äquivalenz mehr sondern nur noch die Folgerung

$$2x = 4 \Rightarrow 0 \cdot x = 0.$$

Hier kommen wir nicht zurück (Division mit 0 ist nicht definiert), und die Lösungsmenge hat sich verändert: links erfüllt nur $x = 2$ die Gleichung, rechts tun es alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweistechniken:

- 1) Logisches Folgern (direkter Beweis): Wenn A wahr ist, und wir B aus A folgern, d.h. $A \Rightarrow B$ ist wahr, dann ist auch B wahr.
- 2) Kontraposition: $A \Rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr ist.

Beispiel 1.11. Wir zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: n^2 ist gerade $\Rightarrow n$ ist gerade.

Wir zeigen dies, indem wir „ n ist ungerade $\Rightarrow n^2$ ist ungerade“ beweisen (nachrechnen): n ist ungerade, d.h. $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

d.h. n^2 ist ungerade.

- 3) Beweis durch Widerspruch: Man nimmt an, dass die Aussage, die man zeigen möchte, falsch ist, und führt das zu einem Widerspruch.

Beispiel 1.12. Wir zeigen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Dazu nehmen wir an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist. Dann können wir $\sqrt{2}$ als gekürzten Bruch darstellen: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit ganzen Zahlen m, n , die keinen gemeinsamen Teiler haben. Dann ist $m = \sqrt{2}n$, und nach Quadrieren $m^2 = 2n^2$. Daher ist m^2 eine gerade Zahl, und dann auch m nach Beispiel 1.11. Also ist $m = 2k$ für eine ganze Zahl k . Nun erhalten wir $2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$, also $n^2 = 2k^2$. Damit ist n^2 eine gerade Zahl, also auch n (Beispiel 1.11). Somit sind m und n beide gerade Zahlen, im Widerspruch dazu, dass $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ein gekürzter Bruch war. Wir haben also gezeigt: Die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, führt auf einen Widerspruch. Daher ist die Annahme falsch und $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Vorlesung 2

Zahlen

Wir erinnern an die natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen, sowie an Ungleichungen und den Absolutbetrag. Weiter werden Summen- und Produktzeichen eingeführt.

2.1 Zahlen und Zahldarstellung

Eine wichtige Aufgabe ist das Lösen von Gleichungen der Form

$$ax + b = 0, \quad ax^2 + bx + c = 0,$$

und allgemeiner

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

wobei x gesucht und $a, b, c, a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ gegeben sind. Beginnend bei den natürlichen Zahlen führt dies auf die ganzen, rationalen, reellen und schließlich die komplexen Zahlen, in denen jede solche Gleichung Lösungen hat.

Die natürlichen Zahlen dienen dem Zählen von Dingen. Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

In der Literatur findet man die natürlichen Zahlen mal mit, mal ohne die Null. Nach DIN-Norm 5473 ist 0 eine natürliche Zahl, und daran halten wir uns hier.

In \mathbb{N} haben manche Gleichungen Lösungen, etwa hat $x + 2 = 3$ die Lösung $x = 1 \in \mathbb{N}$. Hingegen hat $x + 3 = 2$ die Lösung $x = -1$, die nicht in \mathbb{N} liegt. Dies führt zu den *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

die eine Erweiterung der natürlichen Zahlen sind: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Nun hat die Gleichung $2x = 1$ die Lösung $x = \frac{1}{2}$, die keine ganze Zahl ist. Um teilen zu können, wird \mathbb{Z} erweitert zu den *rationalen Zahlen*, also Brüchen von ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n > 0 \right\}.$$

Rationale Zahlen lassen sich als Dezimalzahlen schreiben, etwa

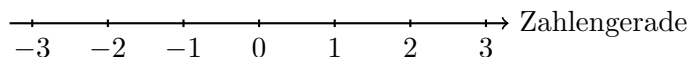
$$\frac{1}{2} = 0,5, \quad \frac{1}{3} = 0,\overline{3}, \quad \frac{22}{7} = 3,\overline{142857}.$$

Dabei bedeutet $0,\overline{3}$, dass die Darstellung periodisch wird mit einer sich unendlich oft wiederholenden 3, also $0,\overline{3} = 0,333333\dots$. Ebenso wird in $3,\overline{142857}$ die Zahl 142857 unendlich oft wiederholt. Dieses Verhalten ist typisch. Man kann zeigen, dass die Dezimaldarstellung einer rationalen Zahl entweder abbricht (wie für $\frac{1}{2}$) oder periodisch wird (wie für $\frac{1}{3}$ und $\frac{22}{7}$).

Nun gibt es Zahlen wie $\sqrt{2}$, π oder die Eulersche Zahl e , von denen man zeigen kann, dass sie nicht rational sind (vgl. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ in Beispiel 1.12). Erlaubt man alle Dezimaldarstellungen (also auch solche die weder abbrechen noch periodisch werden), so erhält man die Menge der *reellen Zahlen*:

$$\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ ist eine Dezimalzahl}\}.$$

Die reellen Zahlen können mit der Zahlengeraden identifiziert werden: Jede reelle Zahl entspricht einem Punkt der Zahlengeraden, und jeder Punkt auf der Zahlengeraden ist eine reelle Zahl:



Betrachten wir die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden, so sehen wir, dass \mathbb{Q} „Löcher“ hat, wie zum Beispiel $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Bei den reellen Zahlen ist das nicht mehr so, alle Punkte der Zahlengeraden sind reelle Zahlen. In diesem Sinne hat \mathbb{R} keine „Löcher“, was sehr wichtig für die Analysis ist.

Allerdings hat nicht jede quadratische Gleichung in \mathbb{R} Lösungen: Ein Beispiel ist $x^2 + 1 = 0$. Um diesen Missstand zu beheben brauchen wir eine letzte Erweiterung unseres Zahlbereichs, von den reellen zu den *komplexen Zahlen* \mathbb{C} ; siehe Vorlesung 3. Insgesamt haben wir dann die folgenden Mengen von Zahlen:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

In \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} können wir wie gewohnt rechnen, Differenzen bilden und durch jede Zahl (außer Null) teilen. Dies macht \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} zu sogenannten *Körpern*.

2.2 Ungleichungen

In \mathbb{R} können wir Zahlen der Größe nach vergleichen: Wir haben eine *Ordnungsrelation* $x < y$, gelesen „ x kleiner y “. Anschaulich ist $x < y$, falls x links von y auf der Zahlengeraden liegt. Anstatt $x < y$ schreiben wir auch $y > x$, gelesen „ y größer x “. Wir schreiben $x \leq y$, gelesen „ x kleiner oder gleich y “, falls $x < y$ oder $x = y$ gilt. Analog für $y \geq x$.

Es gelten die folgenden Axiome (grundlegende Rechengesetze), aus denen alle weiteren Rechenregeln folgen: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- 1) Es gilt genau einer der drei Fälle: $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.
- 2) Sind $x < y$ und $y < z$, so folgt $x < z$.
- 3) Sind $x < y$ und $a \leq b$, so folgt $x + a < y + b$.
- 4) Sind $x < y$ und $a > 0$, so folgt $ax < ay$.

Die Axiome 2)–4) gelten jeweils auch, wenn man überall „ $<$ “ durch „ \leq “ ersetzt.

Wir sammeln weitere wichtige Rechenregeln im folgenden Satz.

Satz 2.1. *Für alle reellen Zahlen x, y, a gelten folgende Rechenregeln:*

- 1) Für $x < 0$ ist $-x > 0$. Für $x > 0$ ist $-x < 0$.
- 2) Multiplikation mit einer negativen Zahl ändert die „Richtung“ einer Ungleichung: Ist $x < y$ und $a < 0$, so ist $ax > ay$.
- 3) Für $x \neq 0$ ist $x^2 > 0$. Insbesondere sind Quadrate reeller Zahlen nichtnegativ.
- 4) Allgemeiner gilt:
 - Ist $x > 0$, so folgt $x^n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
 - Ist $x < 0$, so ist $x^n \begin{cases} > 0 & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ gerade} \\ < 0 & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ ungerade.} \end{cases}$

Beweis. 1) Es ist $-x \leq -x$ (es gilt sogar $=$). Für $x < 0$ folgt mit 3): $x - x < 0 - x$, also $0 < -x$, also $-x > 0$ wie behauptet. Ist $x > 0$, so folgt genauso $0 = x - x > 0 - x = -x$.

2) Da $a < 0$ ist $-a > 0$, also $(-a)x < (-a)y$ mit 4), d.h. $-ax \leq -ay$. Mit $ax \leq ax$ und 3) erhalten wir $0 = ax - ax \leq ax - ay$, und mit $ay \leq ay$ und 3) folgt $ay = 0 + ay \leq ax - ay + ay = ax$, also $ax \geq ay$.

3) Ist $x > 0$ so folgt mit 4), dass $x^2 = x \cdot x > x \cdot 0 = 0$. Ist hingegen $x < 0$, so ist $-x > 0$ und dann wie eben $x^2 = (-x) \cdot (-x) > (-x) \cdot 0 = 0$. Damit haben nachgerechnet dass aus $x \neq 0$ folgt $x^2 > 0$. Für $x = 0$ ist natürlich $x^2 = 0 \cdot 0 = 0 \geq 0$.

4) Für gerades $n \in \mathbb{N}$ ist $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $x^n = x^{2k} = (x^k)^2 > 0$, da aus $x \neq 0$ folgt $x^k \neq 0$. Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ist $n = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $x^n = x^{2k}x$. Da $x^{2k} > 0$ ist, ist dann $x^n > 0$ falls $x > 0$ und $x^n < 0$ falls $x < 0$. □

Beispiel 2.2. 1) Es ist $3 < 5$. Multiplikation mit $2 \geq 0$ ergibt $2 \cdot 3 = 6 < 10 = 2 \cdot 5$, vergleiche 4). Hingegen ergibt Multiplikation mit -1 : $-1 \cdot 3 = -3 > -5 = -1 \cdot 5$, und Multiplikation mit -2 ergibt $-2 \cdot 3 = -6 > -10 = -2 \cdot 5$.

2) Für $x = 3$ ist $x^2 = 9 > 0$ und $x^3 = 27 > 0$. Für $x = -3$ ist $x^2 = (-3)(-3) = 9 > 0$, aber $x^3 = (-3)(-3)^2 = -3 \cdot 9 = -27 < 0$.

Beispiel 2.3 (Arithmetisches und geometrisches Mittel). Für $a > 0$ und $b > 0$ gilt

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Addieren von $4ab$ auf beiden Seiten ergibt $4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, also $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Beim Wurzelziehen bleiben Ungleichungen zwischen positiven Zahlen erhalten, und wir bekommen

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Das *geometrische Mittel* \sqrt{ab} ist also höchstens so groß wie das *arithmetische Mittel* $\frac{a+b}{2}$.

2.3 Reelle Wurzeln

Definition 2.4 (Quadratwurzel). Sei $a \geq 0$. Dann ist die *Quadratwurzel* oder kurz *Wurzel* \sqrt{a} die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Für $a < 0$ hat $x^2 = a$ keine reelle Lösung, denn sonst wäre $0 \leq x^2 = a < 0$, was ein Widerspruch ist.

Beispiel 2.5. Es ist $\sqrt{4} = 2$. Man beachte, dass $\sqrt{4} = \pm 2$ falsch ist. Es ist zwar $x^2 = 4$ genau dann, wenn $x = 2$ oder $x = -2$ (kurz: $x = \pm 2$), jedoch die Quadratwurzel die nichtnegative Lösung von $x^2 = 4$, also $\sqrt{4} = 2$.

Die n -te Wurzel von a , geschrieben $\sqrt[n]{a}$, ist wie folgt definiert:

- 1) Für gerades $n \geq 2$ und $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ die nichtnegative Lösung von $x^n = a$.
- 2) Für ungerades $n \geq 1$ und reelles a ist $\sqrt[n]{a}$ die reelle Lösung von $x^n = a$. Ist $a \geq 0$ ist auch $\sqrt[n]{a} \geq 0$, ist hingegen $a < 0$, so ist auch $\sqrt[n]{a} < 0$.

Beispiel 2.6. Für $n = 3$ und $a = 8$ erhalten wir $\sqrt[3]{8} = 2$. Für $a = -8$ erhalten wir $\sqrt[3]{-8} = -2$, denn es gilt $(-2)^3 = -8$.

2.4 Absolutbetrag

Der *Absolutbetrag* oder kurz *Betrag* einer reellen Zahl ist definiert als

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Es ist also $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (vergleiche Satz 2.1). Der Betrag entfernt also negative Vorzeichen.

Beispiel 2.7. Für $x = 7 \geq 0$ ist $|7| = 7$. Für $x = -7 < 0$ ist $|-7| = -(-7) = 7$.

Der Betrag von x ist der Abstand von x zu 0, also der Abstand von x zum „Ursprung“ der Zahlengeraden. Allgemeiner ist $|x - y|$ der Abstand von x und y auf der Zahlengeraden.

Wir sammeln einige Eigenschaften des Absolutbetrags.

Satz 2.8 (Eigenschaften des Betrags). Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- 1) $-|x| \leq x \leq |x|$,
- 2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- 3) $|xy| = |x||y|$, also insbesondere $|-x| = |(-1) \cdot x| = |-1||x| = |x|$,
- 4) $|x| = \sqrt{x^2}$,
- 5) die Dreiecksungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$,
- 6) $|x + y| \geq ||x| - |y||$.

Beweis. Weisen Sie 1)–4) zur Übung nach. Um 5) zu begründen, unterscheiden wir die beiden Möglichkeiten $x + y \geq 0$ und $x + y < 0$. Im ersten Fall $x + y \geq 0$ gilt mit 1)

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

Im zweiten Fall $x + y < 0$ ist

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Eigenschaft 6) rechnen wir wie folgt nach: Wenden wir die Dreiecksungleichung statt auf x und y auf die reellen Zahlen $x + y$ und $-y$ an, so erhalten wir

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|,$$

also $|x| - |y| \leq |x + y|$. Tauschen wir die Rollen von x und y , so erhalten wir

$$|y| - |x| \leq |y + x| = |x + y|.$$

Beide Ungleichungen zusammen ergeben $||x| - |y|| \leq |x + y|$, wie behauptet. \square

Beispiel 2.9. 1) Es ist $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$.

2) Es ist $5 = |2 + 3| \leq |2| + |3| = 5$ und $1 = |-2 + 3| \leq |-2| + |3| = 5$.

3) Es ist

$$1 = |-2 + 3| \geq ||-2| - |3|| = |2 - 3| = |-1| = 1$$

$$5 = |2 + 3| \geq ||2| - |3|| = |-1| = 1.$$

2.5 Beispiele zum Lösen von Ungleichungen

Beispiel 2.10. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{2x}{x+2} > 1$? Zuerst muss $x \neq -2$ gelten, da sonst durch Null geteilt wird. Daher gibt es zwei Möglichkeiten: $x > -2$ oder $x < -2$. Um den Bruch aufzulösen, möchten wir mit $x + 2$ multiplizieren, wobei das Vorzeichen wichtig ist.

- Fall 1: $x > -2$, d.h. $x + 2 > 0$. Dann gilt:

$$\frac{2x}{x+2} > 1 \Leftrightarrow 2x > x + 2 \Leftrightarrow x > 2.$$

Lösungen sind also die $x > -2$ mit $x > 2$, also alle $x > 2$. Als Lösungsmenge geschrieben ist das

$$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2 \text{ und } x > 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} =]2, \infty[.$$

Man kann das auch direkt mit Intervallen schreiben:

$$\mathbb{L}_1 =]-2, \infty[\cap]2, \infty[=]2, \infty[.$$

- Fall 2: $x < -2$, d.h. $x + 2 < 0$. Dann gilt

$$\frac{2x}{x+2} > 1 \Leftrightarrow 2x < x + 2 \Leftrightarrow x < 2.$$

Lösungen sind also die $x < -2$ mit $x < 2$, d.h. alle $x < -2$. Als Lösungsmenge im zweiten Fall haben wir also

$$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ und } x < 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\} =]-\infty, -2[.$$

oder kurz

$$\mathbb{L}_2 =]-\infty, -2[\cap]-\infty, 2[=]-\infty, -2[.$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist dann

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-\infty, -2[\cup]2, \infty[= \mathbb{R} \setminus [-2, 2].$$

Bei Ungleichungen mit Beträgen unterscheidet man, wann das Argument des Betrags positiv oder negativ ist.

Beispiel 2.11. Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - 2| \leq 2x + 5.$$

Wegen $|x - 2|$ unterscheiden wir die zwei Fälle $x - 2 \geq 0$ und $x - 2 < 0$.

- Fall 1: $x - 2 \geq 0$, also $x \geq 2$. Dann ist

$$x - 2 = |x - 2| \leq 2x + 5 \Leftrightarrow -2 \leq x + 5 \Leftrightarrow -7 \leq x.$$

Die Lösungsmenge in diesem Fall ist daher

$$\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -7 \text{ und } x \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2, \infty[.$$

- Fall 2: $x - 2 < 0$, d.h. $x < 2$. Dann ist

$$-x + 2 = -(x - 2) = |x - 2| \leq 2x + 5 \Leftrightarrow 2 \leq 3x + 5 \Leftrightarrow -3 \leq 3x \Leftrightarrow -1 \leq x.$$

Die Lösungsmenge in diesem Fall ist

$$\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \text{ und } x < 2\} = [-1, 2[.$$

Insgesamt ist die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [2, \infty[\cup [-1, 2[= [-1, \infty[.$$

2.6 Summenzeichen

Das *Summenzeichen* \sum ist eine nützliche Abkürzung für die Summe mehrerer Zahlen.

Definition 2.12 (Summenzeichen). Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

- 1) Für $m \leq n$ ist

$$\sum_{k=m}^n x_k := x_m + x_{m+1} + \dots + x_n.$$

(Lies: „Summe der x_k für k von m bis n “.)

2) Für $m > n$, d.h. die obere Grenze ist kleiner als die untere Grenze der Summe, ist

$$\sum_{k=m}^n x_k := 0,$$

und wir sprechen von der *leeren Summe*.

Zum Beispiel sind

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} k &= 1 + 2 + \dots + 9 + 10 = 1 + \sum_{k=2}^{10} k, \\ \sum_{k=2}^5 k^2 &= 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \sum_{k=2}^3 k^2 + \sum_{k=4}^5 k^2, \\ \sum_{k=0}^{17} 2^k &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{17}.\end{aligned}$$

Dabei heißt k der *Summationsindex*. Welchen Buchstaben wir verwenden ist unerheblich:

$$\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{j=m}^n x_j = \sum_{\ell=m}^n x_{\ell}.$$

Ein oft verwendeter Trick ist die *Indexverschiebung*, wobei im Wesentlichen ein Index substituiert (ersetzt) wird. Zum Beispiel kann man $\ell = k - 1$ (also $k = \ell + 1$) ersetzen:

$$\sum_{k=m}^n x_k = x_m + x_{m+1} + \dots + x_n = \sum_{\ell=m-1}^{n-1} x_{\ell+1} = \sum_{k=m-1}^{n-1} x_{k+1}.$$

Im letzten Schritt haben wir ℓ wieder k genannt. Analog hat man mit $\ell = k + 1$ (also $k = \ell - 1$)

$$\sum_{k=m}^n x_k = \sum_{\ell=m+1}^{n+1} x_{\ell-1} = \sum_{k=m+1}^{n+1} x_{k-1}.$$

Beispiel 2.13. Wir wollen die *geometrische Summe*

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

berechnen, wobei q^k die k -te Potenz von $q \in \mathbb{R}$ bezeichnet (mit $q^0 := 1$). Die Summe sei $S := \sum_{k=0}^n q^k$. Ist $q = 1$, so ist $S = n + 1$. Für $q \neq 1$ ist

$$qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} q^k,$$

und daher

$$\begin{aligned}(1-q)S &= S - qS = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = q^0 + \sum_{k=1}^n q^k - \left(\sum_{k=1}^n q^k + q^{n+1} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n q^k - \sum_{k=1}^n q^k - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}.\end{aligned}$$

Teilen wir noch durch $1 - q \neq 0$ (es war $q \neq 1$), so erhalten wir $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Das Ergebnis halten wir als Satz fest.

Satz 2.14 (Geometrische Summe). *Für eine reelle Zahl q und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1, & q = 1, \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1. \end{cases}$$

Beispiel 2.15. Die geometrische Summe ist ein wichtiges Beispiel einer Summenbildung, das auch im Alltag seine Anwendung findet: Wenn man mit einer Bank einen Sparplan über n Jahre abschließt, bei dem zum Beginn eines jeden Jahres der feste Betrag B eingezahlt wird bei einer Verzinsung von p Prozent auf den jeweils am Ende eines Jahres insgesamt vorliegenden Betrag, kann man mit Hilfe der geometrischen Summe berechnen, wieviel Geld man nach Ablauf des Sparplanes erhalten wird.

Der zu Beginn des ersten Jahres eingezahlte Betrag wird am Ende des Jahres verzinst, d.h. mit dem Faktor $q := 1 + \frac{p}{100}$ multipliziert. Zu Beginn des zweiten Jahres wird wieder der Betrag B eingezahlt und die Gesamtsumme am Ende des Jahres verzinst, die dann $(Bq + B)q = Bq^2 + Bq$ beträgt. Im dritten Jahr wird wieder der Betrag B eingezahlt, und die Gesamtsumme am Jahresende verzinst, die dann $(Bq^2 + Bq + B)q$ beträgt. Bei Ablauf des Sparplanes nach n Jahren wird dann der folgende Betrag ausgezahlt:

$$Bq^n + Bq^{n-1} + \dots + Bq = Bq(q^{n-1} + \dots + q + 1) = Bq \sum_{k=0}^{n-1} q^k = Bq \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Wir sammeln noch einige Rechenregeln:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^n x_k + \sum_{k=m}^n y_k &= \sum_{k=m}^n (x_k + y_k), \\ a \sum_{k=m}^n x_k &= \sum_{k=m}^n (ax_k), \\ \sum_{k=m}^n x_k \sum_{j=p}^q y_j &= \sum_{k=m}^n \sum_{j=p}^q x_k y_j = \sum_{j=p}^q \sum_{k=m}^n x_k y_j = \sum_{\substack{k=m, \dots, n \\ j=p, \dots, q}} x_k y_j, \\ \sum_{k=m}^n x_k &= \sum_{k=m}^p x_k + \sum_{k=p+1}^n x_k, \quad \text{falls } m \leq p \leq n.\end{aligned}$$

Beispiel 2.16. Überlegen Sie sich, welche Regel in welchem der folgenden Rechenschritte verwendet wird:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^9 (k^2 + 4) + 4 \sum_{j=3}^6 j + \sum_{\ell=7}^9 (4\ell) &= \sum_{k=3}^9 (k^2 + 4) + 4 \sum_{k=3}^6 k + \sum_{k=7}^9 (4k) \\
&= \sum_{k=3}^9 (k^2 + 4) + \sum_{k=3}^6 (4k) + \sum_{k=7}^9 (4k) \\
&= \sum_{k=3}^9 (k^2 + 4) + \sum_{k=3}^9 (4k) \\
&= \sum_{k=3}^9 ((k^2 + 4) + 4k) = \sum_{k=3}^9 (k^2 + 4k + 4) = \sum_{k=3}^9 (k+2)^2 \\
&= 5^2 + 6^2 + \dots + 11^2 = \sum_{k=5}^{11} k^2.
\end{aligned}$$

2.7 Produktzeichen

Genauso wie Summen können wir auch Produkte betrachten.

Definition 2.17 (Produktzeichen). Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

1) Für $m \leq n$ definiert man

$$\prod_{k=m}^n x_k := x_m \cdot x_{m+1} \cdot \dots \cdot x_n.$$

2) Falls $m > n$, definiert man das *leere Produkt* als

$$\prod_{k=m}^n x_k := 1.$$

Zum Beispiel sind

$$\prod_{k=1}^4 2^k = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{1+2+3+4} = 2^{10}, \quad \prod_{k=3}^1 k = 1.$$

Für Produkte gelten ganz ähnliche Rechenregeln wie für Summen. Überlegen Sie sich zur Übung, wie diese aussehen.

Definition 2.18 (Fakultät). Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir n Fakultät durch $n! := \prod_{k=1}^n k$.

Insbesondere ist $0! = \prod_{k=1}^0 1 = 1$ (leeres Produkt) und für $n \geq 1$ ist

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Damit ist zum Beispiel $1! = 1$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $7! = 5040$ und $10! = 3628800$. Für wachsendes n wächst $n!$ sehr schnell.

Vorlesung 3

Komplexe Zahlen 1

Wir lernen die komplexen Zahlen kennen. Diese haben viele Vorteile, zum Beispiel ist es immer möglich, Wurzeln zu ziehen, und quadratische Gleichungen haben immer Lösungen. Zudem lassen sich physikalische Schwingungsprozesse hervorragend mit komplexen Zahlen beschreiben.

3.1 Definition und Grundrechenarten

In den reellen Zahlen \mathbb{R} hat die Gleichung $x^2 - 1 = 0$ die zwei Lösungen $x = 1$ und $x = -1$. Hingegen hat $x^2 + 1 = 0$ keine reelle Lösung, denn für $x \in \mathbb{R}$ gilt immer $x^2 \geq 0$ und damit $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Das ist unbefriedigend. Um dennoch Lösungen zu haben, definieren wir die *imaginäre Einheit*¹ i als eine Zahl mit $i^2 = -1$. Die *komplexen Zahlen* (komplex = zusammengesetzt) sind dann Zahlen der Form $z = x + iy$ mit reellen x und y , und die Menge der komplexen Zahlen ist

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Für komplexe Zahlen $a + ib$ und $c + id$ mit $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ sei

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &:= (a + c) + i(b + d), \\ (a + ib) \cdot (c + id) &:= ac + iad + ibc + \underbrace{i^2}_{=-1} bd = (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Man kann nachrechnen: In \mathbb{C} gelten für $+$ und \cdot die gleichen Rechenregeln wie in \mathbb{R} .

Wegen $z = x + i0 = x$ gilt $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, d.h. \mathbb{C} ist eine Erweiterung von \mathbb{R} . Es wird sich zeigen, dass in \mathbb{C} nicht nur $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung hat, sondern *jede* quadratische Gleichung.

¹In der Elektrotechnik verwendet man oft das Symbol j statt i , um nicht mit der Standardbezeichnung für den Strom in Konflikt zu kommen.

Wir vereinbaren ein paar vereinfachende Schreibweisen:

- Anstatt $x + iy$ schreiben wir auch $x + yi$,
- $x + i0 = x$ ist reell,
- $0 + iy = iy$ ist eine *rein imaginäre Zahl*,
- $5 + 1i = 5 + i$,
- $5 + (-2)i = 5 - 2i$.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen ist genauso einfach wie das Rechnen mit reellen Zahlen, man beachte nur, dass $i^2 = -1$ gilt.

Beispiel 3.1. 1) Addition: $(2 + 4i) + (1 - 3i) = 2 + 1 + 4i - 3i = 3 + i$.

2) Subtraktion: $(2 + 4i) - (1 - 3i) = 2 + 4i - 1 + 3i = 1 + 7i$.

3) Multiplikation:

$$(2 + 4i) \cdot (1 - 3i) = 2(1 - 3i) + 4i(1 - 3i) = 2 - 6i + 4i - \underbrace{12i^2}_{=-12} = 14 - 2i.$$

4) $(x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$.

5) Division durch Erweitern des Bruchs und Binomische Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$:

$$\frac{2 + 4i}{1 - 3i} = \frac{(2 + 4i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{2 + 6i + 4i + 12i^2}{1 - 9i^2} = \frac{-10 + 10i}{1 + 9} = -1 + i.$$

6) Potenzen der imaginären Einheit i :

$$i^2 = -1,$$

$$i^3 = i^2i = (-1)i = -i,$$

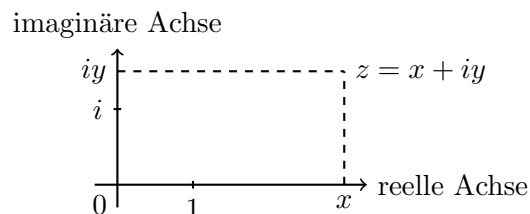
$$i^4 = i^2i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1,$$

$$i^5 = i^4i = i,$$

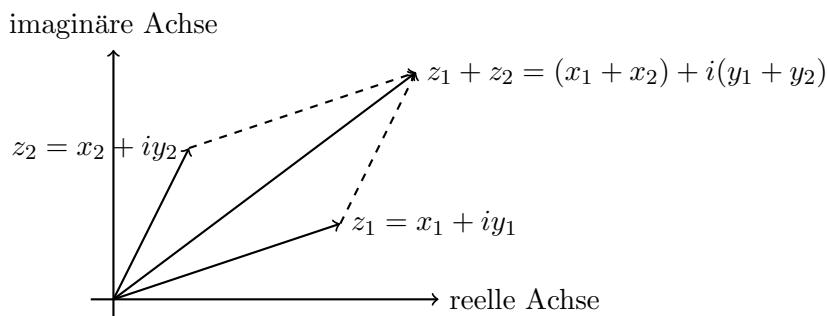
$$i^{101} = i^{100}i = (i^4)^{25}i = 1^{25}i = i.$$

3.2 Die Gaußsche Zahlenebene

Reelle Zahlen entsprechen den Punkten auf der Zahlengeraden. Nach Carl Friedrich Gauß (1777–1855) kann man sich die komplexen Zahlen als die Punkte einer Ebene vorstellen, die die reelle Zahlengerade enthält. Die komplexe Zahl $z = x + iy$ ist dabei der Punkt mit den kartesischen Koordinaten (x, y) :



Die Addition komplexer Zahlen entspricht geometrisch der Addition von Vektoren in der Ebene:



Die geometrische Deutung der Multiplikation ist in kartesischen Koordinaten nicht so einfach. Wir kommen darauf in Vorlesung 7 zurück.

3.3 Absolutbetrag und Konjugierte

Definition 3.2. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

- 1) $\operatorname{Re}(z) := x$ heißt der *Realteil* von z ,
- 2) $\operatorname{Im}(z) := y \in \mathbb{R}$ heißt der *Imaginärteil* von z ,
- 3) $\bar{z} := x - iy$ heißt die zu z (*komplex*) *Konjugierte*,
(lies \bar{z} als „ z komplex konjugiert“ oder „ z quer“)
- 4) $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ heißt der *Absolutbetrag* oder kurz *Betrag* von z .

Beispiel 3.3. Für $z = 2 + 3i$ ist

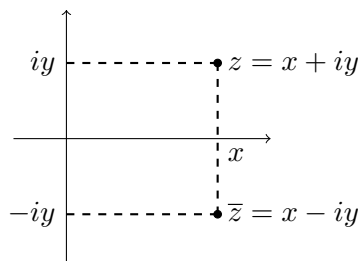
$$\operatorname{Re}(z) = 2, \quad \operatorname{Im}(z) = 3, \quad \bar{z} = 2 - 3i, \quad |z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Real- und Imaginärteil von $z = x + iy$ geben genau die kartesischen Koordinaten (x, y) . Beachten Sie, dass $\operatorname{Im}(z)$ selbst reell ist, $\operatorname{Im}(z) = y$, nicht iy .

Bei der Konjugierten \bar{z} wechselt das Vorzeichen des Imaginärteils von z , zum Beispiel

$$\overline{2 - 3i} = 2 + 3i, \quad \overline{-1 + 2i} = -1 - 2i, \quad \overline{-2i - 1} = 2i - 1.$$

Geometrisch beschreibt der Übergang von z zu \bar{z} die Spiegelung an der reellen Achse.



Satz 3.4 (Rechenregeln für die Konjugation). Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- 1) $\overline{\overline{z}} = z$,
- 2) $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$,
- 3) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
- 4) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
- 5) $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$,
- 6) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$,
- 7) $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Beweis. Wir rechnen nur 1), 2) und 6) nach, die anderen verbleiben als Übungsaufgabe. Für 1) rechnen wir

$$\overline{\overline{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z.$$

Für 2) rechnen wir

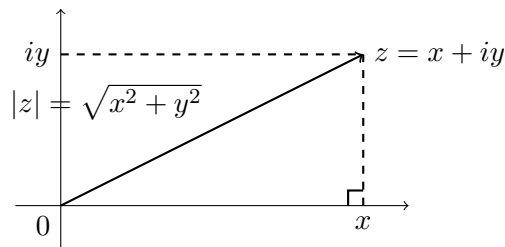
$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2 y^2 = x^2 + y^2.$$

Für 6) fangen wir mit $z + \overline{z}$ an:

$$z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re}(z),$$

also $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$. □

Der Betrag ist geometrisch der Abstand zwischen $z = x + iy$ und 0 in der Gaußschen Zahlenebene. Dazu betrachtet man das rechtwinklige Dreieck mit Ecken in 0, x und z und wendet den Satz des Pythagoras an:



Genauso überlegt man sich, dass $|z - w|$ der Abstand zwischen den beiden komplexen Zahlen z und w in der Gaußschen Zahlenebene ist.

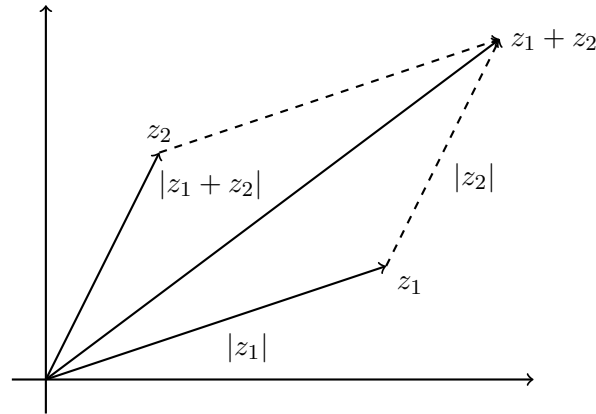
Satz 3.5 (Rechenregeln für den Betrag). Für komplexe Zahlen z, z_1, z_2 gilt:

- 1) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$,
- 2) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

$$3) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

4) die Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Illustration der Dreiecksungleichung:



3.4 Lösungen quadratischer Gleichungen

Als erste Anwendung der komplexen Zahlen untersuchen wir die Lösungen der Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (3.1)$$

mit reellen a, b, c und $a \neq 0$. (Für $a = 0$ haben wir $bz + c = 0$, da ist alles klar.) Diese Gleichung hat nun immer die zwei Lösungen

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3.2)$$

(Mit der abc - oder Mitternachtstformel; mit der pq -Formel geht es ähnlich, siehe unten.) Ist die Diskriminante $d := b^2 - 4ac$ größer Null, so ist \sqrt{d} die positive reelle Wurzel, und die Gleichung (3.1) hat zwei verschiedene reelle Lösungen. Für $d = 0$ ist $\frac{-b}{2a}$ eine doppelte reelle Lösung. Ist $d < 0$, so ist $\pm\sqrt{d} = \pm i\sqrt{-d}$ (wobei nun $-d > 0$), und die Gleichung (3.1) hat zwei verschiedene komplexe Lösungen.

Ist $a \neq 0$, so können wir die Gleichung (3.1) durch a teilen und erhalten die Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0,$$

wobei $p = b/a$ und $q = c/a$ gesetzt wurde. Mit der pq -Formel sind die Lösungen dann

$$z_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{und} \quad z_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

In Vorlesung 7 werden wir sehen, dass die Gleichung (3.1) auch für komplexe a, b, c die beiden Lösungen (3.2) hat. Vorher müssen wir aber komplexe Quadratwurzeln erklären.

Beispiel 3.6. Bestimme die Lösungen on $z^2 + 2z + 5 = 0$. Mit der pq -Formel findet man

$$z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 5} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm i\sqrt{4} = -1 \pm 2i,$$

also $z_1 = -1 + 2i$ und $z_2 = -1 - 2i$.

Vorlesung 4

Vollständige Induktion

In dieser Vorlesung lernen wir das Prinzip der vollständigen Induktion kennen. Als Anwendung beweisen wir einige nützliche Summenformeln, sowie den sehr wichtigen binomischen Lehrsatz.

4.1 Induktion

Wir werden mehrfach vor der Aufgabe stehen, eine Aussage zu beweisen, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt. Beispiele solcher Aussagen sind:

- 1) Die geometrische Summe: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ ist $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, wobei $q \neq 1$ ist.
- 2) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- 3) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: n Elemente lassen sich auf $n!$ verschiedene Arten anordnen.

Oft lassen sich solche Aussagen mit vollständiger Induktion beweisen.

Eine Eigenschaft der natürlichen Zahlen von fundamentaler Wichtigkeit ist die folgende, nicht besonders überraschende Feststellung: Wenn man bei 0 beginnend „immer eins weiterzählt“, erreicht man jede natürliche Zahl. Wenn man also eine Aussage $A(n)$ hat, die für $n = 0$ wahr ist und beim „Weiterzählen“ wahr bleibt, dann gilt sie für alle natürlichen Zahlen. Das ist das Prinzip der vollständigen Induktion.

Das gleiche Prinzip gilt natürlich auch, wenn man mit einem „Startwert“ $n_0 \in \mathbb{N}$ beginnt und dann „weiterzählt“. Die Aussage gilt dann für alle $n \geq n_0$.

Vollständige Induktion: Um eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ (also ab einem Startwert n_0) mit vollständiger Induktion zu beweisen, gehen wir wie folgt vor:

- 1) *Induktionsanfang:* Wir zeigen, dass $A(n_0)$ gilt.
- 2) *Induktionsschritt:* Wir zeigen „ $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ “, also dass wenn $A(n)$ wahr ist, auch $A(n+1)$ wahr ist.

Anschließend ist die Aussage für alle $n \geq n_0$ gezeigt.

Zum besseren Verständnis teilt man den Induktionsschritt noch in zwei oder drei Teile, nämlich

- 1) die *Induktionsvoraussetzung*: Wir nehmen an, dass $A(n)$ für *ein* $n \geq n_0$ richtig ist,
- 2) die *Induktionsbehauptung*: „Dann gilt auch $A(n+1)$ “,
- 3) den eigentlichen *Induktionsschritt*, bei dem die Induktionsbehauptung unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung bewiesen wird.

Die Induktionsbehauptung (IB) muss man nicht aufschreiben, aber es kann beim Beweisen helfen, wenn man sich noch einmal klar macht, wohin man eigentlich möchte.

Für die Schritte bei der vollständigen Induktion finden Sie manchmal auch andere Namen: Statt Induktionsanfang (IA) sagt man auch Induktionsverankerung, statt Induktionsvoraussetzung (IV) auch Induktionsannahme, und statt Induktionsschritt (IS) auch Induktionsschluss.

Als erstes Beispiel beweisen wir noch einmal die Formel für die geometrische Summe (siehe Satz 2.14).

Beispiel 4.1. Sei $q \neq 1$ eine reelle oder komplexe Zahl. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für alle natürlichen Zahlen n gilt.

- Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$.
- Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei für *ein* $n \geq 0$ wahr, d.h. es gilt $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- Induktionsschritt: Wir zeigen jetzt, dass die Behauptung auch für $n+1$ wahr ist. Dazu rechnen wir:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

Beispiel 4.2. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt.

IA: Für $n = 1$ ist $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

IV: Für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gelte $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

IS: Wir zeigen, dass die Behauptung auch für $n+1$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Formel dann für alle $n \geq 1$. Die Formel gilt sogar für alle $n \in \mathbb{N}$, denn für $n = 0$ ist die leere Summe $= 0$ und damit $\sum_{k=1}^0 k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$.

Beispiel 4.3. Wir zeigen mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

IA: Für $n = 1$ gilt

$$\prod_{k=1}^1 \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = \left(\frac{1+1}{1} \right)^1 = 2 = \frac{2^1}{1!}.$$

IV: Für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gelte $\prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

IS: Wir zeigen, dass die Aussage dann auch für $n+1$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k} \right)^k \cdot \left(\frac{n+1+1}{n+1} \right)^{n+1} \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{(n+1)^n}{n!} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \\ &= \frac{(n+2)^{n+1}}{n!(n+1)} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Die Formel gilt auch für $n = 0$, da (leeres Produkt) $\prod_{k=1}^0 \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = 1 = \frac{(0+1)^0}{0!}$.

Beispiel 4.4 (Bernoulli-Ungleichung). Sei x eine reelle Zahl mit $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Das weisen wir mit vollständiger Induktion nach.

IA: Für $n = 0$ ist $(1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0 \cdot x$.

IV: Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei $(1+x)^n \geq 1+nx$ wahr.

IS: Wir zeigen die Behauptung für $n+1$. Es gilt $1+x \geq 0$, und nach Induktionsvoraussetzung gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

Bei der letzten Abschätzung haben wir verwendet, dass $nx^2 \geq 0$ ist.

Beispiel 4.5. Wir beweisen mit vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, die Anzahl der möglichen Reihenfolgen (= Anordnungen = Permutationen) von n Elementen gleich $n!$ ist. Wir schreiben zur Abkürzung die Aussage $A(n)$: „ n Elemente lassen sich auf genau $n!$ verschiedene Weisen (linear) anordnen.“

IA: Ein einziges Element lässt sich auf eine Weise anordnen, also ist $A(1)$ wahr.

IV: $A(n)$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, wahr.

IS: Wir zeigen, dass dann auch $A(n+1)$ wahr ist. Dazu lassen wir von den $n+1$ Elementen eines weg. Die verbleibenden n Elemente können wir nach der Induktionsannahme auf $n!$ verschiedene Weisen anordnen. In jede dieser Anordnungen kann das weggelassene Element an $n+1$ Stellen eingefügt werden (nach einem der n Elemente oder vor dem ersten). Also ist die gesuchte Anzahl möglicher Anordnungen $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$.

4.2 Binomischer Lehrsatz

Wir beweisen nun den binomischen Lehrsatz, also die Verallgemeinerung der Binomischen Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

auf $(a + b)^n$ mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$. Dazu brauchen wir einige Vorbereitungen.

Definition 4.6. Für $n, k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Für $k \neq 0$ ergibt das

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k},$$

wobei Zähler und Nenner ein Produkt aus k Faktoren sind. Im Spezialfall $k = 0$ ist $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$. Auch für $k = n$ ist $\binom{n}{n} = 1$.

Für die Binomialkoeffizienten gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

Wir rechnen weiter nach (auf Hauptnenner bringen und vereinfachen), dass

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!k}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Die Formel (4.1) ist eine „Rekursionsformel“: Wenn man alle $\binom{n}{k}$ für ein n schon berechnet hat, bekommt man daraus ganz einfach die Binomialkoeffizienten $\binom{n+1}{k}$. Eine Illustration dieser Formel gibt das *Pascalschen Dreieck*:

[illegible]

Interpretiert man k als Spalten- und n als Zeilenindex in diesem Dreieck, so ist jeder Eintrag die Summe der beiden darüber liegenden Einträge (abgesehen von den „Rand-einträgen“ $\binom{n}{0}$ und $\binom{n}{n}$).

Satz 4.7 (Binomischer Lehrsatz). Für alle $n \in \mathbb{N}$ und reelle oder komplexe a, b gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Für $n = 2$ ist das die bekannte binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, für $n = 3$ gilt

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Für $n = 5$ haben wir die Binomialkoeffizienten (nächste Zeile des Pascalschen Dreiecks):

$$\binom{5}{0} = 1, \quad \binom{5}{1} = 5, \quad \binom{5}{2} = 10, \quad \binom{5}{3} = 10, \quad \binom{5}{4} = 5, \quad \binom{5}{5} = 1,$$

daher ist

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5.$$

Beweis. Wir beweisen den binomischen Lehrsatz mit vollständiger Induktion.

IA: Für $n = 0$ ist

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 = (a+b)^0.$$

IV: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

IS: Wir zeigen mit der Induktionsvoraussetzung, dass die Behauptung auch für $n+1$ gilt, also dass

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Dazu rechnen wir:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \stackrel{\text{IV}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}. \end{aligned}$$

In der zweiten Summe machen wir eine Indexverschiebung und fassen zusammen:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}. \end{aligned}$$

Mit (4.1) und $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k. \end{aligned}$$

Damit ist der binomische Lehrsatz bewiesen. □

Vorlesung 5

Abbildungen

In dieser Vorlesung betrachten wir Abbildungen, Operationen mit Abbildungen und wann Abbildungen umkehrbar sind. Zudem betrachten wir Eigenschaften reeller Funktionen wie Symmetrie und Monotonie.

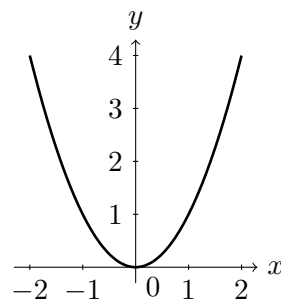
5.1 Definition

Definition 5.1 (Abbildung). Seien A, B Mengen. Eine Abbildung f von A nach B ist eine Vorschrift, die *jedem* Element $x \in A$ *genau ein* Element $y = f(x) \in B$ zuordnet. Man nennt A den *Definitionsbereich* und B den *Wertebereich* von f .

Schreibweisen: $f : A \rightarrow B$, $x \mapsto y$, oder $f : A \rightarrow B$, $f(x) = y$.

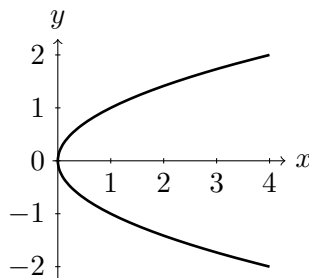
Man nennt Abbildungen auch *Funktionen*, vor allem dann, wenn die Werte Zahlen sind (\mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , ...).

Beispiel 5.2. 1) $f(x) = x^2$, aber das ist zu ungenau, es fehlen Definitions- und Wertebereich! Genauer können wir zum Beispiel schreiben: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$. Der Graph der Funktion ist:



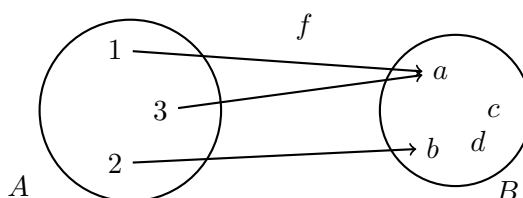
Da wir wissen, dass $f(x) = x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, können wir auch die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[, x \mapsto x^2$, betrachten.

- 2) Der folgende Graph zeigt keine Funktion, da zu jedem $x \in]0, \infty[$ zwei y -Werte vorhanden sind:

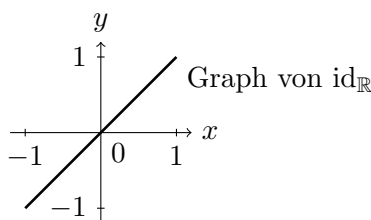


- 3) Konstante Abbildungen, zum Beispiel die *Nullabbildung* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$, die jede reelle Zahl auf 0 abbildet.

- 4) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ und $f : A \rightarrow B$ mit $1 \mapsto a$, $2 \mapsto b$, $3 \mapsto a$.

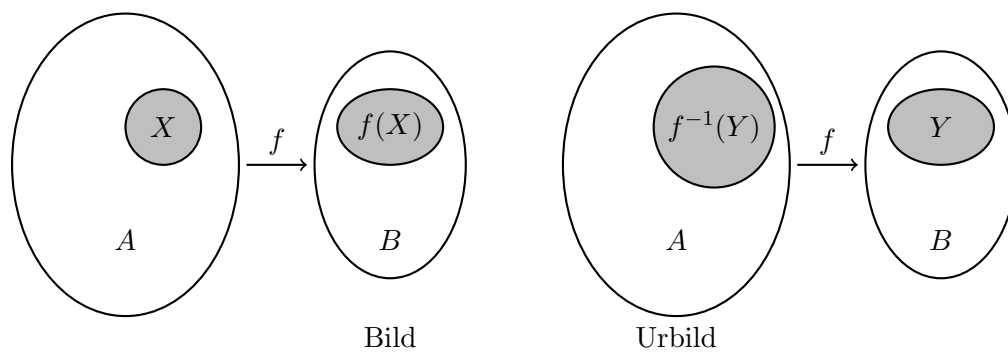


- 5) Sei A eine Menge. Die Abbildung $\text{id}_A : A \rightarrow A, a \mapsto a$, heißt die *Identität* auf A . Dabei ist also $\text{id}_A(a) = a$ für jedes $a \in A$.

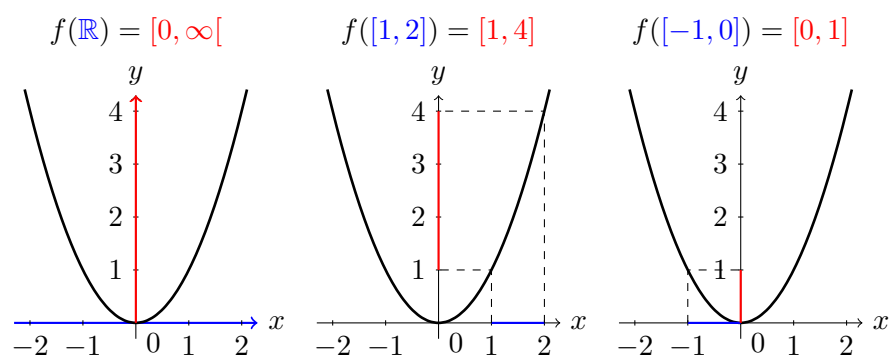


Definition 5.3 (Bild und Urbild). Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung.

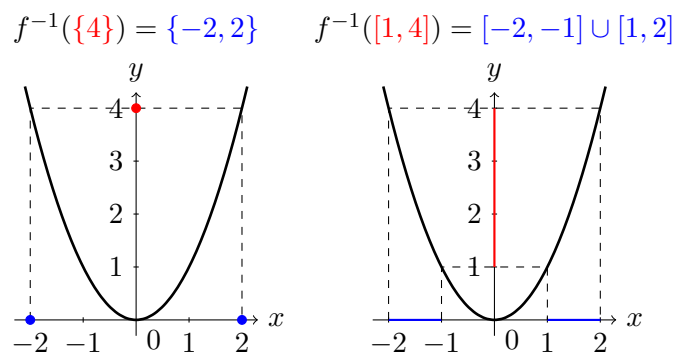
- 1) Für $X \subseteq A$ heißt $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$ das *Bild* von X unter f . Insbesondere ist $f(X) \subseteq B$.
Speziell heißt $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ das *Bild* von f .
- 2) Für $Y \subseteq B$ heißt $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ das *Urbild* von Y unter f . Insbesondere ist $f^{-1}(Y) \subseteq A$.



Beispiel 5.4. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Dann sind



und



Außerdem ist $f^{-1}([-2, -1]) = \emptyset$, denn für jede reelle Zahl ist $x^2 \geq 0$, so dass die Werte zwischen -2 und -1 nie erreicht werden.

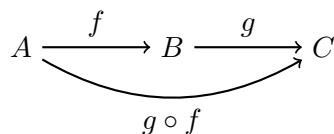
5.2 Komposition von Abbildungen

Mehrere Abbildungen kann man nacheinander ausführen, vorausgesetzt Werte- und Definitionsbereiche passen zusammen.

Definition 5.5 (Komposition). Für Abbildungen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ heißt die Abbildung

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad x \mapsto g(f(x)),$$

die *Komposition* oder *Verkettung* von f und g . (Man liest $g \circ f$ als „ g nach f “ oder als „ g Krinkel f “.)



Beispiel 5.6. 1) Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, also $f(x) = x^2$, und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x+1$, also $g(x) = x+1$. Dann ist

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1,$$

also $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$. Andersherum ist

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

also $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 2x + 1$.

Insbesondere ist im Allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$, die Reihenfolge ist wesentlich!

2) Sind $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[, x \mapsto x^2$ und $g : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, x \mapsto \sqrt{x}$, dann ist

$$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Ist $f : A \rightarrow B$ und $g : D \rightarrow C$ wobei D nur eine Teilmenge von B ist, $D \subseteq B$, so definiert man $g \circ f$ wie vorher, falls $f(A) \subseteq D$. Liegt aber $f(A)$ nicht ganz in D , so definiert man $g \circ f$ nur für alle $x \in A$ mit $f(x) \in D$, denn nur für diese x lässt sich $g(f(x))$ bilden.

Beispiel 5.7. Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - x^2$, und $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, g(y) = \sqrt{y}$. Dann ist $g(f(x)) = \sqrt{1 - x^2}$ nur für $x \in [-1, 1]$ definiert, also $g \circ f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

5.3 Umkehrbarkeit

Wir lernen, wann eine Abbildung umkehrbar (invertierbar) ist. Umkehrbarkeit einer Abbildung f erlaubt insbesondere, die Gleichung $y = f(x)$ eindeutig nach x zu lösen.

Definition 5.8 (Injektiv, surjektiv, bijektiv). Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung.

- 1) f heißt *injektiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Äquivalent dazu ist: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. „Getrenntes bleibt getrennt.“
Ist f injektiv, so wird jedes Element aus B von höchstens einem Punkt aus erreicht.
- 2) f heißt *surjektiv*, falls $f(A) = B$ ist, d.h. falls zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$.
Ist f surjektiv, so wird jeder Punkt y in B erreicht.
- 3) f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Definition 5.9 (Umkehrabbildung). Ist $f : A \rightarrow B$ injektiv, so gibt es zu jedem $y \in f(A)$ genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y$, für das wir $x = f^{-1}(y)$ schreiben. Damit können wir die *Umkehrabbildung* (oder *Inverse*) bilden:

$$f^{-1} : f(A) \rightarrow A, \quad y \mapsto f^{-1}(y).$$

Die Umkehrabbildung macht also f „rückgängig“, und es gelten

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \quad \text{für alle } x \in A, \\ f(f^{-1}(y)) &= y \quad \text{für alle } y \in f(A). \end{aligned}$$

Dies können wir noch kürzer schreiben als $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_{f(A)}$.

Man erhält $f^{-1}(y)$ durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x .

Ist f injektiv und surjektiv (also bijektiv), so ist $f(A) = B$, und der Definitionsbereich von f^{-1} ist ganz B .

Beispiel 5.10. 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, ist nicht injektiv, da zum Beispiel $f(2) = 2^2 = 4 = (-2)^2 = f(-2)$, aber $2 \neq -2$ ist.

- 2) $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, ist injektiv, denn seien $x_1, x_2 \in [0, \infty[$ mit $f(x_1) = f(x_2)$, dann gilt also $x_1^2 = x_2^2$. Durch Wurzelziehen haben wir $|x_1| = \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} = |x_2|$, und da $x_1, x_2 \geq 0$ sind also $x_1 = x_2$.

f ist nicht surjektiv, da $f([0, \infty[) = [0, \infty[$, und somit die negativen reellen Zahlen nicht erreicht werden.

Da f injektiv ist, besitzt f eine Umkehrabbildung. Um diese zu berechnen, lösen wir $y = f(x) = x^2$ nach x auf: $x = \sqrt{y}$. Daher ist

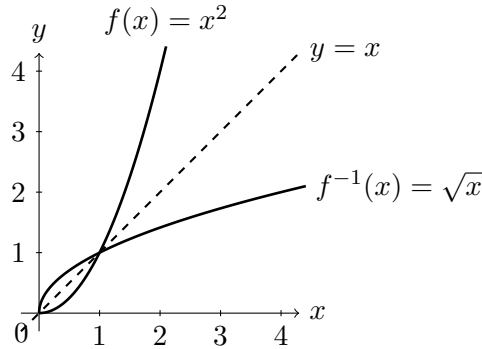
$$f^{-1} : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Beachten Sie den Unterschied zwischen Umkehrabbildung und Urbild:

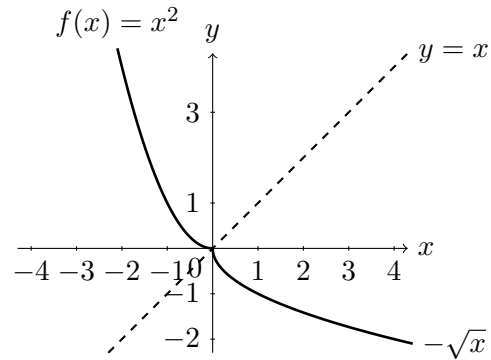
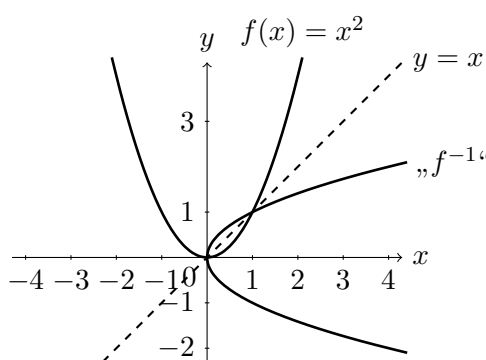
- $f^{-1}(4) = 2$ ist die Umkehrabbildung (für Zahlen),
- $f^{-1}(\{4\}) = \{2\}$ ist das Urbild (für Mengen).

Wir erhalten die Umkehrabbildung einer reellen Funktion durch Spiegeln des Funktionsgraphen an der Winkelhalbierenden $y = x$. (Bei der Umkehrfunktion werden genau die Rollen von x und y vertauscht.)

Beispiel 5.11. Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Die Umkehrabbildung ist $f^{-1} : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, x \mapsto \sqrt{x}$.



Am Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, sieht man noch einmal, dass man auf Injektivität nicht verzichten kann. Spiegelt man den Funktionsgraphen an $y = x$, so erhält man (links)



und das ist keine Funktion, denn jedem Punkt würden *zwei* Funktionswerte zugeordnet. Schränkt man die Funktion auf $[0, \infty[$ ein, so kann man sie umkehren (oben), schränkt man sie auf $]-\infty, 0]$ ein, so kann man sie ebenfalls umkehren (rechts).

5.4 Eigenschaften reeller Funktionen

Wir betrachten nun noch einige Eigenschaften reeller Funktionen.

5.4.1 Symmetrie

Definition 5.12 (gerade und ungerade Funktionen). Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- 1) *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

- 2) *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

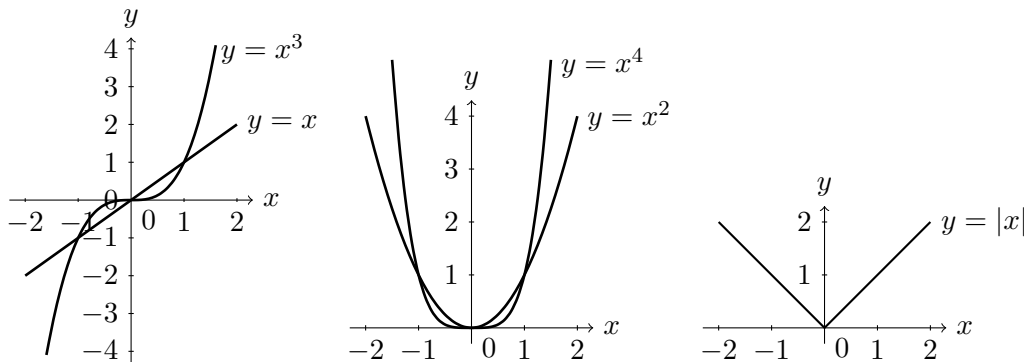
Dies gilt genauso, wenn f nur auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ definiert ist, die mit x auch $-x$ enthält. (Zum Beispiel $D = [-1, 1]$, aber nicht $[-1, 2]$.)

Der Graph einer geraden Funktionen ist spiegelsymmetrisch zur y -Achse, der Graph einer ungeraden Funktionen ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiel 5.13. 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, ist ungerade. Allgemeiner ist f mit $f(x) = x^k$ und ungeradem $k \in \mathbb{N}$ eine ungerade Funktion.

- 2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist gerade. Allgemeiner ist f mit $f(x) = x^k$ und geradem $k \in \mathbb{N}$ eine gerade Funktion.

- 3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, ist gerade.



5.4.2 Monotonie

Definition 5.14 (Monotonie). Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt

- 1) f *streng monoton wachsend*, wenn aus $x, y \in A$ mit $x < y$ folgt, dass $f(x) < f(y)$ ist,
- 2) f *monoton wachsend*, wenn aus $x, y \in A$ mit $x < y$ folgt, dass $f(x) \leq f(y)$ ist,
- 3) f *streng monoton fallend*, wenn aus $x, y \in A$ mit $x < y$ folgt, dass $f(x) > f(y)$ ist,
- 4) f *monoton fallend*, wenn aus $x, y \in A$ mit $x < y$ folgt, dass $f(x) \geq f(y)$ ist.

Für differenzierbare Funktionen gibt die erste Ableitung Auskunft über das Monotonieverhalten (siehe Satz 23.6).

Beispiel 5.15. 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$, ist streng monoton wachsend, denn sind $x < y$ in \mathbb{R} , so folgt $x + 1 < y + 1$, also $f(x) < f(y)$.

- 2) Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, ist sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend.

- 3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, ist weder (streng) monoton wachsend noch (streng) monoton fallend, den z.B. für $x = -1 < 0 = y$ ist $f(-1) = 1 > 0 = f(0)$ aber für $x = 0 < 1 = y$ ist $f(0) < f(1)$.

Dafür ist f streng monoton fallend auf $] -\infty, 0]$ und streng monoton wachsend auf $[0, \infty[$.

Strenge Monotonie impliziert Injektivität.

Satz 5.16. Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton. Dann ist f injektiv und damit umkehrbar.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass f streng monoton wachsend ist, und zeigen, dass f injektiv ist. Dazu seien $x \neq y$ aus A . Dann gilt entweder $x < y$ und dann $f(x) < f(y)$ (streng monoton wachsend), oder $x > y$ und dann $f(x) > f(y)$. In beiden Fällen ist also $f(x) \neq f(y)$. Damit ist gezeigt, dass f injektiv ist.

Für eine streng monoton fallende Funktion geht es genauso. \square

5.4.3 Beschränktheit

Definition 5.17 (Beschränktheit). Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- 1) *nach oben beschränkt*, wenn eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) \leq M$ für alle $x \in A$,
- 2) *nach unten beschränkt*, wenn eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) \geq m$ für alle $x \in A$,
- 3) *beschränkt*, wenn f nach oben und nach unten beschränkt ist, also wenn es $m, M \in \mathbb{R}$ gibt mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in A$.

Für Beschränktheit reicht es nachzurechnen, dass es ein $M \geq 0$ gibt mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in A$. Dann ist nämlich $-M \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in A$. Ist andersherum f beschränkt, d.h. $m \leq f(x) \leq M$, so ist $|f(x)| \leq \max\{|m|, |M|\}$, wobei $\max\{\dots\}$ die größere der beiden Zahlen $|m|$ und $|M|$ bezeichnet.

- Beispiel 5.18.**
- 1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, ist nach unten durch $m = 0$ beschränkt, aber nicht nach oben beschränkt.
 - 2) Die Funktion $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, ist beschränkt: Es ist $0 \leq x^2 \leq 16$ für alle $x \in [0, 4]$.
 - 3) Die Funktion $f :]-1, 0[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$, ist nach oben beschränkt: $f(x) \leq -1$, aber nicht nach unten beschränkt.

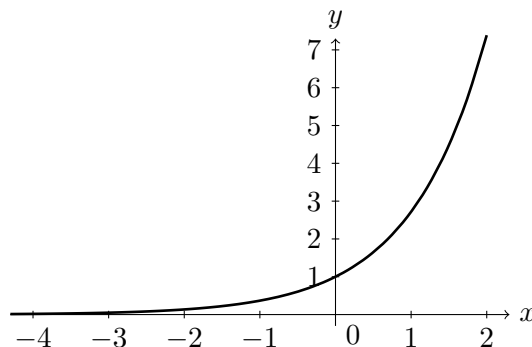
Vorlesung 6

Elementare Funktionen 1

In dieser Vorlesung lernen wir die *elementaren Funktionen* \exp , \ln , \cos , \sin und \tan kennen. Weitere elementare Funktionen werden wir in den Vorlesungen 8, 9, 26 und 27 behandeln.

6.1 Exponentialfunktion und Logarithmus

Wir beginnen mit der *Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben auch $\exp(x) = e^x$. Der Funktionsgraph der Exponentialfunktion sieht wie folgt aus:



Satz 6.1 (Eigenschaften der Exponentialfunktion). *Für die Exponentialfunktion gilt:*

- 1) $e^0 = 1$.
- 2) *Funktionalgleichung:* $e^{x+y} = e^x e^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- 3) $e^x \neq 0$ und $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- 4) $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- 5) \exp ist streng monoton wachsend.
- 6) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ ist bijektiv.

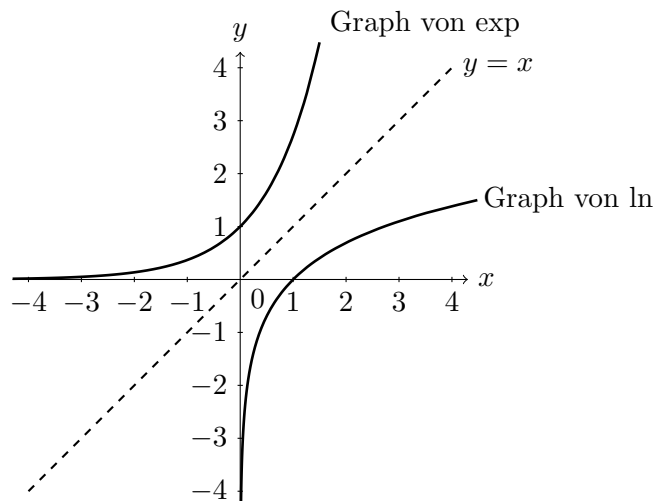
Einen Nachweis der Eigenschaften erbringen wir später in Vorlesung 26, wenn wir die Exponentialfunktion vollständig definiert haben. Vorerst begnügen wir uns mit den im Satz angegebenen Eigenschaften.

Da $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ eine bijektive Funktion ist, existiert eine Umkehrfunktion. Diese heißt der *natürliche Logarithmus*, oder nur *Logarithmus* und wird mit \ln oder \log bezeichnet. Insbesondere gilt

$$\ln(e^x) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

$$e^{\ln(x)} = x \quad \text{für alle } x \in]0, \infty[. \quad (6.2)$$

Da der Logarithmus die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion ist, erhalten wir seinen Graphen durch Spiegeln des Graphen von \exp an der Winkelhalbierenden $y = x$:



Eigenschaften des Logarithmus erhalten wir direkt aus denen der Exponentialfunktion.

Satz 6.2 (Eigenschaften des Logarithmus). *Für den Logarithmus gilt:*

- 1) $\ln(1) = 0$.
- 2) *Funktionalgleichung:* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$.
- 3) $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$ für alle $x > 0$.
- 4) $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$ für alle $x, y > 0$.
- 5) $\ln(x^n) = n \ln(x)$ für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$.
- 6) \ln ist streng monoton wachsend.
- 7) $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv.

Beweis. Durch Nachrechnen:

- 1) Es gilt $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$.
- 2) Für $x, y > 0$ gilt $x = e^{\ln(x)}$ und $y = e^{\ln(y)}$, siehe (6.2). Damit ist

$$\ln(xy) = \ln(e^{\ln(x)} e^{\ln(y)}) = \ln(e^{\ln(x) + \ln(y)}) = \ln(x) + \ln(y),$$

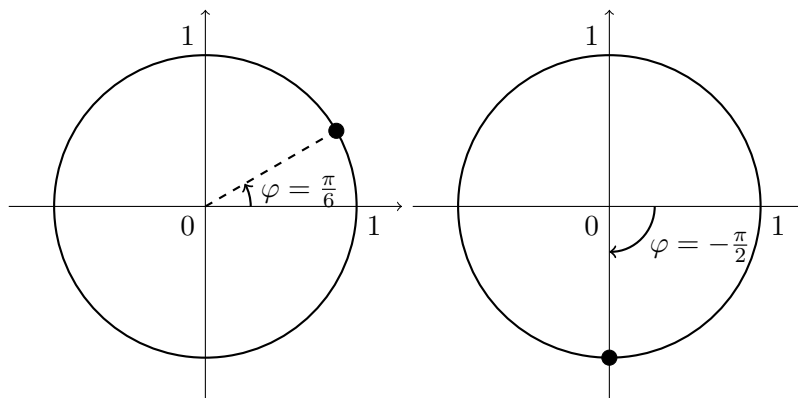
wobei wir die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion und (6.1) verwendet haben.

- 3) Für $x > 0$ ist $0 = \ln(1) = \ln(x/x) = \ln(x) + \ln(1/x)$, also $\ln(1/x) = -\ln(x)$.
- 4) und 5) folgen ebenfalls aus der Funktionalgleichung von \ln . 6) und 7) gelten, da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. \square

6.2 Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus

Sinus und Cosinus stammen aus der Geometrie am Einheitskreis (die Punkte mit $x^2 + y^2 = 1$), und werden auch als *Kreisfunktionen* bezeichnet.

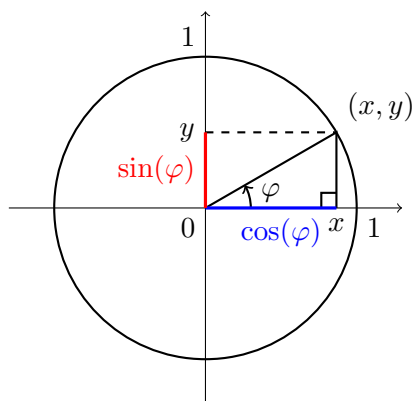
Ein Punkt auf dem Einheitskreis ist durch Angabe eines Winkels φ zur positiven reellen Achse (x -Achse) festgelegt:



Winkel entgegen dem Uhrzeigersinn sind (im mathematischen Sinn) positiv, und Winkel im Uhrzeigersinn negativ. Der Winkel wird dabei im *Bogenmaß* gemessen, also z.B. $\pi \hat{=} 180^\circ$ und $2\pi \hat{=} 360^\circ$. Bezeichnet φ den Winkel im Bogenmaß und α den Winkel in Grad, so gilt

$$\varphi = \frac{\pi}{180} \alpha, \quad \alpha = \frac{180}{\pi} \varphi.$$

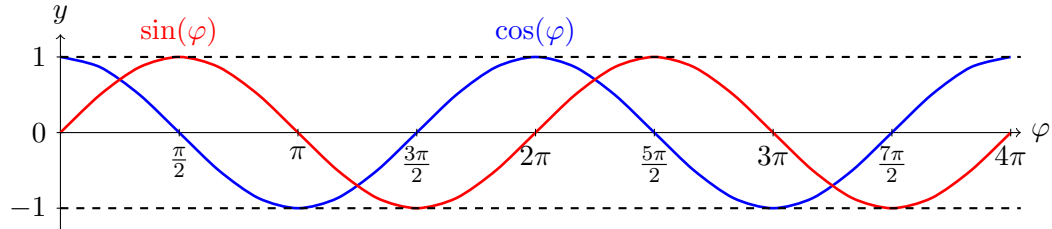
Sinus und Cosinus: Vom Einheitskreis zur Funktion. Für einen Winkel φ haben wir ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Punkt (x, y) auf dem Einheitskreis und einer Hypotenuse der Länge 1:



Dann sind

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{1} = x, \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{1} = y,$$

d.h. Cosinus und Sinus sind der x -Wert und der y -Wert des Punktes auf dem Einheitskreis mit Winkel φ . Damit sind \cos und \sin für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert. Abtragen als Funktion liefert die folgenden Graphen:



Aus der Definition ersehen wir folgende Eigenschaften von Sinus und Cosinus. Hier schreiben wir x statt φ .

Satz 6.3 (Eigenschaften von Sinus und Cosinus). *Es gelten für alle $x \in \mathbb{R}$:*

- 1) $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ und $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- 2) $\cos(-x) = \cos(x)$, d.h. der Cosinus ist eine gerade Funktion.
- 3) $\sin(-x) = -\sin(x)$, d.h. der Sinus ist eine ungerade Funktion.
- 4) *Trigonometrischer Pythagoras:* $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.
- 5) $\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$ und $\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$ für $k \in \mathbb{Z}$, d.h. \cos und \sin sind 2π -periodische Funktionen.
- 6) $\cos(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots$
- 7) $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$

Bemerkung 6.4. Wir vereinbaren folgende Schreibweise:

$$\cos^2(x) = (\cos(x))^2 = \cos(x)^2, \quad \sin^2(x) = (\sin(x))^2 = \sin(x)^2.$$

Zum Beispiel sieht man häufig $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für den trigonometrischen Pythagoras.

Satz 6.5 (Additionstheoreme). *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y), \\ \sin(x + y) &= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y). \end{aligned}$$

Aus den beiden Additionstheoremen lassen sich unzählige weitere als Spezialfälle herleiten. Setzen wir zum Beispiel $y = \frac{\pi}{2}$ ein, so folgt

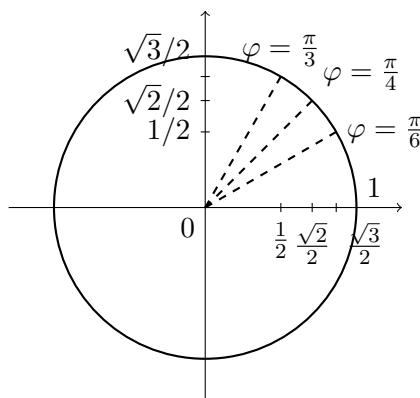
$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin(x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x). \end{aligned}$$

Weitere typische Anwendungen sind mit $y = x$ und $y = \pi$.

Bekannte Werte. Für einige Winkel ist der Wert von $\cos(x)$ und $\sin(x)$ exakt bekannt:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Wie Winkel und Werte zueinander passen kann man sich leicht am Einheitskreis merken:



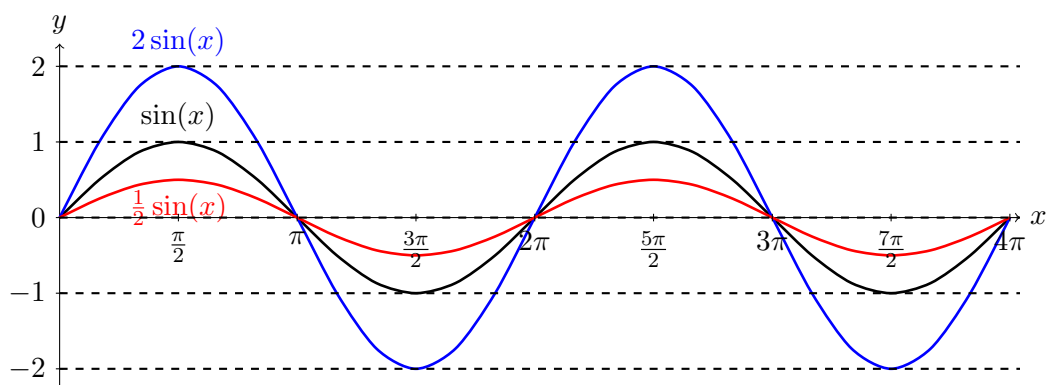
Die Werte für die entsprechenden Winkel in den anderen drei Quadranten kann man sich mit den Symmetrieeigenschaften von Sinus und Cosinus überlegen.

Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung. Wir betrachten nun einige einfache Modifikationen von Sinus und Cosinus, die eine herausragende Rolle spielen: Multiplikation von Sinus und Cosinus mit einer Zahl, Multiplikation des Arguments mit einer Zahl, sowie Addition einer Konstanten zum Argument. Dabei beschränken wir uns auf den Sinus, für den Cosinus geht es ganz genau so. Wir betrachten eine sogenannte *Sinusschwingung*, d.h. eine Funktion der Form

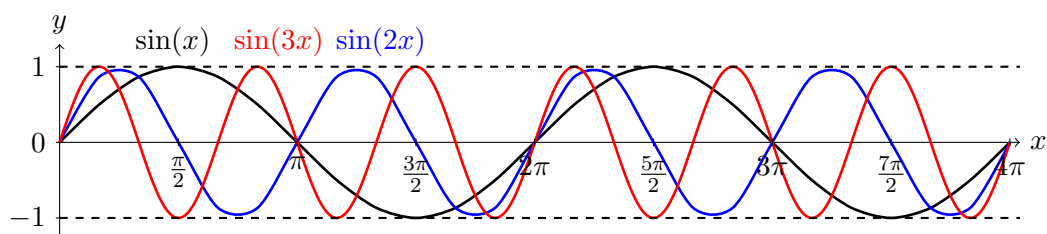
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto A \sin(\omega x - \varphi).$$

Dabei heißt A die *Amplitude*, ω die *Frequenz*, und φ die *Phasenverschiebung* der Sinusschwingung.

Sinusschwingungen mit verschiedenen Amplituden: Die Funktion $A \sin(x)$ ist eine Streckung oder Stauchung von $\sin(x)$ in y -Richtung. Die *Amplitude* A gibt die Größe der Streckung oder Stauchung an. Wir vergleichen $\sin(x)$ mit $2 \sin(x)$ und $\frac{1}{2} \sin(x)$:



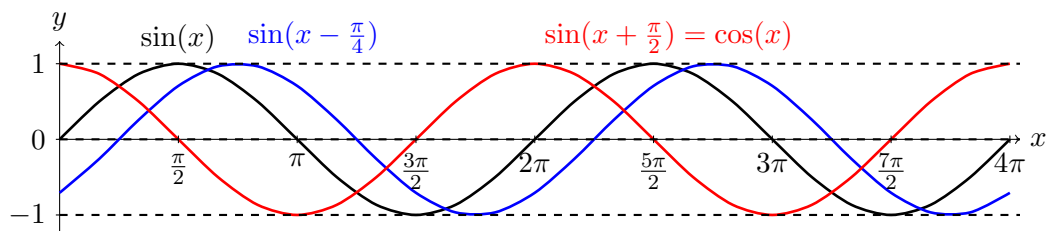
Sinusschwingungen mit verschiedenen Frequenzen: Wir betrachten die Funktionen $\sin(x)$, $\sin(2x)$ und $\sin(3x)$, die wie folgt aussehen:



Die Funktion $\sin(2x)$ schwingt doppelt so schnell wie $\sin(x)$, und $\sin(3x)$ schwingt dreimal so schnell wie $\sin(x)$. Weiter haben $\sin(2x)$ und $\sin(3x)$ die Perioden π und $\frac{2\pi}{3}$.

Allgemein beschreiben $\sin(\omega x)$ und $\cos(\omega x)$ Schwingungen mit der *Frequenz* $\omega > 0$ und der *Periode* $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$. Die Frequenz bewirkt also eine Streckung oder Stauchung des Funktionsgraphen in x -Richtung.

Sinusschwingungen mit verschiedenen Phasenverschiebungen: Schließlich betrachten wir die Funktion $\sin(x - \varphi)$, bei der der Parameter φ zu einer Verschiebung des Funktionsgraphen entlang der x -Achse führt. Ist $\varphi > 0$ wird der Graph um φ nach rechts verschoben, ist $\varphi < 0$, wird der Graph nach links verschoben. Für die *Phasenverschiebungen* $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ erhält man zum Beispiel folgende Funktionen:



Beispiel 6.6 (Harmonische Schwingung). Die Funktion

$$f(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) \quad (6.3)$$

ist die Überlagerung von zwei Schwingungen mit Frequenz ω . Gilt $a^2 + b^2 > 0$ so können wir schreiben

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\omega x) \right).$$

Wegen

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

ist $(a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2})$ ein Punkt auf dem Einheitskreis und es existiert ein Winkel φ mit

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Also ist zusammen mit dem Additionstheorem (Satz 6.5)

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(\varphi) \cos(\omega x) + \sin(\varphi) \sin(\omega x)) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\omega x - \varphi).$$

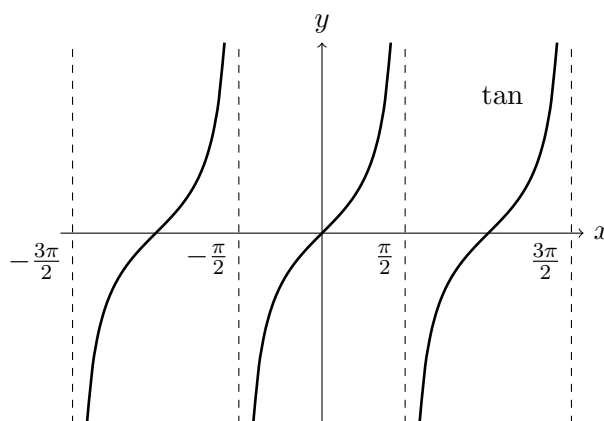
Daher lässt sich jede Schwingung der Form (6.3) als eine reine Cosinusschwingung mit einer Phasenverschiebung schreiben. Wegen $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ lässt sich die Schwingung auch als reine Sinusschwingung schreiben (mit anderer Phasenverschiebung).

6.3 Tangens

Der *Tangens* ist definiert als

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

überall dort, wo der Cosinus nicht Null ist, also für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$:



Aus den Eigenschaften von Sinus und Cosinus folgen viele Eigenschaften des Tangens.

Insbesondere erhalten wir das *Additionstheorem*

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

Rechnen Sie das zur Übung nach! Für welche x und y gilt diese Gleichung?

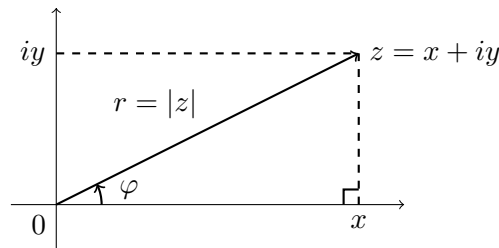
Vorlesung 7

Komplexe Zahlen 2

Wir lernen eine zweite Darstellung der komplexen Zahlen kennen, die besonders günstig für das Multiplizieren und Wurzelziehen ist.

7.1 Polardarstellung

In Vorlesung 3 haben wir komplexe Zahlen in kartesischer Darstellung kennengelernt: $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dabei sind x und y genau die kartesischen x - und y -Koordinaten in der Gaußschen Zahlenebene.



Im eingezeichneten rechtwinkligen Dreieck haben wir

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi), \\ y &= r \sin(\varphi),\end{aligned}\tag{7.1}$$

und damit

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)).$$

Das ist die *Polardarstellung* von z . Dabei sind also

- 1) $r = |z|$ der Betrag von z (Abstand zu 0) und
- 2) $\varphi = \arg(z)$ das *Argument* von z . Das ist der Winkel zwischen z und der positiven reellen Achse (im Bogenmaß gemessen).

Beachten Sie: Vergrößern wir das Argument um 2π , so erhalten wir den gleichen Punkt in der Ebene. Allgemeiner gilt: Mit φ ist auch $\varphi + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ein Argument von z . *Das Argument ist eindeutig bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π .* Das macht die Bezeichnung

$\arg(z)$ etwas problematisch, wir müssen uns eigentlich auf einen Bereich für den Winkel einigen, etwa $[0, 2\pi[$ oder $]-\pi, \pi]$ oder $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, ist ansonsten aber nicht schlimm.

Für $z = 0$ ist das Argument nicht bestimmt. Trotzdem können wir dann

$$z = 0(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

mit einem willkürlich gewählten φ schreiben.

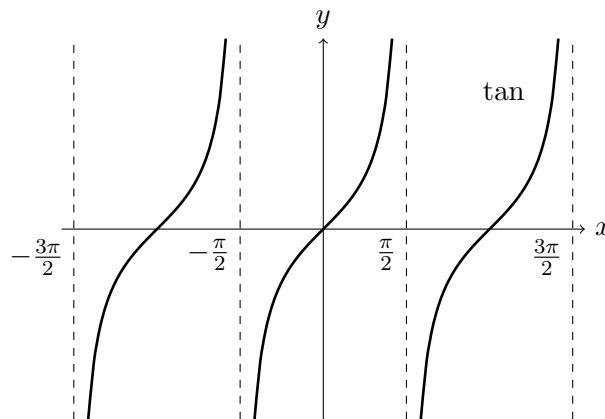
Wie lassen sich die kartesische und die Polardarstellung ineinander umrechnen? Sind r, φ gegeben, so berechnen wir x, y durch (7.1). Sind umgekehrt x, y gegeben, so ist r der Betrag von $z = x + iy$:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Um den Winkel φ zu berechnen, teilen wir die beiden Gleichungen in (7.1) und erhalten

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi),$$

falls $x \neq 0$. (Für $x = 0$ ist es ganz einfach: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wenn $y > 0$, und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ wenn $y < 0$.) Der Tangens ist auf $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert und π -periodisch, $\tan(\varphi + k\pi) = \tan(\varphi)$ für $k \in \mathbb{Z}$, insbesondere also nicht injektiv:



Eingeschränkt auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist der Tangens hingegen injektiv und besitzt daher eine Umkehrabbildung, den *Arcus Tangens*

$$\arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

mit dem wir das Argument φ bestimmen können. Es ist

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

falls z in der rechten Halbebene $\operatorname{Re}(z) > 0$ liegt (erster und vierter Quadrant). Für z in der linken Halbebene $\operatorname{Re}(z) < 0$ (zweiter und dritter Quadrant) müssen wir π addieren.

Insgesamt erhalten wir für $z = x + iy \neq 0$ somit $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{falls } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{falls } x < 0, \\ +\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Das Argument ist dabei in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Möchte man das Argument in einem anderen Intervall wählen, so kann man geeignet 2π addieren oder abziehen. Wählt man z.B. $[0, 2\pi[$, so ersetzt man für $x > 0$ und $y < 0$ die Formel durch $\varphi = \arctan(y/x) + 2\pi$.

Beispiel 7.1. 1) Für $z_1 = 2 + 2i$ ist

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8},$$

und

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x} = \frac{2}{2} = 1,$$

also

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Wegen $x = \operatorname{Re}(z_1) = 2 > 0$, ist dies das Argument von z_1 . Damit ist

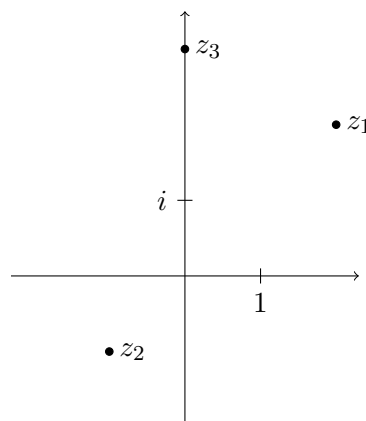
$$z_1 = 2 + 2i = \sqrt{8} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

2) Für $z_2 = -1 - i$ ist

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \tan(\varphi) = \frac{y}{x} = \frac{-1}{-1} = 1,$$

und wieder ist $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Da $\operatorname{Re}(z_2) = -1 < 0$ ist, müssen wir π addieren, das Argument von z_2 ist also $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

3) Für $z_3 = 3i$ ist $r = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$. Wegen $x = 0$ und $y = 3 > 0$ ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
Die Punkte in der Gaußschen Zahlenebene:



Zur Abkürzung der Schreibweise wird oft die *Euler-Formel*

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

verwendet, die eine Verbindung zwischen der (komplexen) Exponentialfunktion und Sinus und Cosinus herstellt. Später können wir das nachrechnen (Abschnitt 25.4), vorerst nehmen wir das als Vereinfachung der Schreibweise hin. Es gelten die üblichen Potenzgesetze, insbesondere $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$. Mit der Euler-Formel können wir eine komplexe Zahl schreiben als

$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}.$$

Die Schreibweise $re^{i\varphi}$ heißt auch *Eulerdarstellung* von z .

Beispiel 7.2. Für die komplexen Zahlen aus Beispiel 7.1 gilt

$$z_1 = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

7.2 Vorteile der Euler- und Polardarstellungen

Mit der Polar- und Eulerdarstellung wird die Multiplikation komplexer Zahlen ganz einfach. Sind $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1))$ und $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2))$ komplexe Zahlen in Polardarstellung, so ist

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) r_2(\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + i(\cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2)) \right) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Additionstheoreme von Cosinus und Sinus verwendet haben (Satz 6.5). Noch einfacher ist es mit der Eulerdarstellung:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen.

Satz 7.3. *Bei der Multiplikation komplexer Zahlen*

- 1) *multiplizieren sich die Beträge,*
- 2) *addieren sich die Argumente.*

Insbesondere lassen sich Potenzen komplexer Zahlen hervorragend in der Eulerdarstellung berechnen. Versuchen Sie

$$z^{42} = (x + iy)^{42} = \dots$$

zu berechnen. Selbst mit dem binomischen Satz 4.7 ist das nicht so einfach. In der Eulerdarstellung hingegen ist es ganz einfach:

$$z^{42} = (re^{i\varphi})^{42} = r^{42} e^{i42\varphi}.$$

7.3 Komplexe Wurzeln

Wir wollen die folgende Aufgabe lösen.

Aufgabe: Finden Sie *alle* komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = a$ wobei $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gegeben sind.

Zur Lösung stellen wir z und a in der Eulerdarstellung dar,

$$z = re^{i\varphi} \quad \text{und} \quad a = se^{i\alpha},$$

mit noch unbekanntem Betrag $r \geq 0$ und Argument φ , und bekanntem $s = |a| \geq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$r^n e^{in\varphi} = z^n = a = se^{i\alpha},$$

und es müssen gelten:

- 1) $r^n = s$, da gleiche Zahlen den gleichen Betrag haben, also $r = \sqrt[n]{s}$.
- 2) $n\varphi = \alpha + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$, da das Argument eindeutig bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π ist, also

$$\varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Das ergibt die Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{s} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k)} = \sqrt[n]{s} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k \right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Weil aber das Argument $\frac{2\pi}{n}(k+n) = \frac{2\pi}{n}k + 2\pi$ die gleiche komplexe Zahl wie $\frac{2\pi}{n}k$ ergibt, gibt es nur n verschiedene Lösungen, und wir können z_0, z_1, \dots, z_{n-1} aussuchen.

Insgesamt hat $z^n = a$ mit $a = se^{i\alpha}$ also genau die n Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{s} e^{i(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

die ein regelmäßiges n -Eck mit Mittelpunkt in 0 bilden. (Für $a = 0$ ist $z = 0$ eine n -fache Lösung.)

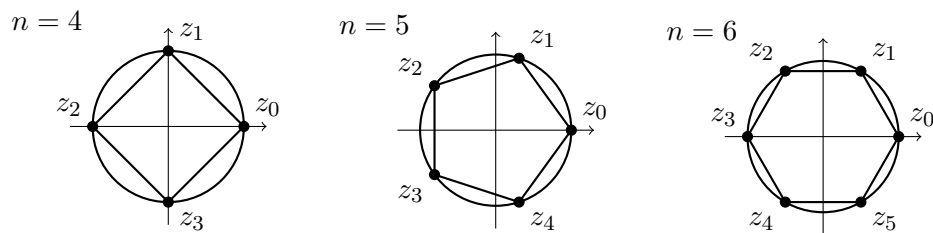
Beispiel 7.4. Wir lösen $z^n = 1$. Dazu schreiben wir $z = re^{i\varphi}$ und $c = 1 = 1e^{i0}$ in Eulerdarstellung. Dann ist $r^n e^{in\varphi} = z^n = 1 = 1e^{i0}$. Vergleich der Beträge liefert $r^n = 1$, also $r = 1$. Für das Argument haben wir $n\varphi = 0 + 2\pi k$, also $\varphi = \frac{2\pi}{n}k$. Dies ergibt die n verschiedenen Lösungen

$$z_k = e^{i\frac{2\pi}{n}k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Speziell für $n = 4$ sind das

$$\begin{aligned} z_0 &= 1e^{i0} = 1, \\ z_1 &= 1e^{i\frac{2\pi}{4}1} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \\ z_2 &= 1e^{i\frac{2\pi}{4}2} = e^{i\pi} = -1, \\ z_3 &= 1e^{i\frac{2\pi}{4}3} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i. \end{aligned}$$

Für $n = 6$ sind die Argumente $\varphi = \frac{2\pi}{6}k = \frac{\pi}{3}k$ mit $k = 0, 1, \dots, 5$, also $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.



Die Lösungen sind die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks.

Beispiel 7.5. Wir lösen $z^2 = 4i$. Wie oben machen wir den Ansatz $z = re^{i\varphi}$ und schreiben $c = 4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$. Dann ist also $r^2 = 4$, also $r = 2$, und $2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, also $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k = 0, 1$. Das ergibt die beiden Lösungen

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\pi} = e^{i\pi}z_0 = -z_0.$$

7.4 Lösungen quadratischer Gleichungen

In Abschnitt 3.4 hatten wir die Lösung von quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten besprochen. Auf diese Einschränkung können wir nun verzichten, und ganz allgemein die quadratische Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit komplexen Koeffizienten a, b, c lösen. Dabei setzen wir $a \neq 0$ voraus. (Für $a = 0$ ist nur $bz + c = 0$ zu lösen.) Die Gleichung hat immer die beiden Lösungen

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dabei ist das Wurzelzeichen wie folgt zu verstehen. Ist die Diskriminante $d = b^2 - 4ac$ reell mit $d \geq 0$, so ist \sqrt{d} die gewöhnliche reelle Quadratwurzel. Andernfalls sind die beiden Wurzeln „ $\pm\sqrt{d}$ “ die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = d$, also (vergleiche Beispiel 7.5)

$$\sqrt{|d|}e^{i\arg(d)/2} \quad \text{und} \quad \sqrt{|d|}e^{i(\arg(d)/2+\pi)} = -\sqrt{|d|}e^{i\arg(d)/2},$$

die sich nur um das Vorzeichen unterscheiden. Ist die Diskriminante $d = 0$, so ist $z_1 = z_2$ und diese Nullstelle wird doppelt gezählt.

Vorlesung 8

Polynome

Polynome kennen Sie aus der Schule als reelle Funktionen, die aus Potenzen $x^0 = 1, x, x^2, \dots$ zusammengesetzt sind.

Es stellt sich heraus, dass insbesondere die Frage nach der Existenz von Nullstellen viel einfacher wird, wenn man Polynome als Funktionen einer komplexen Zahl z betrachtet. Für quadratische Polynome $az^2 + bz + c$ haben wir das bereits gesehen: Im Reellen kann es 0, 1 oder 2 reelle Nullstellen geben (Abschnitt 3.4), aber es gibt immer zwei Nullstellen im Komplexen (Abschnitt 7.4).

Definition 8.1 (Polynom, Grad). 1) Ein *Polynom* p hat die Form

$$p(z) := a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n = \sum_{k=0}^n a_kz^k,$$

wobei $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Die a_k heißen die *Koeffizienten* des Polynoms. Dadurch wird eine Funktion $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto p(z) = \sum_{k=0}^n a_kz^k$ gegeben.

Sind alle a_k reell, nennt man p ein *reelles Polynom*. Dann betrachten wir wahlweise p als Funktion $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ oder $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- 2) Ist der höchste Koeffizient $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* von p , in Zeichen $n = \deg(p)$. Sind alle Koeffizienten null, also p das Nullpolynom, so setzt man $\deg(p) = -\infty$.

Polynome vom Grad 0 sind also konstante Funktionen $p(z) = a_0 \neq 0$. Beim Rechnen mit dem Grad von Polynomen vereinbart man, dass $-\infty < n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist, und $-\infty + n = -\infty$. Das ist nützlich für die Gradformel (8.1) unten.

Beispiel 8.2. 1) $p(z) = 1 + i + 3z + (5i - 1)z^2$ ist ein Polynom vom Grad 2.

- 2) $p(z) = 1 + 3z - 5z^2 + z^{42}$ ist ein reelles Polynom (die Koeffizienten sind alle reell) vom Grad 42.

- 3) $p(z) = 3$ ist ein konstantes Polynom vom Grad 0, und $p(z) = 0$ ist das Nullpolynom mit Grad $-\infty$.

8.1 Rechenoperationen

Mit Polynomen kann man rechnen „wie man es erwartet“. Seien zum Beispiel

$$p(z) = 2 + 3z + 4z^2 \quad \text{und} \quad q(z) = 1 + z.$$

Addition: Bei der Addition $p + q$ werden die Koeffizienten vor gleichen Potenzen von z addiert:

$$p(z) + q(z) = (2 + 3z + 4z^3) + (1 + z) = (2 + 1) + (3 + 1)z + 4z^3 = 3 + 4z + 4z^3.$$

Skalarmultiplikation: Bei der Skalarmultiplikation λp mit $\lambda \in \mathbb{C}$ oder $\lambda \in \mathbb{R}$ werden alle Koeffizienten von p mit λ multipliziert:

$$2p(z) = 2(2 + 3z + 4z^3) = 4 + 6z + 8z^3.$$

Multiplikation: Die Multiplikation pq ist genauso einfach, man multipliziert aus (Distributivgesetz) und sortiert nach Potenzen von z :

$$\begin{aligned} p(z)q(z) &= (2 + 3z + 4z^3)(1 + z) = 2 + 2z + 3z + 3z^2 + 4z^3 + 4z^4 \\ &= 2 + 5z + 3z^2 + 4z^3 + 4z^4. \end{aligned}$$

Bei der Multiplikation gilt die *Gradformel*

$$\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q). \quad (8.1)$$

Beispiel 8.3. Es sind

- $(z^2 + z + 1) + (3z^4 + 5z^2 + 2z - 4) = 3z^4 + 6z^2 + 3z - 3,$
- $(z^2 + z + 1) + (-z^2 + 2z - 5) = 3z - 4,$
- $2(z^2 + 3z - 1) = 2z^2 + 6z - 2,$
- $(1 + z)(2 + 3z) = 2 + 3z + 2z + 3z^2 = 2 + 5z + z^2,$
- $(2z^2 + 3z)(z^3 - z + 2) = 2z^5 - 2z^3 + 4z^2 + 3z^4 - 3z^2 + 6z = 2z^5 + 3z^4 - 2z^3 + z^2 + 6z.$

Division: Dividiert man zwei Polynome so erhält man im Allgemeinen kein Polynom, sondern eine *rationale Funktion*, z.B. $1/z$, die wir in Vorlesung 9 behandeln. Dafür gibt es bei Polynomen die Division mit Rest (Polynomdivision), die ähnlich wie die Division mit Rest in den ganzen Zahlen funktioniert.

Satz 8.4 (Division mit Rest). *Sind p, q zwei Polynome und $q \neq 0$, so existieren Polynome r, s mit*

$$p = sq + r \quad \text{und} \quad \deg(r) < \deg(q).$$

Dabei heißt r der Divisionsrest oder kurz Rest.

Ist der Rest gleich null, so ist $\frac{p}{q} = s$ ein Polynom und man sagt, die *Division geht auf*, und q *teilt* p .

Beispiel 8.5. Polynomdivision von $p(z) = 2z^3 + z^2 + 3$ durch $q(z) = z + 1$. Wir rechnen

$$\begin{array}{r}
 (2z^3 + z^2 + 3) \div (z + 1) = 2z^2 - z + 1 \\
 \underline{2z^3 + 2z^2} \\
 -z^2 \\
 \underline{-z^2 - z} \\
 z + 3 \\
 \underline{z + 1} \\
 2
 \end{array}$$

Also ist $s(z) = 2z^2 - z + 1$ und der Rest ist $r(z) = 2$ mit $\deg(r) = 0 < 1 = \deg(q)$. Es gilt dann

$$2z^3 + z^2 + 3 = (2z^2 - z + 1)(z + 1) + 2 \quad \text{oder} \quad \frac{2z^3 + z^2 + 3}{z + 1} = 2z^2 - z + 1 + \frac{2}{z + 1}.$$

8.2 Nullstellen von Polynomen

Eine wichtige Frage ist die nach *Nullstellen* von Polynomen, also von Zahlen $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$. Nullstellen von Polynomen lassen sich mit der Polynomdivision „abspalten“: Die Division durch den *Linearfaktor* $z - z_0$ geht auf.

Satz 8.6. Ist p ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$, so gibt es ein Polynom s vom Grad $n - 1$ mit

$$p(z) = (z - z_0)s(z).$$

Beweis. Division mit Rest für p und $q(z) = z - z_0$ ergibt $p(z) = (z - z_0)s(z) + r(z)$ mit Polynomen s und r , wobei $\deg(r) < \deg(q) = 1$, d.h. $r(z) = c$ ist konstant. Einsetzen von z_0 ergibt dann $0 = p(z_0) = (z_0 - z_0)s(z_0) + c = c$. Also gilt $p(z) = (z - z_0)s(z)$. Mit der Gradformel (8.1) folgt $\deg(s) = n - 1$. \square

Beispiel 8.7. Das Polynom $p(z) = 2z^3 - 16$ hat die Nullstelle 2, denn $p(2) = 2 \cdot 2^3 - 16 = 0$. Polynomdivision von p durch $z - 2$ ergibt:

$$\begin{array}{r}
 (2z^3 + 0z^2 + 0z - 16) \div (z - 2) = 2z^2 + 4z + 8 \\
 \underline{2z^3 - 4z^2} \\
 4z^2 \\
 \underline{4z^2 - 8z} \\
 8z - 16 \\
 \underline{8z - 16} \\
 0
 \end{array}$$

also $p(z) = (z - 2)(2z^2 + 4z + 8)$.

Definition 8.8 (Vielfachheit einer Nullstelle). Die *Vielfachheit* der Nullstelle z_0 ist die Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$p(z) = (z - z_0)^k q(z),$$

wobei q ein Polynom mit $q(z_0) \neq 0$ ist.

Nullstellen mit Vielfachheit 1 nennt man auch *einfache Nullstellen*, Nullstellen mit Vielfachheit $k \geq 2$ nennt man auch *mehrfache Nullstellen*.

Beispiel 8.9. Das Polynom $p(z) = z^3 + z^2 = z^2(z + 1)$ hat die Nullstelle 0 mit Vielfachheit 2 und die Nullstelle -1 mit Vielfachheit 1. Damit ist -1 eine einfache Nullstelle und 0 eine mehrfache Nullstelle von p .

Nun stellt sich die Frage, ob es überhaupt Nullstellen gibt. Reelle Nullstellen gibt es nicht immer, zum Beispiel haben $z^2 + 1$ und $z^2 + z + 1$ keine reellen Nullstellen. Sucht man nach komplexen Nullstellen ist das anders, dort gibt es immer Nullstellen. Das besagt der Fundamentalsatz der Algebra.

Satz 8.10 (Fundamentalsatz der Algebra). Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, dann gibt es eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Linearfaktorzerlegung

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$$

mit $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Daher hat p genau n Nullstellen, die aber nicht unbedingt voneinander verschieden sein müssen: mehrfache Nullstellen werden entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.

Beispiel 8.11. Das Polynom $p(z) = 2z^3 - 16 = (z - 2)(2z^2 + 4z + 8) = 2(z - 2)(z^2 + 2z + 4)$ aus Beispiel 8.7 hat die Nullstelle $z_1 = 2$. Weiter hat $z^2 + 2z + 4$ die Nullstellen (pq-Formel):

$$z_{2,3} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{i^2 3} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

Damit hat p die Nullstellen $z_1 = 2$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$, und die Linearfaktorzerlegung

$$p(z) = 2(z - 2)(z - (-1 + i\sqrt{3}))(z - (-1 - i\sqrt{3})).$$

Aus dem Fundamentalsatz sehen wir: ein Polynom vom Grad $\leq n$ mit $n+1$ Nullstellen ist das Nullpolynom. Daraus folgt der wichtige Koeffizientenvergleich.

Satz 8.12 (Koeffizientenvergleich). Sind $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ und $q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$ und gilt $p(z) = q(z)$ für alle z , so sind die Koeffizienten gleich: $a_k = b_k$ für alle k .

Dabei genügt Gleichheit in $N + 1$ Stellen, wenn N der größere der beiden Grade n und m ist.

Bemerkung 8.13. Wir haben nun zwei Darstellungen für Polynome kennen gelernt:

- 1) $\sum_{k=0}^n a_k z^k$, die gut zum Rechnen ist (Addition, Subtraktion, Polynomdivision)
- 2) $a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$ bei der die Nullstellen sofort abzulesen sind.

Tipp: Wenn Sie Nullstellen suchen und bereits einen Faktor $z - z_0$ ausgeklammert haben, multiplizieren Sie diesen auf keinen Fall aus!

8.3 Reelle Polynome

Nun betrachten wir noch einmal Polynome mit reellen Koeffizienten. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra können wir diese in *komplexe* Linearfaktoren zerlegen.

Beispiel 8.14. 1) Das reelle Polynom $p(z) = z^2 + 1$ hat die Nullstellen i und $-i = \bar{i}$.

2) Das reelle Polynom $p(z) = z^2 + z + 1$ hat die Nullstellen $z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, d.h. auch hier gilt $z_2 = \bar{z}_1$.

In beiden Beispielen sind die nichtreellen Nullstellen komplex konjugiert zueinander. Für reelle Polynome ist das immer der Fall, wie wir gleich nachrechnen werden. Für komplexe Polynome ist das nicht immer der Fall, zum Beispiel hat $p(z) = (z-i)(z+2i) = z^2 + iz + 2$ die Nullstellen i und $-2i$, hat aber keine reellen Koeffizienten.

Für ein Polynom mit reellen Koeffizienten ($a_k \in \mathbb{R}$, also $\bar{a}_k = a_k$) gilt mit den Rechenregeln für die Konjugation:

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k z^k} = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^n a_k \bar{z}^k = p(\bar{z}).$$

Ist dann $p(z_0) = 0$, so ist auch $p(\bar{z}_0) = \overline{p(z_0)} = 0$, d.h. *die nichtreellen Nullstellen kommen in komplex konjugierten Paaren z_0 und \bar{z}_0 vor*. Schreiben wir $z_0 = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + |z_0|^2 = z^2 - 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2 = (z - \alpha)^2 + \beta^2.$$

und das ist wieder ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Fassen wir so die komplexen Linearfaktoren zusammen, erhalten wir eine reelle Zerlegung für reelle Polynome.

Satz 8.15 (Reelle Zerlegung). *Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad $n \geq 1$, dann gibt es eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Zerlegung in reelle Linearfaktoren und in reelle quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen:*

$$p(z) = a_n(z - x_1) \cdot \dots \cdot (z - x_k) \cdot ((z - \alpha_1)^2 + \beta_1^2) \cdot \dots \cdot ((z - \alpha_m)^2 + \beta_m^2),$$

mit reellen $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ und reellen $\beta_1 \neq 0, \dots, \beta_m \neq 0$.

Beispiel 8.16. Die Zerlegung in komplexe Linearfaktoren von $z^4 - 1$ ist

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i).$$

Die entsprechende reelle Zerlegung ist

$$z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z^2 + 1).$$

Als letzte Folgerung notieren wir:

Satz 8.17. *Ein reelles Polynom mit ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.*

8.4 Nullstellen berechnen

Wie findet man Nullstellen? Für Polynome $p(z) = a_1z + a_0$ vom Grad 1 ist die einzige Nullstelle $-a_0/a_1$. Für Polynome vom Grad 2 berechnet man die Nullstellen mit der pq - oder abc -Formel (Abschnitte 3.4 und 7.4). Für Grad $n = 3$ und $n = 4$ gibt es (komplizierte) Formeln, um die Nullstellen zu berechnen. Für Grad $n \geq 5$ gibt es beweisbar keine solche Formeln. Manchmal kann man die Nullstellen trotzdem finden (z.B. für $z^n = a$; Abschnitt 7.3), oder man kann eine Nullstelle raten und dann abspalten (mit Satz 8.6). Ansonsten ist man auf numerische Methoden zum finden von Nullstellen angewiesen. Zwei solche Methode werden wir später kennen lernen: das Bisektionsverfahren (Abschnitt 20.1) und das Newtonverfahren (Abschnitt 22.2).

Vorlesung 9

Rationale Funktionen

Rationale Funktionen sind Brüche von Polynomen, also

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

wobei p und q Polynome sind. Daher ist

$$f : D \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit } D = \mathbb{C} \setminus \{z \mid q(z) = 0\}.$$

Falls p, q reelle Polynome sind, können wir f auch als reelle Funktion betrachten, also

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } D = \mathbb{R} \setminus \{z \mid q(z) = 0\}.$$

An einer Nullstelle des Nenners, also z_0 mit $q(z_0) = 0$, ist f zunächst nicht definiert.

- 1) Ist $p(z_0) \neq 0$, so heißt z_0 ein *Pol* oder eine *Polstelle* von f . Wir sagen, z_0 ist ein *Pol der Ordnung k* von f , wenn z_0 eine Nullstelle von q der Vielfachheit k ist. Ein Pol der Ordnung 1 heißt auch *einfacher Pol*, und ein Pol höherer Ordnung (≥ 2) heißt *mehrfacher Pol*.
- 2) Ist auch $p(z_0) = 0$, so kürze $z - z_0$ so oft wie möglich in Zähler und Nenner.

Beispiel 9.1. 1) Polynome sind rationale Funktionen (mit $q(z) = 1$ für alle z).

- 2) $f(z) = \frac{1}{z-3}$ ist eine rationale Funktion mit einem einfachen Pol in 3.
- 3) $f(z) = \frac{z^4+3z+5}{z^2+1}$ ist eine rationale Funktion mit Polstellen i und $-i$. Wegen $z^2+1 = (z-i)^1(z+i)^1$ sind beide Polstellen einfach.
- 4) $f(z) = \frac{z^4+3z+5}{z^2+2z+1} = \frac{z^4+3z+5}{(z+1)^2}$ ist eine rationale Funktion mit einem Pol der Ordnung 2 in $z = -1$.
- 5) $f(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)(z+2)} = \frac{p(z)}{q(z)}$ hat einen einfachen Pol in -2 . Für $z = 1$ sind $q(1) = 0$ und $p(1) = 0$, und wir können $z - 1$ kürzen. Wir erhalten $f(z) = \frac{z+1}{z+2}$, so dass f anschließend auch in $z = 1$ definiert ist.
- 6) $f(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{p(z)}{q(z)}$ hat ebenfalls einen einfachen Pol in -2 . Für $z = 1$ sind $q(1) = 0$ und $p(1) = 0$, und wir können $z - 1$ kürzen. Wir erhalten $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)(z+2)}$. Nun ist 1 immer noch eine Nullstelle des Nenners und ein einfacher Pol von f .

Verschiedene rationale Funktionen addieren wir, indem wir sie auf den Hauptnenner bringen, zum Beispiel

$$\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{(z-2) + (z-1)}{(z-1)(z-2)} = \frac{2z-3}{(z-1)(z-2)}.$$

Umgekehrt kann man eine rationale Funktion zerlegen als Summe eines Polynoms und einfacher rationaler Funktionen der Form

$$\frac{A}{z-a}, \quad \text{oder allgemeiner} \quad \frac{A}{(z-a)^k}.$$

Diese Darstellung heißt die *Partialbruchzerlegung* der rationalen Funktion. Wie man diese berechnet lernen wir in dieser Vorlesung.

Anwendungen. Die Partialbruchzerlegung spielt eine wichtige Rolle

- bei der Integration von rationalen Funktionen (Abschnitt 31.3), und
- im Zusammenhang mit der sogenannten Laplace-Transformation, die in der Regelungstechnik, in der Netzwerktheorie, bei der Signalverarbeitung und in vielen anderen Anwendungsbereichen eine zentrale Rolle spielt. (Mehr zur Laplace-Transformation lernen Sie in den Vorlesungen „Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften“ und „Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften“.)

9.1 Komplexe Partialbruchzerlegung

Wir beginnen mit der komplexen Partialbruchzerlegung (PBZ).

Satz 9.2 (Komplexe Partialbruchzerlegung). *Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion. Hat q die einfachen Nullstellen z_1, \dots, z_n , also*

$$q(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

so hat f die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = s(z) + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - z_k} = s(z) + \frac{A_1}{z - z_1} + \dots + \frac{A_n}{z - z_n} \quad (9.1)$$

mit einem Polynom $s(z)$ und Koeffizienten $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{C}$. Polynom und Koeffizienten sind eindeutig bestimmt.

Ist z_k eine m_k -fache Nullstelle von q , so wird der Summand $\frac{A_k}{z - z_k}$ ersetzt durch die m_k Summanden

$$\frac{A_{k,1}}{z - z_k} + \frac{A_{k,2}}{(z - z_k)^2} + \dots + \frac{A_{k,m_k}}{(z - z_k)^{m_k}}, \quad (9.2)$$

wobei die Koeffizienten auch eindeutig bestimmt sind.

Berechnung der Partialbruchzerlegung.

Schritt 1: Polynomdivision. Polynomdivision von p durch q ergibt $p(z) = s(z)q(z) + r(z)$ mit eindeutig bestimmten Polynomen s und r mit $\deg(r) < \deg(q)$, also

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = s(z) + \frac{r(z)}{q(z)} \quad \text{mit} \quad \deg(r) < \deg(q).$$

Falls $\deg(p) < \deg(q)$ ist, braucht keine Polynomdivision durchgeführt werden, dann ist direkt $s(z) = 0$ und $r(z) = p(z)$. Damit ist das Polynom s in der Partialbruchzerlegung (9.1) berechnet.

Schritt 2: Partialbruchzerlegung von $\frac{r(z)}{q(z)}$. Hat q nur einfache Nullstellen, so machen wir den Ansatz

$$\frac{r(z)}{q(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - z_k}. \quad (9.3)$$

Hat q mehrfache Nullstellen, so modifizieren wir den Ansatz wie folgt: Ist z_k eine Nullstelle mit Vielfachheit m_k , so ersetzen wir $\frac{A_k}{z - z_k}$ durch die m_k Summanden (9.2). Die Koeffizienten können wir wie folgt berechnen:

Möglichkeit 1: Koeffizientenvergleich. Wir multiplizieren den Ansatz für $\frac{r(z)}{q(z)}$ mit dem Nenner $q(z)$, was eine Gleichung von Polynomen ergibt. Ein Koeffizientenvergleich (Satz 8.12) ergibt ein lineares Gleichungssystem, aus dem wir die Koeffizienten berechnen können.

Möglichkeit 2: Einsetzen spezieller Werte. Wir können in den Ansatz für $\frac{r(z)}{q(z)}$ spezielle Werte für z einsetzen, um einen Teil oder alle Koeffizienten zu bestimmen.

Besonders hilfreich ist es, den Ansatz mit $(z - z_k)^{m_k}$ zu multiplizieren und anschließend $z = z_k$ in die Gleichung einzusetzen. Das ergibt genau den Koeffizienten A_{k,m_k} . Da man dabei nur $(z - z_k)^{m_k}$ in $\frac{r(z)}{q(z)}$ zuhalten braucht und in den Rest $z = z_k$ einsetzt, ist diese Methode zur Bestimmung von A_{k,m_k} auch als *Zuhaltemethode* bekannt.

Für einfache Nullstellen sieht das wie folgt aus: Multiplizieren wir den Ansatz

$$\frac{r(z)}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)} = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \dots + \frac{A_n}{z - z_n}$$

mit $z - z_1$, so folgt

$$\frac{r(z)}{(z - z_2) \dots (z - z_n)} = A_1 + (z - z_1) \frac{A_2}{z - z_2} + \dots + (z - z_1) \frac{A_n}{z - z_n}$$

und Einsetzen von $z = z_1$ ergibt

$$\frac{r(z_1)}{(z_1 - z_2) \dots (z_1 - z_n)} = A_1.$$

Dabei erhalten wir A_1 , indem wir $z - z_1$ in $\frac{r(z)}{q(z)}$ zuhalten, und in den Rest z_1 einsetzen. Genauso berechnet man A_2, \dots, A_n .

Beweis, dass die Partialbruchzerlegung existiert. Wir brauchen nur zeigen, dass der Ansatz in Schritt 2 immer möglich ist. Dies geht mit den Ergebnissen der Vorlesungen 10 und 11, auf die wir hier vorgreifen.

Wir nehmen zuerst an, dass q einfache Nullstellen hat und wollen zeigen, dass

$$\frac{r(z)}{q(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - z_k} \quad (9.4)$$

gilt, oder äquivalent dazu, dass

$$r(z) = \sum_{k=1}^n A_k \frac{q(z)}{z - z_k} \quad (9.5)$$

gilt. Beachten Sie, dass $q_k(z) := \frac{q(z)}{z - z_k} = \prod_{j=1, j \neq k}^n (z - z_j)$ nach kürzen des Faktors $z - z_k$ ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist. Diese n Polynome sind linear unabhängig, denn: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k q_k(z)$, so folgt durch Einsetzen von $z = z_1$, dass $0 = \lambda_1 \prod_{j=1, j \neq 1}^n (z_1 - z_j) + 0$, also $\lambda_1 = 0$. Anschließend setzt man nacheinander $z = z_2, z_3, \dots, z_n$ ein und findet, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ ist. Somit sind die n Polynome q_1, \dots, q_n linear unabhängig und bilden eine Basis des n -dimensionalen Vektorraums der Polynome vom Grad $\leq n - 1$ (Satz 11.9). Wegen $\deg(r) \leq n - 1$ ist r in diesem Vektorraum, so dass (9.5) mit eindeutig bestimmten Koeffizienten A_1, \dots, A_n gilt.

Hat q mehrfache Nullstellen, so modifizieren wir den Ansatz (9.4) wie folgt: Für eine m_k -fache Nullstelle z_k wird $\frac{A_k}{z - z_k}$ ersetzt durch (9.2). Nun wird es technisch komplizierter, die Idee bleibt aber gleich: Nach Multiplikation mit q erhalten wir wieder eine Basis von $\mathbb{C}[z]_{<\deg(q)}$. Wir verzichten auf die genaue Ausführung. \square

Beispiel 9.3. 1) Wir berechnen die Partialbruchzerlegung von

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 4}{(z - 3)(z^2 + 1)} = \frac{z^2 + z + 4}{(z - 3)(z - i)(z + i)}.$$

Wegen $\deg(p) = 2 < 3 = \deg(q)$ entfällt Schritt 1 (Polynomdivision). Da f die drei einfachen Polstellen 3, i und $-i$ hat, machen wir den Ansatz

$$f(z) = \frac{A}{z - 3} + \frac{B}{z - i} + \frac{C}{z + i}.$$

Die Koeffizienten können wir mit der Zuhaltmethode bestimmen:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3^2 + 3 + 4}{3^2 + 1} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}, \\ B &= \frac{i^2 + i + 4}{(i - 3)(i + i)} = -\frac{1}{2} \frac{3 + i}{1 + 3i} = -\frac{1}{2} \frac{(3 + i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = -\frac{3}{10} + \frac{2}{5}i, \\ C &= \frac{(-i)^2 - i + 4}{(-i - 3)(-i - i)} = \frac{3 - i}{6i - 2} = -\frac{3}{10} - \frac{2}{5}i. \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung ist also

$$f(z) = \frac{\frac{8}{5}}{z - 3} + \frac{-\frac{3}{10} + \frac{2}{5}i}{z - i} + \frac{-\frac{3}{10} - \frac{2}{5}i}{z + i}.$$

Statt mit der Zuhaltmethode kann man die Koeffizienten auch über einen Koeffizientenvergleich bestimmen: Multipliziert man den Ansatz mit q so ergibt sich

$$\begin{aligned} z^2 + z + 4 &= A(z^2 + 1) + B(z - 3)(z + i) + C(z - 3)(z - i) \\ &= (A + B + C)z^2 + ((-3 + i)B + (-3 - i)C)z + (A - 3iB + 3iC), \end{aligned}$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B + C &= 1, \\ (-3 + i)B + (-3 - i)C &= 1 \\ A - 3iB + 3iC &= 4. \end{aligned}$$

Lösen wir das lineare Gleichungssystem, so erhalten wir die gleichen Koeffizienten wie oben. (Wie man lineare Gleichungssysteme effizient löst, lernen wir in Vorlesung 13.)

2) Wir berechnen die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$f(z) = \frac{5z^2 - 4z + 7}{z^3 + z^2 - 5z + 3} = \frac{5z^2 - 4z + 7}{(z - 1)^2(z + 3)}.$$

Damit ist 1 ein doppelter Pol von f und -3 ist ein einfacher Pol von f . Wieder gilt $\deg(p) = 2 < 3 = \deg(q)$ und wir machen den Ansatz

$$f(z) = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{(z - 1)^2} + \frac{C}{z + 3}.$$

Die Koeffizienten B und C können wir mit der Zuhalttemethode bestimmen:

$$\begin{aligned} C &= \frac{5 \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 7}{(-3 - 1)^2} = 4, \\ B &= \frac{5 - 4 + 7}{1 + 3} = 2. \end{aligned}$$

Für den Koeffizienten A funktioniert dies nicht: Multiplizieren wir den Ansatz mit $z - 1$, so bleibt auf der rechten Seite ein einfacher Pol in 1, so dass wir nicht $z = 1$ einsetzen können. Dafür können wir einen anderen Wert für z einsetzen, oder mit dem Nenner q multiplizieren:

$$5z^2 - 4z + 7 = A(z - 1)(z + 3) + 2(z + 3) + 4(z - 1)^2.$$

Nun hilft entweder ein Koeffizientenvergleich (vor z^2 finden wir $5 = A + 4$, also $A = 1$) oder das Einsetzen eines weiteren Wertes, z.B. mit $z = 0$ ist $7 = -3A + 6 + 4$, also $A = 1$.

9.2 Reelle Partialbruchzerlegung

Wir betrachten nun den Fall einer reellen rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, d.h. die Polynome p und q haben reelle Koeffizienten. Sind alle Pole von f reell, so funktioniert die Partialbruchzerlegung genau wie im komplexen, und die Koeffizienten sind dann auch alle reell.

Allerdings kann der Nenner auch komplexe Nullstellen besitzen, die dann in komplex-konjugierten Paaren $\lambda = a + ib, \bar{\lambda} = a - ib$ auftreten (mit reellen a, b und $b \neq 0$). Natürlich

funktioniert die komplexe Partialbruchzerlegung wie gehabt und enthält dann komplexe Koeffizienten und Polstellen (siehe Beispiel 9.3).

Möchte man statt der komplexen eine reelle Partialbruchzerlegung, so kann man das durch zusammenfassen der zugehörigen Terme erreichen (ähnlich zur reellen Zerlegung von reellen Polynomen).

Im Falle eines einfachen komplexen Pols kann man die zugehörigen Linearfaktoren in $q(x)$ zusammenfassen als

$$(x - \lambda)(x - \bar{\lambda}) = (x - (a + ib))(x - (a - ib)) = (x - a)^2 + b^2.$$

Die entsprechenden komplexen Summanden in der Partialbruchzerlegung kann man ebenfalls zusammenfassen

$$\frac{A}{x - (a + ib)} + \frac{B}{x - (a - ib)} = \frac{Cx + D}{(x - a)^2 + b^2}.$$

und in dieser Form ansetzen. Sind A und B schon bekannt, so können wir C und D direkt berechnen, indem wir die linke Seite auf den Hauptnenner bringen.

Für Polstellen höherer Ordnung geht das so ähnlich, aber es ist meist einfacher, die Terme komplex zu lassen. Ist λ eine nichtreelle Polstelle der Ordnung m , so ist auch $\bar{\lambda}$ eine nichtreelle Polstelle der Ordnung m , und man ersetzt

$$\frac{A_1}{z - \lambda} + \frac{A_2}{(z - \lambda)^2} + \dots + \frac{A_m}{(z - \lambda)^m} + \frac{B_1}{z - \bar{\lambda}} + \frac{B_2}{(z - \bar{\lambda})^2} + \dots + \frac{B_m}{(z - \bar{\lambda})^m}$$

im Ansatz für die Partialbruchzerlegung durch

$$\frac{C_1 z + D_1}{(z - a)^2 + b^2} + \frac{C_2 z + D_2}{((z - a)^2 + b^2)^2} + \dots + \frac{C_m z + D_m}{((z - a)^2 + b^2)^m}$$

mit reellen $C_1, D_1, C_2, D_2, \dots, C_m, D_m$.

Beispiel 9.4. Sei $f(z) = \frac{z^2 + z + 4}{(z - 3)(z^2 + 1)}$ aus Beispiel 9.3. Wir machen nun den reellen Ansatz

$$\frac{z^2 + z + 4}{(z - 3)(z^2 + 1)} = \frac{A}{z - 3} + \frac{Cz + D}{z^2 + 1}.$$

Multiplikation mit dem Nenner ergibt

$$z^2 + z + 4 = A(z^2 + 1) + (Cz + D)(z - 3) = (A + C)z^2 + (-3C + D)z + A - 3D,$$

also (Koeffizientenvergleich)

$$\begin{aligned} A + C &= 1 \\ -3C + D &= 1 \\ A - 3D &= 4. \end{aligned}$$

Löst man das lineare Gleichungssystem, so findet man $A = \frac{8}{5}$, $C = -\frac{3}{5}$, $D = -\frac{4}{5}$. Hat man schon die komplexe Zerlegung, kann man auch die komplexen Pole zusammenfassen.

9.3 Zusammenfassung

Wir fassen das Vorgehen zur Berechnung der Partialbruchzerlegung zusammen.

Schritt 1: Polynomdivision. Nur erforderlich, falls $\deg(p) \geq \deg(q)$: Polynomdivision $p(z) = s(z)q(z) + r(z)$ mit $\deg(r) < \deg(q)$.

Falls $\deg(p) < \deg(q)$ ist $s(z) = 0$ und $r(z) = p(z)$.

Schritt 2: Zerlegung des Nenners. Bestimme die Nullstellen des Nenners $q(z)$ und zerlege q so weit wie möglich in Faktoren.

- Für eine komplexe PBZ in Linearfaktoren
- Für eine reelle PBZ in Linearfaktoren und quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen.

Anschließend werden gleiche Faktoren zu Potenzen zusammengefasst.

Schritt 3: Ansatz zur Partialbruchzerlegung.

- Der Ansatz bestimmt sich allein aus den Faktoren des Nenners.
- Die gesamte Anzahl der Koeffizienten in den Ansatztermen stimmt mit dem Grad des Nenners überein.

Faktor des Nenners	Ansatzterm
$z - z_0$	$\frac{A}{z - z_0}$
$(z - z_0)^m$	$\frac{A_1}{z - z_0} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{A_k}{(z - z_0)^m}$
$(z - a)^2 + b^2$	$\frac{Cz + D}{(z - a)^2 + b^2}$
$((z - a)^2 + b^2)^m$	$\frac{C_1z + D_1}{(z - a)^2 + b^2} + \frac{C_2z + D_2}{((z - a)^2 + b^2)^2} + \dots + \frac{C_mz + D_m}{((z - a)^2 + b^2)^m}$

Schritt 4: Koeffizienten bestimmen. Mehrere Möglichkeiten:

- Koeffizientenvergleich (immer möglich)
- Zuhaltmethode: Gibt die Koeffizienten von einfachen Polstellen bzw. den Koeffizienten bei der höchsten Potenz eines Pols.

Bestimme verbleibende Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich oder durch Einsetzen weiterer Zahlen.

Vorlesung 10

Vektorräume

Wir lernen Vektorräume kennen, die Grundstruktur der linearen Algebra.

10.1 Vektorräume

Vektorräume sind Mengen, in denen wir addieren und mit Skalaren multiplizieren können, so dass die „üblichen“ Rechenregeln gelten. Die genaue Definition geben wir in Definition 10.1. Beispiele sind die Ebene \mathbb{R}^2 und der euklidische Raum \mathbb{R}^3 , in denen wir Vektoren addieren können und mit einer (reellen) Zahl multiplizieren können. Man kann Vektorräume über den reellen oder den komplexen Zahlen betrachten. Die grundlegenden Eigenschaften sind die gleichen. Im Folgenden schreiben wir \mathbb{K} für \mathbb{R} oder \mathbb{C} , um nicht jede Definition und jeden Satz doppelt zu schreiben (einmal für \mathbb{R} und einmal für \mathbb{C}). Die Elemente von \mathbb{K} heißen *Skalare*. Übliche Bezeichnungen sind λ (Lambda) und μ (My).

Definition 10.1 (Vektorraum). Ein \mathbb{K} -Vektorraum ist eine Menge V mit einer Addition $+$ und einer skalaren Multiplikation \cdot , so dass

$$v + w \in V \quad \text{und} \quad \lambda \cdot v \in V$$

für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt und folgende Rechenregeln für alle $v, w, x \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gelten:

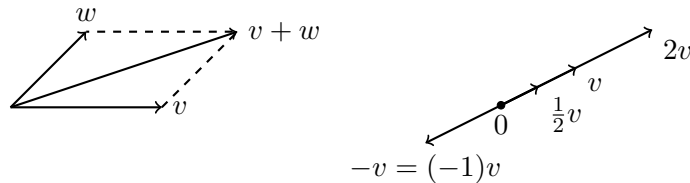
- 1) $+$ ist assoziativ: $(v + w) + x = v + (w + x)$,
- 2) $+$ ist kommutativ: $v + w = w + v$,
- 3) es gibt einen *Nullvektor* $0 \in V$ mit $0 + v = v$,
- 4) zu jedem Vektor $v \in V$ gibt es $-v \in V$ mit $v + (-v) = 0$,
- 5) es gilt: $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$,
- 6) Distributivgesetz: $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
- 7) Distributivgesetz: $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.
- 8) $1 \cdot v = v$.

Ein *Vektor* ist ein Element eines Vektorraums.

Insbesondere enthält jeder \mathbb{K} -Vektorraum den Nullvektor und ist somit nicht leer: $V \neq \emptyset$. Das \mathbb{K} bei „ \mathbb{K} -Vektorraum“ sagt, aus welchem Zahlbereich die Zahlen (=Skalare) kommen, mit denen multipliziert wird.

Zur Vereinfachung schreiben wir oft λv anstatt $\lambda \cdot v$. Auch schreiben wir oft nur Vektorraum anstatt \mathbb{K} -Vektorraum.

Die geometrische Anschauung zu den Vektorraumoperationen ist die aus dem \mathbb{R}^2 :



Beispiel 10.2. 1) Die Ebene \mathbb{R}^2 mit der Vektoraddition und Skalarmultiplikation

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix},$$

ist ein \mathbb{R} -Vektorraum.

2) Der dreidimensionale Raum \mathbb{R}^3 mit der Vektoraddition und Skalarmultiplikation ist ein \mathbb{R} -Vektorraum.

3) *Vektorraum* \mathbb{K}^n : Allgemeiner ist für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, die Menge

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$$

ein \mathbb{K} -Vektorraum, wenn man die Vektoren (wie im \mathbb{R}^2) eintragsweise addiert und mit Skalaren multipliziert:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}.$$

Der Nullvektor ist $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$. Insbesondere sind \mathbb{R}^n ein \mathbb{R} -Vektorraum und \mathbb{C}^n ein \mathbb{C} -Vektorraum.

Vektoren aus \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n werden oft (aber nicht immer) mit einem Pfeil darüber geschrieben: \vec{x} .

4) *Vektorraum der Polynome*: Die Menge der Polynome

$$V = \{p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \mid \text{wobei } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}\}$$

mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation von Polynomen (Abschnitt 8.1) bildet einen \mathbb{C} -Vektorraum. Dieser wird oft mit $\mathbb{C}[z]$ bezeichnet. Die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten wird oft mit $\mathbb{R}[z]$ bezeichnet und bildet ebenfalls einen Vektorraum (über den reellen Zahlen, d.h. wenn wir nur mit reellen Zahlen multiplizieren). Der Nullvektor ist das Nullpolynom: $p_0(z) = 0$.

- 5) Ist D eine Menge, so ist die Menge der Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x),$$

ein \mathbb{R} -Vektorraum. (Rechts von den Gleichheitszeichen haben wir dabei $+$ und \cdot von reellen Zahlen.) Der Nullvektor ist die Nullfunktion $f_0 : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = 0$, denn für diese gilt $f_0 + f = f$, denn $(f_0 + f)(x) = f_0(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x)$ für jedes $x \in D$.

- 6) Auch Funktionen $f : D \rightarrow V$, wobei V ein beliebiger \mathbb{K} -Vektorraum ist, bilden einen \mathbb{K} -Vektorraum (wieder mit punktweiser Addition und Multiplikation).

10.2 Teilräume

Teilräume sind Teilmengen von Vektorräumen, die selbst wieder ein Vektorraum sind.

Definition 10.3 (Teilraum). Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Teilmenge $T \subseteq V$ ist ein *Teilraum* von V , falls T selbst ein \mathbb{K} -Vektorraum ist (mit dem gleichen $+$ und \cdot wie V).

Statt Teilraum sagt man auch *Unterraum* oder *Untervektorraum*. Es gilt die folgende nützliche Charakterisierung.

Satz 10.4 (Teilraumkriterium). Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Dann ist $T \subseteq V$ ein Teilraum von V , genau dann wenn

- 1) $0 \in T$,
- 2) für alle $v, w \in T$ ist $v + w \in T$,
- 3) für alle $v \in T$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda v \in T$.

Beweis. Ist T ein Teilraum von V , so ist T selbst ein Vektorraum und die drei Eigenschaften sind erfüllt.

Sei $T \subseteq V$ so dass 1)–3) erfüllt sind. Dann „bleiben $+$ und \cdot in T “, wie es für einen \mathbb{K} -Vektorraum sein muss. Wir müssen also noch die Rechenregeln in einem Vektorraum nachweisen. Es ist $0 \in T$, und dann gilt $0 + v = v$ für alle $v \in T \subseteq V$, weil das sogar für alle $v \in V$ gilt. Ist $v \in T$, so ist $(-1) \cdot v = -v \in T$, und dann $v - v = 0$. Die anderen Rechenregeln übertragen sich von V auf die Teilmenge T . \square

Der Satz sagt uns im Wesentlichen, dass eine Teilmenge ein Teilraum ist, wenn wir bei $+$ und \cdot in der Teilmenge bleiben.

Beispiel 10.5. 1) Ist V ein \mathbb{K} -Vektorraum, so sind $\{0\}$ und V Teilräume von V .

- 2) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Dann ist die Gerade $G = \{t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ein Teilraum von \mathbb{R}^2 , denn:

- (a) Mit $t = 0$ ist $0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in G$,

- (b) Sind $\vec{v}, \vec{w} \in G$, so sind $\vec{v} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\vec{w} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$, und dann $\vec{v} + \vec{w} = (s+t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in G$,
 (c) Ist $\vec{v} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in G$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\lambda \vec{v} = (\lambda t) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Genauso sieht man: jede Gerade durch $\vec{0}$ ist ein Teilraum von \mathbb{R}^2 .

- 3) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und K der Einheitskreis in der Ebene. Dieser enthält nicht die $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$, ist also kein Teilraum.
 4) In $V = \mathbb{R}^3$ sind Geraden und Ebenen durch $\vec{0}$ Teilräume von \mathbb{R}^3 .
 5) *Vektorraum der Polynome von beschränktem Grad:* Sei $V = \mathbb{C}[z]$ der \mathbb{C} -Vektorraum der Polynome. Die Menge $T := \mathbb{C}[z]_{\leq 2} := \{p \in \mathbb{C}[z] \mid \deg(p) \leq 2\}$ der Polynome vom Grad höchstens 2 ist ein Teilraum von V , denn:
 (a) das Nullpolynom liegt in T , denn $\deg(0) = -\infty \leq 2$,
 (b) sind $p, q \in T$, d.h. haben p und q den Grad höchstens 2, so ist auch der Grad von $p + q$ höchstens 2,
 (c) ist $p \in T$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist auch der Grad von $\lambda \cdot p$ höchstens 2.

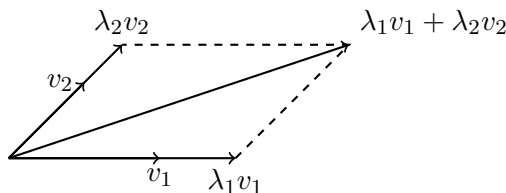
Genauso rechnet man für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach:

$$\mathbb{C}[z]_{\leq n} = \{p \in \mathbb{C}[z] \mid \deg(p) \leq n\},$$

die Menge der Polynome vom Grad höchstens n , ist ein Teilraum von $V = \mathbb{C}[z]$. Dies gilt ebenso für Polynome mit reellen Koeffizienten: $\mathbb{R}[z]_{\leq n} = \{p \in \mathbb{R}[z] \mid \deg(p) \leq n\}$ ist ein Teilraum von $\mathbb{R}[z]$.

10.3 Linearkombinationen

Idee: Linearkombination von zwei Vektoren:



Definition 10.6 (Linearkombination). Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Ein Vektor $v \in V$ heißt *Linearkombination* der Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$, wenn Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ existieren, so dass

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j.$$

Man sagt, v lässt sich aus v_1, \dots, v_k *linear kombinieren*. Die $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ heißen *Koeffizienten* der Linearkombination.

Beispiel 10.7. 1) In $V = \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

also ist $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ eine Linearkombination von $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Weiter ist

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2) Ein Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ist eine Linearkombination der Monome $1, z, \dots, z^n$.

3) In $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ist

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(x) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(x) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(x),$$

d.h., die Funktion $x \mapsto \sin(x + \frac{\pi}{3})$ ist eine Linearkombination von \sin und \cos .

Definition 10.8 (Span). Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_k \in V$ heißt der *Span* (oder die *lineare Hülle* oder das *Erzeugnis*) von v_1, \dots, v_k :

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

Beispiel 10.9. 1) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in V$. Dann ist

$$\text{span}\{\vec{v}_1\} = \{\lambda_1 \vec{v}_1 \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\},$$

und das ist die Gerade durch $\vec{0}$ mit dem Richtungsvektor \vec{v}_1 .

2) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, dann ist

$$\text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

die x - y -Ebene im \mathbb{R}^3 .

Satz 10.10. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $v_1, \dots, v_k \in V$. Dann ist $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ ein Teilraum von V .

Beweis. Das rechnen wir mit dem Teilraumkriterium nach:

1) Mit $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \in \mathbb{K}$ ist $0_V = 0v_1 + \dots + 0v_k \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$.

2) Sind $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ und $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$, dann ist

$$v + w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_k + \mu_k) v_k,$$

also $v + w \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$.

3) Sind $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist

$$\lambda v = \lambda(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_k) v_k \in \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}.$$

Daher ist $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ ein Teilraum von V . □

10.4 Erzeugendensysteme

Definition 10.11 (Erzeugendensystem). Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und T ein Teilraum von V . Eine Menge $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq T$ heißt *Erzeugendensystem* von T , falls ihr Span gleich T ist:

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = T.$$

Beispiel 10.12. 1) Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $G = \{t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ die Gerade durch $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Anders geschrieben ist also

$$G = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

und damit ist $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$ ein Erzeugendensystem von G . Weitere Erzeugendensysteme von G sind zum Beispiel

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hingegen sind $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ und $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ keine Erzeugendensysteme von G , da $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin G$.

2) Sei $T = V = \mathbb{R}^2$. Dann ist zum Beispiel $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ ein Erzeugendensystem von T . Dass $\text{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\} \subseteq T$ gilt ist klar, und wir müssen nachrechnen, dass sich jeder Vektor in \mathbb{R}^2 als Linearkombination von $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ darstellen lässt. Das ist aber ganz einfach:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3) Genauso gilt, dass

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ein Erzeugendensystem von \mathbb{K}^n ist.

4) Sei $V = \mathbb{C}[z]$ der Vektorraum der Polynome und $T = \mathbb{C}[z]_{\leq 2}$ der Teilraum der Polynome vom Grad höchstens 2. Für $p(z) \in T$ ist

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2,$$

also ist $\{1, z, z^2\}$ ein Erzeugendensystem von T . Hingegen ist $\{1, z\}$ kein Erzeugendensystem von T , da zum Beispiel $1 + z^2 \in T$ keine Linearkombination von 1 und z ist.

Allgemeiner ist

$$\mathbb{C}[z]_{\leq n} = \{p \mid p \text{ ist ein Polynom mit } \deg(p) \leq n\} = \text{span}\{1, z, \dots, z^n\},$$

d.h. $1, z, \dots, z^n$ bilden ein Erzeugendensystem der Polynome vom Grad höchstens n . Für reelle Polynome gilt das ebenso.

Wir beobachten: $\mathbb{C}[z]$ (und $\mathbb{R}[z]$) haben kein Erzeugendensystem aus endlich vielen Elementen, da der Grad der Polynome beliebig groß werden kann.

- 5) Sei wieder $T = V = \mathbb{R}^2$. Dann ist $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^2 , denn es ist zum Beispiel

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Den Vektor \vec{x} können wir aber auch anders darstellen, zum Beispiel als

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ein Erzeugendensystem erlaubt es mit wenigen Grundvektoren (v_1, \dots, v_k) sämtliche Vektoren eines Vektorraums durch Linearkombinationen zu rekonstruieren. Das ist sehr nützlich, insbesondere da die Koeffizienten Zahlen sind, mit denen sich bestens Rechnen lässt, auch und insbesondere auf dem Computer.

Diese Rekonstruktion ist im Allgemeinen nicht eindeutig, wie das obige Beispiel zeigt. Um Eindeutigkeit der Koeffizienten zu erhalten (und ein minimales Erzeugendensystem zu erhalten), brauchen wir den Begriff der linearen Unabhängigkeit, den wir in Vorlesung 11 kennen lernen werden.

Vorlesung 11

Basis und Dimension

In dieser Vorlesung lernen wir die Begriffe Basis und Dimension eines Vektorraums kennen. Eine Basis ist ein Erzeugendensystem, bzgl. dem sich Vektoren eindeutig darstellen lassen. Die Dimension ist ein Maß für die Größe eines Vektorraums.

11.1 Lineare Unabhängigkeit

Ob sich Vektoren eindeutig durch ein Erzeugendensystem darstellen lassen, hängt davon ab, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

Definition 11.1 (linear unabhängig, linear abhängig).

- 1) Die Vektoren v_1, \dots, v_k des \mathbb{K} -Vektorraums V heißen *linear unabhängig* genau dann, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

für die Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ hat. (D.h. die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ ist eindeutig.)

- 2) Die Vektoren v_1, \dots, v_k heißen *linear abhängig*, wenn sie nicht linear unabhängig sind. D.h. sie sind linear abhängig genau dann, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

neben der Lösung $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ noch weitere Lösungen besitzt (also wenn die Lösung nicht eindeutig ist).

Beispiel 11.2. 1) Die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sind linear unabhängig in \mathbb{K}^2 , denn sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ mit

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix},$$

so folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Auch $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sind linear unabhängig.

- 2) Die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sind linear abhängig, da z.B.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

wobei die Koeffizienten nicht alle Null sind. In Beispiel 10.12 hatten wir gesehen, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ein Erzeugendensystem bilden, bei dem die Darstellung aber nicht eindeutig ist.

- 3) Die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sind nicht linear unabhängig, denn: Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ mit

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

so folgt $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, was zum Beispiel auch für $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_1 = -2$ erfüllt ist. Ebenso sind $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ linear abhängig.

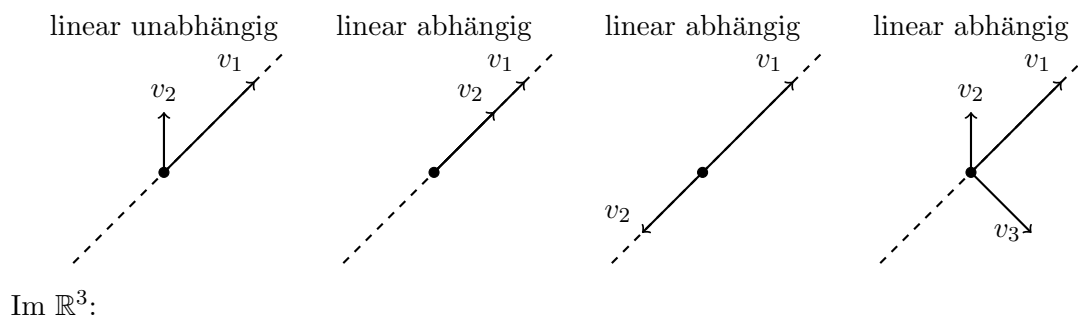
- 4) *Der Nullvektor ist immer linear abhängig:* Sind $v_1, \dots, v_k \in V$ mit einem $v_j = 0$, so kann man $\lambda_j = 1 \neq 0$ und alle anderen Koeffizienten $= 0$ wählen, so dass $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0$ gilt. Daher sind v_1, \dots, v_k linear abhängig.

- 5) Sei $V = \mathbb{C}[z]$ der Vektorraum der Polynome. Für $n \in \mathbb{N}$ sind die Polynome $1, z, z^2, \dots, z^n$ linear unabhängig: Sind $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit

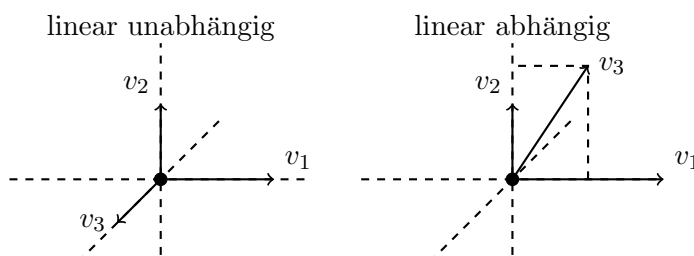
$$\lambda_0 1 + \lambda_1 z + \dots + \lambda_n z^n = 0 \quad (\text{Nullpolynom}),$$

so sind nach dem Koeffizientenvergleich (Satz 8.12) alle Koeffizienten $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Daher sind $1, z, \dots, z^n$ linear unabhängig.

Anschaulich gesehen sind Vektoren linear unabhängig, wenn jeder in eine neue eigene „Richtung“ zeigt. Im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 kann man sich das durch eine Skizze veranschaulichen. Im \mathbb{R}^2 :



Im \mathbb{R}^3 :



Die Vektoren v_1, \dots, v_k sind linear abhängig, wenn es einen gibt, der sich als Linearkombination der anderen schreiben lässt. Daher sind v_1, \dots, v_k linear unabhängig, wenn es keinen Vektor gibt, der Linearkombination der anderen Vektoren ist. Das ist gut für die Vorstellung, aber schlecht zum Nachrechnen. Leichter ist es mit der Definition.

Um nachzurechnen, ob v_1, \dots, v_k linear unabhängig sind oder nicht, nehmen wir die Unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, stellen die Gleichung

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$$

auf und machen daraus ein lineares Gleichungssystem für $\lambda_1, \dots, \lambda_k$:

- Ist dieses eindeutig lösbar (alle $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$), so sind v_1, \dots, v_k linear unabhängig.
- Ist die Lösung des linearen Gleichungssystems nicht eindeutig, so sind v_1, \dots, v_k linear abhängig.

11.2 Basis und Dimension

Wir hatten gesehen, dass bei einem Erzeugendensystem die Darstellung von Vektoren im Allgemeinen nicht eindeutig sein braucht (siehe Beispiel 10.12). Verlangt man zusätzlich lineare Unabhängigkeit, so führt uns das auf den Begriff der Basis, für die die Darstellung von Vektoren eindeutig wird.

Definition 11.3 (Basis). Sei $V \neq \{0\}$ ein \mathbb{K} -Vektorraum. Ein endliches linear unabhängiges Erzeugendensystem $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V heißt *Basis* von V .

Ausführlich bedeutet das: $\{v_1, \dots, v_n\}$ heißt *Basis* von V , falls gilt

- 1) v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig
- 2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist ein Erzeugendensystem: $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = V$.

Für den Nullvektorraum $V = \{0\}$ definiert man die leere Menge als Basis.

Bemerkung 11.4. 1) Singular: die *Basis*, Plural: die *Basen*. Die *Base* (ohne „n“) kommt in der Chemie vor, und ist eine veraltete Bezeichnung für *Cousine*.

- 2) *Basen sind immer geordnet*. Auch wenn Basen wie Mengen geschrieben werden (Mengen sind ungeordnet), sind Basen immer geordnet, d.h. in $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist v_1 der erste Basisvektor, v_2 der zweite Basisvektor, ... Das wird oft wichtig sein.

Beispiel 11.5. 1) Die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bilden eine Basis von \mathbb{R}^2 . Die Vektoren \vec{v}_1, \vec{v}_2 sind linear unabhängig, denn: Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix},$$

so folgt im zweiten Eintrag $\lambda_2 = 0$, und dann im ersten Eintrag $0 = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1$. Außerdem bilden \vec{v}_1, \vec{v}_2 ein Erzeugendensystem, denn für einen beliebigen Vektor in \mathbb{R}^2 gilt

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (x_1 - x_2)\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2.$$

Daher ist $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ eine Basis von \mathbb{R}^2 .

- 2) Die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sind linear unabhängig (Beispiel 11.2) und ein Erzeugendensystem (Beispiel 10.12), daher ist $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ eine Basis von \mathbb{R}^2 .
- 3) Allgemein ist

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

eine Basis von \mathbb{K}^n , die so genannte *Standardbasis*.

- 4) Hingegen ist $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ keine Basis: Dies ist zwar ein Erzeugendensystem (Beispiel 10.12), aber die Vektoren sind linear abhängig (Beispiel 11.2).
- 5) Der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n ,

$$\mathbb{C}[z]_{\leq n} = \text{span}\{1, z, \dots, z^n\} = \{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}\},$$

hat die Basis $\{1, z, \dots, z^n\}$, denn $1, z, \dots, z^n$ sind linear unabhängig (Beispiel 11.2) und $\{1, z, \dots, z^n\}$ ist ein Erzeugendensystem (Beispiel 10.12).

Satz 11.6. *Alle Basen eines Vektorraums haben die gleiche Anzahl an Elementen.*

Das ist nicht so schwer zu beweisen und ermöglicht die folgende Definition.

Definition 11.7 (Dimension). Die *Dimension* eines Vektorraums ist die Anzahl der Elemente einer Basis von V und wird mit $\dim(V)$ bezeichnet. Hat V eine endliche Basis, so ist $\dim(V) \in \mathbb{N}$, und wir nennen V *endlichdimensional*. Hat V keine endliche Basis, so schreiben wir $\dim(V) = \infty$ und nennen V *unendlichdimensional*.

Beispiel 11.8. Mit den Basen aus Beispiel 11.5 können wir die Dimension einiger Vektorräume bestimmen.

- 1) Es ist $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, denn $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ ist eine Basis von \mathbb{R}^2 .
- 2) Allgemein ist $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, da die Standardbasis von \mathbb{K}^n genau n Elemente hat.
- 3) Der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n ,

$$\mathbb{C}[z]_{\leq n} = \text{span}\{1, z, \dots, z^n\} = \{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}\},$$

hat die Dimension $\dim(\mathbb{C}[z]_{\leq n}) = n + 1$, da $\{1, z, \dots, z^n\}$ eine Basis ist. Gleiches gilt für reelle Polynome.

4) Der Vektorraum der Polynome

$$\mathbb{C}[z] = \{p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n \mid \text{wobei } n \in \mathbb{N} \text{ und } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}\}$$

ist unendlichdimensional: $\dim(\mathbb{C}[z]) = \infty$. Um jedes mögliche Polynom darzustellen, braucht man alle Monome $1, z, z^2, \dots$. Gleiches gilt für den Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten $\mathbb{R}[z]$.

Kennt man die Dimension eines Vektorraums und hat die passende Anzahl Vektoren für eine Basis, braucht man nur noch lineare Unabhängigkeit oder Erzeugendensystem zu prüfen, also nur noch eine der beiden Bedingungen für eine Basis.

Satz 11.9. *Sei V ein Vektorraum mit Dimension $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann gilt:*

- 1) *Sind $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig, so ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V .*
- 2) *Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V , so ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V .*

Konstruktion von Basen Wird V von endlich vielen Vektoren aufgespannt, $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$, so kann man aus diesen eine Basis von V konstruieren. Sind v_1, \dots, v_k linear unabhängig, so bilden sie eine Basis und wir sind fertig. Andernfalls sind v_1, \dots, v_k also linear abhängig und wir können schreiben

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, die nicht alle gleich Null sind. Ist zum Beispiel $\lambda_k \neq 0$, können wir nach v_k auflösen:

$$v_k = -\frac{1}{\lambda_k}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1}),$$

d.h. wir können v_k durch die anderen Vektoren v_1, \dots, v_{k-1} schreiben, und es ist

$$V = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_{k-1}\}.$$

Sind jetzt v_1, \dots, v_{k-1} linear unabhängig, haben wir eine Basis gefunden. Andernfalls entfernen wir wie eben einen nächsten Vektor, und führen dies so lange fort, bis wir ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, also eine Basis, haben.

Also:

- 1) Ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ ein Erzeugendensystem aber sind die Vektoren nicht linear unabhängig, so entferne so lange geeignete Vektoren, bis eine Basis übrig bleibt.
- 2) Sind v_1, \dots, v_k linear unabhängig, aber $\{v_1, \dots, v_k\}$ kein Erzeugendensystem, so nimm geeignete Vektoren $v_{k+1} \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ hinzu, bis eine Basis von V entsteht (falls $\dim(V) < \infty$).

11.3 Koordinaten

Hat man eine Basis, lässt sich jeder Vektor auf eindeutige Art und Weise als Linearkombination der Basisvektoren darstellen. Das wird sich als sehr nützlich erweisen, da man dann jeden Vektor $v \in V$ mit einem Spaltenvektor aus \mathbb{K}^n identifizieren kann, mit dem man bestens rechnen kann.

Satz 11.10. *Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann lässt sich jeder Vektor $v \in V$ schreiben als*

$$v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n,$$

wobei die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ eindeutig bestimmt sind und Koordinaten von v heißen. Der Vektor

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

heißt der Koordinatenvektor von v bzgl. \mathcal{B} .

Beweis. Als Basis ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ insbesondere ein Erzeugendensystem von V , so dass sich v als Linearkombination von v_1, \dots, v_n schreiben lässt:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

mit Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Wir zeigen jetzt, dass die Koeffizienten eindeutig bestimmt sind. Dazu nehmen wir an, wir könnten den Vektor v auch schreiben als

$$v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n,$$

mit Koeffizienten μ_1, \dots, μ_n , die möglicherweise von den $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschieden sind. Wir möchten nun sehen, dass sie gleich sind. Dazu rechnen wir

$$0 = v - v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n - (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n.$$

Da v_1, \dots, v_n linear unabhängig sind, sind die Koeffizienten dieser Linearkombination alle Null, d.h. es sind $\lambda_1 - \mu_1 = 0, \dots, \lambda_n - \mu_n = 0$, anders gesagt $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$. Damit sind die Koeffizienten von v eindeutig bestimmt. \square

Die Koordinaten sind eine „Bauanleitung“, wie man einen Vektor aus den Basisvektoren (den „Bausteinen“) zusammensetzt (genauer: linear kombiniert). Hat man die

Koordinaten (die „Bauanleitung“), so ist es ganz einfach: Ist $\vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$, dann ist

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j,$$

was wir direkt ausrechnen können. Hat z.B. v die Koordinaten 2 und 3 bezüglich $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, so brauchen wir 2-mal den Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und 3-mal den Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ um den Vektor \vec{v} zu schreiben:

$$\vec{v} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Haben wir hingegen den Vektor v und möchten seine Koordinaten finden, ist in der Regel ein Gleichungssystem zu lösen.

Ist schon $V = \mathbb{K}^n$, so sieht der Koordinatenvektor nicht spektakulär anders aus, wird aber dennoch nützlich sein. Ist hingegen V irgendein anderer Vektorraum, so erlaubt uns der letzte Satz den allgemeinen Vektor v mit einem Spaltenvektor in \mathbb{K}^n zu identifizieren.

Beispiel 11.11. 1) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Für $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist der Koordinatenvektor $\vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ und sieht wie \vec{v} selbst aus.

Allgemein gilt $\vec{v}_{\mathcal{B}} = \vec{v}$ falls \mathcal{B} die Standardbasis von \mathbb{K}^n ist.

2) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit der Basis $\mathcal{B}_2 = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Für $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ rechnen wir

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

und erhalten den Koordinatenvektor von \vec{v} bezüglich der Basis \mathcal{B}_2 :

$$\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Zum Beispiel ist für $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, also $\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Der Koordinatenvektor $\vec{v}_{\mathcal{B}_2}$ bzgl. \mathcal{B}_2 ist verschieden von dem Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis. Wie Koordinatenvektoren bzgl. verschiedener Basen zusammenhängen, werden wir in Vorlesung 16 sehen.

3) Der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2,

$$V = \mathbb{C}[z]_{\leq 2} = \{p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}\},$$

hat die Basis $\mathcal{B} = \{1, z, z^2\}$ (Beispiel 11.5). Bezüglich der Basis \mathcal{B} hat ein Polynom

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2$$

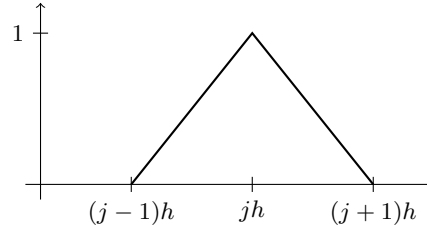
dem Koordinatenvektor

$$\vec{p}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

- 4) Sei $V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ der \mathbb{R} -Vektorraum der Funktionen von $[0, 1]$ nach \mathbb{R} . Sei $n \in \mathbb{N}$ und $h = \frac{1}{n+1}$. Definiere die Hutfunktionen $f_j \in V$ durch

$$f_j(x) := \begin{cases} \frac{1}{h}(x - (j-1)h), & (j-1)h \leq x \leq jh, \\ 1 - \frac{1}{h}(x - jh), & jh \leq x \leq (j+1)h, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese sehen wie folgt aus:



Wir rechnen nach, dass f_0, \dots, f_{n+1} linear unabhängig sind: Seien $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_{n+1} f_{n+1}(x) = 0$$

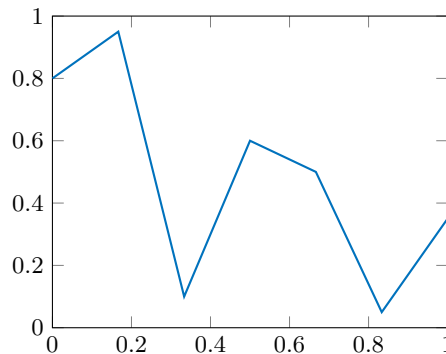
für alle $x \in [0, 1]$. Im Punkt $x = jh$ ist f_j eins und die anderen Funktionen f_k sind null ($k \neq j$). Setzen wir daher den Punkt $x = jh$ ein, so erhalten wir

$$\lambda_j \cdot 1 = 0,$$

also $\lambda_j = 0$. Da wir jh für $j = 0, 1, \dots, n+1$ einsetzen können, sind alle Koeffizienten $\lambda_j = 0$, und damit f_0, f_1, \dots, f_{n+1} linear unabhängig.

Insbesondere ist $\mathcal{B} = \{f_0, \dots, f_{n+1}\}$ eine Basis von $T = \text{span}\{f_0, \dots, f_{n+1}\}$, so dass $\dim(T) = n+2$. Jede Funktion aus T lässt sich dann durch Angabe von $n+2$ Zahlen durch die Hutfunktionen rekonstruieren.

Zum Beispiel lässt sich (mit $n = 5$) die Funktion



durch Angabe ihres Koordinatenvektors komplett beschreiben. Dieser ist

$$\vec{f}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.95 \\ 0.1 \\ 0.6 \\ 0.5 \\ 0.05 \\ 0.35 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^7.$$

Die Hutfunktionen werden bei der Finite-Elemente-Methode beim Lösen gewisser partieller Differentialgleichungen verwendet. Dies ist Thema der Vorlesung „Numerik II für Ingenieurwissenschaften“.

Vorlesung 12

Matrizen

Nach der Bereitstellung der Grundbegriffe in den ersten Vorlesungen, ist unser erstes großes Ziel das Lösen linearer Gleichungssysteme, also von mehreren linearen Gleichungen in mehreren Unbekannten, zum Beispiel

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 &= 1, \\2x_1 + 4x_2 &= 2.\end{aligned}$$

Um lineare Gleichungssysteme effizient (von Hand oder im Rechner) zu lösen, benötigen wir den Begriff der Matrix, den wir in dieser Vorlesung einführen. Die Lösung linearer Gleichungssysteme ist dann Thema der nächsten Vorlesungen.

12.1 Definition von Matrizen

In dieser und den nächsten Vorlesungen ist unerheblich, ob wir mit reellen oder komplexen Zahlen rechnen. Daher schreiben wir \mathbb{K} für \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

Definition 12.1 (Matrix). Für Zahlen $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, heißt das Zahlenschema

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} = [a_{i,j}] = [a_{i,j}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

eine $m \times n$ -Matrix mit Einträgen in \mathbb{K} . Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen mit Einträgen in \mathbb{K} wird mit $\mathbb{K}^{m,n}$ bezeichnet. Eine Matrix heißt *quadratisch*, falls $m = n$ gilt.

Bemerkung 12.2. 1) Die Indizes i, j setzt man nach der Regel „Zeile, Spalte“.

2) Singular: die Matrix, Plural: die Matrizen. Eine „Matrize“ bezeichnet u.a. eine Gußform, Druckvorlage, oder auch ein Hilfsmittel beim Legen einer Zahnfüllung.

3) Man sagt auch kürzer „ $m \times n$ -Matrix über \mathbb{K} “, lies „ m kreuz n Matrix über \mathbb{K} “.

4) Man schreibt auch a_{ij} statt $a_{i,j}$, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht.

Beispiel 12.3. Es ist

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

eine 2×3 -Matrix mit Einträgen in \mathbb{R} (oder \mathbb{C}). Der Eintrag $(2, 1)$ ist $a_{2,1} = 4$. Die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2i & 42 \end{bmatrix}$$

ist eine 2×2 -Matrix über \mathbb{C} .

Zwei besonders wichtige Matrizen sind die *Nullmatrix*, deren Einträge alle 0 sind:

$$0 = 0_{m,n} = [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n},$$

sowie die *Einheitsmatrix* (auch *Identität*) die quadratisch ist ($m = n$)

$$I_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n}.$$

Ist $m = 1$, also

$$A = [a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad \dots \quad a_{1,n}] \in \mathbb{K}^{1,n},$$

so nennt man A einen *Zeilenvektor*. Ist hingegen $n = 1$, also

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m,1},$$

so nennt man A einen *Spaltenvektor* oder kurz *Vektor* in $\mathbb{K}^{m,1}$, und man schreibt kürzer

$$\mathbb{K}^m := \mathbb{K}^{m,1}.$$

Beispiel 12.4. Zeilenvektoren:

$$A = [1 \quad 1 \quad -i] \in \mathbb{C}^{1,3}, \quad B = [-1 \quad 1] \in \mathbb{R}^{1,2}.$$

Spaltenvektoren:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{bmatrix} 1+i \\ 4 \\ \sqrt{2}i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

Spaltenvektoren in \mathbb{R}^2 sind genau die Punkte der Ebene. Vektoren in \mathbb{R}^3 sind die Punkte des dreidimensionalen Raums.

12.2 Addition und Skalarmultiplikation

Addition und Skalarmultiplikation von Vektoren sind Eintragsweise definiert, zum Beispiel

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Für Matrizen definieren wir das ganz genauso.

Definition 12.5 (Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen). Seien $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{K}^{m,n}$ zwei $m \times n$ -Matrizen und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist die *Summe* von A und B die Matrix

$$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}] \in \mathbb{K}^{m,n}$$

und die *Multiplikation mit einem Skalar* (kurz: *Skalarmultiplikation*) ist die Matrix

$$\lambda A = [\lambda a_{i,j}] \in \mathbb{K}^{m,n}.$$

Beachten Sie, dass nur Matrizen gleicher Größe addiert werden können. Bei der Summe und Skalarmultiplikation ist das Ergebnis wieder eine $m \times n$ -Matrix, also von der gleichen Größe wie die ursprünglichen Matrizen.

Beispiel 12.6. Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sind

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+1 & 3+(-1) \\ 4+2 & 5+0 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

und

$$(-1) \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad 2 \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da die Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen eintragsweise definiert sind, gelten die gleichen Rechenregeln wie für reelle oder komplexe Zahlen.

Satz 12.7 (Rechenregeln für die Addition). Für $A, B, C \in \mathbb{K}^{m,n}$ gilt

$$1) \quad (A + B) + C = A + (B + C),$$

$$2) \quad A + B = B + A.$$

Satz 12.8 (Rechenregeln für die Skalarmultiplikation). Für $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$1) \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,$$

$$2) \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$$

$$3) \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$$

Daher ist $\mathbb{K}^{m,n}$ mit der Addition und Skalarmultiplikation ein \mathbb{K} -Vektorraum. Dieser hat die Basis $\{E_{i,j} \mid i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$, wobei $E_{i,j} \in \mathbb{K}^{m,n}$ eine 1 in Eintrag (i, j) hat und alle anderen Einträge Null sind. Daher ist $\dim(\mathbb{K}^{m,n}) = mn$.

12.3 Matrizenmultiplikation

Nach der Addition und Skalarmultiplikation führen wir nun die Multiplikation zweier Matrizen ein. Wir beginnen mit dem Spezialfall eines Zeilen- und eines Spaltenvektors. Für

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{1,n} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,1}$$

definieren wir das Produkt AB durch

$$AB := [a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \dots + a_{1,n}b_{n,1}] = [\sum_{k=1}^n a_{1,k}b_{k,1}] \in \mathbb{K}^{1,1}.$$

Das Resultat ist eine 1×1 -Matrix. Ihr Eintrag entsteht, indem wir die ersten Elemente von A und B multiplizieren, dann die zweiten, dritten, \dots Elemente und alles addieren. Damit das Produkt definiert ist, muss A genau so viele Spalten haben, wie B Zeilen hat.

Beispiel 12.9. Es sind

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} &= [2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3] = [1] \in \mathbb{K}^{1,1}, \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} &= [1 \cdot 7 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5] = [20] \in \mathbb{K}^{1,1}. \end{aligned}$$

Für zwei allgemeine Matrizen A und B macht man dies analog für jede Zeile von A und jede Spalte von B : Multiplikation von Zeile i und Spalte j ergibt Eintrag (i, j) des Produkts.

Definition 12.10 (Matrizenmultiplikation). Seien $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{K}^{n,p}$. Dann ist

$$AB := [\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}] = [a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}] \in \mathbb{K}^{m,p}.$$

Ausgeschrieben bedeutet das

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^n a_{1,k}b_{k,2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1,k}b_{k,p} \\ \sum_{k=1}^n a_{2,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^n a_{2,k}b_{k,2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2,k}b_{k,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{m,k}b_{k,1} & \sum_{k=1}^n a_{m,k}b_{k,2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{m,k}b_{k,p} \end{bmatrix}.$$

Beispiel 12.11. 1) Es ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

2) Es sind

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 5 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 - 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Das Produkt

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ist nicht definiert, da die Anzahl der Spalten von A verschieden von der Anzahl der Zeilen von B ist.

4) Es ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Multiplikation mit der *Einheitsmatrix* $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ändert die zweite Matrix nicht.

Das ist genauso wie $1 \cdot x = x$ für reelle oder komplexe x gilt.

Wir fassen einige Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation zusammen.

Satz 12.12 (Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation). *Für Matrizen A, B, C mit geeigneter Größe und für $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt*

- 1) $A(BC) = (AB)C$,
- 2) $A(B + C) = AB + AC$,
- 3) $(A + B)C = AC + BC$,
- 4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,
- 5) $I_m A = A = A I_n$ für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Im Allgemeinen ist $AB \neq BA$.

Ein wesentlicher Unterschied zur Multiplikation von reellen oder komplexen Zahlen ist, dass die Matrizenmultiplikation *nicht kommutativ* ist, d.h. im Allgemeinen sind AB und BA *verschieden*. Zum Beispiel ist

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = BA.$$

Das war auch bei der Komposition von Abbildungen in Abschnitt 5.2 so, und in der Tat gibt es hier einen tieferen Zusammenhang: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ definiert eine Abbildung $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$. Daher entspricht das Produkt AB gerade der Komposition der beiden Abbildungen $\vec{x} \mapsto B\vec{x}$ und $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$.

12.4 Inverse

Wir betrachten nun *quadratische* Matrizen, das sind Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ (mit $m = n$) und fragen, wann eine Matrix eine Inverse besitzt. Dies entspricht der Frage, wann die Abbildung $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, eine Umkehrabbildung (= Inverse) besitzt; vergleiche Definition 5.9.

Definition 12.13 (Inverse). Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ heißt *invertierbar*, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt mit

$$BA = I_n \quad \text{und} \quad AB = I_n.$$

Die Matrix B ist dann eindeutig bestimmt, wird die *Inverse* von A genannt und mit A^{-1} bezeichnet.

Beweis der Eindeutigkeit. Wir nehmen an, dass A zwei Inversen hat, und zeigen, dass diese gleich sind. Sind $B, C \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit $BA = I_n = AB$ und $CA = I_n = AC$, so folgt

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C,$$

also $B = C$. Daher ist die Inverse, falls sie existiert, eindeutig bestimmt. \square

Per Definition gelten also $A^{-1}A = I_n$ und $AA^{-1} = I_n$. Man kann zeigen, dass es für quadratische Matrizen ausreicht, nur *eine* der beiden Gleichungen $BA = I_n$ und $AB = I_n$ zu überprüfen, die andere gilt dann automatisch.

Beispiel 12.14. Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist invertierbar mit Inversen $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, denn

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Satz 12.15. Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar, so gelten

- 1) A^{-1} ist invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$.
- 2) AB ist invertierbar mit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Beweis. Eigenschaft 1) folgt direkt aus der Definition: Da $AA^{-1} = I_n$ und $A^{-1}A = I_n$ ist A^{-1} nach Definition invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$.

Eigenschaft 2) geht ähnlich: Da wir schon einen Kandidaten für die Inverse haben, rechnen wir die Definition nach:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n.$$

Genauso findet man $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$. Daher ist AB invertierbar mit (eindeutiger) Inversen $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. \square

Beispiel 12.16. Ist $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ invertierbar? Wenn ja, dann gibt es $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix}.$$

Aus der ersten Zeile sehen wir $1 = a + b$ und $0 = a + b$, d.h. den Widerspruch $1 = 0$. Also ist A nicht invertierbar.

Im Beispiel konnten wir direkt nachrechnen, ob A invertierbar ist oder nicht. Im Allgemeinen ist es nicht so einfach, die Inverse einer gegebenen Matrix zu berechnen (wenn sie denn existiert). Wir werden darauf in Vorlesung 14 näher eingehen.

12.5 Transposition

Zum Abschluss dieser Vorlesung erklären wir eine weitere Operation für Matrizen.

Definition 12.17 (Transponierte). Die *Transponierte* der Matrix $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{K}^{m,n}$ ist die $n \times m$ -Matrix

$$A^T := [b_{i,j}] \in \mathbb{K}^{n,m}, \quad \text{wobei } b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Bei der Transposition werden also die Zeilen von A zu den Spalten von A^T . (Lies: A^T als „ A transponiert“.)

Beispiel 12.18. 1) Die Transponierte von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3} \quad \text{ist} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}.$$

2) Beim Transponieren werden Zeilenvektoren zu Spaltenvektoren, und Spaltenvektoren zu Zeilenvektoren:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}^T = [2 \quad 3 \quad -1] \quad \text{und} \quad [2 \quad 3 \quad -1]^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Satz 12.19 (Rechenregeln für die Transponierte). Für $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$, $C \in \mathbb{K}^{n,\ell}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

- 1) $(A^T)^T = A$,
- 2) $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- 3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,
- 4) $(AC)^T = C^T A^T$.

Für Matrizen über \mathbb{C} spielt die Kombination von Transponieren und komplexer Konjugation eine wichtige Rolle.

Definition 12.20. Die *Adjungierte* der Matrix $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m,n}$ ist die $n \times m$ -Matrix

$$A^H := [b_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,m}, \quad \text{wobei } b_{i,j} = \overline{a_{j,i}}.$$

(Lies: A^H als „ A hermitesch“ oder „ A adjungiert“.)

Die Adjungierte von A ist also die Transponierte, wo zusätzlich alle Einträge komplex konjugiert werden. Statt A^H wird auch die Bezeichnung A^* verwendet.

Beispiel 12.21. Es ist

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}^H = [1 \quad 1-i], \quad \begin{bmatrix} 1+i & 2 & 2+3i \\ -1 & 0 & -2i \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & 0 \\ 2-3i & 2i \end{bmatrix}.$$

Satz 12.22 (Rechenregeln für die Adjungierte). Für $A, B \in \mathbb{C}^{m,n}$, $C \in \mathbb{C}^{n,\ell}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

- 1) $(A^H)^H = A$,
- 2) $(A+B)^H = A^H + B^H$,
- 3) $(\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$,
- 4) $(AC)^H = C^H A^H$.

Vorlesung 13

Lineare Gleichungssysteme

In dieser Vorlesung lernen wir ein Verfahren, um lineare Gleichungssysteme zu lösen.

13.1 Matrixschreibweise eines linearen Gleichungssystems

Ein *lineares Gleichungssystem* (LGS) mit m Gleichungen in n Unbekannten hat die Form

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Die x_j heißen *Unbekannte* oder *Variablen* und sind gesucht. Die *Koeffizienten* $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ und $b_i \in \mathbb{K}$ sind gegeben. Wir sprechen von einem *reellen LGS*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist (also $a_{i,j}$ und b_i reell sind), und von einem *komplexen LGS*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist. Sind alle $b_i = 0$, so heißt das LGS *homogen*, andernfalls heißt das LGS *inhomogen* (mindestens ein $b_i \neq 0$).

Das lineare Gleichungssystem (13.1) können wir auch schreiben als

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{=b},$$

also als

$$Ax = b.$$

Dabei heißt

- $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ die *Koeffizientenmatrix* des LGS,
- $b \in \mathbb{K}^m$ die *rechte Seite* oder die *Inhomogenität* des LGS.

Eine *Lösung* des linearen Gleichungssystems ist ein Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = b$. Ausgeschrieben erfüllen die Einträge einer Lösung die Gleichungen (13.1). Die Menge aller Lösungen heißt *Lösungsmenge*,

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}.$$

Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar, dann multiplizieren wir das LGS $Ax = b$ mit der Inversen A^{-1} und erhalten

$$x = A^{-1}Ax = A^{-1}b.$$

Die Lösung ist dann eindeutig: $\mathbb{L} = \{A^{-1}b\}$. Im Allgemeinen ist A aber nicht invertierbar, oder wir kennen die Inverse nicht. Dann brauchen wir einen anderen Weg, um das LGS zu lösen. Dazu betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 13.1. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_3 = 4 \end{array}, \quad \text{also} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dieses LGS können wir einfach von „unten nach oben“ lösen: Die letzte Gleichung ist $2x_3 = 4$, woraus wir $x_3 = 2$ erhalten. Setzen wir $x_3 = 2$ in die zweite Gleichung ein, so ist nur noch x_2 unbekannt und wir finden $x_2 = 1$. Mit $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ können wir ganz einfach $x_1 = 3 - 2x_2 + x_3 = 3$ berechnen. Die Rechnung ist einfach, da die Matrix eine Dreiecksform hat und so beim Lösen „von unten nach oben“ immer nur eine Variable auf einmal zu berechnen ist. Dieses Vorgehen nennt man *Rückwärtssubstitution*.

Die Lösung des LGS

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{array}, \quad \text{also} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix},$$

ist hingegen nicht so einfach zu bestimmen, da in jeder Gleichung alle Variablen vorkommen.

Um ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, bringen wir die Matrix auf eine obere Dreiecksform. Dies gelingt mit dem Gauß-Algorithmus.

13.2 Der Gauß-Algorithmus

Im Gauß-Algorithmus sind nur die folgenden *elementaren Zeilenoperationen* erlaubt:

- 1) Vertauschen von zwei Zeilen,
- 2) Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$ (wobei $\lambda \in \mathbb{K}$), und
- 3) Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Der Gauß-Algorithmus Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Dann kann A durch elementare Zeilenoperationen auf *Zeilenstufenform* (ZSF) gebracht werden, d.h. auf die Form

$$C = \left[\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|cc} 0 & c_{1,j_1} & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & c_{2,j_2} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3,j_3} & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & c_{r,j_r} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

wobei $c_{i,j_i} \neq 0$ für $i = 1, \dots, r$ und $*$ für beliebige Einträge steht (null oder ungleich null)¹. Die Einträge c_{i,j_i} bei den „Stufen“ werden auch *Pivotelemente* genannt. Wir können wie folgt vorgehen, um $A \neq 0$ in Zeilenstufenform zu bringen:

- 1) Suche die erste von Null verschiedene Spalte j_1 .
- 2) Suche in dieser Spalte den ersten Eintrag ungleich Null (*Pivotelement*) und tausche ihn ggf. in die erste Zeile. Wir haben nun eine Matrix der Form

$$\begin{bmatrix} 0 & c_{1,j_1} & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \quad \text{mit } c_{1,j_1} \neq 0.$$

- 3) Unter dem Pivotelement c_{1,j_1} werden alle Einträge eliminiert, indem geeignete Vielfache der ersten Zeile von den anderen Zeilen abgezogen werden.
- 4) Rekursion: Ist die Matrix in Zeilenstufenform, so sind wir fertig. Andernfalls haben wir die Form

$$\begin{bmatrix} 0 & c_{1,j_1} & * \\ 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix} \quad \text{mit } c_{1,j_1} \neq 0.$$

Die erste Zeile und die ersten Spalten (bis Spalte j_1) bleiben wie sie sind, und wir wenden das gleiche Verfahren auf die kleinere Matrix A_1 an.

Die Zeilenstufenform der Nullmatrix $A = 0$ ist $C = 0$.

Beispiel 13.2. Wir bringen die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

in Zeilenstufenform. Da $A \neq 0$ suchen wir die erste von Null verschiedene Spalte: $j_1 = 2$. Der erste Eintrag in Spalte 2 ist Null, der erste Eintrag ungleich Null ist in Zeile 2, daher

¹Genauer ist die Matrix $C \in \mathbb{K}^{m,n}$ in Zeilenstufenform, falls gilt:

- 1) Der erste Nichtnulleintrag einer Zeile ist weiter rechts als die ersten Nichtnulleinträge der vorherigen Zeilen.
- 2) Alle Zeilen mit nur Nullen sind unter den Zeilen mit Nichtnulleinträgen.

tauschen wir die erste und zweite Zeile:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{III - 2I} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Im zweiten Schritt haben wir die Einträge unter c_{1,j_1} eliminiert, indem wir zwei mal die erste Zeile von der dritten Zeile abgezogen haben. Die Matrix ist noch nicht in Zeilenstufenform. Die erste Zeile bleibt ab jetzt unverändert und wir fahren mit der Matrix rechts unten fort:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hier müssen wir keine Zeilen tauschen, da gleich der erste Eintrag von Null verschieden ist. Wir eliminieren direkt unter dem Eintrag $(2, j_2) = (2, 3)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{III - II} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Die Matrix ist in Zeilenstufenform, so dass wir fertig sind.

Bemerkung 13.3. 1) Der Gauß-Algorithmus gibt einen Rechenweg an, um A in ZSF zu bringen. Man kann A aber auch auf andere Art A mit elementaren Zeilenoperationen in Zeilenstufenform bringen: *Der Rechenweg ist egal!*

- 2) Die Zeilenstufenform einer Matrix $A \neq 0$ ist nicht eindeutig bestimmt: Ist C eine Zeilenstufenform von A , so können wir eine der von Null verschiedenen Zeilen mit einer Zahl ungleich Null multiplizieren und das Ergebnis ist immer noch eine Zeilenstufenform.

Wir können die Zeilenstufenform eindeutig machen, indem wir verlangen, dass die Pivotelemente $c_{i,j_i} = 1$ sind (dazu teilen wir Zeile i durch c_{i,j_i}), und über diesen Einsen an den „Stufen“ Nullen erzeugen. Das ergibt die sogenannte *normierte Zeilenstufenform* (NZSF):

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Man kann zeigen: Die normierte Zeilenstufenform einer Matrix ist eindeutig.

Beispiel 13.4. Wir berechnen die normierte Zeilenstufenform der Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

in Zeilenstufenform. Dabei arbeiten wir uns „von unten noch oben“ durch:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\frac{1}{3}III} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} II+2III \\ I-III \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{I-II} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}I} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

und diese Matrix ist in normierter Zeilenstufenform.

13.3 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Um das LGS $Ax = b$ zu lösen, wenden wir den Gauß-Algorithmus auf die *erweiterte Koeffizientenmatrix*

$$[A, b] = [A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right]$$

an, bei der b rechts an die Koeffizientenmatrix A angehängt wird. Die elementaren Zeilenoperationen auf der erweiterten Koeffizientenmatrix entsprechen den selben Operationen mit den Gleichungen (Zeilen tauschen entspricht Gleichungen tauschen, Multiplikation einer Zeile mit $\alpha \neq 0$ entspricht der Multiplikation der entsprechenden Gleichung mit $\alpha \neq 0$, Addition eines Vielfachen von Zeile i zu Zeile j entspricht der Addition eines Vielfachen von Gleichung i zu Gleichung j .) Da alle Operationen rückgängig gemacht werden können (also Äquivalenzumformungen sind), *bleibt die Lösungsmenge gleich!*

Ist die Matrix in ZSF oder NZSF, so können wir die Lösung(en) des Gleichungssystems durch Rückwärtssubstitution bestimmen.

Beispiel 13.5. 1) Wir betrachten noch einmal das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8, \quad \text{also} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

aus Beispiel 13.1 und bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{II-I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{III-I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right].$$

Durch Rückwärtssubstitution erhalten wir die (eindeutige) Lösung

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Wir können die erweiterte Koeffizientenmatrix auch auf normierte Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right] &\xrightarrow{\frac{1}{2}III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{smallmatrix} II-2III \\ I+III \end{smallmatrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{I-2II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Wir erhalten die gleiche Lösung wie eben. Wir beobachten: Für die NZSF müssen wir ein paar Zeilenumformungen mehr machen, dafür lässt sich die Lösung des LGS leichter ablesen.

2) Wir betrachten nun das LGS

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix in ZSF:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{II-2I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{array} \right].$$

Die zweite Zeile bedeutet $0x_1 + 0x_2 = -4$, was unmöglich ist. Dieses LGS hat also keine Lösung, d.h. $\mathbb{L} = \emptyset$.

3) Für das LGS

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

erhalten wir die ZSF (und NZSF)

$$[A, b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{II-2I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Die zweite Zeile bedeutet $0x_1 + 0x_2 = 0$, was für alle x_1, x_2 erfüllt ist. Die erste Zeile ergibt $x_1 + x_2 = 2$, oder $x_1 = 2 - x_2$. Die beiden Variablen hängen also voneinander ab. Eine können wir frei wählen, dann ist die andere eindeutig festgelegt. Wählen wir zum Beispiel $x_2 = t \in \mathbb{R}$ (diese Umbenennung dient nur der Verdeutlichung), so ist $x_1 = 2 - t$ festgelegt. Das LGS hat also unendlich viele Lösungen,

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 2-t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4) Wir wollen das LGS

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lösen und bringen dazu die erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} [A \ b] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Nun können wir die Lösung ablesen: Die dritte Gleichung ergibt $x_4 = -1$ und somit haben wir in der zweiten Gleichung $3x_2 + 3x_3 + 1x_4 = 2$. Die Variable x_3 kann frei gewählt werden, zur Verdeutlichung schreiben wir $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir $x_2 = 1 - t$. Verwenden wir dies in der ersten Zeile, so ergibt sich $x_1 = 1 - 2t$, also

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ 1 - t \\ t \\ -1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

In diesem Gleichungssystem sind die Variablen x_1, x_2, x_3 „gekoppelt“, und wir können eine der drei frei wählen, dann sind die anderen beiden eindeutig festgelegt. Welche man wählt ist im Endeffekt gleich. Es ist aber durchaus sinnvoll, die nicht zu Pivotelementen (Stufen) gehörenden Variablen als Parameter (= frei) zu wählen (im Beispiel x_3), dann sind die zu Stufen gehörenden Variablen eindeutig bestimmt (im Beispiel x_1, x_2, x_4). Sie können von den frei gewählten Variablen abhängen (wie x_1, x_2) oder auch nicht (wie x_4).

Auch hier können wir die erweiterte Koeffizientenmatrix auf normierte Zeilenstufenform bringen und dann die Lösung ablesen. Wir finden

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] &\xrightarrow{II-III} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}II} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{I+II} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}I} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

An der normierten Zeilenstufenform können wir wieder sehr gut die Pivotvariablen x_1, x_2, x_4 (gehören zu einer Spalte mit einer „Stufe“) und die frei wählbare Variable x_3 erkennen und sehr einfach die Lösung ablesen: $x_4 = -1$, dann $x_2 + x_3 = 1$, also $x_2 = 1 - x_3$, und $x_1 + 2x_3 = 1$, also $x_1 = 1 - 2x_3$. Schreiben wir wieder $x_3 = t \in \mathbb{R}$, so erhalten wir die selbe Lösungsmenge wie eben.

Warnung vor dem folgenden „Trick“: Wir lösen das LGS

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und bringen dazu die erweiterte Koeffizientenmatrix auf ZSF. Rechnen wir in einem Schritt simultan 1. Zeile - 2. Zeile und 2. Zeile - 1. Zeile, so ist

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{I-II, II-I} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Das zweite LGS wird von jedem $x \in \mathbb{K}^2$ gelöst, das erste LGS hingegen nur von Vektoren der Form $x = \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}$ mit $a \in \mathbb{K}$. Was ist passiert? *Beim simultan nach oben und unten Eliminieren ist Information vernichtet worden!* Das sollte man vermeiden.

Wie viele Lösungen hat ein LGS? In den Beispielen haben wir gesehen, dass es keine Lösungen des LGS $Ax = b$ geben kann, oder genau eine Lösung, oder unendlich viele Lösungen. Welcher Fall eintritt hängt von der Zeilenstufenform von A und $[A, b]$ ab. Näheres diskutieren wir in Vorlesung 14, in der wir auch sehen werden, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt.

13.4 Struktur der Lösungsmenge

Wir untersuchen nun die Struktur der Lösungsmenge des LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$.

1) homogenes LGS, d.h. $b = 0$. Dann ist $\mathbb{L}(A, 0)$ ein Teilraum von \mathbb{K}^n :

- (a) $A0 = 0$, d.h. $0 \in \mathbb{L}(A, 0)$,
- (b) $x, y \in \mathbb{L}(A, 0)$, d.h. $Ax = 0$ und $Ay = 0$, dann ist $A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$, also $x + y \in \mathbb{L}(A, 0)$
- (c) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in \mathbb{L}(A, 0)$, d.h. $Ax = 0$, dann ist $A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda 0 = 0$, also $\lambda x \in \mathbb{L}(A, 0)$.

Daher ist $\mathbb{L}(A, 0)$ ein Teilraum von \mathbb{K}^n nach dem Teilraumkriterium (Satz 10.4).

2) inhomogenes LGS, d.h. $b \neq 0$. Dann ist $\mathbb{L}(A, b)$ kein Teilraum, da $0 \notin \mathbb{L}(A, 0)$ ist: $A0 = 0 \neq b$.

Ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b \neq 0$ lösbar, so hat die Lösungsmenge folgende spezielle Struktur.

Satz 13.6 (Struktur der Lösungsmenge). *Das LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ habe eine Lösung $x_P \in \mathbb{K}^n$. Diese spezielle Lösung wird auch partikuläre Lösung genannt. Dann gilt*

$$\mathbb{L}(A, b) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\} = \{x_P + x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} =: x_P + \mathbb{L}(A, 0).$$

Beweis. Um zu zeigen, dass die beiden Mengen gleich sind, zeigen wir, dass sie gegenseitig Teilmengen sind.

„ \subseteq “ Sei $x \in \mathbb{L}(A, b)$, also $Ax = b$. Dann können wir schreiben $x = x_P + x - x_P$, und es gilt $A(x - x_P) = Ax - Ax_P = b - b = 0$, d.h. $x - x_P \in \mathbb{L}(A, 0)$.

„ \supseteq “ Sei $x_P + x \in \mathbb{L}(A, b)$ mit $Ax = 0$. Dann gilt $A(x_P + x) = Ax_P + Ax = b + 0 = b$, d.h. $x_P + x \in \mathbb{L}(A, b)$.

□

Beispiel 13.7. Sei $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Die Matrix A ist bereits in normierter Zeilenstufenform. Die Variablen x_2, x_4 sind frei wählbar, wir schreiben $x_4 = t \in \mathbb{R}$ und $x_2 = s \in \mathbb{R}$. Dann sind $x_3 + 4x_4 = 3$, also $x_3 = 3 - 4t$, und $x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 1$, also $x_1 = 1 - 2s - 3t$. Daher ist

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(A, b) &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 - 2s - 3t \\ s \\ 3 - 4t \\ t \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=x_P} + \underbrace{\left\{ s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}}_{=\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{L}(A, 0)} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=x_P} + \mathbb{L}(A, 0) \end{aligned}$$

Eine partikuläre Lösung erhalten wir, indem wir spezielle Werte für s und t wählen. Am Einfachsten ist es mit $s = t = 0$, wie in der Rechnung eben.

Vorlesung 14

Weitere Anwendungen des Gauß-Algorithmus

In dieser Vorlesung lernen wir weitere Anwendungen des Gauß-Algorithmus kennen.

14.1 Der Rang einer Matrix

In Vorlesung 13 haben wir gesehen, wie wir die Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mithilfe des Gauß-Algorithmus berechnen können. In Beispiel 13.5 gab es drei Möglichkeiten:

- 1) das LGS hat keine Lösungen,
- 2) das LGS hat genau eine Lösung,
- 3) das LGS hat unendlich viele Lösungen.

Das liegt an der Zeilenstufenform von A und $[A \ b]$. Der entscheidende Begriff dabei ist der Rang der Matrix.

Definition 14.1 (Rang). Der Rang von $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ ist die Anzahl der Zeilen ungleich Null in einer Zeilenstufenform von A und wird mit $\text{Rang}(A)$ bezeichnet.

Wie groß kann der Rang von $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ sein? Es ist sicher $\text{Rang}(A) \geq 0$ und $\text{Rang}(A) = 0$ nur wenn $A = 0$ die Nullmatrix ist. Da A und damit die ZSF von A nur m Zeilen hat, ist immer $\text{Rang}(A) \leq m$. Außerdem ist $\text{Rang}(A) \leq n$, denn es kann höchstens so viele Stufen wie Spalten geben.

14.2 Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten das LGS

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Wir können das Gleichungssystem lösen, indem wir die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A \ b]$ in ZSF bringen und dann die Gleichungen durch Rückwärtssubstitution lösen. Wir betrachten dieses Lösungsverfahren jetzt genauer.

Wir betrachten die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A \ b]$ und bringen den vorderen Teil (dort wo zu Beginn A steht) in ZSF C indem wir elementare Zeilenoperationen verwenden. Diese wenden wir auch in der letzten Spalte (dort wo b steht) an. Das gibt eine Matrix der Form

$$[C \ d] = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|cc|c} 0 & c_{1,j_1} & * & * & * & * & * & * & * & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & c_{2,j_2} & * & * & * & * & * & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3,j_3} & * & * & * & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{r,j_r} & d_r \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_m \end{array} \right]$$

mit den Pivotelementen $c_{1,j_1}, c_{2,j_2}, \dots, c_{r,j_r} \neq 0$. Es sind

$$\begin{aligned} \text{Rang}(A) &= r = \text{Rang}(C) \\ \text{Rang}([A \ b]) &= \text{Rang}([C \ d]) \geq r = \text{Rang}(A). \end{aligned}$$

Nun gibt es folgende zwei Fälle:

- Fall 1: Mindestens eins der d_{r+1}, \dots, d_m ist von Null verschieden. Das ist genau dann der Fall wenn $\text{Rang}([A \ b]) = r + 1 > \text{Rang}(A)$ ist. In diesem Fall ist die entsprechende Gleichung

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = d_j \neq 0,$$

was unmöglich ist. In diesem Fall hat das LGS also keine Lösung.

- Fall 2: Alle $d_{r+1} = \dots = d_m = 0$ sind Null, dann ist $[C \ d]$ die ZSF von $[A \ b]$ und daher $\text{Rang}([A \ b]) = r = \text{Rang}(A)$. In diesem Fall hat das LGS Lösungen.

Für $i = 1, \dots, r$ sind die $c_{i,j_i} \neq 0$, also lassen sich die zugehörigen Variablen x_{j_i} eindeutig bestimmen (wir lösen die i -te Gleichung nach x_{j_i} auf), das sind $r = \text{Rang}(A)$ viele, während die anderen $n - r = n - \text{Rang}(A)$ Variablen frei gewählt werden können.

Beispiel 14.2. Betrachte das LGS mit

$$[C \ d] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Hier ist $c_{1,1} \neq 0$ (also $j_1 = 1$). Die erste Zeile bedeutet $2x_1 + 3x_2 = 2$ und wir können x_1 eindeutig bestimmen: $x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2$. Die Variable x_2 kann hingegen frei gewählt werden.

Ist dann $\text{Rang}([A \ b]) = \text{Rang}(A) = n$, so können alle n Variablen eindeutig bestimmt werden, und das LGS hat eine eindeutige Lösung.

Ist hingegen $\text{Rang}([A \ b]) = \text{Rang}(A) < n$, so können $n - \text{Rang}(A) \geq 1$ viele Variablen frei gewählt werden, und das LGS hat unendlich viele Lösungen.

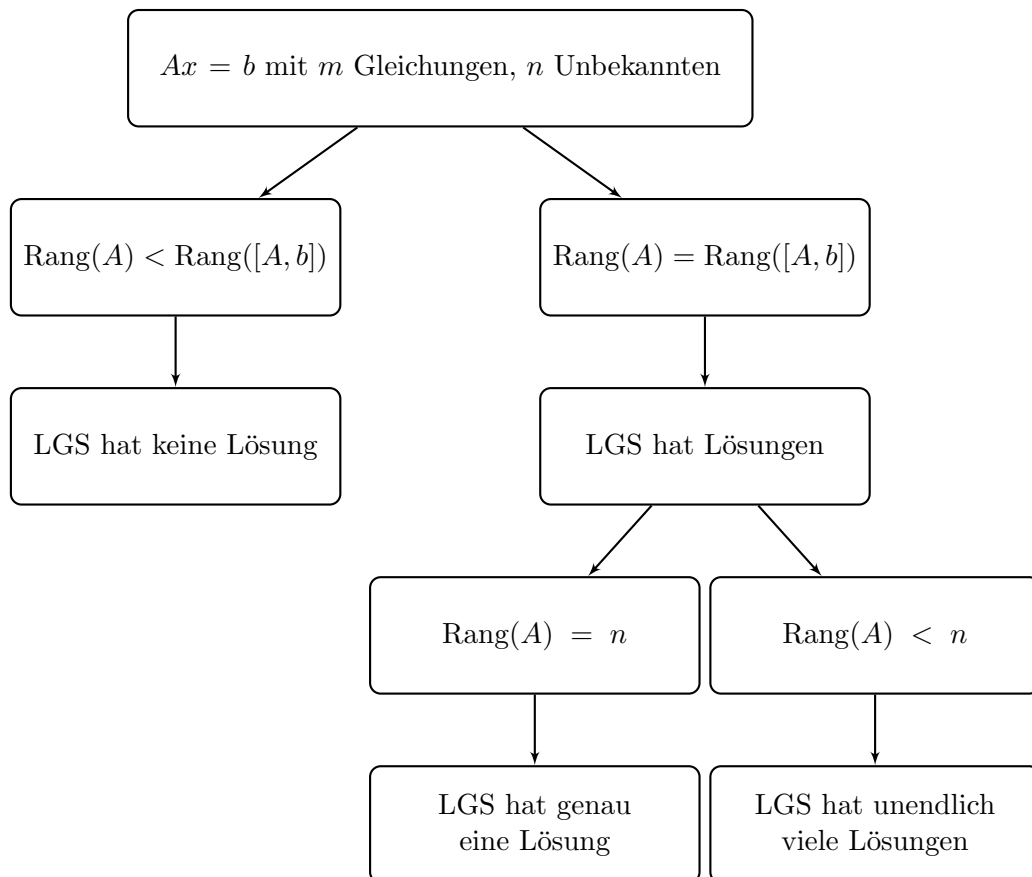
Das halten wir als Satz fest.

Satz 14.3 (Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme). *Seien $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Das LGS $Ax = b$ hat*

- 1) *keine Lösung, genau dann wenn $\text{Rang}([A \ b]) > \text{Rang}(A)$ ist,*
- 2) *genau eine Lösung, genau dann wenn $\text{Rang}([A \ b]) = \text{Rang}(A) = n$,*
- 3) *unendlich viele Lösungen, genau dann wenn $\text{Rang}([A \ b]) = \text{Rang}(A) < n$.*

Der Rang von A und $[A, b]$ gibt also Auskunft über die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Im Falle von unendlich vielen Lösungen gibt der Rang zudem an, wie viele Variablen frei gewählt werden können (nämlich $n - \text{Rang}(A)$ viele).

Schema zum Lösbarkeitskriterium für LGS (Satz 14.3):



14.3 Invertierbarkeit von Matrizen

In Definition 12.13 haben wir gesehen, dass $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar ist, falls es eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt mit $A^{-1}A = I_n$ und $AA^{-1} = I_n$, wobei eine der beiden Gleichungen bereits genügt.

Wie überprüft man, ob A invertierbar ist, und wie findet man die Inverse? Diese Frage können wir ebenfalls mit dem Gauß-Algorithmus beantworten. Wir möchten also die Inverse finden, wenn sie existiert, und schreiben dazu $X = A^{-1}$ (gesucht). Dann soll gelten

$$AX = I_n.$$

Betrachten wir nun die Spalten von X und I_n , also

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad I_n = \begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix},$$

so gilt

$$AX = A \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 & \dots & Ax_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix},$$

und ein Vergleich der Spalten ergibt

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \dots, \quad Ax_n = e_n.$$

Das sind n lineare Gleichungssysteme um die Spalten von $X = A^{-1}$ zu bestimmen. Da wir immer die gleiche Koeffizientenmatrix A haben, können wir die Gleichungssysteme gleichzeitig lösen, indem wir alle rechte Seiten an die Koeffizientenmatrix anhängen:

$$\begin{bmatrix} A & e_1 & \dots & e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & I_n \end{bmatrix}.$$

Nun bringen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix mit elementaren Zeilenoperationen in NZSF. Das ergibt eine Matrix $\begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}$ mit C in normierter Zeilenstufenform. Nun wissen wir: Wenn A invertierbar ist, dann ist die Inverse eindeutig bestimmt, also müssen die linearen Gleichungssysteme eindeutig lösbar sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\text{Rang}(\begin{bmatrix} A & e_j \end{bmatrix}) = \text{Rang}(A) = n$ ist. Daraus sehen wir:

- 1) Ist $\text{Rang}(A) < n$ (d.h. $C \in \mathbb{K}^{n,n}$ hat eine oder mehrere Nullzeilen), so ist A nicht invertierbar. Wir können dann unsere Suche nach einer Inversen einstellen.
- 2) Ist hingegen $\text{Rang}(A) = n$, so ist $C = I_n$. Dann gilt aber $D = I_n X = X = A^{-1}$, d.h. A ist invertierbar und wir haben die Inverse bestimmt.

Wir haben jetzt mehrere Dinge gelernt.

Satz 14.4. Für $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gilt: A ist invertierbar genau dann, wenn $\text{Rang}(A) = n$.

Damit können wir entscheiden, ob eine Matrix invertierbar ist, indem wir eine ZSF oder die NZSF von A berechnen. Wollen wir auch die Inverse berechnen, dann gehen wir wie folgt vor.

Berechnung der Inversen Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ (quadratisch), so gehen wir wie folgt vor um A^{-1} zu berechnen (falls A invertierbar ist).

- 1) Bringe $[A \ I_n]$ mit elementaren Zeilenoperationen in NZSF $[C \ D]$.
- 2) Wenn $\text{Rang}(A) \neq n$ ist, ist A nicht invertierbar und wir können aufhören.
- 3) Wenn $\text{Rang}(A) = n$ ist, so ist $C = I_n$ und $A^{-1} = D$.

Beispiel 14.5. Wir prüfen, ob die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

invertierbar ist und berechnen ggf. die Inverse. Daher bringen wir die Matrix $[A \ I_2]$ auf NZSF:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right].$$

Da $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nicht die Einheitsmatrix ist, ist A nicht invertierbar. Das hatten wir bereits in Beispiel 12.16 durch ausprobieren herausgefunden.

Beispiel 14.6. Wir überprüfen, ob die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$$

invertierbar ist und berechnen ggf. die Inverse. Daher bringen wir die Matrix $[A \ I_3]$ auf NZSF:

$$\begin{aligned} [A \ I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right], \end{aligned}$$

woraus wir bereits $\text{Rang}(A) = 3$ ablesen, und somit dass A invertierbar ist. Wir formen weiter auf NZSF um:

$$[A \ I_3] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Daher ist

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zur Probe können wir $A^{-1}A$ oder AA^{-1} berechnen: kommt nicht die Einheitsmatrix heraus, so haben wir uns verrechnet.

Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar mit der Inversen A^{-1} , so ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar mit

$$x = A^{-1}b,$$

vergleiche den Beginn von Vorlesung 13. Das heißt: Wir können das LGS ganz einfach mit der Inversen lösen, wenn wir diese kennen. Sind wir nur an der Lösung von $Ax = b$ interessiert, ist es aber einfacher das LGS direkt zu lösen.

14.4 Unterschiede zwischen Matrizen und Zahlen

In den Vorlesungen 12, 13 und 14 haben wir Matrizen und die Lösung linearer Gleichungssysteme studiert. Wir sammeln noch ein paar Eigenschaften von Matrizen, die anders als bei reellen oder komplexen Zahlen sind.

- 1) Im Allgemeinen gilt $AB \neq BA$, selbst wenn beide Produkte definiert sind.
- 2) Aus $A \neq 0$ folgt nicht, dass A invertierbar ist. Auch dann nicht, wenn A quadratisch ist.

Beispiel: Es ist $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$, aber nicht invertierbar (denn $\text{Rang}(A) = 1 < 2$).

- 3) Aus $AB = 0$ folgt im Allgemeinen nicht dass $A = 0$ oder $B = 0$ sein müssen.

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sind beide ungleich Null, aber $AB = 0$.

- 4) Ist $AB = 0$ und A invertierbar, so folgt $B = A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0$.
Ist $AB = 0$ und B invertierbar, so folgt genauso, dass $A = 0$.

Vorlesung 15

Lineare Abbildungen

Wir lernen lineare Abbildungen und ihre Eigenschaften kennen.

15.1 Definition und erste Eigenschaften

Definition 15.1 (Lineare Abbildung). Seien V, W zwei \mathbb{K} -Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt *linear*, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

- 1) $f(v + w) = f(v) + f(w)$,
- 2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W wird mit $L(V, W)$ oder $\text{Hom}(V, W)$ bezeichnet.

Lineare Abbildungen erhalten die Struktur eines Vektorraums (Plus und Mal). Eine andere Bezeichnung für eine lineare Abbildung ist *Homomorphismus*.

Beispiel 15.2. 1) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$, ist die Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden in der Ebene. Diese ist linear, denn für alle $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(v + w) &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 + y_2 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = f(v) + f(w) \\ f(\lambda v) &= f\left(\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda x_2 \\ \lambda x_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \lambda f(v). \end{aligned}$$

2) Die Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^{2,2}$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{bmatrix}$, ist linear, denn: Für alle $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ und $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(v + w) &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \\ x_1 + y_1 & x_3 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_3 \end{bmatrix} = f(v) + f(w), \\ f(\lambda v) &= f\left(\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 \\ \lambda x_1 & \lambda x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{bmatrix} = \lambda f(v). \end{aligned}$$

3) Ist V ein Vektorraum, so ist die Identität $\text{id}_V : V \rightarrow V$ auf V (vgl. Beispiel 5.2) linear, denn $\text{id}_V(v + w) = v + w = \text{id}_V(v) + \text{id}_V(w)$ und $\text{id}_V(\lambda v) = \lambda v = \lambda \text{id}_V(v)$.

- 4) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax$, ist linear, aber die Abbildung mit $f(x) = 2x+1$ ist nicht linear. (Warum nicht?) Insbesondere sind Linearfaktoren von Polynomen $(z - z_0)$ trotz ihres Namens nur für $z_0 = 0$ eine lineare Abbildung.
- 5) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, ist nicht linear, denn $f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2$ (außer im Fall das $x = 0$ oder $y = 0$.)

Im Laufe dieser Vorlesung werden wir noch viele weitere lineare Abbildungen kennen lernen.

Beispiel 15.3. Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Dann ist $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, x \mapsto Ax$, linear, denn nach den Rechenregeln für Matrizen gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$f(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda f(x).$$

Beispiel 15.3 zeigt, dass wir jede Matrix als lineare Abbildung ansehen können. Insbesondere gilt alles, was wir für lineare Abbildungen lernen, auch für Matrizen. In \mathbb{K}^n hat jede lineare Abbildung diese Gestalt.

Satz 15.4. Ist $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ linear, dann gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Dabei enthält $A = [a_1, \dots, a_n]$ die Bilder der Vektoren $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, d.h. $a_1 = f(e_1), \dots, a_n = f(e_n)$.

Beweis. Es sind $f(e_1), \dots, f(e_n)$ Spaltenvektoren aus \mathbb{K}^m , d.h. A ist eine $m \times n$ -Matrix. Mit dieser ist

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j a_j = Ax \quad \text{für alle } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

□

In Vorlesung 16 werden wir sehen, dass sich jede lineare Abbildung durch eine Matrix darstellen lässt, falls V und W beide endlichdimensional sind.

Versehen wir die Menge der linearen Abbildungen von V nach W mit der punktweisen Addition und Multiplikation, so wird $L(V, W)$ selbst auch wieder zu einem Vektorraum. Das ist analog zum Vektorraum $\mathbb{K}^{m,n}$ der $m \times n$ -Matrizen.

Satz 15.5. Seien V, W zwei \mathbb{K} -Vektorräume. Für $f, g \in L(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ definieren wir

$$\begin{aligned} f + g : V &\rightarrow W, & v &\mapsto (f + g)(v) := f(v) + g(v), \\ \lambda f : V &\rightarrow W, & v &\mapsto (\lambda f)(v) := \lambda f(v). \end{aligned}$$

Dann sind $f + g$ und λf wieder linear und $L(V, W)$ ist selbst wieder ein \mathbb{K} -Vektorraum. Ist $V = W$, so enthält $L(V, V)$ insbesondere die Identität id_V .

Beweis. Wir rechnen nur nach, dass $f + g$ linear ist. Für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}(f + g)(v + w) &= f(v + w) + g(v + w) = f(v) + f(w) + g(v) + g(w) \\ &= f(v) + g(v) + f(w) + g(w) = (f + g)(v) + (f + g)(w), \\ (f + g)(\lambda v) &= f(\lambda v) + g(\lambda v) = \lambda f(v) + \lambda g(v) = \lambda(f(v) + g(v)) = \lambda(f + g)(v).\end{aligned}$$

Wo wurde die Definition von $+$ verwendet, und wo die Linearität von f und g ? Rechnen Sie zur Übung nach, dass auch λf wieder linear ist.

Die Null in $L(V, W)$ ist die Nullabbildung, die jeden Vektor aus V auf $0 \in W$ abbildet. Für $f \in L(V, W)$ ist $-f$ durch $(-f)(v) = -f(v)$ gegeben. Alle anderen Rechenregeln lassen sich leicht nachrechnen, wir verzichten hier darauf. \square

Wir sammeln einige Eigenschaften von linearen Abbildungen. Linearität bleibt bei Komposition (Abschnitt 5.2) und beim Umkehren der Funktion (Abschnitt 5.3) erhalten.

Satz 15.6. Seien V, W, X \mathbb{K} -Vektorräume.

- 1) Ist $f : V \rightarrow W$ linear, so gilt $f(0) = 0$.
- 2) Sind $f : V \rightarrow W$ und $g : W \rightarrow X$ linear, so ist auch die Komposition $g \circ f : V \rightarrow X$ linear.
- 3) Ist $f : V \rightarrow W$ linear und bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \rightarrow V$ linear.

Bei linearen Abbildungen wird die Umkehrabbildung öfter auch die *Inverse* genannt (wie bei quadratischen Matrizen). Bijektive lineare Abbildungen heißen *Isomorphismus*.

Beweis. 1) Es ist $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. Addieren wir nun $-f(0)$ erhalten wir $0 = f(0)$, wie behauptet. Alternativ ist $f(0_V) = f(0_{\mathbb{K}} \cdot 0_V) = 0_{\mathbb{K}} \cdot f(0_V) = 0_W$.

2) Für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}(g \circ f)(v + w) &= g(f(v + w)) = g(f(v) + f(w)) = g(f(v)) + g(f(w)) \\ &= (g \circ f)(v) + (g \circ f)(w), \\ (g \circ f)(\lambda v) &= g(f(\lambda v)) = g(\lambda f(v)) = \lambda g(f(v)).\end{aligned}$$

- 3) Da f bijektiv ist, existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \rightarrow V$, und wir brauchen nur nachzurechnen, dass f^{-1} linear ist. Seien $v, w \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Da f^{-1} die Umkehrabbildung zu f ist, gilt $f(f^{-1}(v)) = v$ und $f(f^{-1}(w)) = w$ (siehe Definition 5.9). Dann ist

$$v + w = f(f^{-1}(v)) + f(f^{-1}(w)) = f(f^{-1}(v) + f^{-1}(w)),$$

also $f^{-1}(v + w) = f^{-1}(v) + f^{-1}(w)$ nach Anwenden von f^{-1} . Genauso rechnet man

$$f^{-1}(\lambda v) = f^{-1}(\lambda f(f^{-1}(v))) = f^{-1}(f(\lambda f^{-1}(v))) = \lambda f^{-1}(v).$$

Daher ist f^{-1} linear. \square

Ist $V = W$ und $f : V \rightarrow V$, so kann $f \circ f$ gebildet werden, was wieder eine lineare Abbildung ist. Für $f \circ f$ schreiben wir dann f^2 , und definieren ganz allgemein

$$f^n := \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ Mal}}, \quad n \geq 1.$$

Für $n = 0$ setzen wir $f^0 := \text{id}_V$. Ist f invertierbar, so definieren wir

$$f^{-n} := (f^{-1})^n = \underbrace{f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{n \text{ Mal}}.$$

Beachten Sie: $f^2(v) = f(f(v)) \neq (f(v))^2$. Der letzte Ausdruck ist im Allgemeinen nicht einmal definiert.

Schließlich sammeln wir Rechenregeln für lineare Abbildungen. Diese sind genauso wie die Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation (Satz 12.12), wobei die Komposition der Matrizenmultiplikation entspricht.

Satz 15.7. *Für lineare Abbildungen f, g, h und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt (falls die Verknüpfungen definiert sind)*

- 1) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$,
- 2) $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$,
- 3) $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$,
- 4) $\alpha(f \circ g) = (\alpha f) \circ g = f \circ (\alpha g)$,
- 5) $\text{id} \circ f = f = f \circ \text{id}$.

15.2 Kern und Bild

Der Kern und das Bild sind wichtige Kenngrößen von linearen Abbildungen. Mit diesen lässt sich zum Beispiel einfach charakterisieren, ob eine lineare Abbildung injektiv oder surjektiv ist. Das Bild kennen wir schon (Vorlesung 5), wir erinnern dennoch daran.

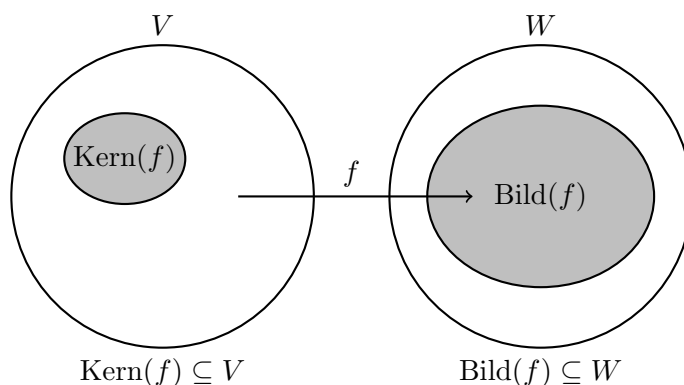
Definition 15.8 (Kern und Bild). Sei $f : V \rightarrow W$ linear.

- 1) Der *Kern* von f ist das Urbild von 0:

$$\text{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

- 2) Das *Bild* von f ist die Menge

$$\text{Bild}(f) = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}.$$



Satz 15.9. Sei $f : V \rightarrow W$ linear.

- 1) $\text{Kern}(f)$ ist ein Teilraum von V .
- 2) $\text{Bild}(f)$ ist ein Teilraum von W .

Beweis. Wir rechnen nur nach, dass $\text{Kern}(f)$ ein Teilraum von V ist. Zunächst ist $f(0) = 0$, da f linear ist, also $0 \in \text{Kern}(f)$. Sind $v, w \in \text{Kern}(f)$, so folgt $f(v + w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0$, also ist $v + w \in \text{Kern}(f)$. Sind $v \in \text{Kern}(f)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so ist $f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \cdot 0 = 0$, also $\lambda v \in \text{Kern}(f)$. Mit dem Teilraumkriterium (Satz 10.4) ist $\text{Kern}(f)$ ein Teilraum von V . \square

Wir werden insbesondere an der Dimension von Kern und Bild interessiert sein. Für Matrizen lassen sich diese leicht mit dem Gaußalgorithmus berechnen.

Basis des Kerns. Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Dann ist $\text{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} = \mathbb{L}(A, 0)$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = 0.$$

Dieses lösen wir mit dem Gaußalgorithmus und bringen A in (normierte) Zeilenstufenform. Gilt $\text{Rang}(A) = r$, so gibt es $n - r$ frei wählbare Variablen. Eine Basis des Kerns erhalten wir, indem wir jeweils eine der frei wählbaren Variablen $= 1$ und die anderen $= 0$ setzen: Die Lösung von $Ax = 0$ mit erster frei wählbarer Variablen $= 1$ und den anderen $= 0$ gibt den ersten Basisvektor von $\text{Kern}(A)$. Die Lösung mit zweiter frei wählbarer Variablen $= 1$ und den anderen $= 0$ gibt den zweiten Basisvektor von $\text{Kern}(A)$, usw. Das ergibt eine Basis von $\text{Kern}(A)$ mit $n - r$ Basisvektoren. Insbesondere ist

$$\dim(\text{Kern}(A)) = n - r = n - \text{Rang}(A).$$

Basis des Bildes. Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Wir bezeichnen die Spalten von A mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$, d.h. es ist $A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$. Für $x \in \mathbb{K}^n$ ist

$$Ax = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = \sum_{j=1}^n x_j a_j,$$

also die Linearkombination von den Spalten von A mit den Koeffizienten x_1, \dots, x_n . Daher ist

$$\text{Bild}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Die Spalten von A bilden also ein Erzeugendensystem von $\text{Bild}(A)$. Welche Spalten bilden dann eine Basis? Die Idee ist: Spalten von A sind linear unabhängig genau dann, wenn die entsprechenden Spalten in der Zeilenstufenform linear unabhängig sind. Daher kann man die r Spalten von A , die zu den Stufenpositionen in der ZSF gehören, als Basis von $\text{Bild}(A)$ wählen. Insbesondere ist

$$\dim(\text{Bild}(A)) = \text{Rang}(A).$$

Beispiel 15.10. Wir berechnen eine Basis von $\text{Kern}(A)$ und $\text{Bild}(A)$ für $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$. Dazu bringen wir A in normierte Zeilenstufenform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Da $\text{Rang}(A) = 2$ sind $\dim(\text{Bild}(A)) = 2$ und $\dim(\text{Kern}(A)) = 1$. Die erste und zweite Spalte gehören zu den Pivotpositionen in der ZSF, also ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von $\text{Bild}(A)$. Um eine Basis von $\text{Kern}(A)$ zu bestimmen setzen wir $x_3 = 1$, und berechnen $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$. Daher ist $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von $\text{Kern}(A)$.

15.3 Dimensionsformel und Konsequenzen

Für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ erhalten wir

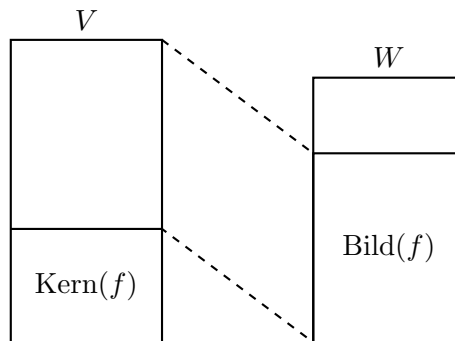
$$\dim(\text{Kern}(A)) + \dim(\text{Bild}(A)) = n - \text{Rang}(A) + \text{Rang}(A) = n = \dim(\mathbb{K}^n).$$

Das ist die *Dimensionsformel* für Matrizen, die einen Zusammenhang zwischen der Dimension des Kerns und der Dimension des Bildes herstellt. Für lineare Abbildungen gilt das entsprechend.

Satz 15.11 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen). *Sei $f : V \rightarrow W$ linear und V endlichdimensional. Dann gilt*

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)).$$

Die folgende Skizze veranschaulicht die Dimensionsformel: V ist aufgeteilt in den Kern von f (diese Vektoren werden auf $0 \in W$ abgebildet), und den Rest, der auf $\text{Bild}(f)$ abgebildet wird.



Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen erhalten wir die folgende Charakterisierung, wann lineare Abbildungen injektiv oder surjektiv sind.

Satz 15.12. *Sei $f : V \rightarrow W$ linear. Dann gilt:*

- 1) f ist injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\text{Kern}(f)) = 0$.

2) f ist surjektiv $\Leftrightarrow \text{Bild}(f) = W \Leftrightarrow \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(W)$.

Dabei gilt die letzte Äquivalenz nur falls $\dim(W) < \infty$.

3) Wenn $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, so gilt: f ist bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist injektiv $\Leftrightarrow f$ ist surjektiv.

Beweis. 1) „ \Rightarrow “ Sei f injektiv. Da f linear ist, gilt $f(0) = 0$, also $\{0\} \subseteq \text{Kern}(f)$. Ist dann $v \in \text{Kern}(f)$, so gilt $f(v) = 0 = f(0)$. Da f injektiv ist, folgt $v = 0$, also $\text{Kern}(f) \subseteq \{0\}$. Zusammen ist $\text{Kern}(f) = \{0\}$ und dann $\dim(\text{Kern}(f)) = 0$.

„ \Leftarrow “ Sei $\dim(\text{Kern}(f)) = 0$, dann ist $\text{Kern}(f) = \{0\}$. Wir zeigen, dass f injektiv ist. Sind $v, w \in V$ mit $f(v) = f(w)$, so folgt $0 = f(v) - f(w) = f(v - w)$, also $v - w \in \text{Kern}(f) = \{0\}$, also $v - w = 0$ und dann $v = w$. Also ist f injektiv.

2) Die erste Äquivalenz ist die Definition von surjektiv. Wenn $\text{Bild}(f) = W$ ist, dann haben beide Räume die gleiche Dimension. Sei andersherum $\dim(\text{Bild}(f)) = \dim(W)$. Da $\text{Bild}(f) \subseteq W$ beide Räume die gleiche Dimension haben, so sind sie gleich.

3) Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\stackrel{1)}{\Leftrightarrow} \dim(\text{Kern}(f)) = 0 \stackrel{\text{Dimensionsformel}}{\Leftrightarrow} \dim(V) = \dim(\text{Bild}(f)) \\ &\stackrel{2)}{\Leftrightarrow} f \text{ surjektiv.} \end{aligned}$$

Ist nun f bijektiv, so ist f injektiv und surjektiv (per Definition). Ist andersherum f injektiv oder surjektiv, so ist f injektiv *und* surjektiv, wie wir eben gezeigt haben, und dann bijektiv. \square

Vorlesung 16

Koordinaten und Matrixdarstellung

Ziel dieser Vorlesung ist es, Vektoren und lineare Abbildungen durch Spaltenvektoren und Matrizen darzustellen, da man mit Matrizen sehr gut rechnen kann. Dies wird zum Beispiel in der „Numerik II für Ingenieurwissenschaften“ bei der numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen verwendet.

16.1 Koordinaten

In Vorlesung 11 haben wir bereits gesehen, wie einem Vektor sein Koordinatenvektor zugeordnet werden kann. Ist V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$, so lässt sich jeder Vektor $v \in V$ als eindeutige Linearkombination der Basisvektoren schreiben:

$$v = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n.$$

Dann ist der Koordinatenvektor von $v \in V$ bzgl. der Basis \mathcal{B} der Spaltenvektor

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Der Übergang von v zum Koordinatenvektor $\vec{v}_{\mathcal{B}}$ ist besonders wichtig und hat einen eigenen Namen.

Definition 16.1 (Koordinatenabbildung). Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$. Die *Koordinatenabbildung* von V bzgl. \mathcal{B} ist die Abbildung

$$K_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad v = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \mapsto \vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Beispiel 16.2. Sei $V = \mathbb{C}[z]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$ mit der Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\} = \{1, z, z^2\}$. Für $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \in V$ ist $p(z) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2$, d.h. der Koordinatenvektor von p bzgl. \mathcal{B} ist

$$K_{\mathcal{B}}(p) = \vec{p}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Daher ist die Koordinatenabbildung

$$K_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{C}^3, \quad K_{\mathcal{B}}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

Satz 16.3. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$. Die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$ ist linear und bijektiv, also ein Isomorphismus. Die Inverse ist

$$K_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^n \rightarrow V, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \mapsto v = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n.$$

Beweis. Wir rechnen die Linearität nach: Für $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \in V$ und $w = \sum_{j=1}^n \mu_j b_j \in V$ ist $v + w = \sum_{j=1}^n (\lambda_j + \mu_j) b_j$, also

$$K_{\mathcal{B}}(v + w) = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n + \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = K_{\mathcal{B}}(v) + K_{\mathcal{B}}(w).$$

Weiter ist für $\lambda \in \mathbb{K}$ auch $\lambda v = \sum_{j=1}^n (\lambda \lambda_j) b_j$, also

$$K_{\mathcal{B}}(\lambda v) = \begin{bmatrix} \lambda \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda K_{\mathcal{B}}(v).$$

Daher ist $K_{\mathcal{B}}$ linear. Mit der angegebenen Form von $K_{\mathcal{B}}^{-1}$ rechnet man direkt nach, dass $K_{\mathcal{B}}^{-1}(K_{\mathcal{B}}(v)) = v$ für alle $v \in V$ und $K_{\mathcal{B}}(K_{\mathcal{B}}^{-1}(\vec{x})) = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$. Daher ist $K_{\mathcal{B}}$ bijektiv mit Inversen $K_{\mathcal{B}}^{-1}$. \square

16.2 Matrixdarstellung

Unser nächstes Ziel ist es, eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ durch eine Matrix darzustellen. Seien dazu

- 1) V endlichdimensional mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$,
- 2) W endlichdimensional mit Basis $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$,
- 3) $f : V \rightarrow W$ linear.

Für $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n \in V$ gilt, da f linear ist,

$$f(v) = f(\lambda_1 b_1) + f(\lambda_2 b_2) + \dots + f(\lambda_n b_n) = \lambda_1 f(b_1) + \lambda_2 f(b_2) + \dots + \lambda_n f(b_n).$$

Dies sind Elemente des Vektorraums W . Betrachten wir die Koordinaten bzgl. der Basis \mathcal{C} , d.h. wenden wir die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{C}}$ an, so folgt

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{C}}(f(v)) &= K_{\mathcal{C}}(\lambda_1 f(b_1) + \lambda_2 f(b_2) + \dots + \lambda_n f(b_n)) \\ &= \lambda_1 K_{\mathcal{C}}(f(b_1)) + \lambda_2 K_{\mathcal{C}}(f(b_2)) + \dots + \lambda_n K_{\mathcal{C}}(f(b_n)) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} K_{\mathcal{C}}(f(b_1)) & K_{\mathcal{C}}(f(b_2)) & \dots & K_{\mathcal{C}}(f(b_n)) \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{K}^{m,n}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}}_{= K_{\mathcal{B}}(v) \in \mathbb{K}^n}. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Definition 16.4 (Darstellende Matrix). Die Matrix

$$f_{\mathcal{B},\mathcal{C}} := \begin{bmatrix} K_{\mathcal{C}}(f(b_1)) & K_{\mathcal{C}}(f(b_2)) & \dots & K_{\mathcal{C}}(f(b_n)) \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n}$$

heißt die *darstellende Matrix* von f bzgl. \mathcal{B} und \mathcal{C} , oder auch *Matrixdarstellung* von f bzgl. \mathcal{B} und \mathcal{C} .

Die erste Spalte der darstellenden Matrix enthält also den Koordinatenvektor von $f(b_1)$, die zweite Spalte den Koordinatenvektor von $f(b_2)$, usw. Hat man die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{C}}$ nicht zur Hand, können wir die Einträge der Matrix wie folgt berechnen: Wir stellen $f(b_j)$ in der Basis \mathcal{C} dar,

$$\begin{aligned} f(b_1) &= a_{1,1}c_1 + a_{2,1}c_2 + \dots + a_{m,1}c_m, \\ f(b_2) &= a_{1,2}c_1 + a_{2,2}c_2 + \dots + a_{m,2}c_m, \\ &\vdots \\ f(b_n) &= a_{1,n}c_1 + a_{2,n}c_2 + \dots + a_{m,n}c_m, \end{aligned}$$

und erhalten

$$f_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} K_{\mathcal{C}}(f(b_1)) & K_{\mathcal{C}}(f(b_2)) & \dots & K_{\mathcal{C}}(f(b_n)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m,n}.$$

Beispiel 16.5. 1) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2+x_1 \\ x_1-x_2 \end{bmatrix}$. Wir betrachten die Standardbasen

$$\mathcal{B} = \{b_1, b_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

von \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 . Dann sind

$$\begin{aligned} f(b_1) &= f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1c_1 + 1c_2 + 1c_3, \\ f(b_2) &= f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0c_1 + 2c_2 - 1c_3, \end{aligned}$$

und die darstellende Matrix von f bzgl. \mathcal{B} und \mathcal{C} ist

$$f_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}.$$

2) Sei $V = \mathbb{C}[z]_{\leq 2} = \{a_0 + a_1z + a_2z^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$ mit der Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\} = \{1, z, z^2\}$, und sei $f : V \rightarrow V$ mit

$$f(a_0 + a_1z + a_2z^2) = (a_0 + a_2) + (a_1 - a_0)z + (2a_1 + a_2)z^2.$$

Hier ist $W = V$ und wir nehmen $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. Dann sind

$$\begin{aligned} f(b_1) &= f(1) = f(1 \cdot 1 + 0z + 0z^2) = 1 \cdot 1 - 1z + 0z^2 = 1b_1 + (-1)b_2 + 0b_3, \\ f(b_2) &= f(z) = f(0 \cdot 1 + 1z + 0z^2) = 0 \cdot 1 + 1z + 2z^2 = 0b_1 + 1b_2 + 2b_3, \\ f(b_3) &= f(z^2) = f(0 \cdot 1 + 0z + 1z^2) = 1 \cdot 1 + 0z + 1z^2 = 1b_1 + 0b_2 + 1b_3. \end{aligned}$$

Daher ist die darstellende Matrix von f bzgl. \mathcal{B} und \mathcal{B}

$$f_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Rechnung (16.1) zeigt, dass die darstellende Matrix auf Ebene der Koordinatenvektoren genau das gleiche tut, wie die lineare Abbildung in den „abstrakten“ Vektorräumen V und W . Das halten wir noch einmal als Satz fest.

Satz 16.6. Sei $f : V \rightarrow W$ linear, wobei V, W endlichdimensionale Vektorräume mit Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} sind. Dann gilt für jeden Vektor $v \in V$

$$K_{\mathcal{C}}(f(v)) = f_{\mathcal{B},\mathcal{C}}K_{\mathcal{B}}(v),$$

also $K_{\mathcal{C}} \circ f = f_{\mathcal{B},\mathcal{C}}K_{\mathcal{B}}$, d.h.

$$f_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = K_{\mathcal{C}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}. \quad (16.2)$$

Diesen Sachverhalt kann man sich wie folgt veranschaulichen:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 K_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow K_{\mathcal{C}} \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_{\mathcal{B},\mathcal{C}}} & \mathbb{K}^m
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{allg. Vektor und lineare Abbildung} \\
 \\
 \text{Spaltenvektor und Matrix}
 \end{array}$$

16.3 Basiswechsel

Die Koordinatenvektoren hängen von der gewählten Basis ab. Wir lernen, wie die Koordinatenvektoren bzgl. verschiedener Basen zusammenhängen, und wie sich ein Basiswechsel auf die darstellenden Matrizen auswirkt.

Satz 16.7 (Koordinatenvektor bei Basiswechsel). *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Basis \mathcal{B}_1 und Basis \mathcal{B}_2 . Dann gilt für alle $v \in V$:*

$$\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \vec{v}_{\mathcal{B}_1}.$$

D.h., bei Basiswechsel wird der Koordinatenvektor mit der Matrixdarstellung der Identität multipliziert. $\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ heißt auch Basiswechselmatrix oder Basisübergangsmatrix.

Beweis. Nach Satz 16.6 gilt $K_{\mathcal{B}_2}(v) = K_{\mathcal{B}_2}(\text{id}(v)) = \text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} K_{\mathcal{B}_1}(v)$. \square

Beispiel 16.8. Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\mathcal{B}_1 = \{[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}]\}$ und der Basis $\mathcal{B}_2 = \{[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}]\}$; vergleiche Beispiel 11.11. Dann sind

$$K_{\mathcal{B}_1} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad K_{\mathcal{B}_2} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ berechnen wir wie folgt:

$$\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = [K_{\mathcal{B}_2}(\text{id}([\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}])) \quad K_{\mathcal{B}_2}(\text{id}([\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}]))] = [K_{\mathcal{B}_2}([\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}]) \quad K_{\mathcal{B}_2}([\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}])] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit haben wir, wie es der Satz sagt:

$$\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} K_{\mathcal{B}_1} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = K_{\mathcal{B}_2} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right).$$

Als letztes betrachten wir, wie sich die darstellende Matrix ändert, wenn wir die Basen wechseln.

Satz 16.9 (Darstellende Matrix bei Basiswechsel). *Sei $f : V \rightarrow W$ linear, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von V und $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ Basen von W . Dann gilt*

$$f_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2} = \text{id}_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2} f_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1} \text{id}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1},$$

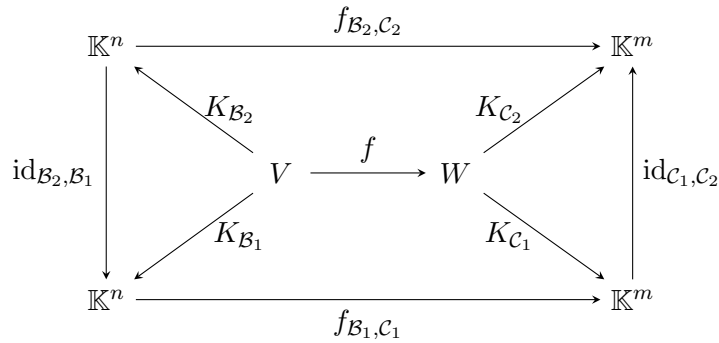
d.h., wir erhalten die neue Matrixdarstellung aus der alten, indem wir mit den entsprechenden Basiswechselmatrizen multiplizieren.

Beweis. Die Formel rechnen wir mit (16.2) nach:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2} &= K_{\mathcal{C}_2} \circ f \circ K_{\mathcal{B}_2}^{-1} = K_{\mathcal{C}_2} \circ \text{id} \circ f \circ \text{id} \circ K_{\mathcal{B}_2}^{-1} \\ &= K_{\mathcal{C}_2} \circ \text{id} \circ K_{\mathcal{C}_1}^{-1} \circ K_{\mathcal{C}_1} \circ f \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1} \circ K_{\mathcal{B}_1} \circ \text{id} \circ K_{\mathcal{B}_2}^{-1} \\ &= \text{id}_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2} f_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1} \text{id}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}. \end{aligned}$$

Beim dritten Gleichheitszeichen haben wir $K_{\mathcal{B}}^{-1} \circ K_{\mathcal{B}} = \text{id}$ verwendet, und beim ersten und letzten Gleichheitszeichen mehrfach die Formel (16.2). \square

Die Formel können wir wie oben veranschaulichen. Dazu nehmen zwei Kopien des obigen Diagramms (eine für \mathcal{B}_1 und \mathcal{C}_1 und eine für \mathcal{B}_2 und \mathcal{C}_2) und heften diese zusammen. Anschließend fügen wir noch die Basiswechsel ein (zwischen \mathcal{B}_2 und \mathcal{B}_1 und zwischen \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2) und erhalten folgendes Diagramm:



Beispiel 16.10. Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit den Basen \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 aus Beispiel 16.8 und den Basiswechselmatrizen

$$\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \text{id}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Weiter sei $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit

$$f \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Wir berechnen zuerst $f_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1}$ (also mit $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_1$):

$$f_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1} = [K_{\mathcal{B}_1} (f ([\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}])) \quad K_{\mathcal{B}_1} (f ([\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}]))] = \left[K_{\mathcal{B}_1} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad K_{\mathcal{B}_1} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nun wollen wir $f_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2}$ (also mit $\mathcal{C}_2 = \mathcal{B}_2$) berechnen. Das können wir direkt tun, oder den Satz verwenden:

$$f_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2} = \text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} f_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1} \text{id}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wir sehen, dass die zweite darstellende Matrix diagonal und damit noch einfacher ist als die erste.

Besonders wichtig ist für uns der Fall von gleichen Vektorräumen mit gleichen Basen: $V = W$ mit $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_1$ und $\mathcal{C}_2 = \mathcal{B}_2$. Der zugehörige Basiswechsel hat die Gestalt

$$f_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2} = \text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} f_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1} \text{id}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} = (\text{id}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1})^{-1} f_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1} \text{id}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1},$$

Schreiben wir abkürzend $A_1 = f_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1}$, $A_2 = f_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2}$ und $S = \text{id}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}$, so ist also

$$A_2 = S^{-1} A_1 S,$$

genau wie im letzten Beispiel. In Vorlesung 34 werden wir systematisch quadratische Matrizen auf diese Weise auf Diagonalgestalt bringen.

Vorlesung 17

Konvergenz von Zahlenfolgen

Wir führen Folgen ein und den zentralen Begriff der Konvergenz.

17.1 Zahlenfolgen

Definition 17.1 (Folge). Eine *Folge* reeller Zahlen ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

Schreibweisen: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder a_0, a_1, a_2, \dots . Das Element a_n heißt *n-tes Folgenglied*, und n der zugehörige *Index*.

Statt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schreibt man auch kürzer $(a_n)_n$ oder nur (a_n) . Wie man den Index benennt ist dabei unerheblich: weitere übliche Bezeichnung sind j, k, ℓ, m , also etwa $(a_n)_n = (a_k)_k$.

Allgemeiner kann man auch Folgen $(a_n)_{n \geq n_0}$, also $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$, für beliebiges $n_0 \in \mathbb{Z}$ betrachten.

Genauso können wir Folgen komplexer Zahlen betrachten, wo die a_n dann komplexe Zahlen sein können.

Beispiel 17.2. Beispiele für Folgen sind:

- 1) $a_n = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$, also die konstante Folge c, c, c, \dots . Für diese schreiben wir auch $(c)_n$.
- 2) $a_n = \frac{1}{2^n}$, also $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$
- 3) $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$, also $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$
- 4) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ für $n \geq 1$, also $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
- 5) $a_n = (-1)^n$, also $1, -1, 1, -1, \dots$

Diese Folgen sind alle *explizit* definiert: man kann a_n für jedes n direkt ausrechnen. Folgen können auch *rekursiv* definiert werden, wobei ein Folgenglied von einem (oder mehreren) Vorgänger(n) abhängt.

Beispiel 17.3. Beispiele für *rekursiv* definierte Folgen sind:

- 1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$ für $n \geq 1$, also $1, 2, 6, 24, \dots$
- 2) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für $n \geq 0$, also $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$.
Dies ist die Fibonacci-Folge, die die Vermehrung von (unsterblichen) Kaninchen modelliert.

Beschränktheit und Monotonie sind wie für reelle Funktionen definiert.

Definition 17.4 (Beschränktheit und Monotonie von Folgen). Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt

- 1) *nach unten beschränkt*, wenn es eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ gibt mit $m \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- 2) *nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- 3) *beschränkt*, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- 4) *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- 5) *streng monoton wachsend*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- 6) *monoton fallend*, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- 7) *streng monoton fallend*, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir sagen kurz *(streng) monoton*, wenn die Folge (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Vergleichen Sie die Definition von Monotonie bei Folgen und allgemeinen reellen Funktionen: Da Folgen auf den natürlichen Zahlen definiert sind, reicht es zwei aufeinander folgende Punkte (n und $n+1$) zu betrachten. Bei Funktionen, die in einem ganzen Intervall definiert sind, geht das nicht: Zu $x \in \mathbb{R}$ gibt es nicht die „nächste“ reelle Zahl. Daher müssen dort immer Funktionswerte für beliebige Punkte $x < y$ verglichen werden.

Beispiel 17.5. 1) $a_n = n$ ist (streng) monoton wachsend und nach unten beschränkt ($a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$), aber nicht nach oben beschränkt.
2) $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$ ist (streng) monoton fallend und beschränkt: $0 \leq a_n \leq 1$ für alle $n \geq 1$.
3) $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt ($|a_n| = 1$), aber nicht monoton.

Eine monoton wachsende Folge ist nach unten durch a_0 beschränkt, eine monoton fallende Folge ist nach oben durch a_0 beschränkt.

17.2 Konvergenz

Eine zentrale Frage bei Folgen ist, was die Folge für „ $n \rightarrow \infty$ “, also für immer größer werdende n , tut.

Definition 17.6 (Konvergenz). Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

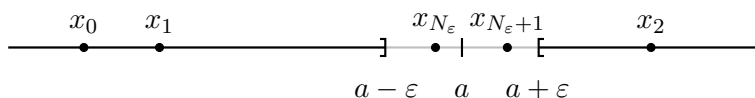
Die Zahl a heißt der *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge und wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, oder „ $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ “ oder kurz „ $a_n \rightarrow a$ “.

Die Folge $(a_n)_n$ heißt *konvergent*, falls $(a_n)_n$ einen Grenzwert hat. Die Folge $(a_n)_n$ heißt *divergent*, falls sie nicht konvergent ist.

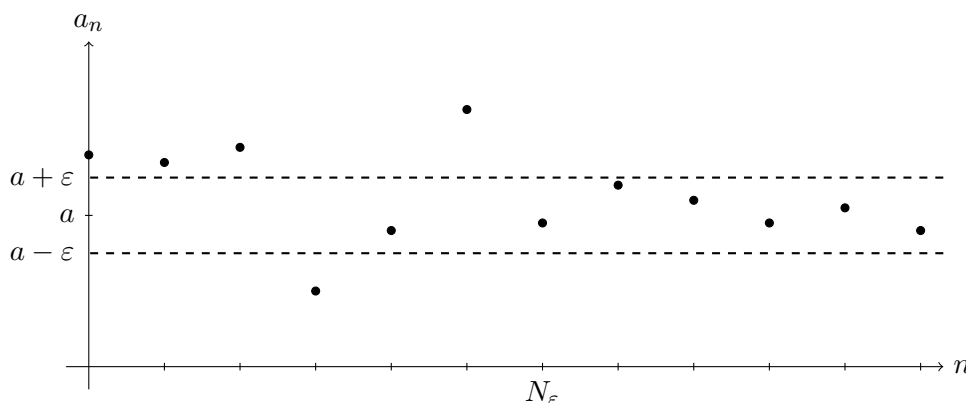
Eine Folge, die gegen Null konvergiert, heißt *Nullfolge*.

Die reelle Zahlenfolge $(a_n)_n$ konvergiert also genau dann gegen $a \in \mathbb{R}$, falls für jede (noch so kleine) Toleranz $\varepsilon > 0$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder (nämlich höchstens die mit $n < N_\varepsilon$) im Intervall $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ liegen.

Betrachtet man die Folgenglieder als Punkte auf der Zahlengeraden, so bedeutet Konvergenz gegen $a \in \mathbb{R}$, dass für jedes $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder (ab N_ε) in dem hellgrauen Intervall liegen:



Trägt man die Folge als Funktion auf, so bedeutet Konvergenz, dass für jedes $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder (ab N_ε) in dem „ ε -Schlauch“ um a liegen:



Beispiel 17.7. 1) Die Folge $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ konvergiert gegen 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Dazu prüfen wir die Definition nach: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $N_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ und für $n \geq N_\varepsilon$ ist dann

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon.$$

- 2) Die konstante Folge c, c, c, \dots konvergiert gegen c .
- 3) Die Folge $((-1)^n)_n$ ist divergent. Die Folgenglieder sind abwechselnd 1 und -1 , haben also Abstand 2. Würde die Folge konvergieren, müssten aber alle Folgenglieder (bis auf endlich viele Ausnahmen) „nahe“ an dem Grenzwert liegen, zum Beispiel näher als $\varepsilon = 1$.

Das präzisieren wir jetzt. Dazu nehmen wir an, dass die Folge gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \varepsilon = 1$ für alle $n \geq N$. Dann gilt insbesondere

$$|x_N - x_{N+1}| = |x_N - a + a - x_{N+1}| \leq |x_N - a| + |x_{N+1} - a| < 1 + 1 = 2,$$

andererseits ist aber $|x_N - x_{N+1}| = |(-1)^N - (-1)^{N+1}| = |(-1)^N + (-1)^N| = 2$, so dass also $2 < 2$ gelten würde, ein Widerspruch. Daher ist die Annahme, dass $((-1)^n)_n$ konvergiert, falsch, also ist $((-1)^n)_n$ divergent.

Bemerkung 17.8. Das Verhalten der ersten m Folgenglieder a_0, a_1, \dots, a_m hat keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten. Genauer gesagt konvergiert die Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ genau dann, wenn die Folge $(a_n)_{n \geq N}$ konvergiert. Kurz:

„Ende gut, alles gut.“

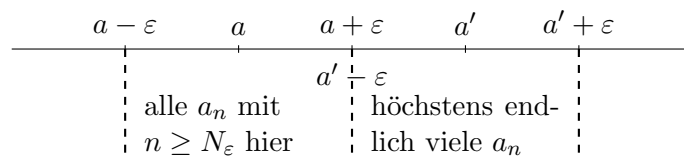
Als Konsequenz kann man Konvergenz nicht durch Berechnung von endlich vielen Folgengliedern nachweisen. Will man Aussagen über Konvergenz (von Verfahren) machen, so muss man wirklich etwas beweisen.

Satz 17.9. 1) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

2) Konvergente Folgen sind beschränkt.

3) Unbeschränkte Folgen sind divergent.

Beweis. 1) Angenommen, die Folge $(a_n)_n$ hätte zwei verschiedene Grenzwerte $a \neq a'$. Dann ist $\varepsilon = |a - a'|/2 > 0$, und es existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt, d.h. es gibt höchstens endlich viele Folgenglieder, die außerhalb von $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ liegen. Damit sind insbesondere höchstens endlich viele Folgenglieder in $]a' - \varepsilon, a' + \varepsilon[$, im Widerspruch dazu, dass die Folge auch gegen a' konvergiert. Damit ist die Annahme, dass es zwei verschiedene Grenzwerte geben kann, falsch.



- 2) Sei $(a_n)_{n \geq n_0}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Dann ist

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad \text{für } n \geq N.$$

Nehmen wir dann M als die GröÙte der Zahlen $|a_{n_0}|, |a_{n_0+1}|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a|$, so gilt

$$|a_n| \leq M$$

für alle $n \geq n_0$, d.h. die Folge ist beschränkt.

- 3) Folgt aus 2).

□

Bemerkung 17.10. Eine konvergente Folge ist beschränkt. Andersherum gilt das nicht: Es gibt beschränkte Folgen die nicht konvergieren, z.B. $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Beispiel 17.7.

Beispiel 17.11. Die Folge $a_n = n$ ist unbeschränkt, also divergent. Ebenso sind $a_n = (-1)^n n$ und $a_n = n^2$ unbeschränkt und damit divergent.

17.3 Bestimmte Divergenz

Definition 17.12 (Bestimmte Divergenz). Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_n$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$, falls zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n > M \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Entsprechend heißt $(a_n)_n$ *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, falls zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n < M \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Manche Autoren verwenden statt *bestimmt divergent gegen $+\infty$* auch den Begriff *uneigentlich konvergent gegen $+\infty$* . Wir machen das nicht. „Konvergent“ bedeutet immer „konvergent gegen eine reelle Zahl“.

Beispiel 17.13. 1) Die Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$ (für $M \in \mathbb{R}$ tut es jedes $N \in \mathbb{N}$ mit $N > M$). Ebenso sind $(n^2)_n, (n^3)_n$, usw. bestimmt divergent gegen $+\infty$.

- 2) Die Folge $(\ln(1/n))_{n \geq 1}$ ist bestimmt divergent gegen $-\infty$. Ebenso sind $(-n), (-n^2), \dots$ bestimmt divergent gegen $-\infty$.

- 3) Die Folge $((-1)^n)_n$ ist divergent aber nicht bestimmt divergent.

4) Mit

$$x_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist die Folge $(x_n) = (0, 0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots)$ divergent aber nicht bestimmt divergent gegen $+\infty$.

Bemerkung 17.14. Ebenso können wir Folgen komplexer Zahlen (*komplexe Zahlenfolgen*) betrachten, die Abbildungen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto a_n$, sind. D.h. die Folgenglieder a_n sind komplexe Zahlen, zum Beispiel ist $(i^k)_{k \in \mathbb{N}}$ die Folge

$$1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots$$

Beschränktheit und Konvergenz sind ganz genau so wie für reelle Zahlenfolgen definiert. Zum Beispiel konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{(3+4i)^k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen 0, weil

$$\left| \frac{1}{(3+4i)^k} - 0 \right| = \frac{1}{|3+4i|^k} = \frac{1}{5^k} \rightarrow 0.$$

Nur Monotonie können wir nicht mehr erklären, da wir komplexe Zahlen nicht anordnen können.

In dieser Vorlesung haben wir Folgen kennen gelernt und den zentralen Begriff der Konvergenz von Zahlenfolgen. Die Beispiele, die wir betrachtet haben, waren allesamt sehr einfach. Für komplizierter aussehende Folgen ist es hilfreich ein paar weitere Hilfsmittel zur Hand zu haben. Diese lernen wir in der nächsten Vorlesung kennen.

Vorlesung 18

Berechnung von Grenzwerten

In Vorlesung 17 haben wir die Konvergenz von Folgen kennen gelernt. In dieser Vorlesung behandeln wir wichtige Hilfsmittel zur Berechnung von Grenzwerten von Folgen.

18.1 Grenzwertsätze

Die Grenzwertsätze erlauben die Bestimmung von Grenzwerten durch „Rückführung auf bekannte Bauteile“.

Satz 18.1 (Grenzwertsätze). *Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Dann gilt:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b.$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b.$
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = ab$, insbesondere ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = ac$ für $c \in \mathbb{R}$.
- 4) Ist $b \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und dann ist
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis. Wir beweisen 1), um den Begriff der Konvergenz zu üben. Seien $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Sei $\varepsilon > 0$, dann ist auch $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ und es existiert $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle $n \geq N_\varepsilon$ ist

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Daher ist $(a_n + b_n)_n$ konvergent gegen $a + b$. □

Bemerkung 18.2. Achtung, wenn die Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ nicht konvergieren, dann gelten die Grenzwertsätze nicht.

Beispiel 18.3. 1) Was ist der Grenzwert der Folge $(\frac{2n+1}{1+n})_{n \in \mathbb{N}}$? Standardtrick: Nutze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ (siehe Beispiel 17.7) und die Grenzwertsätze. Kürzen wir n gilt für $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{2n+1}{1+n} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 1}.$$

Da die Folge $(\frac{1}{n})_n$ und die konstanten Folgen $(2)_n$ und $(1)_n$ konvergieren, gilt mit den Grenzwertsätzen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1} = \frac{2 + 0}{0 + 1} = 2.$$

2) Was ist der Grenzwert der Folge $b_n = a_n^2$? Da wir schon wissen, dass $(a_n)_n$ konvergiert, finden wir mit den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot a_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Beispiel 18.4. Sind $k, \ell \in \mathbb{N}$ und $p_k, q_\ell \neq 0$, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_k n^k + p_{k-1} n^{k-1} + \dots + p_1 n + p_0}{q_\ell n^\ell + q_{\ell-1} n^{\ell-1} + \dots + q_1 n + q_0} = \begin{cases} 0 & \text{für } k < \ell \\ \frac{p_k}{q_\ell} & \text{für } k = \ell \\ +\infty & \text{für } k > \ell \text{ und } \frac{p_k}{q_\ell} > 0 \\ -\infty & \text{für } k > \ell \text{ und } \frac{p_k}{q_\ell} < 0. \end{cases}$$

Das sieht man so: Für $k \leq \ell$ kürzt man n^ℓ und verwendet die Grenzwertsätze, genau wie in Beispiel 18.3. Für $k > \ell$ klammern wir im Zähler n^k und im Nenner n^ℓ aus:

$$n^{k-\ell} \underbrace{\frac{p_k + \frac{p_{k-1}}{n} + \dots + \frac{p_1}{n^{k-1}} + \frac{p_0}{n^k}}{q_\ell + \frac{q_{\ell-1}}{n} + \dots + \frac{q_1}{n^{\ell-1}} + \frac{q_0}{n^\ell}}}_{=: a_n}.$$

Dann konvergiert a_n gegen $a := \frac{p_k}{q_\ell} \neq 0$ (Grenzwertsätze!). Ist $a > 0$, so ist $\varepsilon = \frac{a}{2} > 0$ und es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in]a - \frac{a}{2}, a + \frac{a}{2}[$ für $n \geq N$, d.h. $a_n \geq \frac{a}{2}$. Damit sehen wir, dass $n^{k-\ell} a_n \geq n^{k-\ell} \frac{a}{2}$, was größer als jede Schranke $M \in \mathbb{R}$ wird, d.h. die Folge ist bestimmt divergent gegen $+\infty$. Falls $a < 0$ ist, sehen wir ähnlich, dass die Folge bestimmt divergent gegen $-\infty$ ist.

18.2 Grenzwerte und Ungleichungen

Grenzwertbildung erhält schwache Ungleichungen.

Satz 18.5. Sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a \leq b$.

Vorsicht: Aus $a_n < b_n$ folgt ebenfalls nur $a \leq b$. Die strikte Ungleichung geht im Grenzwert verloren. Beispiel: $a_n = 0 < \frac{1}{n} = b_n$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Besonders hilfreich ist das folgende Sandwich-Theorem (oder Drei-Folgen-Satz).

Satz 18.6 (Sandwich-Theorem). Seien $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ drei reelle Folgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n$$

und mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

Dann konvergiert auch $(b_n)_n$ gegen a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

Besonders oft verwendet man das Sandwich-Theorem für Abschätzungen $0 \leq |a_n| \leq b_n$ mit $b_n \rightarrow 0$. Dann folgt $|a_n| \rightarrow 0$ und mit $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ dann auch $a_n \rightarrow 0$.

Beispiel 18.7. 1) Es ist

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Da $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ist auch $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$ (Grenzwertsatz) und daher $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$ (Sandwich-Theorem).

2) Wir zeigen, dass $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$ gegen 0 konvergiert:

$$0 \leq |a_n| = \left| \frac{\sin(n)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

also $a_n \rightarrow 0$.

3) Wir zeigen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Dazu wählen wir ein festes $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 2|x|$. Dann gilt für alle $n \geq k$:

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^k}{k!} \frac{|x|^{n-k}}{(k+1) \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{|x|^k}{k!} \frac{|x|^{n-k}}{(2|x|)^{n-k}} = \frac{|x|^k}{k!} \frac{1}{2^{n-k}} = \frac{|x|^k 2^k}{k!} \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

Als Folgerung aus dem Sandwich-Theorem haben wir den folgenden Satz.

Satz 18.8. Nullfolge mal beschränkte Folge ist wieder eine Nullfolge.

18.3 Monotonie und Konvergenz

Ein schwieriges Problem ist es, die Konvergenz einer Folge zu beweisen, wenn man den Grenzwert nicht kennt (und keine Vermutung für ihn hat). Relativ oft kann einem das folgende hinreichende Kriterium helfen.

Satz 18.9 (Monotoniekriterium). *Jede beschränkte und monotone Folge reeller Zahlen ist konvergent.*

Beachten Sie: Andersherum ist jede konvergente Folge beschränkt, aber nicht notwendigerweise monoton: zum Beispiel konvergiert $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 1}$, ist aber nicht monoton.

Monotone Folgen, die nicht beschränkt sind, sind bestimmt divergent.

Beispiel 18.10 (Wurzelfolge). Konvergiert die durch

$$a_0 > 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right), \quad n \geq 0,$$

rekursiv definierte Folge? Um eine Idee zu bekommen betrachten wir den Startwert $a_0 = 1$ und berechnen die ersten Folgenglieder (auf 15 Nachkommastellen gerundet):

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1.5 \\ a_2 &= 1.416666666666667 \\ a_3 &= 1.414215686274510 \\ a_4 &= 1.414213562374690 \\ a_5 &= 1.414213562373095. \end{aligned}$$

Die Folge *scheint* zu konvergieren und ab $n = 1$ monoton fallend zu sein. Wir versuchen daher Konvergenz mit dem Monotoniekriterium zu beweisen.

- Die Folge ist nach unten beschränkt: Für $n \geq 0$ ist

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2} \geq \sqrt{a_n \frac{2}{a_n}} = \sqrt{2},$$

weil das arithmetische Mittel größer gleich dem geometrischen Mittel ist (Beispiel 2.3).

- Die Folge ist monoton fallend (ab $n = 1$): Für $n \geq 1$ ist $a_n \geq \sqrt{2}$, also $a_n^2 \geq 2$, also

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{a_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{2} \right) = 1,$$

also $a_{n+1} \leq a_n$.

Damit ist die Folge konvergent gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Da $a_n \geq \sqrt{2}$ ist $a \geq \sqrt{2}$.

Trick zur Bestimmung des Grenzwertes bei rekursiven Folgen: Da $a_n \rightarrow a$ gilt auch $a_{n+1} \rightarrow a$. Nun ist

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right).$$

Bilden wir auf beiden Seiten den Grenzwert (Grenzwertsätze) erhalten wir:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right) = \frac{a}{2} + \frac{1}{a},$$

also $\frac{a}{2} = \frac{1}{a}$ und dann $a^2 = 2$. Damit kommen für den Grenzwert $a = \sqrt{2}$ oder $a = -\sqrt{2}$ in Frage. Da $a \geq \sqrt{2}$ (s.o.), ist der Grenzwert $a = \sqrt{2} = 1.414213562373095 \dots$ (auf 15 Nachkommastellen gerundet). Wir sehen: bereits das fünfte Folgenglied ist auf 15 Stellen genau, diese Folge konvergiert sehr schnell!

Solche Folgen werden verwendet, um Quadratwurzeln von reellen Zahlen im Taschenrechner und Computer zu berechnen.

18.4 Wichtige Grenzwerte

Beispiel 18.11 (Geometrische Folge). Für $q \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1, \\ 1, & q = 1, \\ +\infty, & 1 < q, \\ \text{divergent}, & q \leq -1. \end{cases}$$

Anschaulich ist das vermutlich klar, wir wollen das aber mit den gelernten Methoden nachweisen.

- Für $q > 1$: Setze $y := q - 1 > 0$. Dann ist

$$q^n = (1 + q - 1)^n = (1 + y)^n = 1 + ny + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} y^k 1^{n-k} \geq ny,$$

und da $y > 0$ ist q^n bestimmt divergent gegen $+\infty$.

- Für $q = 1$ ist $q^n = 1 \rightarrow 1$.
- Für $-1 < q < 1$: Es ist $|q^n - 0| = |q|^n$ und wir zeigen mit dem Monotoniekriterium, dass $(|q|^n)$ gegen Null konvergiert. Die Folge ist beschränkt, da $|q|^n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist monoton fallend, da $|q|^{n+1} = |q| \cdot |q|^n \leq |q|^n$ gilt. Damit ist $|q|^n \rightarrow a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Aus $|q|^{n+1} = |q| \cdot |q|^n$ folgt dann $a = |q|a$, also $(1 - |q|)a = 0$, also $a = 0$. Somit gilt $|q^n| = |q|^n \rightarrow 0$.
- Für $q \leq -1$: Für $q = -1$ ist $((-1)^n)_n$ divergent (Beispiel 17.7). Für $q < -1$ ist q^n nicht beschränkt, denn $|q^n| = |q|^n \rightarrow +\infty$. Da die Vorzeichen von q^n wechseln, ist $(q^n)_n$ aber nicht bestimmt divergent, sondern unbestimmt divergent.

Beispiel 18.12 (Geometrische Reihe). Für $q \in \mathbb{R}$ ist mit der geometrischen Summe

$$s_n := \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1, \\ n+1, & q = 1. \end{cases}$$

Mit Beispiel 18.11 sehen wir: Die Folge $(s_n)_{n \geq 0}$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$, für $q \geq 1$ ist $(s_n)_{n \geq 0}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$, und für $q \leq -1$ ist $(s_n)_{n \geq 0}$ divergent. Für den Grenzwert der Summe schreibt man suggestiv $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k$. Zusammengefasst haben wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & |q| < 1, \\ +\infty, & q \geq 1, \\ \text{divergent}, & q \leq -1. \end{cases}$$

Grenzwerte von Summen nennt man auch *Reihen*, wir werden diese in Vorlesung 40 näher untersuchen.

Schlußendlich führen wir ein paar nützliche Grenzwerte ohne Beweis auf:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$ für $x > 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$ für $\alpha > 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{e^{\beta n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha e^{-\beta n} = 0$ für $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha q^n = 0$ für $\alpha \in \mathbb{R}, |q| < 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Vorlesung 19

Stetigkeit

Ein sich bewegendes physikalisches Objekt kann nicht an einer Stelle verschwinden und an einer anderen Stelle wieder erscheinen, um seine Bewegung fortzusetzen. Die Kurve, die das Objekt beschreibt, hat keine „Sprünge“. Das mathematische Konzept hinter diesem Phänomen ist die Stetigkeit, die wir in dieser Vorlesung behandeln. Unser Zugang zur Stetigkeit einer Funktion verwendet Grenzwerte von Funktionen, die wir zunächst erklären.

19.1 Grenzwerte von Funktionen

Wir führen Grenzwerte von Funktionen ein. Dabei verwenden wir den Grenzwertbegriff von Folgen.

Vorweg eine Beobachtung: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und ist $(x_n)_n$ eine Folge im Definitionsbereich von f , so können wir $f(x_n)$ berechnen, und erhalten eine neue Folge $(f(x_n))_n$ von reellen Zahlen, die wir wieder auf Konvergenz untersuchen können.

Definition 19.1 (Konvergenz). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ($D \subseteq \mathbb{R}$) und sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Wir sagen, f hat für x gegen a den Grenzwert $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, in Zeichen

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c,$$

falls gilt:

1) Für *jede* Folge $(x_n)_n$ mit

- (a) $x_n \in D$,
- (b) $x_n \neq a$,
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$.

2) Es gibt mindestens eine Folge $(x_n)_n$ mit (a)–(c).

Bemerkung 19.2. 1) a kann im Definitionsbereich von f sein, muss aber nicht.

- 2) In der Definition setzen wir voraus, dass es Folgen $(x_n)_n$ in $D \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergieren: Der Punkt a muss von $D \setminus \{a\}$ „erreichbar“ sein. Zum Beispiel ist $a = 2$ für $D = [0, 1] \cup \{2\}$ nicht aus $D \setminus \{2\} = [0, 1]$ erreichbar.

Beispiel 19.3. 1) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Bestimme $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ für $a \in \mathbb{R}$. Für jede Folge $(x_n)_n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ist (Grenzwertsatz)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = a^2.$$

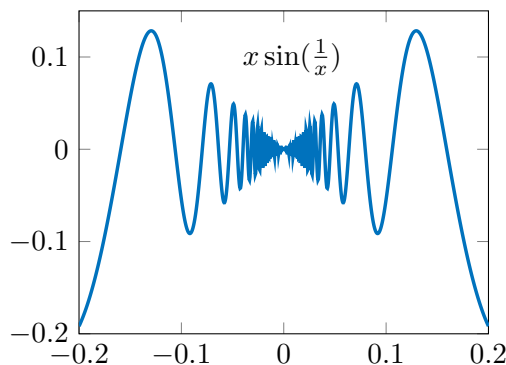
Da dies für jede Folge $(x_n)_n$ gilt und immer den gleichen Grenzwert liefert, ist

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2.$$

- 2) Für $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$, ist $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, denn für jede Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ gilt:

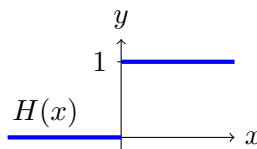
$$|f(x_n)| = \left| x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \right| = |x_n| \left| \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \right| \leq |x_n| \rightarrow 0,$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$. Da dies für jede Folge gilt und jeweils der gleiche Grenzwert herauskommt, ist $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.



- 3) Die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$, besitzt in 0 keinen Grenzwert, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \quad \text{aber} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$



Es gelten die selben Rechenregeln wie für Grenzwerte von Folgen.

Satz 19.4 (Grenzwertsätze für Funktionen). Sind $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$, so gilt:

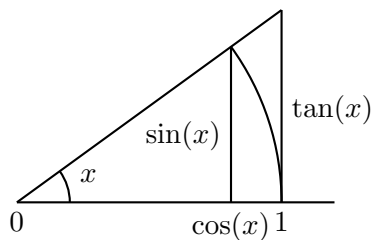
- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c + d$,
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = cd$,
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha c$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$,
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{c}{d}$, falls $d \neq 0$.

Die Rechenregeln gelten auch für $a = \pm\infty$. Hingegen müssen c, d endlich sein.

Die Rechenregeln 1) und 3) besagen, dass Grenzwertbildung linear ist.

Das Sandwich-Prinzip gilt auch für Grenzwerte von Funktionen.

Beispiel 19.5. Wir berechnen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ mit dem Sandwich-Prinzip. Zur Abschätzung betrachten wir für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ die Flächeninhalte in der Skizze:



- Fläche des kleinen Dreiecks: $\frac{1}{2} \sin(x) \cos(x)$
- Fläche des Kreissektors: $\frac{x}{2\pi} 1^2 \pi = \frac{x}{2}$
- Fläche des großen Dreiecks: $\frac{1}{2} \tan(x)$.

Damit ist $\sin(x) \cos(x) \leq x \leq \tan(x)$, also

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und, wegen der Symmetrie von \cos und \sin , auch für $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ folgt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ mit dem Sandwich-Theorem.

19.2 Einseitige Grenzwerte von Funktionen

Manchmal sind auch einseitige Grenzwerte nützlich. Für den *linksseitigen Grenzwert* von f in a fordert man $x_n < a$ statt $x_n \neq a$ in Definition 19.1 (die x_n nähern sich von links an a) und schreibt

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = c \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = c.$$

Für den *rechtsseitigen Grenzwert* von f in a fordert man $x_n > a$ statt $x_n \neq a$ und schreibt

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = c \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = c.$$

Es gelten die gleichen Rechenregeln wie in Satz 19.4. Man kann zeigen:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \nearrow a} f(x) = c = \lim_{x \searrow a} f(x),$$

d.h. die Funktion hat den Grenzwert c für x gegen a genau dann, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und beide gleich c sind.

Beispiel 19.6. 1) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ Für jede Folge $(x_n)_n$ mit $x_n < 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{-x_n} = -1,$$

also ist $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -1$. Genauso findet man $\lim_{x \searrow 0} f(x) = 1$. Insbesondere existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nicht.

2) $\lim_{x \searrow 0} \ln(x) = -\infty$.

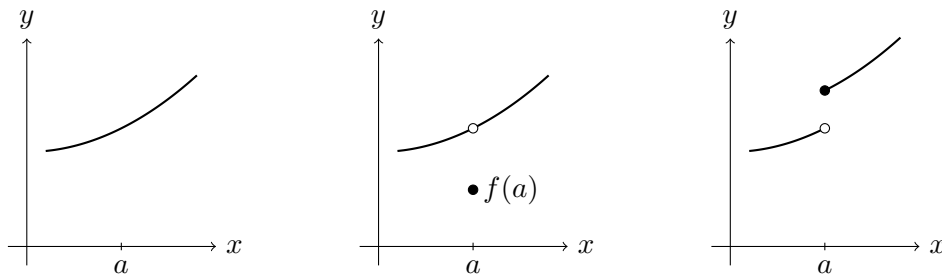
19.3 Stetigkeit

Definition 19.7 (Stetigkeit). Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in D$, dann heißt f *stetig in a* wenn

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (19.1)$$

Die Funktion heißt *stetig auf D* , wenn sie in allen $a \in D$ stetig ist.

Gleichung (19.1) beinhaltet zwei Bedingungen: Der Grenzwert muss existieren *und* gleich dem Funktionswert sein.



Die Funktion links ist stetig in a , die Funktion in der Mitte ist unstetig, da der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ ist, die Funktion rechts ist unstetig, da der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nicht existiert.

Bemerkung 19.8. Stetigkeit erlaubt die „Vertauschung von Funktion und Grenzwert“:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right).$$

Alternativ kann Stetigkeit über das sogenannte ϵ - δ -Kriterium definiert werden. Beide Definitionen ergeben den gleichen Begriff.

Definition 19.9. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in D$, dann heißt f *stetig in a* wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ gilt $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Die Funktion heißt *stetig auf D* , wenn sie in allen $a \in D$ stetig ist.

Die Idee bei der ϵ - δ -Definition ist: In einer kleinen Umgebung von a sind die Funktionswerte nahe dem Funktionswert $f(a)$. Insbesondere hat die Funktion keinen Sprung.

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir die folgenden Rechenregeln für stetige Funktionen.

Satz 19.10 (Rechenregeln für stetige Funktionen).

- 1) Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so sind $f + g$, $f - g$, αf für $\alpha \in \mathbb{R}$ und fg in D stetig.
- 2) Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f/g in $D \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$ stetig, also überall dort wo f/g gebildet werden kann.
- 3) Sind $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g(E) \subseteq D$, so ist auch die Komposition $f \circ g : E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(g(x))$, in E stetig.

Beweis von 3). Sei $a \in E$. Da g stetig ist, gilt $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Da f stetig in $g(a)$ ist, ist dann auch $f(g(a)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$, also ist $f \circ g$ stetig in a . \square

Teil 1) des Satzes besagt insbesondere, dass stetige Funktionen einen Vektorraum bilden.

Beispiel 19.11. 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, ist stetig, denn für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ und eine beliebige Folge $(x_n)_n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und $x_n \neq a$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = f(a).$$

2) *Polynome sind stetig:* $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, ist stetig als Summe von Produkten stetiger Funktionen: Da $f(x) = x$ stetig ist, sind auch stetig $x^2 = f(x)f(x)$, $x^3 = f(x) \cdot x^2$, \dots , dann a_0 , a_1x , \dots , a_nx^n und schließlich die Summe dieser stetigen Funktionen.

3) *Rationale Funktionen sind stetig:* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, mit Polynomen p, q ist stetig in $D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid q(x) = 0\}$ als Quotient stetiger Funktionen.

$f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, und $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 4}{x^2 - 4}$ ist stetig in $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

4) Der Absolutbetrag $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, ist stetig in 0: Da der Betrag links und rechts von Null verschieden definiert ist, betrachten wir die links- und rechtsseitigen Grenzwerte. Es sind

$$\lim_{x \searrow 0} |x| = \lim_{x \searrow 0} x = 0, \quad \lim_{x \nearrow 0} |x| = \lim_{x \nearrow 0} (-x) = 0.$$

Da die einseitigen Grenzwerte existieren und gleich sind, ist $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = |0|$, also ist der Absolutbetrag in 0 stetig. Der Betrag ist auch in allen anderen Punkten $a \neq 0$ stetig.

5) Die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist unstetig in 0, denn $\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$ existiert nicht (Beispiel 19.3). Hingegen ist $H : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

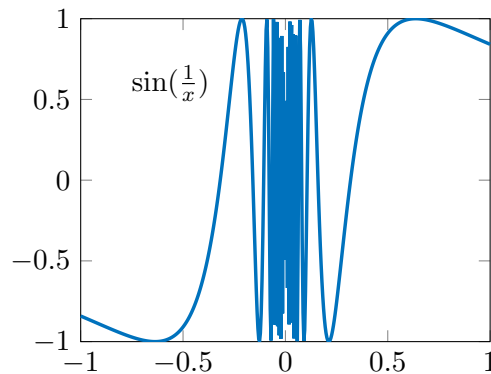
6) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ist unstetig in 0. Hier existiert der Grenzwert gegen 0 nicht. Dies sieht man zum Beispiel mit der Folge $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \neq 0$ für die $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ist, aber

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$$

nicht konvergiert. Das zeigt auch, dass Unstetigkeitsstellen nicht unbedingt Sprungstellen sein müssen. Die Funktion oszilliert (schwingt) unendlich oft und immer schneller zwischen -1 und 1 hin und her:



Im Plot erreichen die Oszillationen nahe Null nicht ganz ± 1 , da der Rechner nur endlich viele Punkte zum Zeichnen des Graphen verwenden kann.

Die folgenden elementaren Funktionen sind stetig (Nachweis später):

- 1) Wurzelfunktionen sind stetig: $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $x \mapsto \sqrt[k]{x}$, ist stetig.
- 2) Die elementaren Funktionen \exp , \ln , \sin , \cos , \tan sind stetig.

Stetige Fortsetzbarkeit. Sei $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei I ein Intervall ist und $a \in I$. Wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \in \mathbb{R}$ existiert, so können wir die Funktion

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ c, & x = a \end{cases}$$

definieren, die dann stetig auf ganz I ist. Diese Funktion setzt f von $I \setminus \{a\}$ nach I fort und wird eine *stetige Fortsetzung* von f genannt. Häufig nennt man g auch wieder f .

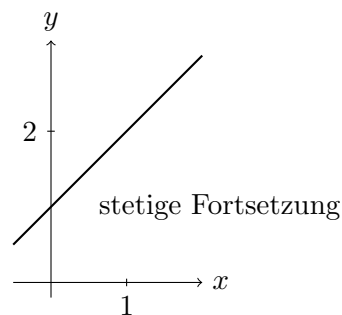
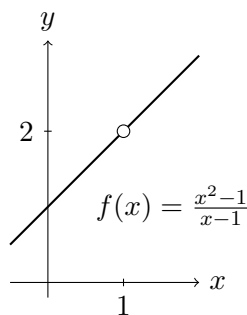
Beispiel 19.12. 1) Die rationale Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

kann f zu einer stetigen Funktion auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

In diesem Beispiel lässt sich f auch Vereinfachen: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, so dass man sofort sieht, dass f stetig auf ganz \mathbb{R} ist (bzw. fortgesetzt werden kann). Das ist aber nicht immer möglich.



2) Für $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$, ist $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (Beispiel 19.3), also ist

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

stetig.

3) $f(x) = 1/x$ und $f(x) = \frac{x}{|x|}$ sind in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig, lassen sich aber nicht stetig in 0 fortsetzen, da $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nicht existiert. $f(x) = 1/x^2$ lässt sich nicht stetig in 0 fortsetzen, da $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ zwar existiert aber nicht endlich ist.

Vorlesung 20

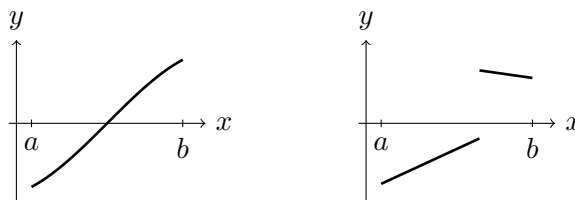
Sätze über stetige Funktionen

Wir behandeln die wichtigsten Sätze über stetige Funktionen. Dies sind der Zwischenwertsatz und der Satz über die Existenz vom Minimum und Maximum.

20.1 Bestimmung von Nullstellen

Das Lösen von Gleichungen führt oft auf das Problem, die Nullstellen von Funktionen zu bestimmen. Bei quadratischen Polynomen ist das einfach, bei komplizierteren Funktionen hingegen helfen oft nur numerische Verfahren. Dazu ist es nützlich zu wissen, ob es überhaupt Nullstellen gibt.

Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ und f stetig ist, muss anschaulich der Graph von f die x -Achse mindestens einmal zwischen a und b schneiden. Damit hat f eine Nullstelle. Das besagt der folgende Satz. Der Beweis beruht auf einem einfachen Verfahren, um die Nullstelle beliebig genau anzunähern.



Satz 20.1 (Zwischenwertsatz – Version für Nullstellen). *Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Sind dann $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder umgekehrt $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$), dann hat f mindestens eine Nullstelle in $]a, b[$.*

Beweis mit dem Intervallhalbierungsverfahren. Wir nehmen $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ an und konstruieren zwei Folgen $(a_k)_k$ und $(b_k)_k$ mit $f(a_k) < 0$ und $f(b_k) > 0$, die gegen eine Nullstelle konvergieren.

Wir setzen $a_0 = a$ und $b_0 = b$. Dann ist $f(a_0) < 0$ und $f(b_0) > 0$. Für $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Berechne den Mittelpunkt $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ von $[a_k, b_k]$ und $f(x_k)$.
- Fallunterscheidung:

- Wenn $f(x_k) = 0$ haben wir eine Nullstelle gefunden und sind fertig.
- Wenn $f(x_k) < 0$, setze $a_{k+1} := x_k$ und $b_{k+1} := b_k$.
- Wenn $f(x_k) > 0$, setze $a_{k+1} := a_k$ und $b_{k+1} := x_k$.

Das liefert die beiden Folgen

$$\begin{aligned} a &= a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b, \\ b &= b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq a. \end{aligned}$$

Die Folge $(a_k)_k$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent gegen ein x_* , die Folge $(b_k)_k$ ist monoton fallend und beschränkt, also konvergent gegen ein y_* . Wegen der Halbierung der Intervalle ist

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \dots = \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0) = \frac{b - a}{2^k}.$$

Für $k \rightarrow \infty$ folgt daraus $x_* = y_*$. Nach Konstruktion der Folgen ist weiter für alle $k \in \mathbb{N}$

$$f(a_k) \leq 0 \leq f(b_k),$$

also, da Grenzwerte Ungleichungen erhalten (Satz 18.5) und f stetig ist,

$$f(x_*) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) \leq 0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) = f(x_*),$$

also $f(x_*) = 0$. Damit hat f eine Nullstelle $x_* \in [a, b]$. □

Das Intervallhalbierungsverfahren heißt auch *Bisektionsverfahren*. Da die Nullstelle x_* in jedem Intervall $[a_k, b_k]$ liegt, gilt

$$|x_k - x_*| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

Daher können wir die Nullstelle x_* beliebig genau durch x_k approximieren (annähern): Zu vorgegebener Genauigkeit ε wählen wir k so groß, dass $(b - a)/2^{k+1} < \varepsilon$.

Beispiel 20.2. Wir betrachten die Funktion $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$. Es sind $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$, so dass f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $[0, 2]$ hat (nämlich $\sqrt{2}$). Um die Nullstelle approximativ zu berechnen, wenden wir das Bisektionsverfahren an, und erhalten mit $a = 0$ und $b = 2$ Folgen $(a_k)_k$ und $(b_k)_k$, die gegen die Nullstelle $\sqrt{2} \approx 1.414213562373095$ konvergieren; vergleiche Tabelle 20.1. Korrekte Stellen sind unterstrichen.

Der nächste Mittelpunkt ist $x_{20} = \underline{1.414214134216309}$. Immerhin die ersten fünf Nachkommastellen stimmen mit $\sqrt{2}$ überein. Der Fehler ist $|x_{20} - \sqrt{2}| \approx 5.7 \cdot 10^{-7}$. Die Folge $(x_k)_k$ aus dem Bisektionsverfahren konvergiert viel langsamer als die Wurzelfolge aus Beispiel 18.10.

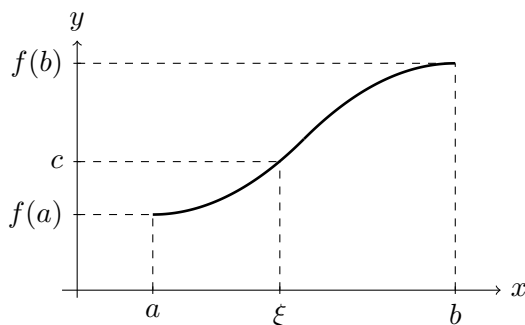
k	a_k	b_k
0	0	2.0000000000000000
1	<u>1.0000000000000000</u>	2.0000000000000000
2	<u>1.0000000000000000</u>	<u>1.5000000000000000</u>
3	<u>1.2500000000000000</u>	<u>1.5000000000000000</u>
4	<u>1.3750000000000000</u>	<u>1.5000000000000000</u>
5	<u>1.3750000000000000</u>	<u>1.4375000000000000</u>
6	<u>1.4062500000000000</u>	<u>1.4375000000000000</u>
7	<u>1.4062500000000000</u>	<u>1.4218750000000000</u>
8	<u>1.4140625000000000</u>	<u>1.4218750000000000</u>
9	<u>1.4140625000000000</u>	<u>1.4179687500000000</u>
10	<u>1.4140625000000000</u>	<u>1.4160156250000000</u>
11	<u>1.4140625000000000</u>	<u>1.4150390625000000</u>
12	<u>1.4140625000000000</u>	<u>1.4145507812500000</u>
13	<u>1.4140625000000000</u>	<u>1.4143066406250000</u>
14	<u>1.414184570312500</u>	<u>1.4143066406250000</u>
15	<u>1.414184570312500</u>	<u>1.414245605468750</u>
16	<u>1.414184570312500</u>	<u>1.414215087890625</u>
17	<u>1.414199829101563</u>	<u>1.414215087890625</u>
18	<u>1.414207458496094</u>	<u>1.414215087890625</u>
19	<u>1.414211273193359</u>	<u>1.414215087890625</u>
20	<u>1.414213180541992</u>	<u>1.414215087890625</u>

Tabelle 20.1: Die Folgen $(a_k)_k$ und $(b_k)_k$ aus Beispiel 20.2.

Beispiel 20.3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, ist stetig und $f(-1) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 > 0$, sie hat aber keine Nullstelle. Warum nicht? Der Definitionsbereich ist kein Intervall!

Der letzte Satz kann auf andere Werte als Nullstellen verallgemeinert werden. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$ und c ein Wert mit $f(a) < c < f(b)$. Dann ist $f(x) - c$ stetig auf $[a, b]$ und es gilt $f(a) - c < 0 < f(b) - c$, also hat $f(x) - c$ eine Nullstelle $\xi \in]a, b[$, d.h. es ist $f(\xi) - c = 0$, also $f(\xi) = c$. Für $f(a) > f(b)$ geht das genauso. Eine stetige Funktion nimmt also alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Satz 20.4 (Zwischenwertsatz). Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Sind dann $a, b \in I$ und c ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$, so gibt es mindestens ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = c$.



20.2 Existenz von Extremwerten

Ein anderes häufig auftretendes Problem neben der Bestimmung von Nullstellen ist die Ermittlung des Maximums oder Minimums einer reellwertigen Funktion, also der größten oder kleinsten Werte der Funktion. Dann ist es natürlich gut zu wissen, ob Minimum und Maximum überhaupt existieren, sonst sucht man vielleicht etwas, dass man nicht finden kann, da es gar nicht existiert.

Definition 20.5 (Maximum und Minimum). Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt $x_0 \in D$ eine

- 1) *Maximalstelle* (oder *Stelle eines Maximums*), wenn $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ ist. Der Wert $f(x_0)$ ist der größte Funktionswert, den f auf D annimmt, und heißt das *Maximum* von f .

Bezeichnung: $\max_{x \in D} f(x)$ oder nur $\max f$.

- 2) *Minimalstelle* (oder *Stelle eines Minimums*), wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$ ist. Der Wert $f(x_0)$ ist der kleinste Funktionswert, den f auf D annimmt, und heißt das *Minimum* von f .

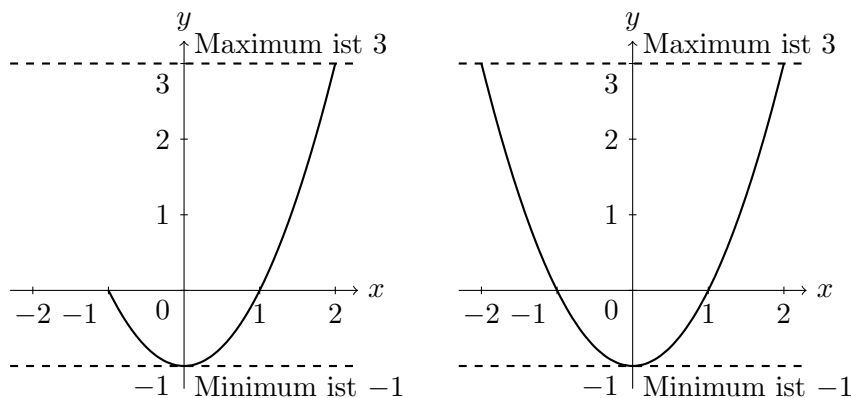
Bezeichnung: $\min_{x \in D} f(x)$ oder nur $\min f$.

Ein *Extremum* bezeichnet ein Maximum oder Minimum und eine *Extremalstelle* ist eine zugehörige Maximal- oder Minimalstelle.

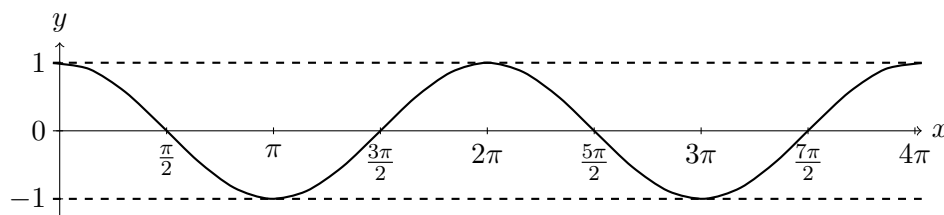
Bemerkung 20.6. Plural: Maxima, Minima, Extrema.

Beispiel 20.7. 1) Sei $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Das Maximum von f ist 3 (bei der Maximalstelle 2) und das Minimum von f ist -1 (bei der Minimalstelle 0).

- 2) $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Das Maximum von f ist 3 (bei den Maximalstellen -2 und 2) und das Minimum von f ist -1 (bei der Minimalstelle 0). Insbesondere kann es mehrere Maximalstellen (oder Minimalstellen) geben, aber immer nur ein Maximum und ein Minimum.

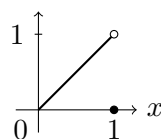


- 3) $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat das Maximum 1 und das Minimum -1 (die Maximalstellen sind alle $2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, die Minimalstellen sind alle $(2k+1)\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$):



Nicht jede Funktion besitzt ein Minimum und Maximum.

Beispiel 20.8. 1) Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases}$, hat das Minimum 0 (bei $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$), hat aber kein Maximum:



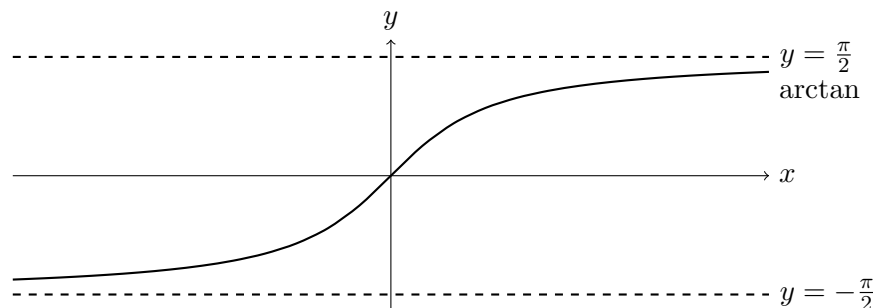
Die Funktion nimmt jeden Wert in $[0, 1[$ an, so dass das Maximum, wenn es denn existiert, ≥ 1 sein muss. Diese Werte werden von der Funktion aber nicht angenommen.

- 2) Auch $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, hat kein Maximum: Da $\lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ ist, gibt es kein $x_0 \in]0, \infty[$ so dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in]0, \infty[$ gilt. Weiter hat f kein

Minimum: Es ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in]0, \infty[$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, aber es gibt kein x_0 mit $f(x_0) = \frac{1}{x_0} = 0$.

Hingegen hat $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ das Minimum 1 (mit Minimalstelle $x_0 = 1$), aber kein Maximum.

- 3) Der Arcus Tangens $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist die Umkehrfunktion des Tangens $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ (siehe Vorlesung 7):



Kandidat für ein Maximum von \arctan ist $\frac{\pi}{2}$ (wegen $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ kann das Maximum nicht kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sein), aber der Wert $\frac{\pi}{2}$ wird vom Tangens nicht angenommen: es gibt kein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\arctan(x_0) = \frac{\pi}{2}$. Daher hat \arctan kein Maximum. Genauso sieht man, dass \arctan kein Minimum hat.

In allen Beispielen erreicht die Funktion den „Kandidaten für das Maximum“ nicht: Es gibt keinen Punkt im Definitionsbereich, an dem die Funktion den Wert erreicht. Dafür nähert sich die Funktion diesem Wert beliebig nahe an.

Man definiert das *Supremum* als die *kleinste obere Schranke* der Funktion, d.h. man sucht den kleinsten Wert M mit $f(x) \leq M$ für alle x im Definitionsbereich von f . Analog definiert man das *Infimum* als die *größte untere Schranke* der Funktion.

Definition 20.9 (Infimum und Supremum). Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) $y^* \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ist das *Supremum* von f , geschrieben $y^* = \sup_{x \in D} f(x) = \sup f$, wenn gilt:
 - (a) $f(x) \leq y^*$ für alle $x \in D$, d.h. y^* ist eine obere Schranke, und
 - (b) es gibt eine Folge $(x_n)_n$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y^*$.
- 2) $y_* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ist das *Infimum* von f , geschrieben $y_* = \inf_{x \in D} f(x) = \inf f$, wenn gilt:
 - (a) $f(x) \geq y_*$ für alle $x \in D$, d.h. y_* ist eine untere Schranke, und
 - (b) es gibt eine Folge $(x_n)_n$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_*$.

Dabei gilt für das Supremum und das Infimum: Die Folge $(x_n)_n$ braucht nicht zu konvergieren.

Bemerkung 20.10. 1) Jede Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat ein Supremum und ein Infimum.

2) Nimmt f sein Supremum an, d.h. gibt es ein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \sup_{x \in D} f(x)$, so ist das Supremum von f auch ein Maximum.

3) Nimmt f sein Infimum an, d.h. gibt es ein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x)$, so ist das Infimum von f auch ein Minimum.

Beispiel 20.11. 1) Es sind

$$\sup_{x \in]0, \infty[} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{und} \quad \inf_{x \in]0, \infty[} \frac{1}{x} = 0,$$

und

$$\sup_{x \in]0, 1]} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{und} \quad \inf_{x \in]0, 1]} \frac{1}{x} = 1 = \min_{x \in]0, 1]} \frac{1}{x}.$$

2) Für den Arcus Tangens ist $\sup_{x \in \mathbb{R}} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ und $\inf_{x \in \mathbb{R}} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.

Eine besondere Eigenschaft von stetigen Funktionen ist, dass sie auf einem Intervall $[a, b]$ immer ein Minimum und Maximum besitzen.

Satz 20.12 (Existenz vom Minimum und Maximum). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es Stellen $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit*

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \text{für alle } x \in [a, b],$$

d.h. f nimmt auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Insbesondere sind stetige Funktionen auf kompakten Intervallen beschränkt. Kürzer kann man den Satz wie folgt formulieren.

Satz 20.13 (Existenz vom Minimum und Maximum). *Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen besitzen ein Minimum und ein Maximum.*

Vorlesung 21

Differenzierbarkeit

21.1 Definition

Zur Motivation sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Intervall I und $x_0, x_1 \in I$. Dann lässt sich eine Gerade durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ legen, eine sogenannte *Sekante*. Die Steigung der Sekante ist $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$. Die Sekante wird daher durch

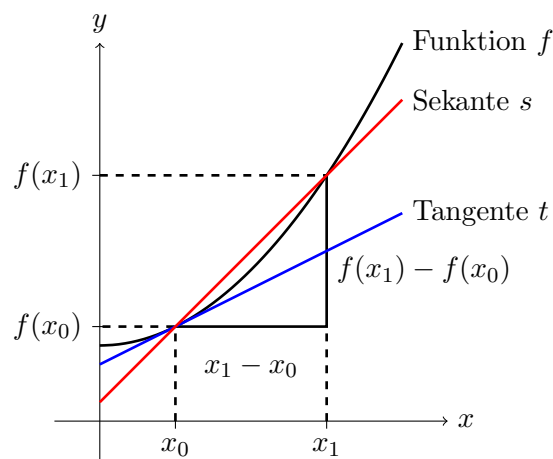
$$s(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

beschrieben. Für $x_1 \rightarrow x_0$ geht die Sekante in die *Tangente*

$$t(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

über (falls diese existiert). Die Steigung der Tangente ist

$$m = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$



Definition 21.1 (Differenzierbarkeit). Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- 1) f heißt *differenzierbar in* $x_0 \in D$, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt *Ableitung* von f in x_0 .

- 2) f heißt *differenzierbar auf* D , falls f in allen $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Dann heißt die Abbildung

$$f' : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x),$$

die *Ableitung* von f .

Den Übergang von f zu f' nennt man *ableiten* oder *differenzieren*.

Beachten Sie: Damit der Grenzwert für $f'(x_0)$ überhaupt definiert ist, muss es Folgen in $D \setminus \{x_0\}$ geben, die gegen x_0 konvergieren (vgl. Definition 19.1). In „isolierten Punkten“ kann man nicht ableiten. Für $D =]-3, 2[\cup \{3\}$ ist z.B. 3 ein Punkt, in dem man nicht ableiten kann.

Bemerkung 21.2. 1) *Umformulierung der Definition:* Mit $h := x - x_0$ ist

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- 2) *Weitere Schreibweisen:* Schreibt man x statt x_0 und Δx statt h und $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, so hat man die weiteren Schreibweisen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x).$$

Das Δ wird oft als Differenz zweier Werte gedacht.

- 3) In der Physik wird oft $\dot{f}(t)$ statt $f'(t)$ geschrieben, wenn t die Zeit bezeichnet.

Beispiel 21.3. 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist differenzierbar mit $f'(x) = 2x$: Für $x \neq x_0$ ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0,$$

also

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Da x_0 beliebig war, ist $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

2) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, denn

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

3) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, dann ist f in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & h > 0, \\ -1 & h < 0, \end{cases}$$

so dass der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ nicht existiert. In allen anderen Punkten ist f aber differenzierbar: $f'(x) = 1$ für $x > 0$ und $f'(x) = -1$ für $x < 0$.

Als erste Beobachtung halten wir fest, dass differenzierbare Funktionen stetig sind. Andersherum: Ist eine Funktion nicht stetig, brauchen wir gar nicht erst untersuchen, ob sie differenzierbar ist.

Satz 21.4. *Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.*

Beweis. Dies folgt aus

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

für $x \rightarrow x_0$, also $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. □

21.2 Interpretation der Ableitung

Geometrische Interpretation: Die Tangente. Geometrisch ist der Differenzenquotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(x_0, f(x_0))$, und der Differentialquotient $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ist die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Die Tangente wird dabei durch die Gleichung

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

beschrieben. Insbesondere sind differenzierbare Funktionen solche, deren Graph eine Tangente besitzt, und die in diesem Sinne glatt sind. Funktionen mit Knickstellen (wie der Absolutbetrag in 0) sind hingegen nicht differenzierbar.

Analytische Interpretation: Lineare Approximation. Anschaulich ist $f(x) \approx t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ für x in der Nähe von x_0 ist. Was bedeutet „ \approx “ genau? Für den *Rest* oder *Fehler* gilt

$$R(x) = f(x) - t(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

und damit $R(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow x_0$. Weiter ist

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

und für $x \rightarrow x_0$ ist dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Der Fehler bei der Approximation wird also schneller klein als $x - x_0$, also schneller als linear. Man kann die Differentiation daher auffassen als Approximation von Funktionen durch lineare Funktionen¹ mit „schnell verschwindendem“ Fehler:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x), \quad \text{mit } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Man kann sich auch leicht überlegen: Ist $m(x - x_0) + b$ eine lineare Approximation von f in x_0 , so dass der Fehler $R(x)$ und $R(x)/(x - x_0)$ für $x \rightarrow x_0$ gegen Null gehen, so ist $m = f'(x_0)$ und $b = f(x_0)$: *Die Tangente ist die beste lineare Approximation an f in x_0 .*

Mehr zur Approximation einer Funktion durch Polynome sehen wir in Abschnitt 24.1.

Physikalische Interpretation: Die Geschwindigkeit. Wir betrachten ein Teilchen, dass sich entlang einer Geraden bewegt. Es bezeichne t die Zeit und $s = s(t)$ die Position zum Zeitpunkt t . Die *mittlere Geschwindigkeit* in $[t_0, t_1]$ ist

$$\Delta v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Um zu wissen, wie schnell das Teilchen zum Zeitpunkt t_0 ist, betrachtet man immer kleinere Zeitintervalle $[t_0, t_1]$, und erhält die *Momentangeschwindigkeit* zum Zeitpunkt t_0 durch Grenzübergang $t_1 \rightarrow t_0$:

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = s'(t_0).$$

21.3 Rechenregeln

Als erstes sammeln wir Rechenregeln für die Differentiation.

Satz 21.5 (Ableitungsregeln). *Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in D$. Dann gilt:*

- 1) *Linearität 1:* $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- 2) *Linearität 2:* $(cf(x))' = cf'(x)$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

¹Streng genommen ist $f(x) = ax + b$ nur für $b = 0$ eine lineare Funktion wie in Definition 15.1, für $b \neq 0$ eine *affin lineare Funktion*. Aus historischen Gründen wird aber auch für $b \neq 0$ von linearen Funktionen gesprochen.

3) *Produktregel:* $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

4) *Quotientenregel:* $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, falls $g(x) \neq 0$.

Insbesondere $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$.

5) *Kettenregel:* Ist $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar und $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ in $g(x)$ differenzierbar, so gilt $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.

Wegen 1) und 2) bilden differenzierbare Funktionen einen Vektorraum, der ein Teilraum des Vektorraums der stetigen Funktionen ist (Satz 21.4). Ableiten ist eine lineare Abbildung.

Beweis. Die Rechenregeln folgen leicht aus der Definition, wir geben zur Übung nur ein paar wichtige Schritte an. Für die Summe ist

$$\frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \rightarrow f'(x) + g'(x) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Für die Produktregel rechnet man

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &\rightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{für } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Für die Kettenregel rechnet man

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \rightarrow f'(g(x))g'(x) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Für den ersten Quotienten haben wir dabei $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$ verwendet (Stetigkeit von g).

Für $(1/g)'$ nutzen wir die Kettenregel: Die Äußere Funktion ist $1/x$ mit Ableitung $-1/x^2$, die Innere Funktion ist g . Anschließend folgt die Quotientenregel aus $(f(x)/g(x))' = (f(x) \cdot \frac{1}{g(x)})'$ mit der Produktregel und der Regel für $(1/g)'$. \square

Bemerkung 21.6. Merken Sie sich die Kettenregel als $f'(g(x))g'(x)$ (erst f' , dann g'), so herum stimmt es ebenfalls für Funktionen von mehreren Variablen in der „Analysis II für Ingenieurwissenschaften“. Dann kennen Sie die Regel schon.

Beispiel 21.7. 1) Es ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, differenzierbar mit $f'(x) = a$, denn

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(a(x+h) + b) - (ax + b)}{h} = \frac{ah}{h} = a \rightarrow a.$$

2) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$.

Das kann man per Induktion und Produktregel nachrechnen ($n = 0$ und $n = 1$ haben wir eben nachgerechnet) oder direkt, ganz ähnlich wie für x^2 in Beispiel 21.3: Mit der binomischen Formel ist

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{x^n + nx^{n-1}h + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} = nx^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \\ &\rightarrow nx^{n-1} \quad \text{für } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

- 3) *Polynome sind differenzierbar*: $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, ist differenzierbar als Linearkombination der differenzierbaren Funktionen x^n .
- 4) *Rationale Funktionen sind differenzierbar*: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, mit Polynomen p, q ist differenzierbar in $D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid q(x) = 0\}$ nach der Quotientenregel.
- 5) *Die Exponentialfunktion ist differenzierbar*: $\exp'(x) = \exp(x)$. Das rechnen wir in Vorlesung 26 nach.
- 6) *Sinus und Cosinus sind differenzierbar*:

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \cos(x), \\ \cos'(x) &= -\sin(x).\end{aligned}$$

Für die Ableitungen von Sinus und Cosinus benötigen wir die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

Den ersten kennen wir aus Beispiel 19.5, den zweiten erhalten wir als

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x) - 1}{x} &= \frac{(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)}{x(\cos(x) + 1)} = \frac{\cos(x)^2 - 1}{x(\cos(x) + 1)} = \frac{-\sin(x)^2}{x(\cos(x) + 1)} \\ &= \frac{\sin(x)}{x} \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + 1} \rightarrow 1 \cdot \frac{-0}{2} = 0.\end{aligned}$$

Für die Ableitung des Sinus rechnen wir (mit den Additionstheoremen)

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \sin(x) \underbrace{\frac{\cos(h) - 1}{h}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\rightarrow 1} \cos(x) \rightarrow \cos(x),\end{aligned}$$

also $\sin'(x) = \cos(x)$, und genauso für den Cosinus

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} \rightarrow -\sin(x),\end{aligned}$$

also $\cos'(x) = -\sin(x)$.

- 7) Wir leiten $f(x) = \sin(x^2)$ mit der Kettenregel ab: $\sin(t)$ ist die äußere Funktion, x^2 die innere Funktion, also ist

$$f'(x) = \sin'(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Für $f(x) = (\sin(x))^2$ ist t^2 die äußere Funktion, $\sin(x)$ die innere Funktion, also

$$f'(x) = 2\sin(x)\sin'(x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Vorlesung 22

Erste Anwendungen der Differenzierbarkeit

22.1 Ableitung der Umkehrfunktion

Als erste Anwendung leiten wir aus den Rechenregeln eine Formel zur Ableitung der Umkehrfunktion her.

Ist f umkehrbar und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist auch die Umkehrabbildung f^{-1} differenzierbar.

Satz 22.1 (Ableitung der Umkehrfunktion). *Seien I und J Intervalle. Sei $f : I \rightarrow J$ differenzierbar und umkehrbar mit $f'(x) \neq 0$ für $x \in I$. Dann ist auch $f^{-1} : J \rightarrow I$ differenzierbar mit*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Beweis. Die Differenzierbarkeit von f^{-1} ist nicht ganz einfach zu zeigen und wir verzichten auf diesen Teil. Wir rechnen nur die Formel für $(f^{-1})'$ nach: Es gilt

$$x = f(f^{-1}(x)).$$

Differentiation und Anwendung der Kettenregel ergeben

$$1 = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x),$$

also

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

wobei natürlich $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ sein muss. □

Beispiel 22.2 (Natürlicher Logarithmus). Der natürliche Logarithmus $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$, für die $\exp'(x) = \exp(x)$ gilt. Mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion ist

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Beispiel 22.3 (Wurzeln). Die Funktion $f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$, $x \mapsto x^n$, ist differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = nx^{n-1}$. Wir werden später nachweisen, dass sie auch umkehrbar ist. Für ihre Inverse, die n -te Wurzel

$$f^{-1} :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[, \quad x \mapsto \sqrt[n]{x},$$

gilt

$$(f^{-1})'(x) = (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{f'(\sqrt[n]{x})} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}.$$

Speziell für die Quadratwurzel ($n = 2$) ist

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Beachten Sie, dass das nur auf $]0, \infty[$ geht, in $x = 0$ ist die n -te Wurzel nicht differenzierbar, wohl aber stetig.

22.2 Nullstellen

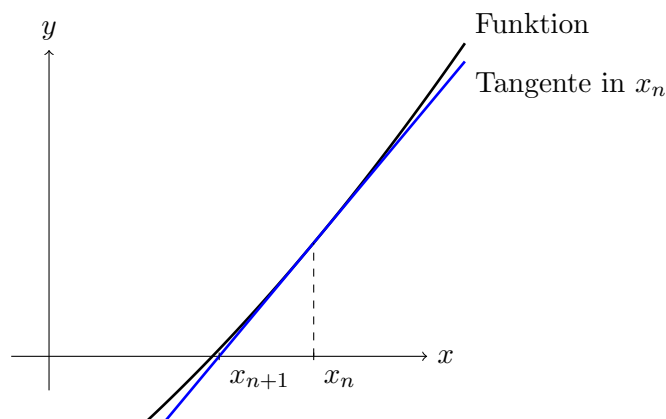
Wie bei Stetigkeit wenden wir uns der Aufgabe zu, Nullstellen zu bestimmen. Wir lernen das sogenannte *Newton-Verfahren* zur numerischen Approximation von Nullstellen kennen. Wie beim Bisektionsverfahren (Abschnitt 20.1) wird eine Folge konstruiert, die gegen die Nullstelle konvergiert.

Newton-Verfahren. Wähle einen Startwert x_0 „nahe“ der Nullstelle x^* von f . Ist x_n gegeben, konstruieren wir x_{n+1} wie folgt: Wir approximieren f in x_n durch ihre Tangente,

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

und bestimmen x_{n+1} als Nullstelle der Tangente, also aus

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0.$$



Auflösen ergibt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dabei setzen wir voraus, dass $f'(x_n) \neq 0$, und auch dass $f'(x^*) \neq 0$. Unter gewissen Voraussetzungen konvergiert die Folge $(x_n)_n$ gegen eine Nullstelle von f . Näheres können Sie in der „Numerik I für Ingenieurwissenschaften“ lernen.

Beispiel 22.4. Sei $f(x) = x^2 - a$ mit gegebenem $a > 0$. Die Nullstellen sind natürlich $\pm\sqrt{a}$, und es ist $f'(x) = 2x$. Damit ergibt sich die Folge von Näherungen an die Nullstelle:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Dies ist genau die Wurzelfolge aus Beispiel 18.10.

Zur Illustration betrachten wir $a = 3$. Was ist $\sqrt{3} = ?$ Wähle $x_0 = 2$ als erste Näherung. Dann ist

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = 1 + \frac{3}{4} = 1,75,$$

schon die erste Nachkommastelle ist korrekt. Die weiteren Folgenglieder sind:

$$x_0 = 2.0000000000000000$$

$$x_1 = \underline{1.7500000000000000}$$

$$x_2 = \underline{1.732142857142857}$$

$$x_3 = \underline{1.732050810014727}$$

$$x_4 = \underline{1.732050807568877},$$

wobei korrekte Stellen unterstrichen sind. Schon nach vier Schritten sind 15 Nachkommastellen korrekt berechnet.

22.3 Höhere Ableitungen

Ist $f : \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz D differenzierbar, so ist $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, wieder eine Funktion. Ist f' differenzierbar, so schreiben wir $f'' = (f')'$ für die *zweite Ableitung* von f . Diese kann wieder stetig oder differenzierbar sein, usw. Wir definieren die k -te Ableitung von f per Induktion:

$$f^{(0)} := f, \quad f^{(k)} := (f^{(k-1)})' \quad \text{für } k \geq 1.$$

Die 0-te Ableitung ist die Funktion selbst, $f^{(0)} = f$, und es sind $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = (f')' = f''$, usw. Beachten Sie: Die Ordnung der Ableitung wird dabei in runden Klammern geschrieben, um Missverständnisse zu vermeiden. Eine weitere oft verwendete Schreibweise ist

$$\frac{d^k f}{dx^k} := f^{(k)}.$$

Im Fall $k = 1$ schreiben wir nur $\frac{df}{dx}$, vergleiche Bemerkung 21.2.

Bemerkung 22.5. Interpretation der zweiten Ableitung:

- Geometrische Interpretation: $f''(x)$ beschreibt die *Krümmung* des Funktionsgraphen von f in x . Punkte, in denen f'' das Vorzeichen ändert, heißen *Wendepunkte*.
- Physikalische Interpretation: Die zweite Ableitung ist die Ableitung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung.

Nicht jede differenzierbare Funktion ist auch zweimal differenzierbar.

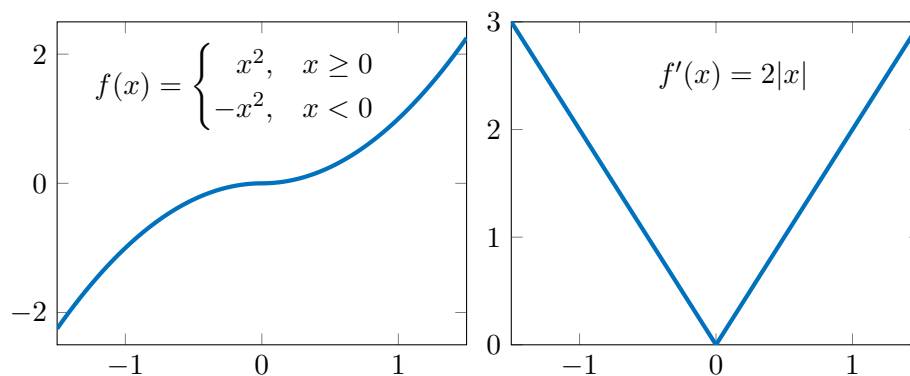
Beispiel 22.6. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0, \end{cases}$$

ist differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}, \quad \text{also} \quad f'(x) = 2|x|.$$

Daher ist f' nicht in 0 differenzierbar.



22.4 Regel von Bernoulli/de l'Hospital

Die Regel von Bernoulli/de l'Hospital hilft bei der Berechnung von Grenzwerten von Quotienten f/g .

Satz 22.7 (Regel von Bernoulli/de l'Hospital). Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Weiter gelte

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow b} g(x) \in \{-\infty, \infty\}.$$

Falls $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ existiert (und $g'(x) \neq 0$ für alle x nahe b), dann ist

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Gleiches gilt für Grenzwerte $x \rightarrow a$.

Bemerkung 22.8. 1) Es kommt vor, dass man den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ auch erst mit der Regel von l'Hospital berechnet, die Regel also mehrfach anwendet.

2) Bei Grenzwerten „ $0 \cdot \infty$ “ kann man oft umformen und anschließend die Regel von l'Hospital anwenden:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Beispiel 22.9. 1) Was ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$? Hier gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

so dass die erste Bedingung gegeben ist. Weiter ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin'(x)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1,$$

also auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

2) Wir bestimmen den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$. Hier ist $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, aber

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin'(x)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{1}$$

existiert nicht. Das heißt aber nicht, dass der ursprüngliche Grenzwert nicht existiert, sondern nur, dass die Regel von l'Hospital nicht angewendet werden kann. Da $\sin(x)$ beschränkt ist und $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 0$, ist auch $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

3) Wir bestimmen den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$. Zähler und Nenner konvergieren gegen 0, und

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x}.$$

Wieder konvergieren Zähler und Nenner gegen 0, und

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin'(x)}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2},$$

also ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ nach zweimaliger Anwendung der Regel von l'Hospital.

4) Wir bestimmen den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x)$. Hier ist $x \rightarrow 0$ und $\ln(x) \rightarrow -\infty$, so dass wir nicht direkt die Regel von l'Hospital anwenden können. Jedoch ist

$$x \ln(x) = \frac{\ln(x)}{1/x}$$

und nun sind die Grenzwerte von Zähler und Nenner $\pm\infty$. Zudem ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln'(x)}{(1/x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0,$$

also auch $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

5) Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Auch hier kann man die Regel von l'Hospital gewinnbringend einsetzen, allerdings mit einem Trick. Für $n > |a|$ ist

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \exp\left(\ln\left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right)\right) = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right),$$

also, da \exp stetig ist,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right).$$

Nun kommt der Trick: Wir ersetzen $n \in \mathbb{N}$ durch $x \in \mathbb{R}$ und betrachten einen Grenzwert von Funktionen, für den wir die Regel von l'Hospital wie im letzten Beispiel anwenden können:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}} \cdot \frac{-a}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{1 + \frac{a}{x}} = a.$$

Daher ist auch $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = a$ und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right) = \exp(a).$$

Vorlesung 23

Mittelwertsatz und Anwendungen

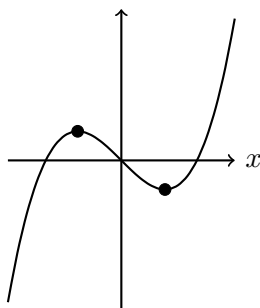
Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, Extremwerte und Extremstellen von differenzierbaren Funktionen zu bestimmen. Für stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall konnten wir immerhin deren Existenz garantieren. Nun lernen wir mit Hilfe der Differentialrechnung Methoden kennen, um Extremstellen zu charakterisieren.

Dabei hilft der Mittelwertsatz, einer der zentralen Sätze über differenzierbare Funktionen.

23.1 Extremwerte

Die Extremwerte einer Funktion bezeichnen die größten und kleinsten Werte, die die Funktion annimmt. Das Maximum ist der größte angenommene Wert, das Minimum ist der kleinste angenommene Wert; vergleiche Definition 20.5. Unter einem Extremum versteht man ein Minimum oder Maximum. (Plural: Maxima, Minima und Extrema.) In Abschnitt 20.2 haben wir gesehen, dass eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ immer Minimum und Maximum besitzt (Satz 20.12).

Mit der Differentialrechnung lassen sich Extremalstellen mit Hilfe der Ableitung bestimmen. Da die Ableitung $f'(x_0)$ nur von den Werten von f nahe x_0 abhängt, überrascht es vielleicht nicht, dass man nicht nur die Extrema der Funktion findet, sondern auch solche Punkte, die in einer kleinen Umgebung wie Extrema sind, z.B. die markierten Punkte:

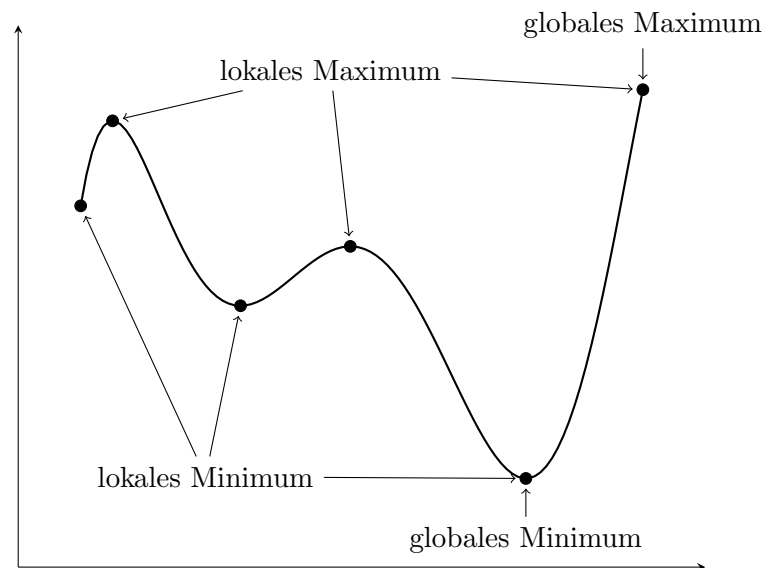


Dies sind so genannte *lokale* Extremwerte (siehe Definition 23.1 unten). Zur Unterscheidung nennt man das Minimum und Maximum dann *globales Minimum* und *globales Maximum*, was wir gleich mit wiederholen.

Definition 23.1 (Lokale und globale Extrema). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Man nennt ein $x_0 \in D$

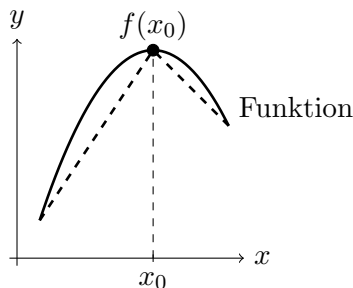
- 1) *Stelle eines globalen Maximums*, falls $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D$.
Man nennt dann $f(x_0)$ *das globale Maximum*.
- 2) *Stelle eines globalen Minimums*, falls $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$.
Man nennt dann $f(x_0)$ *das globale Minimum*.
- 3) *Stelle eines lokalen Maximums*, falls es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt $f(x_0) \geq f(x)$.
Man nennt dann $f(x_0)$ *ein lokales Maximum*.
- 4) *Stelle eines lokalen Minimums*, falls es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt $f(x_0) \leq f(x)$.
Man nennt dann $f(x_0)$ *ein lokales Minimum*.

Gilt sogar $>$ statt \geq bzw. $<$ statt \leq , so spricht man von *strengen* oder *strikten* lokalen oder globalen Extrema.



Das globale Maximum ist der größte Wert, den die Funktion auf ihrem Definitionsbereich annimmt. Dieser Wert ist eindeutig, kann aber an mehreren Stellen angenommen werden. Für ein lokales Maximum reicht es, dass die Funktion in einer kleinen Umgebung kleiner als dieser Wert ist. Das globale Maximum ist auch ein lokales Maximum. Entsprechendes gilt für globale und lokale Minima.

Nimmt die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt $x_0 \in]a, b[$ ein Maximum an, dann haben die Sekanten links davon eine Steigung ≥ 0 und rechts davon eine Steigung ≤ 0 .



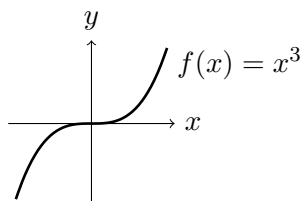
Ist f dann in x_0 differenzierbar, so ist die Ableitung $f'(x_0)$ der Grenzwert der Steigungen der Sekanten, also einerseits ≥ 0 , andererseits ≤ 0 , und deshalb ist $f'(x_0) = 0$. Wir notieren dieses Resultat.

Satz 23.2 (Notwendiges Extremwertkriterium). *Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ im inneren Punkt x_0 differenzierbar. Wenn x_0 eine lokale Extremstelle ist, so ist die Ableitung dort Null: $f'(x_0) = 0$.*

In Randpunkten muss das nicht sein.

Bemerkung 23.3. Das ist nur eine *notwendige* Bedingung, d.h.

- in einem lokalen Extremum ist $f'(x_0) = 0$,
- aber $f'(x_0) = 0$ kann gelten, ohne dass in x_0 ein lokales Extremum vorliegt. Ein Beispiel ist $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Dann hat $f'(x) = 3x^2$ eine Nullstelle in 0, dort hat f aber kein lokales Extremum.



Kandidaten für lokale Extremstellen. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so sind die einzigen Kandidaten für lokale Extremstellen:

- die Randpunkte a und b ,
- die Nullstellen von f' in $]a, b[$. (Die Nullstellen von f' heißen auch *kritische Punkte* oder *stationäre Punkte* von f .)

Typischerweise sind das nur endlich viele Punkte, und man kann ausprobieren, wo f am größten oder kleinsten ist. Dort sind dann wirklich das globale Maximum und Minimum, da f stetig auf einem abgeschlossenen Intervall ist (siehe Satz 20.12).

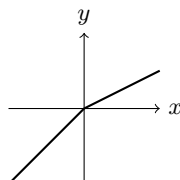
Ist f im Punkt x_0 *nicht* differenzierbar, so kann dort ebenfalls ein lokales Extremum vorliegen.

Beispiel 23.4. 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, hat in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum $f(0) = 0$ (das sogar das globale Minimum ist). Allerdings existiert die Ableitung von $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ nicht, so dass wir die lokale Extremstelle nicht über die Bedingung $f'(x) = 0$ finden können.

2) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ x/2 & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. Daher ist x_0 ein Kandidat für eine Extremstelle, aber f hat dort kein lokales Extremum:



23.2 Mittelwertsatz

Der folgende Satz ist von fundamentaler Wichtigkeit in der Differentialrechnung.

Satz 23.5 (Mittelwertsatz). Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Sind $a, b \in I$ beliebig mit $a < b$, so gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit

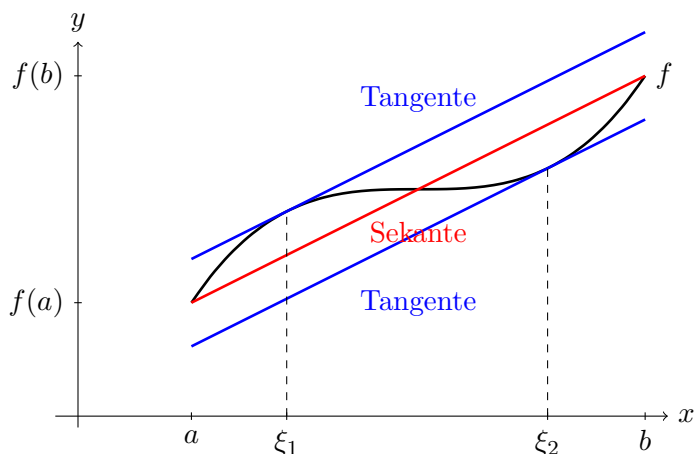
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Anschaulich bedeutet der Mittelwertsatz, dass es irgendwo eine Tangente gibt, die die gleiche Steigung wie die Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ besitzt.

Beweis. Wir betrachten die Differenz zwischen f und der Sekante: $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right).$$

Dann sind $g(a) = 0$ und $g(b) = 0$. Da g stetig auf $[a, b]$ ist, hat g mindestens einen Extremwert ξ in $]a, b[$. Da g aber in $]a, b[$ differenzierbar ist (als Differenz differenzierbarer Funktionen), ist dann $g'(\xi) = 0$. Da $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ gilt $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, wie behauptet. \square



Bezeichnet $s(t)$ den zum Zeitpunkt t zurückgelegten Weg, so besagt der Mittelwertsatz, dass es einen Zeitpunkt τ gibt, zu dem die Momentangeschwindigkeit gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit ist:

$$v(\tau) = s'(\tau) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

Im Mittelwertsatz ist die Stelle ξ zunächst nicht bekannt, man weiß nur, dass es sie gibt. Viele Anwendungen des Mittelwertsatzes betreffen aber Situationen, wo man die Ableitung überall gut kennt und damit Rückschlüsse auf die Funktion selbst zieht. *Der Mittelwertsatz ist die Brücke von Ableitungsinformationen zu Informationen über die Funktion selbst.*

23.3 Anwendungen des Mittelwertsatzes

Eine der wichtigsten Anwendungen des Mittelwertsatzes ist das Monotoniekriterium.

Satz 23.6 (Monotoniekriterium). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gilt:*

- 1) $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf $[a, b]$.
- 2) $f'(x) < 0$ für alle $x \in]a, b[\Rightarrow f$ ist streng monoton fallend auf $[a, b]$.
- 3) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ ist monoton wachsend auf $[a, b]$.
- 4) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ ist monoton fallend auf $[a, b]$.

Beweis. 1) Seien $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\xi \in]x_1, x_2[$ mit

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0,$$

also $f(x_2) > f(x_1)$, so dass f streng monoton wachsend ist. 2) und „ \Rightarrow “ in 3) und 4) gehen genauso. Die Rückrichtung sieht man direkt mit der Definition: Ist f monoton wachsend und $x \in]a, b[$, so gilt $\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq 0$ für alle $x_2 \in [a, b]$ mit $x_2 \neq x$, also

$$f'(x) = \lim_{x_2 \rightarrow x} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq 0.$$

Genauso für monoton fallendes f . □

Satz 23.7 (Konstanzkriterium). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gilt: $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[\Leftrightarrow f$ ist konstant auf $[a, b]$.*

Beweis. „ \Leftarrow “ ist klar. Zu „ \Rightarrow “: Wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$ ist, dann ist auch $f'(x) \geq 0$ und $f'(x) \leq 0$, also ist f zugleich monoton wachsend und monoton fallend, und damit konstant. □

Bemerkung 23.8. 1) Ist f in einem Randpunkt a oder b (oder in beiden Randpunkten) nicht definiert, so gilt der Satz immer noch, wenn man den betroffenen Punkt aus $[a, b]$ entfernt. Ist z.B. f nicht in a definiert, so ersetzt man $[a, b]$ durch $]a, b]$.

2) In 1) und 2) gilt nur die Richtung „ \Rightarrow “. Die andere Richtung ist im Allgemeinen falsch. Beispiel: Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ist streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

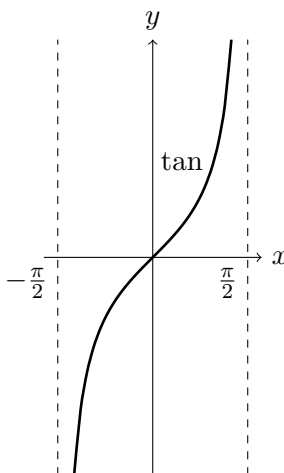
Beispiel 23.9. Wir zeigen, dass der Tangens $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ streng monoton wachsend auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ist. Das kann man mit der Definition versuchen, dann muss man zeigen, dass

$$x < y \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(y)}{\cos(y)}$$

gilt. Einfacher ist es mit dem Monotoniekriterium. Mit der Quotientenregel findet man

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} > 0,$$

also ist \tan streng monoton wachsend.

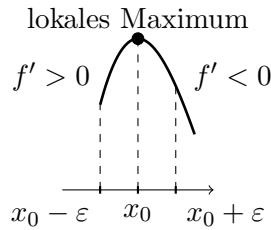


Aus dem Monotoniekriterium erhalten wir einen ersten Test für Extremwerte.

Satz 23.10 (Extremwert-Test). Sei f differenzierbar im offenen Intervall $]a, b[$ und sei x_0 ein kritischer Punkt, also $f'(x_0) = 0$. Dann gilt:

- 1) f hat in x_0 ein lokales Maximum, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit: $f'(x) > 0$ für alle $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$.
- 2) f hat in x_0 ein lokales Minimum, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit: $f'(x) < 0$ für alle $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$.

Beweis. 1) besagt, dass f links von x_0 wächst, und rechts von x_0 wieder fällt, also hat f in x_0 ein Maximum. Für lokale Minima geht es genauso. \square



- Bemerkung 23.11.** 1) Ist $f'(x) > 0$ für alle x links *und* rechts von x_0 (bzw. $f'(x) < 0$), so ist f streng monoton wachsend (bzw. fallend) und hat damit *kein* Extremum.
- 2) Der Test gibt nur für innere Punkte Auskunft. Randpunkte müssen immer getrennt betrachtet werden.
- 3) Ist f in a noch stetig, so gilt:
- Ist $f'(x) > 0$ in $]a, a + \varepsilon[$, so ist f dort monoton wachsend und f hat in a ein lokales Minimum.
 - Ist $f'(x) < 0$ in $]a, a + \varepsilon[$, so ist f dort monoton fallend und f hat in a ein lokales Maximum.

Analog wenn f in b noch stetig ist:

- Ist $f'(x) > 0$ in $]b - \varepsilon, b[$, so ist f dort monoton wachsend und f hat in b ein lokales Maximum.
- Ist $f'(x) < 0$ in $]b - \varepsilon, b[$, so ist f dort monoton fallend und f hat in b ein lokales Minimum.

In Satz 24.6 werden wir einen weiteren Test für Extremwerte kennen lernen, der auf höheren Ableitungen der Funktion beruht.

Beispiel 23.12. Bestimme alle lokalen und globalen Extremwerte von $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Wir suchen zuerst nach kritischen Punkten in $] -1, 2[$. Es ist

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1),$$

somit hat f die beiden kritischen Punkte 0 und 1. Aus der Faktorisierung von f' können wir das Vorzeichen von f' ablesen:

x	-1	0	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

Neben den kritischen Punkten sind auch die Randpunkte Kandidaten für lokale Extrema. Mit dem Vorzeichen der ersten Ableitung erhalten wir: f hat

- in 0 ein lokales Maximum mit $f(0) = 1$,
- in 1 ein lokales Minimum mit $f(1) = 0$.
- in -1 ein lokales Minimum mit $f(-1) = -4$,
- in 2 ein lokales Maximum mit $f(2) = 5$.

Somit hat f das globale Maximum 5 an der Stelle $x = 2$ und das globale Minimum -4 an der Stelle $x = -1$.

Vorlesung 24

Taylor-Approximation

24.1 Die Taylor-Approximation

Wir haben bisher gesehen, dass wir eine differenzierbare Funktion durch ihre Tangente annähern können,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Das liefert die Approximation von f durch das Polynom

$$p(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

vom Grad ≤ 1 mit $p(x_0) = 0$ und $p'(x_0) = f'(x_0)$. Der Fehler $R(x) = f(x) - p(x)$ wird dabei schneller klein als linear, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$.

Hoffnung: Durch hinzunahme weiterer Ableitungen erhalten wir eine bessere Approximation. Ist f dann n -mal differenzierbar, so wollen wir f durch ein Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

vom Grad $\leq n$ approximieren mit

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

d.h. die ersten Ableitungen von p und f sollen in x_0 übereinstimmen.

Dann gilt notwendigerweise:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n \\ p'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0)^1 + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}, \\ p''(x) &= 2!a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}, \\ p'''(x) &= 3!a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}, \\ &\vdots \\ p^{(n)}(x) &= n!a_n, \end{aligned}$$

also

$$f^{(k)}(x_0) = p^{(k)}(x_0) = k!a_k$$

so dass die Koeffizienten $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ des Polynoms eindeutig bestimmt sind.

Definition 24.1 (Taylorpolynom). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar, dann heißt

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

das n -te Taylorpolynom von f im Entwicklungspunkt x_0 .

Im Allgemeinen ist $f \neq T_n$ und wir schreiben $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ mit einem Restglied (oder Fehler) $R_n(x)$. Dabei misst $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ also den Abstand zwischen der Funktion f und dem Taylorpolynom T_n im Punkt x . Wie gut nähert das Taylorpolynom die Funktion an? Anders gefragt: Wie klein ist der Fehler R_n ? Antwort gibt der Satz von Taylor.

Satz 24.2 (Taylorformel). Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar im Intervall I , und sei $x_0 \in I$. Dann gilt

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x),$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad (24.1)$$

Ist f sogar $(n+1)$ -mal differenzierbar, so kann man das Restglied auch schreiben als

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (24.2)$$

mit einem ξ zwischen x und x_0 . Das Restglied in dieser Darstellung nennt man auch das Lagrange-Restglied. Es sieht so aus wie der nächste Summand im Taylorpolynom, nur dass das Argument der Ableitung die Zwischenstelle ξ statt x_0 ist.

Der Satz zeigt, dass der Fehler $R_n(x)$ für $x \rightarrow x_0$ sehr schnell gegen 0 geht, d.h. dass sich das Taylorpolynom wirklich sehr gut an die Funktion anschmiegt.

Bemerkung 24.3. 1) Für ein Polynom f vom Grad n gilt $f(x) = T_n(x)$, d.h. f stimmt mit seinem Taylorpolynom überein. Das kommt daher, dass $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle x ist und somit das Restglied (24.2) Null ist.

2) Ist f eine Funktion mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist $R_n(x) = 0$ und $f(x) = T_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad höchstens n .

3) Die Stelle ξ im Lagrange-Restglied liegt zwischen x_0 und x . Da $x > x_0$ oder $x < x_0$ sein kann, kann man das in Intervallschreibweise als $\xi \in]x, x_0[\cup]x_0, x[$ schreiben.

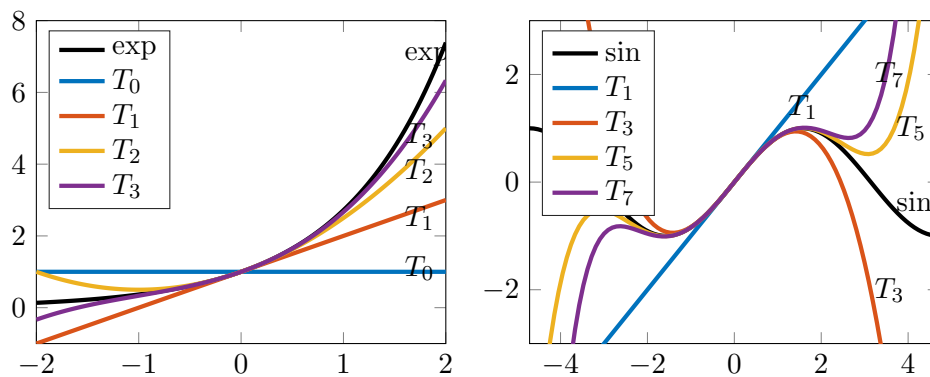
Beispiel 24.4. 1) Wir berechnen das Taylorpolynom n -ter Ordnung von e^x in $x_0 = 0$. Es ist $f'(x) = (e^x)' = e^x$, also $f^{(k)}(x) = e^x$ und dann $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ für alle k . Damit ist das Taylorpolynom n -ter Ordnung

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n.$$

Das zugehörige Restglied ist

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1},$$

wobei ξ von x abhängt und zwischen 0 und x liegt.



2) Wir berechnen das n -te Taylorpolynom von $\sin(x)$ in $x_0 = 0$. Es sind

$$f'(x) = \cos(x), f''(x) = -\sin(x), f'''(x) = -\cos(x), f^{(4)}(x) = \sin(x) = f(x),$$

d.h.

$$\sin^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x) \quad \text{und} \quad \sin^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist dann

$$\sin^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k,$$

also

$$T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Speziell sind

$$T_1(x) = x,$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!},$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

24.2 Extremwerte

Mit dem Satz von Taylor können wir ein hinreichendes Kriterium für (lokale) Extremstellen angeben, das auf den höheren Ableitungen der Funktion beruht.

Wir wissen schon:

- Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so besitzt f ein globales Minimum und ein globales Maximum (Satz 20.12).
- Ist f auch differenzierbar, so sind die einzigen Kandidaten für Extremstellen die Randpunkte a und b und die Punkte x mit $f'(x) = 0$ (Satz 23.2).
- Wenn die Ableitung ihr Vorzeichen an einem kritischen Punkt wechselt, so liegt dort ein Extremum vor (Satz 23.10).

Sie kennen sicher folgendes hinreichende Kriterium für ein lokales Extremum mit der zweiten Ableitung von f .

Satz 24.5. Sei f auf $[a, b]$ differenzierbar und $x_0 \in]a, b[$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann gilt:

- 1) Wenn $f''(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.
- 2) Wenn $f''(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.

Ist auch $f''(x_0) = 0$ (wie bei $f(x) = x^3$ oder $f(x) = x^4$ in $x_0 = 0$), so geben die höheren Ableitungen Auskunft.

Satz 24.6 (Lokale Extremwerte). Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal differenzierbare Funktion und sei x_0 ein innerer Punkt von I . Es gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

- 1) Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.
- 2) Ist n gerade, so hat f ein lokales Extremum:
 - Ist $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f ein lokales Maximum.
 - Ist $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f ein lokales Minimum.

Bemerkung 24.7. 1) Für $n = 1$ sagt der Satz noch einmal, dass innere Punkte mit $f'(x_0) \neq 0$ nicht als Extremstellen in Frage kommen.
2) Für $n = 2$ ist das Satz 24.5.

Beweis. Zum Beweis nutzen wir die Taylorformel:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) \\ &= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x), \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ sind. Also ist

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^n \left(\underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{\neq 0} + \underbrace{\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow x_0} \right)$$

und der Term in Klammern hat nah genug bei x_0 das selbe Vorzeichen wie $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Bei ungeradem n wechselt $(x - x_0)^n$ das Vorzeichen in x_0 , so dass $f(x)$ einmal kleiner und einmal größer als $f(x_0)$ ist, d.h. es liegt kein Extremum in x_0 vor.

Bei geradem n ist $(x - x_0)^n \geq 0$ für alle x . Ist dann $f^{(n)}(x_0) > 0$, so ist

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)^n}_{\geq 0} \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \right)}_{> 0} \geq f(x_0)$$

für x nah genug bei x_0 , d.h. f hat in x_0 ein Minimum. Ist hingegen $f^{(n)}(x_0) < 0$, so findet man genauso, dass f in x_0 ein Maximum hat. \square

Der Beweis zeigt, wie man die Taylorformel benutzen kann, um Eigenschaften von (einfachen) Polynomen auf (komplizierte) Funktionen zu übertragen.

Beispiel 24.8. 1) Bestimme die lokalen und globalen Extrema von $f : [-\frac{3}{2}, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$.

Suche zunächst nach lokalen Extremwerten im Innern:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

hat die Nullstellen $+1$ und -1 . Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = 6x,$$

damit ist

- $f''(-1) = -6 < 0$, d.h. f hat in -1 ein lokales Maximum $f(-1) = 2$,
- $f''(+1) = 6 > 0$, d.h. f hat in 1 ein lokales Minimum: $f(1) = -2$.

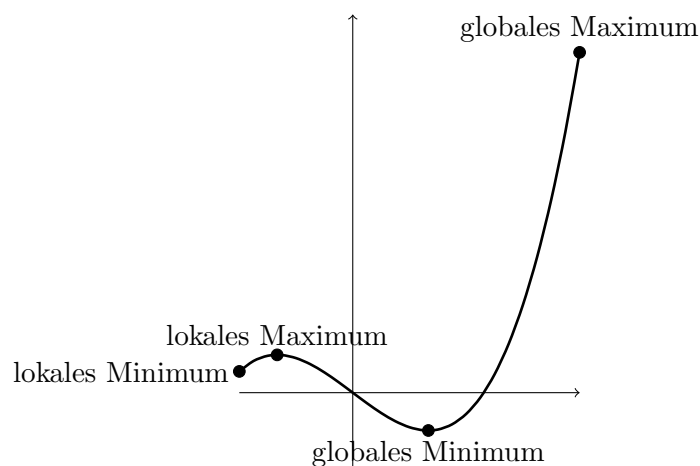
Untersuchung der Intervallenden: Da f auch noch in $-\frac{3}{2}$ und 3 differenzierbar ist, können wir hier auch die erste Ableitung betrachten:

$$f'(-3/2) = 3 \left(\frac{9}{4} - 1 \right) = \frac{15}{4} > 0, \quad f'(3) = 3(9 - 1) = 24 > 0,$$

und f ist monoton wachsend nahe der Randpunkte. Damit ist hat f in $-\frac{3}{2}$ ein lokales Minimum $f(-\frac{3}{2}) = \frac{9}{8}$ und in 3 ein lokales Maximum $f(3) = 18$.

Daher hat f ein globales Maximum in $x = 3$ und ein globales Minimum in $x = 1$.

Skizze der Funktion (y -Achse mit $1/4$ skaliert):



- 2) Hat $f(x) = x^2 + \cos(x)$ ein lokales Extremum in 0? Wir testen die ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \sin(x) & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= 2 - \cos(x) & f''(0) &= 1 > 0, \end{aligned}$$

also hat f in $x = 0$ ein lokales Minimum.

- 3) Hat $f(x) = \sin(x) - x$ ein lokales Extremum in 0? Wir testen die ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) - 1, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= -\sin(x), & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos(x), & f'''(0) &= -1 \neq 0, \end{aligned}$$

also hat f in 0 kein lokales Extremum.

Vorlesung 25

Anwendungen der Taylor-Approximation

25.1 Näherungsweise Berechnung von Funktionswerten

Eine wichtige Anwendung der Taylorformel steckt heute in jedem Computer: Die Berechnung von Funktionswerten. Das Taylorpolynom gibt die Möglichkeit, eine mehrfach differenzierbare Funktion in der Umgebung eines Entwicklungspunktes durch ein Polynom zu approximieren und den Approximationsfehler ($R_n = f - T_n$) qualitativ mit (24.1) oder quantitativ mit (24.2) abzuschätzen.

Beispiel 25.1. Berechne näherungsweise $\sqrt{4.4}$. Dazu betrachten wir die 2-te Taylorapproximation von $f(x) = \sqrt{x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 4$ (dort können wir die Quadratwurzel berechnen). Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}, & f(4) &= 2, \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, & f'(4) &= \frac{1}{4}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}, & f''(4) &= -\frac{1}{4 \cdot 2^3} = -\frac{1}{32}, \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}. \end{aligned}$$

Somit ist das 2-te Taylorpolynom von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 4$:

$$T_2(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2}(x-4)^2 = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2,$$

und damit

$$\begin{aligned} \sqrt{4.4} &\approx T_2(4.4) = 2 + \frac{1}{4}0.4 - \frac{1}{64}(0.4)^2 = 2.1 - \frac{1}{64} \cdot \frac{4^2}{100} = 2.1 - \frac{1}{400} = 2.1 - 0.0025 \\ &= 2.0975. \end{aligned}$$

Wir schätzen den Fehler ab:

$$R_2(x) = \frac{1}{3!} \frac{3}{8\sqrt{\xi^5}} (x-4)^3 = \frac{(x-4)^3}{2^4\sqrt{\xi^5}}$$

mit ξ zwischen $x_0 = 4$ und x . Für $x = 4.4$ finden wir

$$R_2(4.4) = \frac{0.4^3}{2^4\sqrt{\xi^5}} \leq \frac{0.4^3}{2^4\sqrt{4^5}} = \frac{0.1^3 \cdot 4^3}{2^9} = \frac{0.001}{8} = 0.000125.$$

Das bedeutet

$$\sqrt{4.4} \approx 2.0975 \pm 0.000125,$$

also

$$2.097375 = 2.0975 - 0.000125 \leq \sqrt{4.4} \leq 2.0975 + 0.000125 = 2.097625.$$

Taschenrechner oder Computer geben 2.0976177 (auf 7 Nachkommastellen gerundet). Die Approximation mit dem 2-ten Taylorpolynom gibt also schon drei richtige Nachkommastellen. Mit größerem n bekommt man noch genauere Ergebnisse.

Beispiel 25.2. Wir wollen nachweisen, dass für die Eulersche Zahl $e = e^1 < 3$ gilt. Dazu zeigen wir $e^{-1} > \frac{1}{3}$ mit einer Taylorapproximation der Exponentialfunktion. Nach Beispiel 24.4 ist

$$e^x = T_3(x) + R_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^\xi}{4!} x^4$$

mit einem ξ zwischen $x_0 = 0$ und x . Für $x = -1$ ist

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{e^\xi}{4!} = \frac{1}{3} + \frac{e^\xi}{4!},$$

wobei ξ zwischen 0 und -1 liegt. Wegen $e^\xi > 0$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}$, ist also $e^{-1} > \frac{1}{3}$ und somit $e < 3$.

Beispiel 25.3. Wir wollen die Funktionswerte der Exponentialfunktion auf $[-1, 1]$ berechnen. Dazu approximieren wir die Exponentialfunktion durch ihr Taylorpolynom und untersuchen, für welches n der Fehler $|R_n(x)|$ klein genug ist.

Das n -te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$ mit zugehörigem Lagrange-Restglied $R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$, vergleiche Beispiel 24.4. Da wir das Intervall $[-1, 1]$ betrachten, ist $|x| \leq 1$. Weiter ist ξ zwischen 0 und x , also ebenfalls in $[-1, 1]$. Daher gilt $e^\xi \leq e^1$ (Monotonie) und wegen $e \leq 3$ dann $|R_n(x)| \leq \frac{3}{(n+1)!}$.

Für $n = 8$ ist bereits $|R_8(x)| \leq 10^{-5} = 0.00001$, d.h. erst in der fünften Nachkommastelle haben wir einen Fehler von ± 1 , wenn wir $T_n(x)$ anstatt e^x verwenden. Für größere n wird die Genauigkeit noch besser.

25.2 Fehlerabschätzung

Wie wirken sich Messfehler bei Experimenten aus?

Beispiel 25.4. Sei $f(x) = 3x$. Wir messen x mit einem Fehler Δx und wollen die Auswirkung auf den beobachteten Wert f quantifizieren. Wir beobachten $f(x + \Delta x)$, d.h. wir sind interessiert am Fehler

$$\Delta f := f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x) - 3x = 3\Delta x,$$

d.h. der Fehler verdreifacht sich.

Im Beispiel war f linear und die Quantifizierung des Fehlers einfach. Bei nichtlinearen Funktionen f hilft die Taylorapproximation erster Ordnung von f in x weiter (mit Lagrange-Restglied):

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + f'(x)((x + \Delta x) - x) + \frac{1}{2}f''(\xi)((x + \Delta x) - x)^2 \\ &= f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Für den Fehler in f schreiben wir $\Delta f := f(x + \Delta x) - f(x)$ und erhalten

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2.$$

Für kleine Δx ist $(\Delta x)^2$ viel kleiner als Δx , also haben wir die *qualitative Fehlerapproximation*

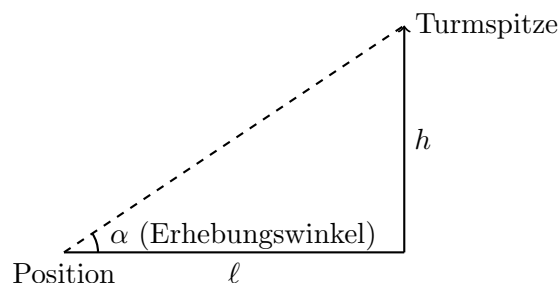
$$|\Delta f| \approx |f'(x)||\Delta x|.$$

Eine verlässliche Schranke für den Fehler liefert

$$|\Delta f| = |f'(x)\Delta x + \frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2| \leq |f'(x)||\Delta x| + \frac{1}{2} \max_{\xi} |f''(\xi)|(\Delta x)^2,$$

wenn man die zweite Ableitung abschätzen kann. Beim Maximum durchläuft ξ alle Werte zwischen x und $x + \Delta x$.

Beispiel 25.5. Berechnung der Turmhöhe h aus der Entfernung ℓ :



Wir nehmen an, dass wir die Distanz ℓ exakt kennen, und wollen die Höhe h des Turms in Abhängigkeit vom Winkel α bestimmen. Es ist

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{\ell}, \quad \text{also} \quad h = \ell \tan(\alpha).$$

Damit ist

$$h'(\alpha) = \ell \tan'(\alpha) = \frac{\ell}{(\cos(\alpha))^2}.$$

Ist zum Beispiel $\ell = 70$ m und $\alpha = \frac{\pi}{4}$, so ist $h = 70 \tan(\frac{\pi}{4}) = 70$ m mit dem Fehler

$$|\Delta h| \approx |h'(\alpha)| |\Delta \alpha| = \frac{70}{\cos(\frac{\pi}{4})^2} |\Delta \alpha| = 140 \cdot |\Delta \alpha|.$$

Ist dann zum Beispiel der Messfehler des Winkels $\Delta \alpha \approx \pm 1^\circ = \frac{\pi}{180}$, so folgt

$$|\Delta h| \approx \frac{140}{180} \pi \text{ m} \approx 2.44 \text{ m}.$$

Eine präzise Schranke für den Fehler erhalten wir mit

$$|\Delta h| \leq |h'(\alpha)| |\Delta \alpha| + \frac{1}{2} \max_{\alpha - \pi/180 \leq \xi \leq \alpha + \pi/180} |h''(\xi)| \cdot (\Delta \alpha)^2$$

Es ist

$$h''(\alpha) = 2\ell \frac{\tan(\alpha)}{(\cos(\alpha))^2},$$

also

$$\max_{\alpha - \pi/180 \leq \xi \leq \alpha + \pi/180} |h''(\xi)| \leq 2\ell \frac{\tan(\alpha + \pi/180)}{(\cos(\alpha + \pi/180))^2},$$

denn \tan ist monoton wachsend und \cos^2 ist monoton fallend nahe $\frac{\pi}{4}$. Damit ist

$$|\Delta h| \leq \frac{140}{180} \pi + 70 \frac{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180})}{(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}))^2} \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \approx 2.49.$$

Die qualitative Fehlerschätzung war also schon ganz gut.

Beispiel 25.6 (Wheatstone-Brücke). Bei der Wheatstone-Brücke zur Vergleichsmessung von Widerständen greift man auf einem Widerstandsdraht der Länge ℓ eine Strecke x so ab, dass ein Potentiometer Nullstellung anzeigt. Dann ist das Verhältnis von unbekanntem Widerstand R zu dem bekannten Vergleichswiderstand R_0

$$\frac{R}{R_0} = \frac{x}{\ell - x}.$$

Also ist

$$R = R(x) = \frac{R_0 x}{\ell - x}.$$

Ein Messfehler Δx am Abgleich produziert also einen Fehler

$$\Delta R \approx R'(x) \Delta x = \frac{R_0 \ell}{(\ell - x)^2} \Delta x.$$

Ist dann zum Beispiel $\ell = 10$ cm und erfolgt der Abgleich gegen den Vergleichswiderstand von 300Ω bei $x = 2$ cm mit einem Messfehler $\Delta x = \pm 0.1$ cm, so ist der gesuchte Widerstand $R = \frac{300 \cdot 2}{8} \Omega = 75 \Omega$ mit einer Genauigkeit $\Delta R \approx \frac{300 \cdot 10}{8^2} \cdot 0.1 \Omega = 4.7 \Omega$. Eine genaue Fehlerabschätzung erhält man mit

$$|\Delta R| \leq |R'(x)| \cdot |\Delta x| + \frac{1}{2} \max_{\xi \in [x - \Delta x, x + \Delta x]} |R''(\xi)| (\Delta x)^2 \leq 4.8 \Omega.$$

25.3 Diskretisierung von Ableitungen

Viele physikalische Gesetze sind durch Differentialgleichungen gegeben, also Gleichungen, die eine gesuchte Funktion und ihre Ableitungen enthalten, z.B. $y' = ay$, $y'' = -y$, ... Viele dieser Differentialgleichungen lassen sich nicht explizit lösen, so dass man auf numerische Lösungsverfahren angewiesen ist. Ein wichtiges Hilfsmittel dabei ist die Diskretisierung des Problems. Eine Möglichkeit bietet die Finite-Differenzen-Methode. Die gesuchte Funktion $y(x)$ wird dabei durch eine (diskrete) Zahlenfolge y_k ersetzt, die die Funktionswerte an den Stellen

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

approximieren soll. Dabei ist h die sogenannte *Diskretisierungskonstante*, und man hofft, für sehr kleines h eine gute Approximation $y_k \approx y(x_k)$ zu bekommen.

Dann braucht man auch eine Diskretisierung der Ableitung(en), die man aus der Taylorformel gewinnen kann. Aus der Taylorformel folgt, wenn h „klein“ ist,

$$\begin{aligned} f(x+h) &\approx f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2, \\ f(x-h) &\approx f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2, \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen liefert

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}. \quad (25.1)$$

Die erste Ableitung kann direkt mit der Definition approximiert werden:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (25.2)$$

Beispiel 25.7. Wir betrachten die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.5.$$

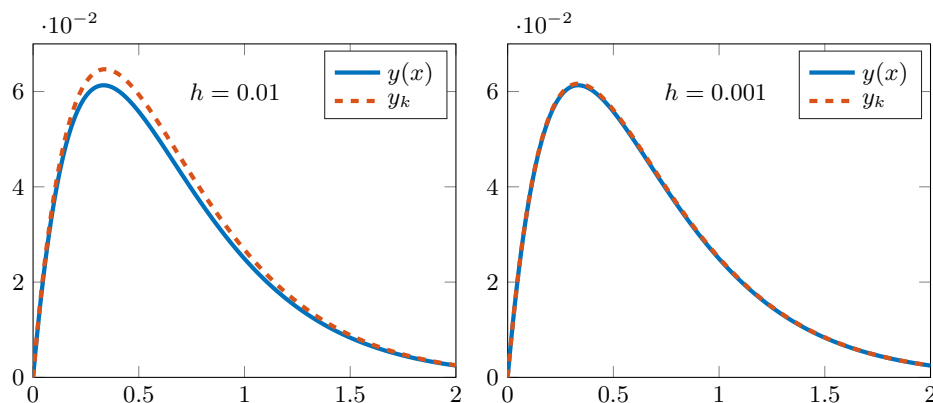
Wir diskretisieren diese mit den Approximationen (25.1) und (25.2) auf dem Gitter $x_0 = 0$ und $x_k = kh$ und erhalten die Differenzengleichung

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + 6\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + 9y_k = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0.5h.$$

Auflösen nach y_{k+1} liefert die Rekursion

$$y_{k+1} = \frac{(2 + 6h - 9h^2)y_k - y_{k-1}}{1 + 6h}, \quad y_0 = 0, \quad y_1 = 0.5h.$$

In diesem Fall kann man die Differentialgleichung auch exakt lösen und die exakte Lösung $y(x) = \frac{1}{2}xe^{-3x}$ mit der nach Diskretisierung berechneten Lösung vergleichen. Für $h = 0.01$ und $h = 0.001$ findet man zum Beispiel:



Mehr zu Differentialgleichungen lernen Sie in den Vorlesungen „Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften“ und „Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen“. Mehr zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen (in einer und mehreren Variablen) lernen Sie in der „Numerik II für Ingenieurwissenschaften“.

25.4 Taylorreihen

Wir beginnen mit dem Beispiel der Exponentialfunktion. Das n -te Taylorpolynom von e^x mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$$

mit zugehörigem Restglied

$$R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1},$$

wobei ξ zwischen 0 und x liegt. Da die Exponentialfunktion monoton wachsend ist, ist $e^\xi \leq e^{|x|}$, also

$$|R_n(x)| = \frac{|e^\xi|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

(Beispiel 18.7), d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Wegen $T_n(x) = e^x - R_n(x)$ konvergiert die Folge der Taylorpolynome gegen e^x :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Wir bezeichnen den Grenzwert von

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

formal mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

und nennen ihn die *Taylorreihe* von e^x im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Dies motiviert die folgende allgemeine Definition.

Definition 25.8 (Taylorreihe). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Die *Taylorreihe* von f im Entwicklungspunkt $x_0 \in D$ ist der Grenzwert der Taylorpolynome:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ existiert und ist gleich $f(x)$ genau dann, wenn das Restglied

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

Ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz von $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, $n = 0, 1, 2, \dots$, gegen $f(x)$ im Intervall $]a, b[$ ist

$$|f^{(n)}(x)| \leq A \cdot B^n \quad \text{für alle } x \in]a, b[$$

mit Konstanten A, B unabhängig von n . Dann ist nämlich

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{AB^{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} = A \frac{(B|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

nach Beispiel 18.7.

Bemerkung 25.9. Vorsicht:

- 1) Es kann passieren, dass $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, $n = 0, 1, 2, \dots$, für kein $x \neq x_0$ konvergiert.
- 2) Es kann passieren, dass $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, $n = 0, 1, 2, \dots$, zwar konvergiert, aber *nicht* gegen $f(x)$.

Ein Beispiel ist die Funktion $f(x) = e^{-1/x^2}$, $x \neq 0$, und $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Man kann zeigen, dass $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Daher ist die Taylorreihe die Nullfunktion, also ungleich $f(x)$ für $x \neq 0$.

Das sind aber eher die Ausnahmen.

Beispiel 25.10. 1) Für $f(x) = e^x$ ist $f^{(n)}(x) = e^x$, also $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Dies ergibt im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + R_n(x) \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Reihe konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen e^x , wie zu Beginn des Abschnitts nachgerechnet.

- 2) Für $f(x) = \sin(x)$ ist

$$\sin^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x), \quad \sin^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos(x).$$

Die Taylorreihe von Sinus im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist dann

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$$

Die Reihe konvergiert tatsächlich gegen $\sin(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$: Es gilt $|\sin^{(n)}(x)| \leq 1 = 1 \cdot 1^n$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, so dass das obige hinreichende Kriterium (mit $A = 1$ und $B = 1$) zeigt, dass die Taylorreihe gegen $\sin(x)$ konvergiert.

3) Für $f(x) = \cos(x)$ ist

$$\cos^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos(x), \quad \cos^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin(x).$$

Die Taylorreihe von \cos im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$$

Die Taylorreihe von Cosinus konvergiert gegen $\cos(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, denn wie beim Sinus gilt $|\cos^{(n)}(x)| \leq 1 = 1 \cdot 1^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass das hinreichende Kriterium für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Konvergenz der Taylorreihe gegen $\cos(x)$ liefert.

Die Reihen von Sinus und Cosinus können alternativ als Definition für Sinus und Cosinus genommen werden.

Mit den Reihendarstellungen von \exp , \cos und \sin können wir nun die Euler-Formel aus Vorlesung 7 nachrechnen: Für $x \in \mathbb{R}$ teilen wir die Reihe für e^{ix} in Summanden mit geraden ($k = 2\ell$) und mit ungeraden ($k = 2\ell + 1$) Summationsindizes:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ix)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} i^k x^k = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell)!} i^{2\ell} x^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!} i^{2\ell+1} x^{2\ell+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell)!} (i^2)^\ell x^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!} i(i^2)^\ell x^{2\ell+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} x^{2\ell} + i \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1} \\ &= \cos(x) + i \sin(x). \end{aligned}$$

Vorlesung 26

Elementare Funktionen 2

Bisher haben wir die Exponentialfunktion und ihre Eigenschaften verwendet. Wir wollen nun nachträglich eine solide Definition geben, mit der sich die Eigenschaften der Exponentialfunktion auch nachrechnen lassen. Weiter lernen wir in dieser und in der nächsten Vorlesung weitere elementare Funktionen kennen, die von der Exponentialfunktion abgeleitet sind.

26.1 Exponential- und Logarithmusfunktion

Ausgangspunkt: Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

konvergent. Die durch diesen Grenzwert definierte Funktion heißt *Exponentialfunktion*:

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Die Zahl $e := \exp(1)$ heißt die *Eulersche Zahl*. Man berechnet $e \approx 2.71828182845904$. Wir werden unten mit der allgemeinen Potenz sehen, dass $\exp(x) = e^x$ gilt.

Wir rechnen die Eigenschaften der Exponentialfunktion nach (vergleiche Satz 6.1 und Beispiel 21.7).

- 1) $\exp(x)$ ist differenzierbar mit $(\exp(x))' = \exp(x)$.

Es gilt

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Im vorletzten Schritt haben wir $k! = k \cdot (k-1)!$ verwendet, im letzten Schritt haben wir eine Indexverschiebung durchgeführt. Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert dies gegen

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

Das wir hier Ableitung und Grenzwert vertauschen können, benötigt etwas Arbeit, wir gehen da aber nicht drauf ein.

- 2) $\exp(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{0^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$.
- 3) Funktionalgleichung: Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \exp(x_2).$$

Das rechnet man nach durch Ausmultiplizieren der beiden Reihen von $\exp(x_1)$ und $\exp(x_2)$ und neu sortieren der Terme. Wir verzichten hier darauf. Insbesondere ist

$$\exp(x) \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1.$$

Daraus sehen wir: $\exp(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und

$$\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x).$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

- 4) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir wissen schon, dass $\exp(x) \neq 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Angenommen, es gibt ein x_0 mit $\exp(x_0) < 0$. Da $\exp(0) = 1 > 0$ und \exp stetig ist (da differenzierbar), hätte \exp dann nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle zwischen x_0 und 0, im Widerspruch zu $\exp(x) \neq 0$ für alle x .

- 5) \exp ist streng monoton wachsend, denn $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- 6) Für $x > 0$ ist

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{\geq 0} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

also

$$\frac{\exp(x)}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!}.$$

Da $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(n+1)!} = +\infty$, folgt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$$

für alle n . Daher gilt:

Für $x \rightarrow +\infty$ wächst $\exp(x)$ schneller als jede Potenz x^n .

Für $x \rightarrow -\infty$ ist hingegen

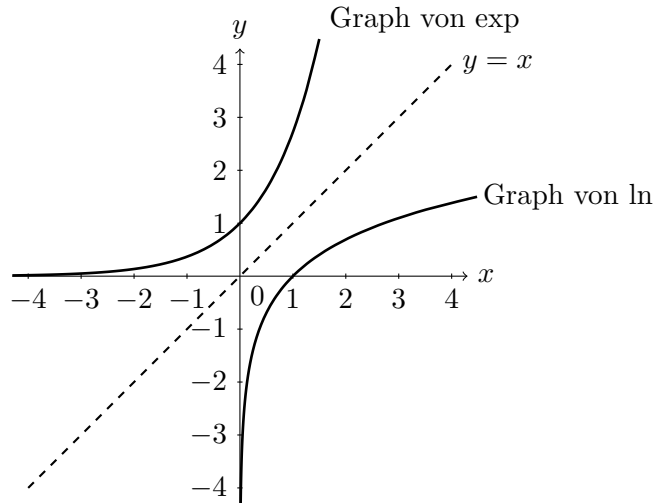
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0.$$

Insbesondere ist

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$$

injektiv (da streng monoton wachsend) und surjektiv (wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ und dem Zwischenwertsatz), also bijektiv und damit umkehrbar.

Die Umkehrfunktion heißt (*natürliche*) *Logarithmusfunktion*, $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$.



Für den Logarithmus gilt als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}\exp(\ln(x)) &= x \quad \text{für } x > 0, \\ \ln(\exp(x)) &= x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Weiter gilt für den Logarithmus (vergleiche Satz 6.2 und Beispiel 22.2):

- 1) Funktionalgleichung: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$.
- 2) $\ln(1) = 0$.
- 3) $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$ für alle $x > 0$.
- 4) $\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$ für alle $x, y > 0$.
- 5) $\ln(x^n) = n \ln(x)$ für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$.
- 6) $\ln :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv.
- 7) $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Zum Abschluss leiten wir eine Taylorentwicklung für den Logarithmus her. Da $\ln(x)$ in $x = 0$ nicht definiert ist, betrachten wir stattdessen $f(x) = \ln(1+x)$, mit $f(0) = \ln(1) = 0$. Dann sind

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -(1+x)^{-2}, & f''(0) &= -1, \\ f'''(x) &= (-1)^2 2(1+x)^{-3}, & f'''(0) &= 2,\end{aligned}$$

und allgemein (nachrechnen mit Induktion!):

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! (1+x)^{-k}, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!.$$

Im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ergibt dies die Taylorreihe

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$ gegen $\ln(1+x)$.

26.2 Allgemeine Potenzfunktion

Für $n \in \mathbb{N}$ haben wir a^n definiert als $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n mal). Aber was ist zum Beispiel a^π ? Dies kann man mit der allgemeinen Potenz erklären.

Definition 26.1 (allgemeine Potenz). Für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$a^b := \exp(b \ln(a)).$$

Dabei heißt a *Basis* und b *Exponent*. Das ergibt insbesondere zwei Funktionen:

- 1) die *allgemeine Potenz* a^x ,
- 2) die *Potenzfunktion* x^b .

Für die allgemeine Potenz gelten ähnliche Rechenregeln wie für die Exponentialfunktion.

Satz 26.2 (Rechenregeln für die allgemeine Potenz). Für reelles $a > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

- 1) $a^0 = 1$,
- 2) $a^{x+y} = a^x a^y$,
- 3) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,
- 4) $a^x > 0$,
- 5) $\ln(a^x) = x \ln(a)$,
- 6) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Beweis. Die Rechenregeln folgen aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion. Es ist $a^0 = \exp(0 \ln(a)) = \exp(0) = 1$. Weiter ist

$$a^{x+y} = \exp((x+y) \ln(a)) = \exp(x \ln(a) + y \ln(a)) = \exp(x \ln(a)) \exp(y \ln(a)) = a^x a^y.$$

Insbesondere ist also $a^x a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = 1$, also $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. Weiter ist $a^x = \exp(x \ln(a)) > 0$. Weiter ist $\ln(a^x) = \ln(\exp(x \ln(a))) = x \ln(a)$, und damit

$$(a^x)^y = \exp(y \ln(a^x)) = \exp(yx \ln(a)) = \exp((xy) \ln(a)) = a^{xy}.$$

□

Bemerkung 26.3. Aus $a^{x+y} = a^x a^y$ folgt durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}.$$

Das heißt, die Definition von a^x stimmt für natürliches n mit der alten Definition überein. Es gilt $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, denn $a^{\frac{1}{n}}$ ist eine positive Lösung von $x^n = a$, da $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}n} = a^1 = a$.

Die Basis

$$a = e = \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

(Eulersche Zahl, $e \approx 2.7183\dots$) heißt die *natürliche Basis*. Für diese ist

$$e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x \ln(\exp(1))) = \exp(x),$$

also genau die Exponentialfunktion.

Satz 26.4. Für $a > 0$ ist die Funktion a^x auf ganz \mathbb{R} differenzierbar mit

$$\frac{d}{dx}a^x = \ln(a)a^x.$$

Insbesondere gilt:

- Für $a > 1$ ist $\ln(a) > 0$, also a^x streng monoton wachsend.
- Für $a = 1$ ist $\ln(a) = 0$, also $a^x = 1$ konstant.
- Für $a < 1$ ist $\ln(a) < 0$, also a^x streng monoton fallend.

Für $b \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ ist

$$\frac{d}{dx}x^b = bx^{b-1}.$$

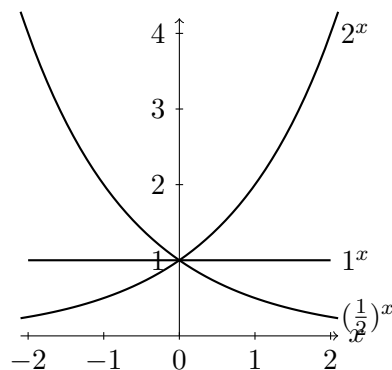
Beweis. Mit der Kettenregel finden wir

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx} \exp(x \ln(a)) = \exp(x \ln(a)) \ln(a) = \ln(a)a^x$$

und

$$\frac{d}{dx}(x^b) = \frac{d}{dx} \exp(b \ln(x)) = \exp(b \ln(x)) b \frac{1}{x} = x^b b x^{-1} = b x^{b-1}.$$

Die Monotonieaussagen folgen aus dem Monotoniekriterium 23.6. □



Für $a > 0$, $a \neq 1$, ist a^x somit injektiv und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist der *Logarithmus zur Basis a* :

$$\log_a :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x).$$

Es ist per Definition

$$a^y = x \Leftrightarrow \log_a(x) = y.$$

Für $a = e$ ist $\log_e(x) = \ln(x)$ der natürliche Logarithmus. Der Logarithmus zur Basis a lässt sich durch den natürlichen Logarithmus darstellen: Aus $a^{\log_a(x)} = x$ folgt

$$\ln(x) = \ln(a^{\log_a(x)}) = \log_a(x) \ln(a),$$

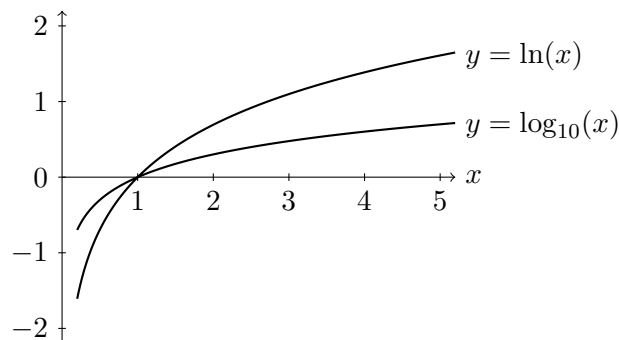
also

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Daher gelten für \log_a die gleichen Rechenregeln wie für \ln . Diese lassen sich auch direkt aus den Rechenregeln für die allgemeine Potenz herleiten.

Satz 26.5 (Rechenregeln für den Logarithmus zur Basis a). Für $a, x, y > 0$ gilt

- 1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
- 2) $\log_a(x^b) = b \log_a(x)$,
- 3) $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$,
- 4) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$.



26.3 Komplexe Exponentialfunktion

In Vorlesung 7 haben wir die *Euler-Formel*

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

für die Eulerdarstellung von komplexen Zahlen verwendet. Mit Hilfe der Reihendarstellungen von \exp , \cos und \sin haben wir die Euler-Formel nachgerechnet (Abschnitt 25.4). Damit ist die Exponentialfunktion auch für komplexe Zahlen der Form $i\varphi$ definiert.

Allgemeiner kann man zeigen: Die Exponentialreihe konvergiert für alle komplexen Zahlen z ,

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

wodurch die *komplexe Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert wird. Für $z = x + iy$ mit reellen x, y gilt allgemein

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy) = \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y)).$$

Die komplexe Exponentialfunktion erfüllt die Gleichung $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nicht injektiv und damit nicht eindeutig umkehrbar. Das bereitet Probleme bei der Definition eines komplexen Logarithmus, auf die wir hier nicht weiter eingehen. Mehr zur komplexen Exponential- und Logarithmusfunktion in „Analysis III für Ingenieurwissenschaften“.

Vorlesung 27

Elementare Funktionen 3

Wir behandeln die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen.

27.1 Trigonometrische Funktionen

Sinus und Cosinus hatten wir bereits in Vorlesung 6 als Funktionen am Einheitskreis betrachtet und daraus ihren Graphen und elementare Eigenschaften hergeleitet.

Mit Hilfe der Exponentialfunktion sind die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus leicht nachzurechnen.

Satz 27.1 (Additionstheoreme von Sinus und Cosinus). *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned}\cos(x + y) &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y), \\ \sin(x + y) &= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y).\end{aligned}$$

Beweis. Man kann beide Additionstheoreme mithilfe der Reihendarstellung von \sin und \cos beweisen (rechte Seite ausmultiplizieren und vereinfachen). Leichter geht es mit der komplexen Exponentialfunktion (Abschnitt 26.3). Es sind

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y),$$

also

$$\begin{aligned}\cos(x + y) + i \sin(x + y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} = (\cos(x) + i \sin(x))(\cos(y) + i \sin(y)) \\ &= (\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)) + i(\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)).\end{aligned}$$

Ein Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert beide Additionstheoreme. □

Insbesondere ergeben sich

$$\begin{aligned}\cos(x + 2\pi) &= \cos(x) \cos(2\pi) - \sin(x) \sin(2\pi) = \cos(x), \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin(x) \cos(2\pi) + \cos(x) \sin(2\pi) = \sin(x), \\ \cos(x + \pi) &= \cos(x) \cos(\pi) - \sin(x) \sin(\pi) = -\cos(x), \\ \sin(x + \pi) &= \sin(x) \cos(\pi) + \cos(x) \sin(\pi) = -\sin(x).\end{aligned}$$

Dies zeigt noch einmal, dass Sinus und Cosinus 2π -periodisch sind.

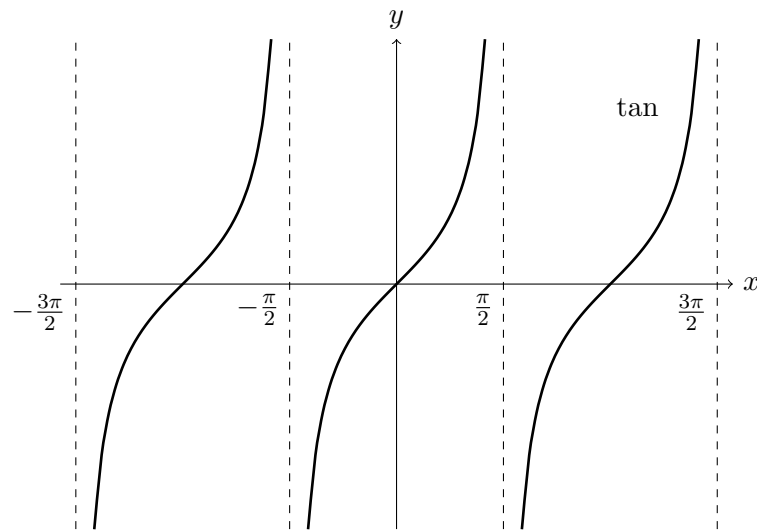
Tangens und Cotangens. Der *Tangens* ist

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

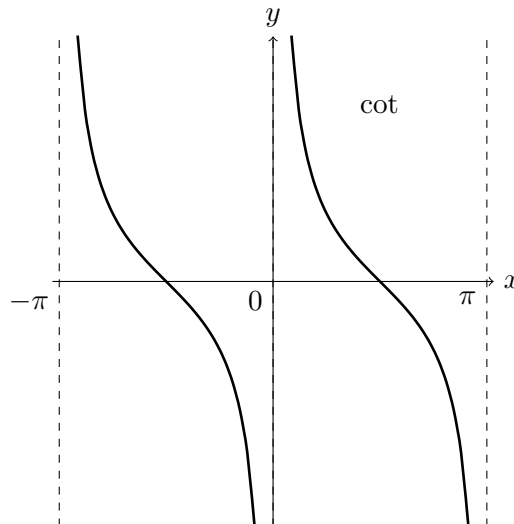
und ist in \mathbb{R} außer in den Nullstellen des Cosinus definiert. Der *Cotangens* ist

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

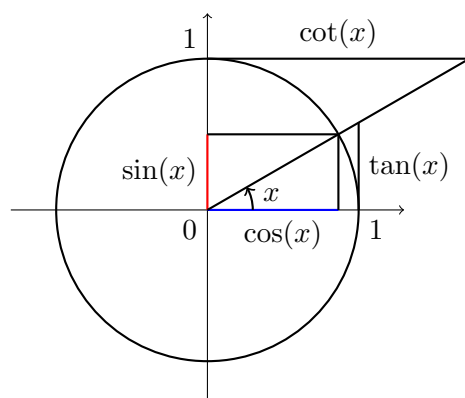
und ist in \mathbb{R} außer in den Nullstellen des Sinus definiert. Wegen $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ und $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ (siehe oben), sind dann $\tan(x+\pi) = \tan(x)$ und $\cot(x+\pi) = \cot(x)$ für alle x im Definitionsbereich, d.h. *Tangens und Cotangens sind π -periodisch*. Das sieht man auch an ihren Funktionsgraphen. Der Funktionsgraph des Tangens ist



und der Funktionsgraph des Cotangens ist



Tangens und Cotangens haben folgende geometrische Interpretation am Einheitskreis (Strahlensatz):



Die Ableitung des Tangens berechnet man mit der Quotientenregel (wie in Beispiel 23.9):

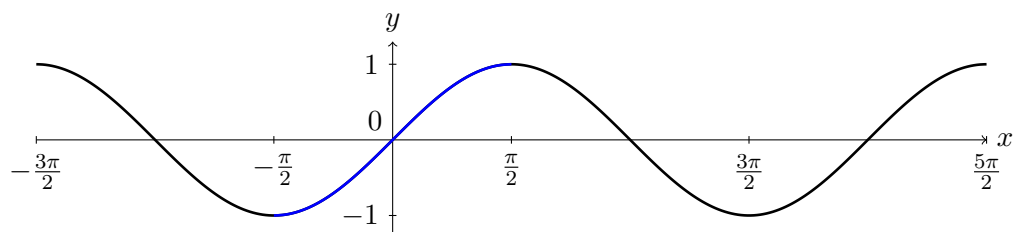
$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{\cos(x) \cos(x) + \sin(x) \sin(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\cos(x)^2} \\ 1 + \tan(x)^2 \end{cases} .\end{aligned}$$

Die erste Darstellung folgt mit dem trigonometrischen Pythagoras, die zweite durch aufteilen des Bruchs. Je nach Situation ist mal die eine, mal die andere Darstellung hilfreich.

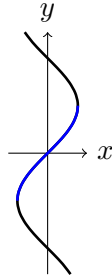
27.2 Arcus-Funktionen – Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen

Keine der Funktionen $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$ ist injektiv, sie sind vielmehr alle periodisch. Aber wir können sie auf Teilintervalle einschränken, wo sie injektiv sind, und dann gibt es zu den so eingeschränkten Funktionen eine Umkehrfunktion. Diese Funktionen nennt man *Arcus-Funktionen* (=Bogenfunktionen), weil sie zu einem gegebenen Wert (z.B. $y = \cos(x)$) die zugehörige Bogenlänge x liefern.

Wir beginnen mit dem Sinus.



Spiegelt man den Funktionsgraph an der Winkelhalbierenden $y = x$ (um die Umkehrfunktion zu finden, falls sie denn existiert), erhält man

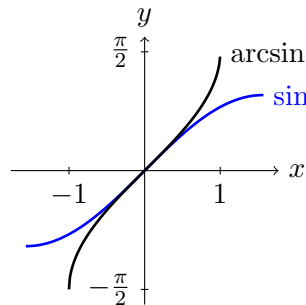


und das ist keine Funktion, da jedem x -Wert mehrere y -Werte zugeordnet werden. Um dennoch eine Umkehrfunktion zu erhalten, verkleinert man den Definitionsbereich so, dass der gespiegelte Graph wieder eine Funktion definiert.

Der Sinus ist auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend, also injektiv und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

heißt *Arcussinus*. Den Graphen erhalten wir, indem wir den Graphen des Sinus an der Winkelhalbierenden spiegeln:

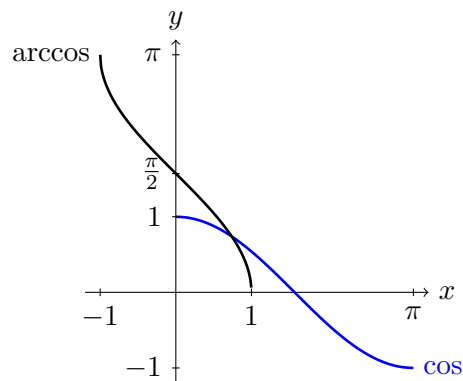


Für $x \in [-1, 1]$ gibt es unendlich viele Winkel y mit $\sin(y) = x$. Der Winkel $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ heißt *Hauptwert des Arcussinus*. Schränkt man den Sinus auf ein anderes Intervall, wo man ihn umkehren kann, ein, so erhält man eine andere Umkehrfunktion.

Analog verfährt man für den Cosinus, der streng monoton fallend auf $[0, \pi]$ ist, also umkehrbar. Die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

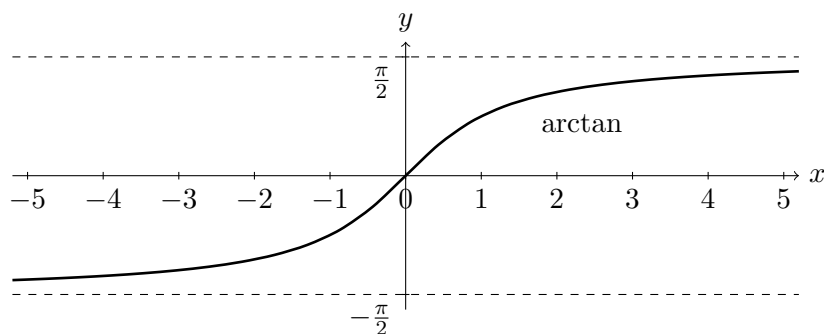
heißt *Arcuscosinus* und hat den folgenden Graphen:



Der Tangens ist auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ streng monoton wachsend, denn $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 \geq 1$, und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

heißt *Arcustangens*.



Den Arcustangens haben wir bereits in Vorlesung 7 zur Bestimmung des Arguments einer komplexen Zahl eingeführt. Da der Arcustangens nur Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ annimmt, erhalten wir nur die Argumente von Zahlen in der rechten Halbebene ($\operatorname{Re}(z) > 0$), für komplexe Zahlen in der linken Halbebene oder auf der imaginären Achse mussten wir die Formel anpassen. (Dabei wird der Tangens auf einem anderen Intervall als $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ umgekehrt.)

Ableitungen der Arcus-Funktionen. Die Ableitungen der Arcus-Funktionen berechnen sich mit der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion (Satz 22.1).

Satz 27.2 (Ableitungen der Arcus-Funktionen). *Im Inneren ihres jeweiligen Definiti-*

onsbereichs sind

$$\begin{aligned}\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1, \\ \arccos'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1, \\ \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Beweis. Für \arcsin rechnen wir: Für $|x| < 1$ ist

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\cos(y) = +\sqrt{1 - \sin(y)^2}$ für $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt und $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Analog ergibt sich \arccos' . Für den Arcustangens ist es einfacher:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

27.3 Hyperbolische Funktionen

Mit Hilfe der Exponentialfunktion erklären wir die zwei folgenden, für die Ingenieurmathematik wichtigen, Funktionen. Diese treten zum Beispiel in der Vorlesung „Mechanik II“ auf.

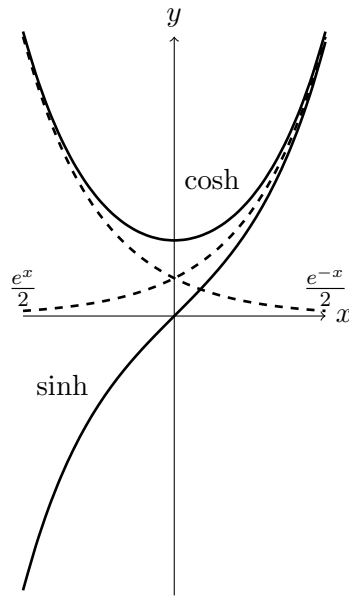
Definition 27.3 (Hyperbelfunktionen). Die Hyperbelfunktionen sind der *Cosinus hyperbolicus* $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

und der *Sinus hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Der Graph des Cosinus Hyperbolicus hat die Form einer durchhängenden Kette (Kettenlinie):



Die hyperbolischen Funktionen haben viele Ähnlichkeiten zu Sinus und Cosinus. Wir geben nur einige Eigenschaften an. Weitere, wie zum Beispiel Additionstheoreme, finden Sie in Formelsammlungen.

Satz 27.4. Für die hyperbolischen Funktionen gilt:

- 1) $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- 2) $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$,
- 3) \cosh ist eine gerade Funktion: $\cosh(-x) = \cosh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- 4) \sinh ist eine ungerade Funktion: $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- 5) Es ist $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Area Sinus hyperbolicus und erfüllt

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- 6) Es ist $\cosh : [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Area Cosinus hyperbolicus und erfüllt

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{für alle } x \geq 1.$$

Beweis. Wir rechnen 1) mit der Definition nach: Es ist

$$\begin{aligned} \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ebenso rechnet man 2)–4) nach.

Es ist $\sinh'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist \sinh streng monoton wachsend und damit injektiv. Weiter sind $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sinh(x) = \pm\infty$, also ist

\sinh surjektiv. Die Form der Umkehrfunktion findet man durch auflösen von $y = \sinh(x)$ nach x . Alternativ kann man nachrechnen, dass arsinh und die angegebene Funktion die gleiche Ableitung besitzen (dann sind sie gleich bis auf eine Konstante) und in 0 den gleichen Wert besitzen. Ähnlich für \cosh . \square

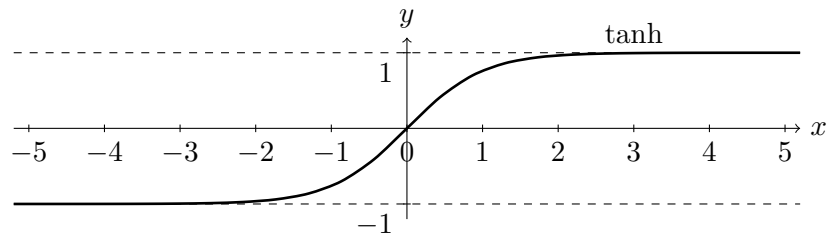
Aus der Taylorreihe der Exponentialfunktion bekommen wir die Taylorreihen der hyperbolischen Funktionen:

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Weiter kann man den *Tangens hyperbolicus* und *Cotanges hyperbolicus* definieren:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}.$$

Der Tangens hyperbolicus ist eine bijektive Funktion von \mathbb{R} nach $] -1, 1[$.



Die Ableitungen der elementaren Funktionen		
$f(x)$	$f'(x)$	Bemerkungen
x^n	nx^{n-1}	$n = 1, 2, 3, \dots$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	
a^x	$a^x \ln(a)$	$a > 0, x \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$a, x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
x^a	ax^{a-1}	$x > 0, a \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cot(x)$	$-1 - \cot(x)^2 = -\frac{1}{\sin(x)^2}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$ x < 1$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\tanh(x)$	$1 - \tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}$	
$\coth(x)$	$1 - \coth(x)^2 = -\frac{1}{\sinh(x)^2}$	
$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in]1, \infty[$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$ x < 1$

Tabelle 27.1: Ableitungen der elementaren Funktionen.

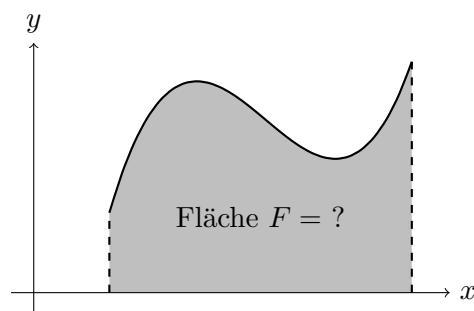
Vorlesung 28

Das Integral

Wir lernen das Integral kennen.

28.1 Integraldefinition und Flächenberechnung

Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und der x -Achse?



Dazu nehmen wir zunächst an, dass f stetig und positiv ist (also $f(x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$).

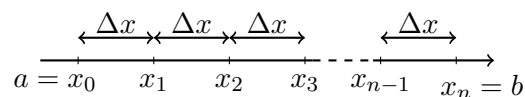
Die Idee ist, die Fläche durch Rechtecke zu approximieren. Dazu unterteilen wir $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, wobei

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Der Einfachheit halber wählen wir alle Intervalle gleich lang, also mit der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, so dass

$$x_j = a + j\Delta x = a + j\frac{b-a}{n}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

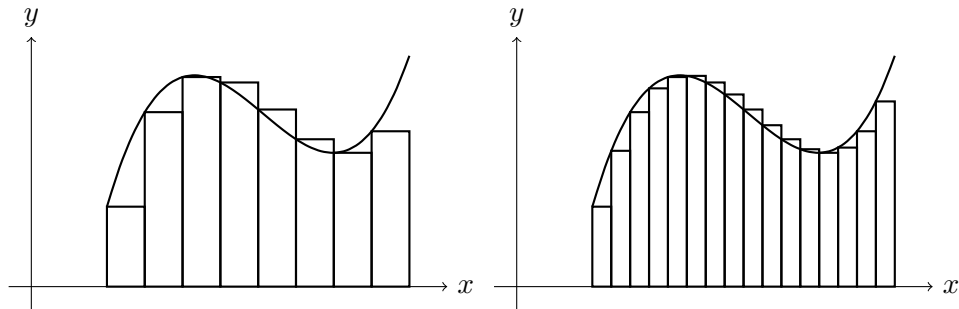
Die Punkte x_0, x_1, \dots, x_n sind dann äquidistant (d.h., sie haben gleichen Abstand voneinander).



Approximiere f auf $[x_{j-1}, x_j]$ durch die Konstante $f(x_{j-1})$. Dann heißt

$$F_n = \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})\Delta x = \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})\frac{b-a}{n}$$

eine *Riemannsche Summe* der Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Summe ist die Fläche aller Rechtecke, mit der wir die Fläche unter dem Funktionsgraphen von f approximieren.



Erwartung: je größer n ist, desto besser approximiert F_n den exakten Wert F des Flächeninhalts.

Satz 28.1. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig oder monoton, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n =: \int_a^b f(x) dx.$$

Wir nennen ihn das bestimmte Integral von f über $[a, b]$.

Bemerkung 28.2. 1) Bezeichnungen: In $\int_a^b f(x) dx$ heißt

- f der *Integrand*
- x die *Integrationsvariable*
- a die *untere Integrationsgrenze*
- b die *obere Integrationsgrenze*.

2) Die Integrationsvariable kann beliebig benannt werden:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds = \int_a^b f(u) du.$$

3) Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist eine reelle Zahl.

4) In der Schreibweise

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1}) \cdot \Delta x$$

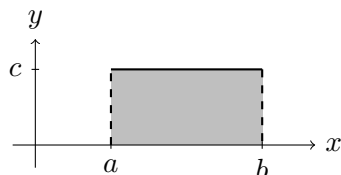
erinnert \int („S“ wie Summe) an \sum und dx an Δx .

Vgl. auch die Schreibweise $\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Beispiel 28.3. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konstant, also $f(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x) dx = c(b - a).$$

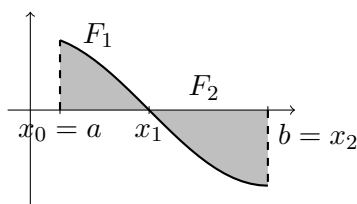
Für $c > 0$ ist das genau der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x -Achse. Für $c < 0$ ist das Integral das negative des Flächeninhalts.



Anwendungen:

- 1) **Flächenbilanz und Flächenberechnung:** Falls $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist aber nicht $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, so ergibt das Integral die *Flächenbilanz*, d.h. die Fläche über der x -Achse zählt positiv, die Fläche unter der x -Achse zählt negativ. Um die Gesamtfläche zwischen dem Graph von f und der x -Achse zu bestimmen, zerlege $[a, b]$ in Teilintervalle, auf denen f das Vorzeichen nicht wechselt.

Zum Beispiel:



Die Flächenbilanz ist

$$\int_a^b f(x) dx = F_1 - F_2,$$

und die Fläche zwischen dem Graph von f und der x -Achse ist $F = F_1 + F_2$, wobei

$$F_1 = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \quad \text{und} \quad F_2 = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right|.$$

- 2) **Streckenberechnung:** Zum Beispiel ein Massenpunkt im freien Fall.

Wir der Massenpunkt zur Zeit $t = 0$ losgelassen, so ist die Geschwindigkeit proportional zur Fallzeit: $v(t) = gt$ mit $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Wie groß ist die zurückgelegte Fallstrecke zum Zeitpunkt $T > 0$? Für konstantes v wäre dies vT .

Da v nicht konstant ist, zerlegen wir $[0, T]$ in kleine Teilintervalle $[t_{j-1}, t_j]$ und approximieren $v(t)$ auf $[t_{j-1}, t_j]$ durch $v(t_{j-1})$:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T, \quad \Delta t = \frac{T - 0}{n} = \frac{T}{n}, \quad t_j = j\Delta t = j\frac{T}{n}.$$

Daher ist die zurückgelegte Strecke S ungefähr

$$S \approx \sum_{j=1}^n v(t_{j-1})\Delta t,$$

ist also durch eine Riemannsche Summe gegeben. Im Grenzwert ergibt sich die exakte Strecke als

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n v(t_{j-1})\Delta t = \int_0^T v(t) dt.$$

Wir berechnen nun das Integral:

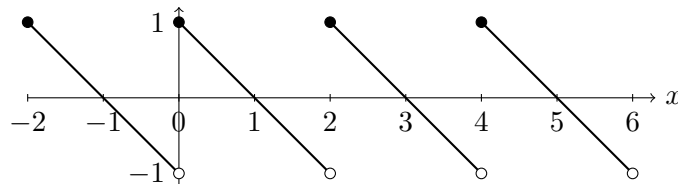
$$\begin{aligned} \int_0^T v(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n v(t_{j-1})\Delta t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n g(j-1) \frac{T}{n} \cdot \frac{T}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{gT^2}{n^2} \sum_{j=1}^n (j-1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{gT^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{gT^2}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{gT^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}gT^2. \end{aligned}$$

3) **Massenberechnung:** Zum Beispiel die Masse eines Drahtes der Länge ℓ mit Massendichte $\rho = \rho(x)$. Wie vernachlässigen dabei die Ausdehnung in y - und z -Richtung.

- Falls ρ konstant ist: Die Gesamtmasse ist $m = \rho\ell$.
- Falls ρ variabel ist: Zerlege $[0, \ell]$ in n Teilintervalle $[x_{j-1}, x_j]$ und approximiere $\rho(x)$ durch $\rho(x_{j-1})$ auf $[x_{j-1}, x_j]$, wobei $x_j = j\Delta x$ und $\Delta x = \ell/n$ seien. Dann ist die Gesamtmasse

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \rho(x_{j-1})\Delta x = \int_0^\ell \rho(x) dx.$$

Es kommt nicht so selten vor, dass man in den Ingenieurwissenschaften Funktionen integrieren muss, die weder monoton noch stetig sind, etwa die Spannungsverteilung des Kathodenstrahls einer Fernsehrohr:



Wir erweitern daher unsere Integraldefinition noch etwas.

Definition 28.4 (Integrierbare Funktion). 1) Wir nennen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *stückweise stetig* (bzw. *stückweise monoton*), falls es endlich viele Stellen x_0, x_1, \dots, x_N gibt mit

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b,$$

so dass $f :]x_{j-1}, x_j[\rightarrow \mathbb{R}$ für jedes j die Einschränkung einer stetigen (bzw. monotonen) Funktion $f_j : [x_{j-1}, x_j] \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

2) Ist f wie in 1), so definieren wir

$$\int_a^b f(x) dx := \int_{x_0}^{x_1} f_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f_N(x) dx.$$

3) Funktionen wie in 1) heißen *integrierbar*.

Bemerkung 28.5. Diese Definition von integrierbaren Funktionen deckt sich nicht ganz mit der mathematischen Standardterminologie, dort ist die Klasse der integrierbaren Funktionen etwas größer (und bildet einen Vektorraum).

Beispiel 28.6. 1) Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{x} & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

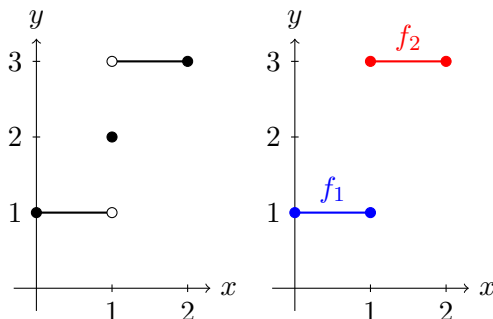
ist nicht stückweise stetig, denn $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich nicht stetig auf $[0, 1]$ fortsetzen und ist daher nicht die Einschränkung einer stetigen Funktion $f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

2) Die Funktion $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1[\\ 2 & \text{für } x = 1 \\ 3 & \text{für } x \in]1, 2] \end{cases}$$

ist stückweise stetig, denn

- $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ist die Einschränkung der stetigen Funktion $f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = 1$.
- $f :]1, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ ist die Einschränkung der stetigen Funktion $f_2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = 3$.



Dann ist

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f_1(x) dx + \int_1^2 f_2(x) dx = 1(1-0) + 3(2-1) = 4.$$

Der Funktionswert in $x = 1$ geht nicht in das Integral ein.

Bemerkung 28.7. 1) Integrierbare Funktionen sind beschränkt und auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ definiert.

2) Ist f wie in Definition 28.4, so kann f in x_0, \dots, x_N beliebige Werte annehmen, die keinen Einfluss auf $\int_a^b f(x) dx$ haben.

28.2 Rechenregeln

Wir vereinbaren

$$\int_a^a f(x) dx := 0$$

(kein Flächeninhalt) und für $a < b$

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx.$$

Satz 28.8 (Rechenregeln). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1) *Linearität:*

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \\ \int_a^b \lambda f(x) dx &= \lambda \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

2) *Monotonie:* Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

3) *Dreiecksungleichung:*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

4) Für $a < c < b$ ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Beweis. Die Aussagen lassen sich leicht für Riemannsche Summen nachprüfen und bleiben im Grenzwert erhalten. \square

28.3 Das Integral als Mittelwert der Funktion

Aus der Monotonie des Integrals erhalten wir eine einfache Abschätzung für das Integral von f .

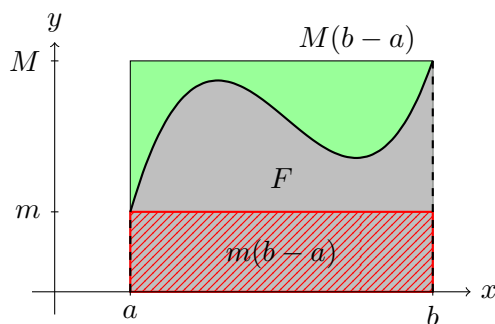
Satz 28.9 (Abschätzung des Integrals). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Beweis. Für die konstante Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = m$, ist $g(x) \leq f(x)$ für alle x , also

$$m(b-a) = \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Die zweite Ungleichung folgt genauso. □



Bemerkung 28.10. Es ist

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1}) \frac{b-a}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1}).$$

Die Summe $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})$ ist genau der Mittelwert der Funktionswerte $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$. Daher kann das Integral $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ als *Mittelwert der Funktion f* angesehen werden. Der letzte Satz besagt also, dass das Integralmittel zwischen dem kleinsten und größten Funktionswert liegt.

Satz 28.11 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Beweis. Als stetige Funktion nimmt f ihr Minimum m und Maximum M in $[a, b]$ an (Satz 20.12). Mit der Integralabschätzung ist dann

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz nimmt f jeden Wert zwischen Minimum und Maximum an, d.h. es existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx,$$

wie behauptet. □

Vorlesung 29

Integrationsregeln 1

Die Berechnung von Integralen mittels Riemann-Summen ist mühsam. Einfacher ist die Berechnung von Integralen mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, der einen Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation herstellt und die Integration auf die Bestimmung einer sogenannten Stammfunktion zurückführt.

Aus dem Hauptsatz erhalten wir nützliche Integrationsregeln zur Bestimmung von Stammfunktionen zur Berechnung von Integralen: Dies sind die partielle Integration (diese Vorlesung) und die Substitutionsregel (nächste Vorlesung).

29.1 Stammfunktionen

Wir beginnen mit dem Begriff der Stammfunktion.

Definition 29.1 (Stammfunktion). Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ($D \subseteq \mathbb{R}$). Eine differenzierbare Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *Stammfunktion* von f , falls $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Bemerkung 29.2. Auf Intervallen sind Stammfunktionen bis auf eine Konstante eindeutig: Sei F eine Stammfunktion von f auf dem Intervall I . Ist dann G eine weitere Stammfunktion von f , so ist $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$, also ist $G - F$ konstant (Satz 23.7) und es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $G(x) - F(x) = c$, also $G(x) = F(x) + c$ für alle $x \in I$.

Definition 29.3 (unbestimmtes Integral). Die Menge aller Stammfunktionen von $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wird mit $\int f(x) dx$ bezeichnet und heißt das *unbestimmte Integral* von f . Ist F eine Stammfunktion von f ist also

$$\int f(x) dx = \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Das unbestimmte Integral schreibt man oft nur als

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig,}$$

also ohne die Mengenklammern.

Das unbestimmte Integral ist also die Lösungsmenge der linearen Gleichung $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$. Wie bei linearen Gleichungssystemen hat man eine partikuläre Lösung F plus die Lösungen der homogenen Gleichung $\frac{d}{dx}F(x) = 0$, die genau die Konstanten sind.

Beispiel 29.4. 1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, hat als eine Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, und dann auch $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ oder $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - 12000$. Das unbestimmte Integral von f ist

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

2) Wegen $(e^x)' = e^x$ ist e^x eine Stammfunktion von e^x . Das unbestimmte Integral von e^x ist

$$\int e^x dx = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

3) Eine Stammfunktion von $\cos(x)$ ist $\sin(x)$. Auch $F(x) = \sin(x) + 42$ ist eine Stammfunktion von $\cos(x)$, denn $F'(x) = \cos(x)$.

29.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir kommen nun zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dem zentralen Satz zur Berechnung von Integralen. Wie sich herausstellt lässt sich das bestimmte Integral mit einer Stammfunktionen berechnen. Andersherum kann eine Stammfunktion mittels Integration bestimmt werden.

Satz 29.5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

1) *Existenz einer Stammfunktion:* Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die durch

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

definierte Integralfunktion eine Stammfunktion von f .

2) *Berechnung des bestimmten Integrals:* Ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F|_a^b := F(b) - F(a).$$

Beweis. 1) Wir rechnen nach, dass $F'(x) = f(x)$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 28.11) ist $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi)$ für ein ξ zwischen x und $x+h$. Für $h \rightarrow 0$ ist dann $\xi \rightarrow x$ und wir finden

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(x),$$

wobei wir noch einmal die Stetigkeit von f verwendet haben.

- 2) Da F und $\int_a^x f(t) dt$ Stammfunktionen von f auf dem Intervall $[a, b]$ sind, gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c.$$

Für $x = a$ sehen wir $F(a) = 0 + c$. Setzen wir nun $x = b$ ein, erhalten wir

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - c = F(b) - F(a).$$

□

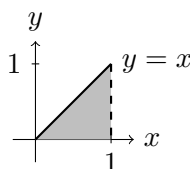
Für $F|_a^b$ wird auch $[F]_a^b$ oder Ähnliches verwendet.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ermöglicht es also, das bestimmte Integral einer stetigen Funktion ganz einfach durch auswerten einer Stammfunktion zu berechnen, falls man diese kennt.

Beispiel 29.6. 1) Eine Stammfunktion von x ist $\frac{1}{2}x^2$, also

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Insbesondere ist $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$, was genau der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ ist.



- 2) Eine Stammfunktion von \sin ist $-\cos$, daher ist

$$\int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

Wenn Sie noch nicht überzeugt sein sollten, dass der Hauptsatz hilfreich ist, versuchen Sie einmal, dieses Integral direkt mit der Definition zu berechnen, dann müssen Sie also den folgenden Grenzwert berechnen:

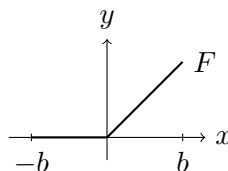
$$\int_0^\pi \sin(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sin\left((j-1)\frac{\pi}{n}\right) \frac{\pi}{n}.$$

- 3) $\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a$.
 4) $\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) \Big|_a^b = \arctan(b) - \arctan(a)$. Speziell mit $a = 0$ (und x statt b) erhält man eine Integraldarstellung für den Arcus Tangens:

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

- 5) $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) \Big|_a^b = \arcsin(b) - \arcsin(a)$.
 6) Sei $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$, die Heavyside-Funktion. Sei $b > 0$ und betrachte $H : [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist H stückweise stetig, also integrierbar. Es gilt

$$F(x) := \int_{-b}^x H(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$



Da F eine Knickstelle in $x = 0$ hat, ist F in $x = 0$ nicht differenzierbar, also ist F keine Stammfunktion von H . Die Stetigkeit von f im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist also wesentlich.

29.3 Grundintegrale

Es bezeichne $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Definitionsbereich D (Vereinigung von Intervallen).

- 1) Für $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ist der Definitionsbereich

- $D = \mathbb{R}$, falls $\alpha \in \mathbb{N}$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, falls $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ (z.B. $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$)
- $D =]0, \infty[$ falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (allgemeine Potenz).

Dann ist $F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$, denn $F'(x) = x^\alpha$, also

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- 2) Für $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ ist der Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Eine Stammfunktion ist $F(x) = \ln|x|$, denn

- für $x > 0$ ist $F'(x) = \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$,
- für $x < 0$ ist mit der Kettenregel $F'(x) = \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Daher ist

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Achtung: $\ln(x)$ ist nur auf $]0, \infty[$ definiert und damit keine Stammfunktion auf ganz $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- 3) Für $f(x) = \frac{1}{x-a}$ mit $a \in \mathbb{R}$ ist der Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ und dann

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Manche Stammfunktionen lassen sich nicht elementar ausdrücken (d.h. durch Polynome, e^x , \sin , \cos , usw. und Addition, Multiplikation und Verkettung dieser Funktionen). In diesem Fall geben die Integralfunktionen „neue“ Funktionen.

Beispiel 29.7. 1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$, ist stetig und besitzt daher eine Stammfunktion. Diese lässt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken, und führt auf ein sogenanntes *Fresnel-Integral*, dass definiert ist durch

$$\text{FesnelS}(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt.$$

Das Fresnel-Integral spielt eine Rolle in der geometrischen Optik.

- 2) Ebenso kann die Stammfunktion von e^{-x^2} nicht durch elementare Funktionen angegeben werden. Die Stammfunktion ist die *Gaußsche Fehlerfunktion* („error function“) oder *Normalverteilung*:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Sie spielt eine wichtige Rolle in der Theorie von Diffusionsprozessen und in der Statistik.

- 3) $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$ ist ebenfalls nicht durch elementare Funktionen darstellbar und definiert den *Integralsinus*

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

29.4 Partielle Integration

Zusammengesetzte Funktionen lassen sich recht einfach ableiten dank der Produkt-, Quotienten- und Kettenregel. Bei der Integration gibt es keine so einfachen Rechenregeln, und bereits „einfache“ Funktionen können auf „komplizierte“ Stammfunktionen führen.

Dennoch können wir aus den Regeln für das Ableiten auch Regeln für die Integration gewinnen, die bei der Berechnung von bestimmten und unbestimmten Integralen helfen können.

Die partielle Integration (= Integration nach Teilen) entspricht der Produktregel beim Ableiten. Sind $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetigen Ableitungen, so ist mit der Produktregel

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad (29.1)$$

Daher ist uv eine Stammfunktion von $u'v + uv'$ und es gilt für die unbestimmten Integrale

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx.$$

Andererseits folgt durch Integration der Produktregel (29.1) mit dem Hauptsatz

$$(uv)|_a^b = \int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx,$$

also

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Wir fassen das als Satz zusammen.

Satz 29.8 (Partielle Integration). *Sind $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetigen Ableitungen, so gelten*

$$\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx$$

und

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx.$$

Beispiel 29.9. 1) Wir wollen $\int_a^b xe^x dx$ berechnen. Wir versuchen den Ansatz

$$u'(x) = x, \quad v(x) = e^x.$$

Dann ist $u(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $v'(x) = e^x$ und partielle Integration liefert

$$\int_a^b xe^x dx = \frac{1}{2}x^2e^x|_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}x^2e^x dx,$$

das neue Integral ist aber komplizierter als das erste. Wir versuchen nun

$$u'(x) = e^x, \quad v(x) = x,$$

dann sind $u(x) = e^x$ und $v'(x) = 1$, also mit partieller Integration

$$\int_a^b xe^x dx = xe^x|_a^b - \int_a^b e^x dx = (x-1)e^x|_a^b.$$

Merke: Hier war es also hilfreich, dass Polynom (x) abzuleiten, da das resultierende Integral leichter zu berechnen war. Das ist oft, aber nicht immer, so.

- 2) Berechne $\int x^2 \cos(x) dx$. Die Idee ist, mit partieller Integration das x^2 „wegzudifferenzieren“: Mit $v(x) = x^2$ und $u'(x) = \cos(x)$ ist

$$\int x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) - \int 2x \sin(x) dx,$$

und mit erneuter partieller Integration ($u'(x) = -\sin(x)$, $v(x) = 2x$) ist

$$\int x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - \int 2 \cos(x) dx = (x^2 - 2) \sin(x) + 2x \cos(x) + c$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$.

- 3) Wir berechnen $\int \cos(x)^2 dx$ mit partieller Integration und $u'(x) = \cos(x)$ und $v(x) = \cos(x)$, also $u(x) = \sin(x)$ und $v'(x) = -\sin(x)$:

$$\begin{aligned} \int \cos(x)^2 dx &= \sin(x) \cos(x) + \int \sin(x)^2 dx = \sin(x) \cos(x) + \int (1 - \cos(x)^2) dx \\ &= \sin(x) \cos(x) + \int 1 dx - \int \cos(x)^2 dx \end{aligned}$$

also

$$\int \cos(x)^2 dx = \frac{1}{2} \left(\sin(x) \cos(x) + \int 1 dx \right) = \frac{1}{2} (\sin(x) \cos(x) + x + c)$$

mit beliebigem $c \in \mathbb{R}$. Mit der Stammfunktion lassen sich bestimmte Integrale nun ganz einfach berechnen, z.B. über $[0, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} \cos(x)^2 dx = \frac{1}{2} (\sin(x) \cos(x) + x) \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

- 4) Wir berechnen eine Stammfunktion des Logarithmus. Dazu verwenden wir einen praktischen Trick: Wir setzen $u'(x) = 1$ und $v(x) = \ln(x)$ und erhalten mit $u(x) = x$ und $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + c,$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Einige bekannte Stammfunktionen		
$f(x)$	$F(x)$	Bemerkungen
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$x \neq 0, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq -1$
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$x > 0, a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x \neq 0$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\frac{1}{\cos(x)^2}$	$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$-\frac{1}{\sin(x)^2}$	$\cot(x)$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$ x < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2-1} $	$ x > 1$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$x \in]1, \infty[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$ x < 1$

Tabelle 29.1: Einige Stammfunktionen.

Vorlesung 30

Integrationsregeln 2 und Integration komplexer Funktionen

Nachdem wir in der letzten Vorlesung bereits die partielle Integration kennen gelernt haben, behandeln wir nun eine zweite wichtige Integrationsregel: Die Substitutionsregel. Anschließend erklären wir die Integration komplexwertiger Funktionen.

30.1 Substitutionsregel

Die Substitutionsregel (= Ersetzungsregel) entspricht der Kettenregel beim Ableiten. Seien $F : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ differenzierbar mit stetigen Ableitungen und $f = F'$. Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Das unbestimmte Integral von $f(g(x))g'(x)$ ist dann

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

und das bestimmte Integral ist

$$\int_{x=a}^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{t=g(a)}^{g(b)} f(t) dt.$$

Merkregel: Man substituiert $t = g(x)$, so dass $\frac{dt}{dx} = g'(x)$, also formal $dt = g'(x) dx$.

1. Version der Substitutionsregel zur Berechnung von $\int f(g(x))g'(x) dx$:

1) Substituiere $t = g(x)$ und $dt = g'(x)dx$ (Formal $\frac{dt}{dx} = g'(x)$ mit dx multiplizieren):

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt.$$

2) Berechne eine Stammfunktion von f : $\int f(t) dt = F(t) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

3) Rücksubstitution $t = g(x)$ ergibt

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Zur Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$ kann man die Grenzen direkt mit transformieren und spart sich die Rücksubstitution:

1) Substituiere $t = g(x)$ und $dt = g'(x) dx$:

$$\int_{x=a}^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{t=g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

2) Berechne eine Stammfunktion F von f , so dass

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = F|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Beispiel 30.1. 1) Berechne $\int \cos(x^2)2x dx$. Substituiere $t = x^2$, also $dt = 2x dx$ und

$$\int \cos(x^2)2x dx = \int \cos(t) dt = \sin(t) + c = \sin(x^2) + c,$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

2) Berechne $\int_0^2 \cos(x^2)2x dx$. Substituiere $t = x^2$, also $dt = 2x dx$ und

$$\int_{x=0}^2 \cos(x^2)2x dx = \int_{t=0}^4 \cos(t) dt = \sin(t)|_0^4 = \sin(4).$$

3) Berechne $\int_0^3 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$. Substituiere $t = 1 + x^2$, dann ist $dt = 2x dx$ und

$$\int_{x=0}^3 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = \int_{t=1}^{10} \frac{1}{t^2} \frac{1}{2} dt = -\frac{1}{2} \frac{1}{t} \Big|_1^{10} = \frac{9}{20}.$$

Alternativ kann man auch $t = x^2$ substituieren.

4) Mit der Substitution $t = g(x)$ ist $dt = g'(x) dx$ und

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln|g(x)| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

5) Berechne $\int \frac{4x \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}} dx$. Wir substituieren $\varphi = x^2$, haben also $d\varphi = 2x dx$, und

$$\int \frac{4x \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{2 \arcsin(\varphi)}{\sqrt{1-\varphi^2}} d\varphi.$$

Nun substituieren wir $t = \arcsin(\varphi)$, also $dt = \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}} d\varphi$, und

$$\int \frac{4x \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}} dx = \int \frac{2 \arcsin(\varphi)}{\sqrt{1-\varphi^2}} d\varphi = \int 2t dt = t^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mit Rücksubstitution folgt $\int \frac{4x \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}} dx = \arcsin(x^2)^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

2. Version der Substitutionsregel zur Berechnung von $\int f(x) dx$.

- 1) Substituiere $x = g(t)$ und $dx = g'(t) dt$, mit einem *umkehrbarem* g :

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

- 2) Berechne eine Stammfunktion: $\int f(g(t))g'(t) dt = H(t) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

- 3) Rücksubstitution: Auflösen von $x = g(t)$ nach t , also $t = g^{-1}(x)$ (Umkehrfunktion), und einsetzen ergibt

$$\int f(x) dx = H(g^{-1}(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Berechnet man ein bestimmtes Integral, so kann man wieder die Rücksubstitution sparen, wenn man die Grenzen transformiert:

- 1) Substituiere $x = g(t)$ und $dx = g'(t) dt$:

$$\int_{x=a}^b f(x) dx = \int_{t=g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) dt.$$

- 2) Berechne eine Stammfunktion H : $\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) dt = H(g^{-1}(b)) - H(g^{-1}(a))$.

Beispiel 30.2. 1) Berechne die Fläche des Kreises mit Radius $r > 0$. Auf dem Kreisrand gilt $x^2 + y^2 = r^2$, also $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Somit ist die Fläche der Kreisscheibe

$$I = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Substituiere $x = r \sin(t)$, so dass $dx = r \cos(t) dt$ ist und

$$I = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin(t)^2} r \cos(t) dt = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos(t)^2} \cos(t) dt.$$

Da $\cos(t) \geq 0$ für $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ist $\sqrt{\cos(t)^2} = \cos(t)$ und somit

$$I = 2r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)^2 dt = r^2 (\cos(t) \sin(t) + t) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi r^2,$$

wobei wir die Stammfunktion von $\cos(t)^2$ aus Beispiel 29.9 verwendet haben.

- 2) Berechne $\int \arcsin(x) dx$. Wir substituieren $x = \sin(t)$, also $t = \arcsin(x)$, und erhalten $dx = \cos(t) dt$ und

$$\int \arcsin(x) dx = \int t \cos(t) dt.$$

Dieses Integral können wir mit partieller Integration lösen ($u'(x) = \cos(t)$ und $v(x) = t$):

$$\int t \cos(t) dt = \sin(t)t - \int \sin(t) dt = \sin(t)t + \cos(t) + c = \sin(t)t + \sqrt{1 - \sin(t)^2} + c.$$

(Dabei haben wir $\cos(t) \geq 0$ verwendet, was für $t = \arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ gilt.) Mit Rücksubstitution erhalten wir

$$\int \arcsin(x) dx = x \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Als letztes betrachten wir noch ein Beispiel, das in Vorlesung 37 wichtig werden wird. Wir werden die Aussage dort in Satz 37.4 auf anderem Wege nachrechnen.

Beispiel 30.3. Sei $T > 0$ (Periode) und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (Kreisfrequenz). Dann gilt für $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega x) \cos(\ell\omega x) dx &= \begin{cases} 2 & k = \ell = 0, \\ 1 & k = \ell > 0 \\ 0 & k \neq \ell \end{cases} \\ \frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega x) \sin(\ell\omega x) dx &= \begin{cases} 1 & k = \ell > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega x) \cos(\ell\omega x) dx &= 0. \end{aligned}$$

Wir beginnen mit den ersten beiden Formeln. Im Fall $k = \ell = 0$ ist $\int_0^T \cos(0\omega x)^2 dx = \int_0^T 1 dt = T$ und $\int_0^T \sin(0\omega x)^2 dx = \int_0^T 0 dx = 0$.

Sei nun $k = \ell > 0$. Mit der Substitution $t = k\omega x$ ist $dt = k\omega dx$, also

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega x)^2 dx = \frac{2}{T} \frac{1}{k\omega} \int_0^{k2\pi} \cos(t)^2 dt = \frac{2}{2\pi k} \frac{1}{2} (\sin(t) \cos(t) + t) \Big|_0^{2\pi k} = 1$$

und dann

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega x)^2 dx = \frac{2}{T} \int_0^T (1 - \cos(k\omega x)^2) dx = 2 - \frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega x)^2 dx = 1.$$

Seien nun $k \neq \ell$. Alle anderen Fälle erhalten wir wie folgt. Zunächst ist für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos(m\omega x) dx = \frac{2}{T} \frac{1}{m\omega} \sin(m\omega x) \Big|_0^T = \frac{2}{2\pi m} (\sin(m2\pi) - \sin(0)) = 0.$$

Aus den Additionstheorem von Sinus und Cosinus erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)), \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)). \end{aligned}$$

(Additionstheoreme auf der rechten Seite anwenden und vereinfachen.) Für $\alpha = k\omega x$ und $\beta = \ell\omega x$ sind dann $\alpha + \beta = (k + \ell)\omega x$ und $\alpha - \beta = (k - \ell)\omega x$. Da $k + \ell \neq 0$ und $k - \ell \neq 0$ erhalten wir 0 nach Integration. Damit haben wir die ersten beiden Formeln nachgerechnet.

Die letzte Formel ist noch einfacher. Für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin(m\omega x) dx = -\frac{2}{T} \frac{1}{m\omega} \cos(m\omega x) \Big|_0^T = -\frac{2}{2\pi m} (\cos(m2\pi) - \cos(0)) = 0$$

und das Ergebnis ist auch für $m = 0$ richtig. Da

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

erhalten wir auch die dritte Formel.

30.2 Integration komplexer Funktionen

Komplexe Funktionen einer reellen Variablen integriert man nach Real- und Imaginärteil getrennt.

Definition 30.4 (Integral komplexwertiger Funktionen). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und seien $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ und $v(x) = \operatorname{Im}(f(x))$ für alle $x \in [a, b]$, d.h. $f = u + iv$. Sind u, v integrierbar, so ist

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

Zum Beispiel ist für $f(x) = e^{ix}$ dann $u(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos(x)$ und $v(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \sin(x)$.

Bemerkung 30.5. 1) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bleibt richtig: Ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f (d.h. $F' = f$), so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Weiter bleiben richtig: partielle Integration, die Substitutionsregel, sowie die Linearität, Dreiecksungleichung und das Aufteilen des Integrals an einem Zwischenpunkt (1), 2) und 4) in Satz 28.8).

2) Hingegen sind für komplexwertige Funktionen nicht mehr gültig: die Monotonie (2) in Satz 28.8), die Integralabschätzung (Satz 28.9) und der Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 28.11).

Beispiel 30.6. 1) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = (x + i)^2$. Das unbestimmte Integral von f ist

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (x + i)^2 dx = \int (x^2 + i2x - 1) dx = \int (x^2 - 1) dx + i \int 2x dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + ix^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Alternativ ist $F(x) = \frac{1}{3}(x + i)^3$ eine Stammfunktion von f , denn $F'(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{3}(x + i)^3 = (x + i)^2$. Dies widerspricht nicht der ersten Rechnung, denn

$$F(x) = \frac{1}{3}(x + i)^3 = \frac{1}{3}(x^3 + 3ix^2 - 3x - i) = \frac{1}{3}x^3 - x + ix^2 - \frac{i}{3},$$

also ist F die Stammfunktion mit $c = -\frac{i}{3}$.

2) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \frac{1}{x-i}$. Naiv betrachtet ist $F(x) = \ln|x - i|$ ein Kandidat für eine Stammfunktion von f .

Probe: Es ist $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$, also

$$F'(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1} \neq f(x),$$

d.h. F ist keine Stammfunktion von f . (Das war auch vorher klar: F ist reellwertig, so dass auch F' reellwertig ist, aber f ist komplexwertig.)

Richtig geht es so:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-i} dx &= \int \frac{x+i}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx + i \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + i \arctan(x) + c, \quad c \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Satz 30.7. *Wie im Reellen ist für alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$,*

$$\int e^{zx} dx = \frac{1}{z} e^{zx} + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Für $z = a + ib$ mit reellen a, b ist

$$e^{zx} = e^{ax+ibx} = e^{ax}(\cos(bx) + i \sin(bx)),$$

also gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{zx} &= a e^{ax}(\cos(bx) + i \sin(bx)) + e^{ax}(-b \sin(bx) + ib \cos(bx)) \\ &= (a + ib) e^{ax}(\cos(bx) + i \sin(bx)) = z e^{zx}. \end{aligned}$$

Daher ist $\frac{1}{z} e^{zx}$ eine Stammfunktion von e^{zx} . □

Die Integration komplexwertiger Funktionen eines reellen Arguments ist vor allem bei der Fourieranalyse von Schwingungsvorgängen in der Mechanik, Akustik oder Elektrotechnik wichtig. Darauf zielt das folgende Beispiel.

Beispiel 30.8. Seien $k, \ell \in \mathbb{Z}$ und $T > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Für $k = \ell$ ist

$$\int_0^T e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t} dt = \int_0^T e^{i(k-\ell)\omega t} dt = \int_0^T 1 dt = T.$$

Für $k \neq \ell$ ist

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t} dt &= \int_0^T e^{i(k-\ell)\omega t} dt = \frac{1}{i(k-\ell)\omega} e^{i(k-\ell)\omega t} \Big|_0^T \\ &= \frac{1}{i(k-\ell)\omega} (e^{i(k-\ell)\omega T} - 1) = \frac{1}{i(k-\ell)\omega} (e^{i(k-\ell)2\pi} - 1) = 0. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t} dt = \begin{cases} 1 & k = \ell \\ 0 & k \neq \ell. \end{cases}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil findet man die Formeln aus Beispiel 30.3 wieder. Vergleichen Sie noch einmal, wie einfach die Rechnung im Komplexen im Vergleich zur Rechnung im Reellen ist.

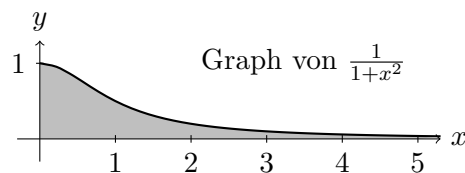
Vorlesung 31

Uneigentliche Integrale und Integration rationaler Funktionen

Integrierbare Funktionen sind immer beschränkt und auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ gegeben. Wir lernen, wie man Funktionen auf einem unbeschränkten Definitionsbereich integriert oder unbeschränkte Funktionen integriert. Weiter besprechen wir die Integration rationaler Funktionen.

31.1 Unbeschränkter Definitionsbereich

Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Hat Die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse endlichen Inhalt?



Definition 31.1 (Uneigentliches Integral über unbeschränkten Definitionsbereich).

- 1) Sei $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über jedem Intervall $[a, b]$, $b > a$. Dann heißt

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

das *uneigentliche Integral* von f über $[a, \infty[$. Falls der Grenzwert existiert, so heißt f *uneigentlich integrierbar* auf $[a, \infty[$.

- 2) Sei $f :]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über jedem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$. Dann heißt

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

das *uneigentliche Integral* von f über $]-\infty, b]$. Falls der Grenzwert existiert, so heißt f *uneigentlich integrierbar* auf $]-\infty, b]$.

Man sagt, das uneigentliche Integral *existiert*, genau dann wenn der Grenzwert existiert. Man sagt auch, dass ein uneigentliches Integral *konvergiert*, falls der Grenzwert existiert, andernfalls *divergiert* es.

Das uneigentliche Integral kann existieren oder auch nicht.

Beispiel 31.2. 1) Es ist

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(x) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}.$$

Achtung: Schreiben Sie nicht $\arctan(x) \Big|_0^\infty$, sondern wie oben $\lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(x) \Big|_0^b$.

Genauso ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan(x) \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} -\arctan(a) \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2) Für $\alpha > 0$ ist

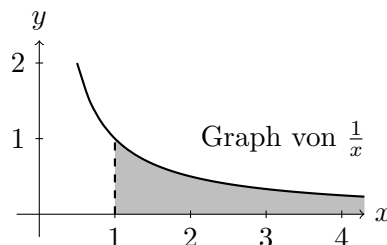
$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\alpha x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha b} + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha},$$

d.h. das uneigentliche Integral existiert.

3) Sei $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) = \infty,$$

also existiert das uneigentliche Integral von f nicht.



- 4) Sei $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{-\alpha}$ mit $\alpha > 0$ und $\alpha \neq 1$. Eine Stammfunktion ist $\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$. Dann ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1-\alpha} b^{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} \right).$$

Für $0 < \alpha < 1$ ist $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-\alpha} = \infty$ und für $\alpha > 1$ ist $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{1-\alpha} = 0$. Daher gilt

$$\int \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{falls } \alpha > 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{falls } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Integrale über ganz \mathbb{R} .

Definition 31.3. (Integral über ganz \mathbb{R}) Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so setzen wir

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx,$$

falls beide uneigentlichen Integrale existieren.

Bemerkung 31.4. Existiert $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$, so gilt

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$$

für jedes $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 31.5. 1) Es gilt

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

vergleiche Beispiel 31.2.

- 2) Achtung: Zum Beispiel für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, existiert der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-b}^b = 0,$$

aber das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty x dx$ existiert nicht, da

$$\int_0^\infty x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^b = \infty$$

nicht existiert. (Auch $\int_{-\infty}^0 x dx$ existiert nicht.)

31.2 Unbeschränkte Funktion

Definition 31.6 (Uneigentliches Integral von unbeschränkter Funktion). Sei $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[c, a]$ für alle $c \in]a, b]$. Dann heißt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x) dx$$

das *uneigentliche Integral* von f über $]a, b]$. Falls dieser Grenzwert existiert, so heißt f *uneigentlich integrierbar* auf $]a, b]$.

Ist $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, c]$ für jedes $c \in [a, b[$, so definiert man genauso

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x) dx.$$

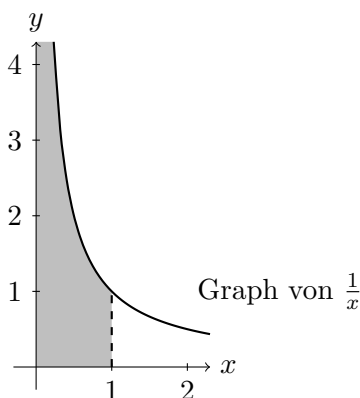
Man sagt, das uneigentliche Integral *existiert*, genau dann wenn der Grenzwert existiert. Man sagt auch, dass ein uneigentliches Integral *konvergiert*, falls der Grenzwert existiert, andernfalls *divergiert* es.

Wie vorher kann das uneigentliche Integral von f existieren oder auch nicht.

Beispiel 31.7. 1) Es ist

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \searrow 0} \int_c^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{c \searrow 0} \ln(x) \Big|_c^1 = \lim_{c \searrow 0} -\ln(c) = \infty,$$

also existiert dieses uneigentliche Integral nicht.



2) Für $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{c \searrow 0} \int_c^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{c \searrow 0} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_c^1 = \lim_{c \searrow 0} \frac{1}{1-\alpha} (1 - c^{1-\alpha}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{für } 0 < \alpha < 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{für } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Insbesondere existiert

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx := \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx}_{\text{existiert für } \alpha < 1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx}_{\text{existiert für } \alpha > 1}$$

für kein α .

Für die Integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ ist also $\alpha = 1$ der kritische Parameter: Für $\alpha = 1$ existieren beide Integrale nicht. Ist aber die Funktion $< \frac{1}{x}$, so existiert das uneigentliche Integral. In $]0, 1]$ ist das für $\alpha < 1$ der Fall, und in $[1, \infty[$ für $\alpha > 1$.

31.3 Integration rationaler Funktionen

Wir bestimmen Stammfunktionen von rationalen Funktionen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit reellen Polynomen p und q .

Eine (komplexe) Polynomdivision und Partialbruchzerlegung (Vorlesung 9) liefert p/q als Summe von Bestandteilen der Form

- 1) Polynom,
- 2) $\frac{A}{x-z}$ mit den Nullstellen $z \in \mathbb{C}$ des Nenners q ,
- 3) $\frac{A}{(x-z)^{k+1}}$ mit $k \geq 1$, falls $z \in \mathbb{C}$ mehrfache Nullstelle des Nenners q ist.

Die Stammfunktion eines Polynoms ist klar, die Stammfunktionen der Partialbrüche bestimmen wir im nächsten Satz.

Satz 31.8 (Stammfunktion von Partialbrüchen). 1) *Mehrfache Polstellen: Für $k \geq 1$ gilt wie im Reellen*

$$\int \frac{1}{(x-z)^{k+1}} dx = -\frac{1}{k} \frac{1}{(x-z)^k} + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}.$$

2) *Einfache Polstellen: Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist*

$$\int \frac{1}{x-z} dx = \begin{cases} \ln|x-z| + c & \text{falls } b = 0 \\ \ln|x-z| + i \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c & \text{falls } b \neq 0 \end{cases} \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Wie im Reellen ist $\frac{d}{dx} \frac{1}{(x-z)^k} = -k \frac{1}{(x-z)^{k+1}}$, da die Ableitungsregeln auch für komplexwertige Funktionen gelten. Daraus folgt die Form der Stammfunktion in 1).

Zu 2). Für $b = 0$ ist also $z = a \in \mathbb{R}$, und wir haben bereits in Abschnitt 29.3 nachgerechnet, dass $\ln|x-z|$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{x-z}$ ist (für $z = a \in \mathbb{R}$).

Für $b \neq 0$ ist $|x-z|^2 = (x-a)^2 + b^2$ und

$$\frac{1}{x-z} = \frac{x-\bar{z}}{(x-z)(x-\bar{z})} = \frac{x-a}{(x-a)^2 + b^2} + i \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}.$$

Wie sieht eine Stammfunktion aus? Der erste Term ergibt (vergleiche Beispiel 30.1)

$$\int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} dx = \frac{1}{2} \ln((x-a)^2+b^2) + c_1 = \ln|x-z| + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Der zweite Term ergibt

$$\int \frac{b}{(x-a)^2+b^2} dx = \int \frac{\frac{1}{b}}{1+\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} dx.$$

Substituieren wir $t = \frac{x-a}{b}$, so ist $dt = \frac{1}{b} dx$ und weiter

$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx = \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(t) + c = \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Zusammen ist

$$\int \frac{1}{x-z} dx = \int \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} dx + i \int \frac{b}{(x-a)^2+b^2} dx = \ln|x-z| + c_1 + i \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + ic_2,$$

und mit $c = c_1 + ic_2 \in \mathbb{C}$ haben wir die Formel nachgerechnet. \square

Beispiel 31.9. Wir berechnen $\int \frac{1}{x^2-9} dx$. Wegen $x^2-9 = (x-3)(x+3)$ (binomische Formel, sonst mit pq -Formel) setzen wir an

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}.$$

Multiplikation mit dem Nenner ergibt $1 = A(x+3) + B(x-3)$. Durch einsetzen von $x=3$ finden wir $A=1/6$ und dann $B=-1/6$. (Alternativ Koeffizientenvergleich und LGS lösen.) Daher ist

$$\int \frac{1}{x^2-9} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+3} dx = \frac{1}{6} \ln|x-3| - \frac{1}{6} \ln|x+3| + c = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Ist $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit reellen Polynomen p und q , und ist z eine nichtreelle Nullstelle von q , also $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$, so ist auch $\bar{z} = a - ib$ eine Nullstelle von q . In der reellen PBZ haben wir dann Terme der Form

$$\frac{A}{x-z} + \frac{B}{x-\bar{z}}.$$

Wir haben zwei Möglichkeiten eine Stammfunktion zu bestimmen:

- 1) Wir verwenden die Stammfunktion aus Satz 31.8. Mit $z = a + ib$ ist $\bar{z} = a - ib$, so dass

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{A}{x-z} + \frac{B}{x-\bar{z}} \right) dx \\ &= A \ln|x-z| + iA \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + B \ln|x-\bar{z}| + iB \arctan\left(\frac{x-a}{-b}\right) + c \\ &= (A+B) \ln|x-z| + (A-iB) \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $\ln|x - z| = \ln|x - \bar{z}|$ gilt und dass der Arcustangens eine ungerade Funktion ist. (Hier ist die Integrationskonstante reell, da die Funktion für reelles x auch reelle Werte hat.)

- 2) Wir fassen beide Terme zu einem Bruch zusammen. Anschließend haben wir typischerweise zwei Integral zu berechnen: Eins führt auf einen \ln , das andere auf einen \arctan (wie im Beweis von Satz 31.8).

Beispiel 31.10. Wir berechnen das unbestimmte Integral von

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x^2 - 4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 - 4x}{(x - i)^2(x + i)^2} = \frac{A}{x + i} + \frac{B}{(x + i)^2} + \frac{C}{x - i} + \frac{D}{(x - i)^2} \\ &= \frac{i}{x + i} + \frac{1 - i}{(x + i)^2} + \frac{-i}{x - i} + \frac{1 + i}{(x - i)^2}. \end{aligned}$$

(Koeffizientenvergleich für A, B, C, D !) Fassen wir die beiden Pole erster Ordnung zusammen kommt

$$f(x) = \frac{2}{1 + x^2} + \frac{1 - i}{(x + i)^2} + \frac{1 + i}{(x - i)^2}.$$

Nun erhalten wir

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= 2 \arctan(x) - \frac{1 - i}{x + i} - \frac{1 + i}{x - i} + c \\ &= 2 \arctan(x) - \frac{(1 - i)(x - i) + (1 + i)(x + i)}{x^2 + 1} + c \\ &= 2 \arctan(x) - \frac{2x - 2}{x^2 + 1} + c \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Man erhält das gleiche Ergebnis, wenn man die beiden einfachen Pole separat integriert: Mit $z = i = 0 + 1i$ ist

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{i}{x + i} + \frac{-i}{x - i} \right) dx &= i \left(\ln|x + i| + i \arctan(-x) \right) - i \left(\ln|x - i| + i \arctan(x) \right) + c \\ &= -i^2 \arctan(x) - i^2 \arctan(x) + c = 2 \arctan(x) + c. \end{aligned}$$

Vorlesung 32

Die Determinante

Die Determinante dient der Volumenberechnung. Sie findet Anwendungen

- bei der mehrdimensionalen Integration („Analysis II für Ingenieurwissenschaften“)
- bei der Herleitung und Berechnung von Eigenwerten (Vorlesung 33),
- um die Invertierbarkeit einer Matrix zu charakterisieren (jetzt).

32.1 Determinante und Volumenberechnung

Für $A = [a_{ij}]$ definiert man $\det(A) := a_{11}$.

Mit Blick auf die Zahlengerade gibt $|\det(A)|$ also den Abstand zum Ursprung an (= Länge des Vektors $a_{11} \in \mathbb{R}$ = eindimensionales Volumen), und das Vorzeichen der Determinante gibt an, ob der Punkt rechts (+) oder links (−) vom Ursprung liegt.

Die Determinante einer 2×2 -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

ist

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Geometrische Deutung in \mathbb{R}^2 (der Ebene): $|\det(A)|$ ist der Flächeninhalt des von den Vektoren

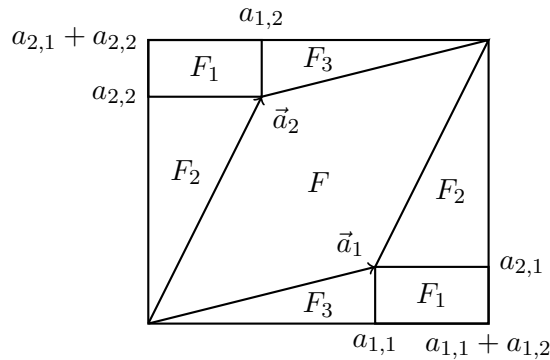
$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}$$

aufgespannten Parallelogramms. Um dies nachzurechnen, betrachten wir die Fläche des großen Rechtecks in der folgenden Skizze:

$$(a_{1,1} + a_{1,2})(a_{2,1} + a_{2,2}) = F + 2F_1 + 2F_2 + 2F_3,$$

wobei

$$F_1 = a_{1,2}a_{2,1}, \quad F_2 = \frac{1}{2}a_{1,2}a_{2,2}, \quad F_3 = \frac{1}{2}a_{1,1}a_{2,1}.$$

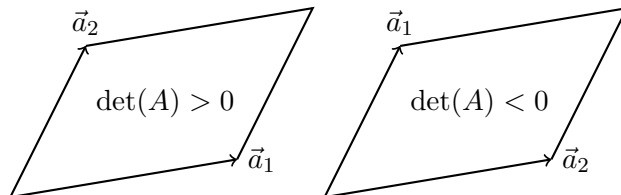


Daher folgt

$$\begin{aligned}
 F &= (a_{1,1} + a_{1,2})(a_{2,1} + a_{2,2}) - 2F_1 - 2F_2 - 2F_3 \\
 &= a_{1,1}a_{2,1} + a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,2}a_{2,2} - 2a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,2}a_{2,2} - a_{1,1}a_{2,1} \\
 &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} = \det(A).
 \end{aligned}$$

Vertauscht man \vec{a}_1 und \vec{a}_2 in der Skizze, so bleibt der Flächeninhalt des Parallelogramms gleich, eine ähnliche Rechnung liefert aber $F = a_{1,2}a_{2,1} - a_{2,2}a_{1,1} = -\det(A)$, so dass $F = |\det(A)|$.

Wir haben jetzt zwei Dinge gelernt: $|\det(A)| = F$ ist der Flächeninhalt des von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 aufgespannten Parallelogramms, und das Vorzeichen der Determinante gibt an, wie die Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 zueinander liegen. Ist $\det(A) > 0$, so ist die Drehung von \vec{a}_1 zu \vec{a}_2 über den kleineren Winkel entgegen dem Uhrzeigersinn, ist $\det(A) < 0$ ist die Drehung im Uhrzeigersinn.



Zum Beispiel sind

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0.$$

Drei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ erzeugen ein Parallelotop (= Parallelepipet = Spat), dessen Volumen mit dem Spatprodukt berechnet werden kann:

$$V = |\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)|,$$

wobei \cdot das Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^3 bezeichnet und \times das Vektorprodukt,

$$\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3} \\ a_{3,2}a_{1,3} - a_{1,2}a_{3,3} \\ a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3} \end{bmatrix}$$

Daher wird die Determinante von $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{K}^{3,3}$ formal als Spatprodukt definiert:

$$\det(A) = a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3}) + a_{2,1}(a_{3,2}a_{1,3} - a_{1,2}a_{3,3}) + a_{3,1}(a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3}).$$

Die Ausdrücke in Klammern sind die Determinanten von 2×2 -Matrizen:

$$\det(A) = a_{1,1} \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} - a_{2,1} \det \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{3,1} \det \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$

und die 2×2 -Matrizen entstehen durch streichen einer Zeile und einer Spalte von A .

Definition 32.1 (Streichungsmatrix). Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit $n > 1$. Durch streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht die *Streichungsmatrix*

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n-1,n-1}.$$

Mit den Streichungsmatrizen ist

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1} \det(A_{1,1}) - a_{2,1} \det(A_{2,1}), & A \in \mathbb{K}^{2,2}, \\ \det(A) &= a_{1,1} \det(A_{1,1}) - a_{2,1} \det(A_{2,1}) + a_{3,1} \det(A_{3,1}), & A \in \mathbb{K}^{3,3}. \end{aligned}$$

Die Determinante von A lässt sich also berechnen, indem man die erste Spalte entlanggeht, den Eintrag $a_{i,1}$ mit $\det(A_{i,1})$ multipliziert und aufsummiert (mit Vorzeichen $(-1)^{i+1}$). Auf diese Weise lässt sich die Determinante rekursiv für beliebige quadratische Matrizen definieren.

Definition 32.2 (Determinante). Die *Determinante* von $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist

$$\begin{aligned} \det(A) &:= a_{1,1}, & \text{falls } n = 1, \\ \det(A) &:= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}), & \text{falls } n > 1. \end{aligned}$$

Beispiel 32.3. Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

haben wir die Streichungsmatrizen

$$A_{1,1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, A_{2,1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, A_{3,1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, A_{4,1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 1 \det(A_{1,1}) - 4 \det(A_{2,1}) + 0 \det(A_{3,1}) - 2 \det(A_{4,1}) \\
&= \left(-2(3 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)) - 5(1 \cdot 3 - 1 \cdot 0) + 4(1 \cdot (-1) - 3 \cdot 0) \right) \\
&\quad - 4 \left(2(3 \cdot 3 - 1 \cdot (-1)) - 5(0 \cdot 3 - 1 \cdot 1) + 4(0 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) \right) \\
&\quad - 2 \left(2(1 \cdot (-1) - 3 \cdot 0) - (-2)(0 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) + 5(0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) \right) \\
&= -2 \cdot 10 - 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) - 4 \left(2 \cdot 10 + 5 + 4 \cdot (-3) \right) - 2 \left(-2 - 6 - 5 \right) \\
&= -65.
\end{aligned}$$

32.2 Berechnung von Determinanten

Für Dreiecksmatrizen lässt sich die Determinante ganz einfach berechnen.

Satz 32.4. *Für eine obere Dreiecksmatrix*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

ist $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} \dots a_{n,n}$ das Produkt der Diagonaleinträge.

Beweis. Mit der Definition ist

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{1,1} \det(A_{1,1}) + 0 \det(A_{2,1}) + \dots + 0 \det(A_{n,1}) \\
&= a_{1,1} \det \left(\begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \right) = a_{1,1}a_{2,2} \det \left(\begin{bmatrix} a_{3,3} & \dots & a_{3,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix} \right) \\
&= \dots = a_{1,1}a_{2,2} \dots a_{n,n}.
\end{aligned}$$

□

Für die Determinante einer allgemeinen $n \times n$ -Matrix müssen hingegen n Determinanten von $(n-1) \times (n-1)$ -Matrizen berechnet werden, was insgesamt auf $n!$ Summanden mit Produkten von n Zahlen führt. Da die Fakultät schnell wächst, benötigen wir Rechenregeln, mit denen wir Determinanten besser berechnen können.

Satz 32.5 (Rechenregeln für die Determinante). *Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ und sei \vec{a}_j die j -te Spalte von A .*

1) Die Determinante ist linear in jeder Spalte von A :

$$\det([\vec{a}_1 \quad \dots \quad \lambda \vec{a}_j \quad \dots \quad \vec{a}_n]) = \lambda \det([\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_j \quad \dots \quad \vec{a}_n])$$

und

$$\begin{aligned} & \det([\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_j + \vec{a}_j \quad \dots \quad \vec{a}_n]) \\ &= \det([\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_j \quad \dots \quad \vec{a}_n]) + \det([\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_j \quad \dots \quad \vec{a}_n]). \end{aligned}$$

2) Die Determinante ist antisymmetrisch: Vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen: Für $k \neq j$ ist

$$\det([\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_j \quad \dots \quad \vec{a}_k \quad \dots \quad \vec{a}_n]) = -\det([\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_k \quad \dots \quad \vec{a}_j \quad \dots \quad \vec{a}_n]).$$

3) Hat A zwei gleiche Spalten, so ist $\det(A) = 0$.

4) Addition einer Spalte zu einer anderen Spalte ändert die Determinante nicht: Für $k \neq j$ ist

$$\det([\vec{a}_1 \quad \dots \quad (\vec{a}_j + \lambda \vec{a}_k) \quad \dots \quad \vec{a}_n]) = \det([\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_j \quad \dots \quad \vec{a}_n]).$$

5) $\det(A) = \det(A^T)$.

Wegen 5) gelten alle Aussagen auch für die Zeilen der Matrix.

Beweis. Die ersten beiden Aussagen lassen sich zum Beispiel per Induktion (über n) zeigen, wir führen das nicht aus. Auch 5) rechnen wir nicht nach.

3) folgt unmittelbar aus 2): Vertauschen wir die beiden gleichen Spalten, so bleibt die Matrix gleich, aber das Vorzeichen der Determinante ändert sich: $\det(A) = -\det(A)$, also ist $\det(A) = 0$.

Für 4) rechnen wir mit der Linearität in Spalte j :

$$\begin{aligned} & \det([\vec{a}_1 \quad \dots \quad (\vec{a}_j + \lambda \vec{a}_k) \quad \dots \quad \vec{a}_k \quad \dots \quad \vec{a}_n]) \\ &= \det([\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_j \quad \dots \quad \vec{a}_k \quad \dots \quad \vec{a}_n]) + \lambda \det([\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_k \quad \dots \quad \vec{a}_k \quad \dots \quad \vec{a}_n]), \end{aligned}$$

und die letzte Determinante ist Null, da die Spalten j und k gleich sind. \square

Beachten Sie: Die Determinante ist linear in jeder Spalte und Zeile, für $n > 1$ ist $\det : \mathbb{K}^{n,n} \rightarrow \mathbb{K}$ aber nicht linear „in der Matrix“, z.B. ist

$$\det(2I_2) = 2 \cdot 2 = 4 \neq 2 = 2 \det(I_2).$$

Mit den elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen können wir $\det(A)$ nun leichter berechnen, indem wir A mit dem Gaußalgorithmus auf Dreiecksgestalt bringen, von der wir die Determinante dann ablesen können.

Beispiel 32.6. Es ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6. \end{aligned}$$

Die sogenannte *Laplace-Entwicklung* ist ein weiteres nützliches Hilfsmittel bei der Berechnung der Determinante. Diese erlaubt die „Entwicklung nach der ersten Spalte“ auf andere Spalten und Zeilen zu übertragen.

Satz 32.7 (Laplace-Entwicklung nach Zeilen und Spalten). *Für $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gilt die Laplace-Entwicklung nach der j -ten Spalte:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

sowie die Laplace-Entwicklung nach der i -ten Zeile:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

Beweis. Die Matrix $B = [a_j \ a_1 \ \dots \ a_{j-1} \ a_{j+1} \ \dots \ a_n]$ entsteht aus A durch tauschen von $j-1$ Spalten, also gilt $\det(A) = (-1)^{j-1} \det(B)$. Berechnet man $\det(B)$, so erhält man die Formel für die Laplace-Entwicklung nach der j -ten Spalte. Die Behauptung für die Zeilen folgt aus $\det(A) = \det(A^T)$. \square

Das Vorzeichenmuster bei der Entwicklung bildet ein „Schachbrett“:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Beispiel 32.8. Mit einer Laplace-Entwicklung nach der dritten Spalte ist

$$\det \begin{pmatrix} 15 & 2 & 0 \\ 12 & 15 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 4 \det \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -4(15 \cdot 0 - 1 \cdot 2) = 8.$$

Berechnung der Determinante: Besonders hilfreich ist die Kombination von Zeilen- und Spaltenoperationen mit der Laplace-Entwicklung. Das typische Vorgehen ist:

- Erzeuge möglichst viele Nullen in einer Zeile/Spalte durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen,
- Entwickle nach einer Zeile/Spalte mit möglichst vielen Nullen.

Wiederhole diese Schritte so lange, bis die Matrizen 2×2 sind, und die Determinanten direkt berechnet werden können.

Beispiel 32.9. Es ist (2. Zeile $-$ 1. Zeile)

$$\det(A) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Laplace-Entwicklung nach der zweiten Zeile ergibt

$$\det(A) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = +1 \det \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right) = 2,$$

Dabei haben wir beim zweiten Gleichheitszeichen 2. Spalte $-$ 1. Spalte gerechnet, und beim dritten Gleichheitszeichen nach der 3. Zeile entwickelt.

32.3 Der Determinantenmultiplikationssatz

Der folgende Determinantenmultiplikationssatz hat zahlreiche nützliche Folgerungen.

Satz 32.10 (Determinantenmultiplikationssatz). *Für quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ gilt*

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Bemerkung 32.11. Achtung: Es gibt keinen Determinanten*additionssatz*, einfach weil dieser falsch wäre! Im Allgemeinen ist $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$. Rechnen Sie zum Beispiel beide Seiten für $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ aus.

Aus dem Determinantenmultiplikationssatz ergeben sich viele nützliche Folgerungen.

Satz 32.12. *Für quadratische $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ gilt*

- 1) $\det(AB) = \det(BA)$, selbst wenn $AB \neq BA$.
- 2) $\det(A^k) = \det(A)^k$ für $k \in \mathbb{N}$.
- 3) $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$, falls A invertierbar ist.

4) $\det(C^{-1}AC) = \det(A)$ für alle invertierbaren $C \in \mathbb{K}^{n,n}$.

5) Für eine Blockdreiecksmatrix mit quadratischen B und D gilt

$$\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(B) \det(D).$$

Die Matrix C muss dabei nicht quadratisch sein.

Beweis. 1) Denn $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(B) \det(A) = \det(BA)$.

2) $\det(A^k) = \det(A) \det(A^{k-1}) = \dots = \det(A)^k$.

3) $1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$.

4) $\det(C^{-1}AC) = \det(C^{-1}(AC)) = \det((AC)C^{-1}) = \det(A)$.

5) Man rechnet nach, dass (mit $B \in \mathbb{K}^{n,n}$, $D \in \mathbb{K}^{m,m}$)

$$\begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Dann liefert der Determinantenmultiplikationssatz

$$\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(D) \det(B).$$

Für das letzte Gleichheitszeichen: n Mal Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte für $\det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(D)$, und m Mal Laplace-Entwicklung nach der letzten Zeile für die zweite Determinante.

□

32.4 Charakterisierung invertierbarer Matrizen

Mit Hilfe der Determinante erhalten wir eine weitere Charakterisierung, wann eine quadratische Matrix invertierbar ist.

Satz 32.13. Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Dann sind äquivalent:

- 1) A ist invertierbar
- 2) $\det(A) \neq 0$
- 3) $\text{Rang}(A) = n$
- 4) $A\vec{x} = \vec{0}$ ist eindeutig lösbar (durch $\vec{x} = \vec{0}$)
- 5) die Spalten von A sind linear unabhängig
- 6) die Zeilen von A sind linear unabhängig

Beweis. Wir wissen bereits (aus dem Gaußalgorithmus), dass

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \text{ ist eindeutig lösbar.}$$

Letzteres heißt aber genau, dass die Spalten von A nur trivial zu Null linear kombiniert werden können, d.h. dass die Spalten von A linear unabhängig sind. Wegen $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A^T)$ ist dies auch äquivalent dazu, dass die Zeilen von A linear unabhängig sind.

Bringen wir A in Zeilenstufenform C , so ändert sich bei Zeilentausch das Vorzeichen der Determinante, beim Addieren des Vielfaches einer Zeile zu einer anderen bleibt die Determinante gleich, zudem lassen sich Konstanten $c \neq 0$ aus der Determinante herausziehen, d.h. $\det(A) = \alpha \det(C)$ für ein $\alpha \neq 0$.

Daher gilt also $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn $\det(C) \neq 0$. Da C eine Dreiecksmatrix ist, ist $\det(C)$ das Produkt der Diagonalelemente, und das ist $\neq 0$ wenn alle Diagonalelemente $\neq 0$ sind, also wenn $\text{Rang}(A) = n$. \square

Durch Negation aller Aussagen erhalten wir die Charakterisierung für nicht invertierbare Matrizen.

Satz 32.14. Für $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ sind äquivalent:

- 1) A ist nicht invertierbar
- 2) $\det(A) = 0$
- 3) $\text{Rang}(A) < n$
- 4) es existiert $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ mit $\vec{x} \neq 0$ und $A\vec{x} = \vec{0}$
- 5) die Spalten von A sind linear abhängig
- 6) die Zeilen von A sind linear abhängig

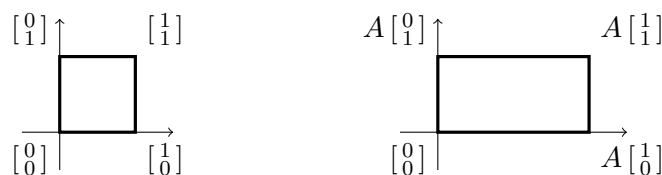
Vorlesung 33

Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir lernen Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen kennen. Diese sind wichtige Kenngrößen einer Matrix.

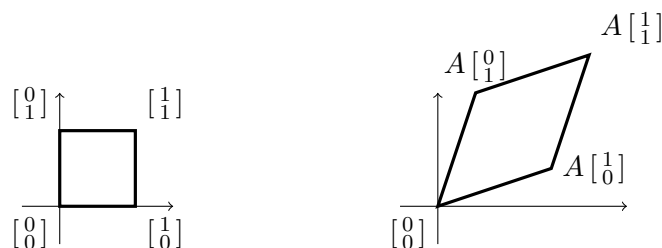
Zur Motivation betrachten wir das Bild des Quadrats mit den Ecken $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bei Multiplikation mit verschiedenen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2,2}$.

1) Für $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist



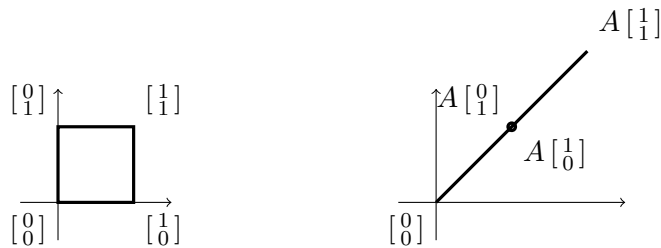
Geometrisch bewirkt die Multiplikation mit A eine Streckung um den Faktor 2 in x -Richtung, da $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, in y -Richtung bleibt alles wie es ist: $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2) Für $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ist



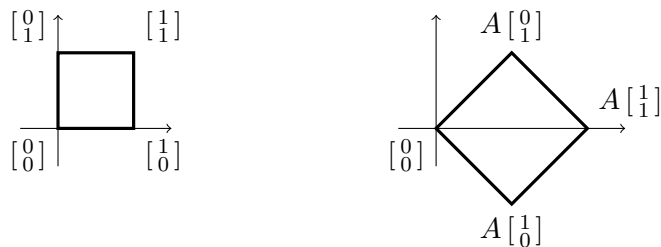
Hier wird die Richtung des Vektors $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ um 2 gestreckt, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, während die Richtung des Vektors $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ um 1 gestreckt wird (also gleich bleibt): $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3) Für $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ist



Das Quadrat wurde plattgedrückt! Multiplikation mit A führt zu einer Streckung mit 2 in Richtung des Vektors $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, und zu einer Streckung mit 0 in Richtung des Vektors $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(A)$.

4) Für $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ist



Multiplikation mit A führt eine Drehstreckung des Quadrats aus. Hier ist nicht ersichtlich, ob A Vektoren in eine Richtung streckt.

33.1 Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren

Definition 33.1 (Eigenwerte und Eigenvektoren). Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine quadratische Matrix. Gilt

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{K} \text{ und } \vec{v} \in \mathbb{K}^n, \vec{v} \neq \vec{0}, \quad (33.1)$$

so heißt

- 1) λ ein *Eigenwert* von A mit zugehörigem Eigenvektor \vec{v} ,
- 2) \vec{v} ein *Eigenvektor* von A zum Eigenwert λ .

Die Gleichung (33.1) wird auch *Eigenwertgleichung* genannt.

Geometrisch bewirkt die Multiplikation eines Eigenvektors mit A eine Streckung um den Faktor λ .

Bemerkung 33.2. Beachten Sie:

- 1) Eigenwerte können 0 sein.
- 2) Eigenvektoren können nie $\vec{0}$ sein. (Für $\vec{v} = \vec{0}$ gilt nämlich $A\vec{0} = \vec{0} = \lambda\vec{0}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$, was nicht spannend ist.)

Beispiel 33.3. 1) Mit der Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ist

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

also hat die Matrix A die beiden Eigenwerte 1 und -1 . Der Vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert -1 und $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1.

2) Für $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ gilt

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

daher hat A den Eigenwert 0 mit Eigenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ und den Eigenwert 2 mit Eigenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, vergleiche das motivierende Beispiel.

Bemerkung 33.4 (Reelle und komplexe Matrizen). Streng nach Definition sind die Eigenwerte also aus dem gleichen Grundkörper (\mathbb{R} oder \mathbb{C}) wie die Einträge der Matrix. Insbesondere hat eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ nur reelle Eigenwerte. Es stellt sich heraus (siehe Abschnitt 33.2 unten), dass die Eigenwerte Nullstellen eines Polynoms sind. Dieses hat immer komplexe Nullstellen, die nicht notwendigerweise reell sein müssen. Um lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden, fasst man ganz einfach die Matrix als komplexe Matrix auf: $A \in \mathbb{R}^{n,n} \subseteq \mathbb{C}^{n,n}$, da ja reelle Zahlen auch komplexe Zahlen sind. Zu reellen Eigenwerten gibt es dann reelle Eigenvektoren, zu nichtreellen Eigenwerten findet man nichtreelle Eigenvektoren.

Ein Beispiel ist die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \subseteq \mathbb{C}^{2,2}$ in Beispiel 33.9 unten.

Definition 33.5 (Eigenraum und geometrische Vielfachheit). Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) Der *Eigenraum* von A zum Eigenwert λ ist

$$V_\lambda = V_\lambda(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\}.$$

2) Die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ ist die Dimension des Eigenraums:

$$g(\lambda) = g(\lambda, A) = \dim(V_\lambda(A)).$$

Bemerkung 33.6. 1) Es ist $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ genau dann, wenn $(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$. Daher ist

$$V_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\} = \text{Kern}(A - \lambda I).$$

Insbesondere ist V_λ ein Teilraum des \mathbb{K}^n . Das kann man auch mit dem Teilraumkriterium (Satz 10.4) nachrechnen.

2) Die Elemente $\vec{v} \neq \vec{0}$ des Eigenraums sind genau die Eigenvektoren:

$$V_\lambda = \{\text{Eigenvektoren zum Eigenwert } \lambda\} \cup \{\vec{0}\}.$$

- 3) Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ ist die Dimension des Eigenraums, also die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren zu λ .

Beispiel 33.7. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3},$$

dann ist $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, also ist 1 ein Eigenwert von A . Wir bestimmen den Eigenraum:

$$V_1 = \text{Kern}(A - 1I_3) = \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit ist $g(1, A) = \dim(V_1(A)) = 2$.

33.2 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Die Eigenvektoren zu einem gegebenen Eigenwert finden wir durch Lösen eines linearen Gleichungssystems. Aber wie findet man die Eigenwerte? Wegen

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= \lambda\vec{v} \text{ mit } \vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \text{ mit } \vec{v} \neq \vec{0} \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I \text{ ist nicht invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0 \end{aligned}$$

findet man die Eigenwerte von A als Nullstellen des Polynoms

$$p_A(z) = \det(A - zI).$$

Man berechnet die Determinante und sortiert nach Potenzen von z . Das ergibt ein Polynom der Gestalt

$$p_A(z) = (-z)^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

vom Grad n . Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat p_A immer n komplexe Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt). Die Nullstellen können reell oder komplex sein, und es kann vorkommen, dass es keine reellen Nullstellen gibt.

Definition 33.8 (Charakteristisches Polynom, algebraische Vielfachheit). Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

- 1) Das *charakteristische Polynom* von A ist

$$p_A(z) := \det(A - zI_n).$$

- 2) Die *algebraische Vielfachheit* des Eigenwerts λ von A ist die Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom. Bezeichnung: $a(\lambda) = a(\lambda, A)$.

Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen (komplexen) Nullstellen von p_A , so dass p_A die komplexe Zerlegung

$$p_A(z) = (-1)^n (z - \lambda_1)^{a(\lambda_1)} (z - \lambda_2)^{a(\lambda_2)} \dots (z - \lambda_r)^{a(\lambda_r)}$$

hat, so gilt:

- 1) A hat die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (keine weiteren).
- 2) Die Summe der algebraischen Vielfachheiten ist n : $a(\lambda_1) + \dots + a(\lambda_r) = n$.
- 3) A hat höchstens n verschiedene Eigenwerte (falls $r = n$).

Beispiel 33.9. 1) Das charakteristische Polynom von $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \subseteq \mathbb{C}^{2,2}$ ist

$$p_A(z) = \det(A - zI_2) = \det \left(\begin{bmatrix} -z & 1 \\ -1 & -z \end{bmatrix} \right) = z^2 + 1 = (z - i)(z + i),$$

also hat A die Eigenwerte i und $-i$, beide mit algebraischer Vielfachheit 1. Betrachtet man A als reelle Matrix, so hat A keine (reellen) Eigenwerte.

- 2) Das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

berechnen wir mit Hilfe von Satz 32.12 als

$$\begin{aligned} p_A(z) &= \det(A - zI) = \det \left(\begin{bmatrix} 2-z & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2-z & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1-z & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3-z \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} 2-z & 1 \\ 1 & 2-z \end{bmatrix} \right) \det \left(\begin{bmatrix} 1-z & 1 \\ -1 & 3-z \end{bmatrix} \right) \\ &= ((2-z)^2 - 1)((1-z)(3-z) + 1) = (z^2 - 4z + 3)(z^2 - 4z + 4). \end{aligned}$$

Multiplizieren sie hier auf keinen Fall aus, wenn sie die Nullstellen suchen. Zerlegen Sie besser jeden der beiden Faktoren einzeln:

$$p_A(z) = (z - 1)(z - 3)(z - 2)^2.$$

Also hat A die Eigenwerte 1, 2 und 3 mit algebraischen Vielfachheiten $a(1) = 1$, $a(2) = 2$ und $a(3) = 1$.

Satz 33.10. Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix, so sind die Eigenwerte von A genau die Diagonaleinträge.

Beweis. Mit Satz 32.4 berechnen wir das charakteristische Polynom der oberen Dreiecksmatrix A :

$$p_A(z) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - z & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} - z & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} - z \end{pmatrix} = (a_{1,1} - z)(a_{2,2} - z) \dots (a_{n,n} - z).$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von p_A , also $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$. Für untere Dreiecksmatrizen geht es genauso. \square

Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren. Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gegeben, so berechnen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren wie folgt:

- 1) Berechne das charakteristische Polynom $p_A(z) = \det(A - zI_n)$.
- 2) Berechne die Nullstellen von p_A , dies sind die Eigenwerte von A .
- 3) Berechne für jeden Eigenwert die Lösung des homogenen LGS $(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$. Die Lösungen $\vec{v} \neq \vec{0}$ sind die Eigenvektoren zum Eigenwert λ .

Beispiel 33.11. 1) Für $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} p_A(z) &= \det(A - zI_2) = \det \begin{pmatrix} 1-z & 3 \\ 3 & 1-z \end{pmatrix} = (1-z)^2 - 9 \\ &= 1 - 2z + z^2 - 9 = z^2 - 2z - 8 = (z-4)(z+2), \end{aligned}$$

also hat A die Eigenwerte -2 und 4 je mit algebraischer Vielfachheit 1. Für die geometrischen Vielfachheiten berechnen wir die Eigenräume: Wegen

$$A - (-2)I_2 = A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ist

$$V_{-2}(A) = \text{Kern}(A + 2I_2) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{K} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},$$

also $\dim(V_{-2}(A)) = 1$, und

$$V_4(A) = \text{Kern}(A - 4I_2) = \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \right) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

also $\dim(V_4(A)) = \dim(\text{Kern}(A - 4I_2)) = 1$.

- 2) Für $A = \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist $p_A(z) = (z-2i)(z-1)$, also hat A die Eigenwerte $2i$ und 1 , beide mit algebraischer Vielfachheit 1. Wir berechnen die Eigenräume. Für $\lambda_1 = 2i$ ist

$$A - 2iI_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

also ist

$$V_{2i}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Für den Eigenwert 1 ist

$$A - 1I_2 = \begin{bmatrix} 2i - 1 & 1 + i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+i}{2i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-3i}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

also

$$V_1(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{-1+3i}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3) Für $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist

$$p_A(z) = \det(A - zI_2) = \det \left(\begin{bmatrix} 1-z & 1 \\ 0 & 1-z \end{bmatrix} \right) = (1-z)^2,$$

so dass A nur den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 2 besitzt. Für die geometrische Vielfachheit rechnen wir

$$\text{Kern}(A - 1I_2) = \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

also $g(1, A) = \dim(\text{Kern}(A - 1I_2)) = 1 < 2 = a(1, A)$.

Die algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts sind nicht immer gleich, wie das letzte Beispiel zeigt. Es gilt aber folgender Zusammenhang.

Satz 33.12. Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt

$$1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda),$$

d.h. die geometrische Vielfachheit ist immer kleiner als die algebraische Vielfachheit.

Beispiel 33.13. Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ hat die Eigenwerte 1 und 4 mit algebraischen Vielfachheiten $a(1) = 2$ und $a(4) = 1$. Die geometrischen Vielfachheiten sind

$$g(1) = \dim(\text{Kern}(A - 1I_3)) = 3 - \text{Rang}(A - I_3) = 3 - \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) = 1$$

$$g(4) = \dim(\text{Kern}(A - 4I_3)) = 3 - \text{Rang}(A - 4I_3) = 3 - \text{Rang} \left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1.$$

Für den Eigenwert 1 gilt also $1 = g(1) < a(1) = 2$. Die geometrische Vielfachheit ist echt kleiner als die algebraische Vielfachheit. Für den Eigenwert 4 gilt hingegen $1 = g(4) = a(4)$, d.h. beide Vielfachheiten sind gleich.

33.3 Eigenvektoren und lineare Unabhängigkeit

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Zur Motivation seien \vec{v}_1, \vec{v}_2 Eigenvektoren von $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ zu den verschiedenen Eigenwerten λ_1, λ_2 (d.h. es gilt $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Wir rechnen nach, dass \vec{v}_1 und \vec{v}_2 linear unabhängig sind. Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ mit

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}. \quad (33.2)$$

Wir wollen nachrechnen, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Dazu multiplizieren wir (33.2) einmal mit λ_1 und einmal mit A und erhalten:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_1 \vec{v}_2 \\ \vec{0} &= \alpha_1 A \vec{v}_1 + \alpha_2 A \vec{v}_2 = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2. \end{aligned}$$

Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt

$$\vec{0} = \alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{v}_2.$$

Da $\vec{v}_2 \neq 0$ (Eigenvektor!), ist $\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$, und da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist $\alpha_2 = 0$. Eingesetzt in (33.2) erhalten wir $\alpha_1 \vec{v}_1 = \vec{0}$, und da $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ (Eigenvektor!), ist $\alpha_1 = 0$.

Durch Induktion kann man dieses Resultat auf mehrere Eigenwerte verallgemeinern. Dabei verwendet man im Induktionsschritt genau den Trick aus dem Beweis: Einmal mit A und einmal mit einem Eigenwert multiplizieren.

Satz 33.14. *Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ zu den verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, so sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ linear unabhängig.*

Vorlesung 34

Diagonalisierbarkeit

Diagonalmatrizen sind besonders einfach, an ihnen kann man den Rang und die Eigenwerte mit Vielfachheiten direkt ablesen. Sei D eine *Diagonalmatrix*, also

$$D = \begin{bmatrix} d_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n,n} \end{bmatrix} =: \text{diag}(d_{1,1}, \dots, d_{n,n}).$$

Die Diagonaleinträge $d_{1,1}, \dots, d_{n,n}$ sind die Eigenwerte von D (Satz 33.10) und

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

sind Eigenvektoren von D mit $D\vec{e}_j = d_{j,j}\vec{e}_j$. Für jeden Eigenwert sind die algebraische und geometrische Vielfachheit gleich, und gleich der Anzahl wie oft λ_j auf der Diagonalen von D vorkommt.

34.1 Definition und Charakterisierung

Wir sind daher daran interessiert, allgemeine Matrizen auf Diagonalform zu bringen.

Definition 34.1 (Diagonalisierbarkeit). Die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt, so dass

$$S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (34.1)$$

eine Diagonalmatrix ist. Die Matrix D nennt man eine *Diagonalisierung* von A .

Bemerkung 34.2. 1) Wir können die Gleichung (34.1) auch schreiben als

$$A = SDS^{-1}.$$

2) In $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sind alle Einträge außerhalb der Diagonalen 0.

3) Beachten Sie: S ist die Basiswechselmatrix von der Basis $\mathcal{B} = \{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n\}$ (Spalten von S) in die Standardbasis \mathcal{B}_0 , also $S = \text{id}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_0}$. Dann ist $D = A_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$.

Wann lässt sich eine Matrix diagonalisieren?

Satz 34.3. Für $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ sind äquivalent:

- 1) A ist diagonalisierbar.
- 2) Es gibt eine Basis von \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren von A .
- 3) Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren und $a(\lambda) = g(\lambda)$ für jeden Eigenwert von A .

Beweis. 1) \Rightarrow 2) Sei $S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonal. Mit den Spalten von S , $S = [\vec{s}_1 \ \dots \ \vec{s}_n]$ ist

$$[A\vec{s}_1 \ \dots \ A\vec{s}_n] = AS = SD = [\lambda_1\vec{s}_1 \ \dots \ \lambda_n\vec{s}_n],$$

also $A\vec{s}_j = \lambda_j\vec{s}_j$ für alle $j = 1, \dots, n$. Da S invertierbar ist, sind $\vec{s}_j \neq 0$, also Eigenvektoren von A . Weiter sind die Spalten von S linear unabhängig und auch eine Basis von \mathbb{K}^n . Damit ist $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n$ eine Basis aus Eigenvektoren von A .

2) \Rightarrow 1) Hat andersherum A eine Basis aus Eigenvektoren $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n$ mit $A\vec{s}_j = \lambda_j\vec{s}_j$, so ist $S = [\vec{s}_1 \ \dots \ \vec{s}_n]$ invertierbar, und es gilt

$$AS = [A\vec{s}_1 \ \dots \ A\vec{s}_n] = [\lambda_1\vec{s}_1 \ \dots \ \lambda_n\vec{s}_n] = S \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

also ist $S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonal und A ist diagonalisierbar.

2) \Rightarrow 3) Es gebe eine Basis aus Eigenvektoren. Dann gibt es also n linear unabhängige Eigenvektoren. Da die geometrische Vielfachheit gerade die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren ist, folgt

$$n \leq \sum g(\lambda_j) \leq \sum a(\lambda_j) \leq n.$$

Dabei haben wir $g(\lambda) \leq a(\lambda)$ für jeden Eigenwert verwendet, und dass die Summe der algebraischen Vielfachheiten $\leq \deg(p_A) = n$ ist. In der Ungleichung gilt dann überall $=$, so dass p_A n Nullstellen hat und damit in Linearfaktoren zerfällt, und $g(\lambda) \leq a(\lambda)$ für alle Eigenwerte. (Ein $<$ würde zu $n < n$ führen, was nicht sein kann.)

3) \Rightarrow 2) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von A . Da p_A in Linearfaktoren zerfällt ist $n = \sum_{j=1}^r a(\lambda_j)$, und da $g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$ gilt, ist auch $\sum_{j=1}^r g(\lambda_j) = n$. Wählen wir in jedem Eigenraum eine Basis ($g(\lambda_j)$ Elemente) und fügen alle Vektoren zusammen, so sind diese linear unabhängig (Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig). n linear unabhängige Vektoren in \mathbb{K}^n bilden aber eine Basis. \square

Bemerkung 34.4. Die Rechnung im Beweis zeigt:

- 1) Bilden die Spalten von S eine Basis aus Eigenvektoren von A , so ist $S^{-1}AS$ diagonal.
- 2) Ist $S^{-1}AS = D$ diagonal, so sind die Spalten von S Eigenvektoren von A , und auf der Diagonalen von D stehen die Eigenwerte von A .

Satz 34.5. Hat $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ genau n verschiedene Eigenwerte, so ist A diagonalisierbar.

Beweis. Hat A die n verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so hat p_A die n verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so dass p_A in Linearfaktoren zerfällt. Weiter ist $1 \leq g(\lambda_j) \leq a(\lambda_j) = 1$ (denn p_A kann nicht mehr als n Nullstellen haben), also $g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$ für alle Eigenwerte, so dass A diagonalisierbar ist. \square

Berechnung einer Diagonalisierung. Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gegeben.

- 1) Berechne das charakteristische Polynom p_A .
- 2) Bestimme die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ von p_A (Eigenwerte von A) mit algebraischen Vielfachheiten. (Gibt es keine n Nullstellen, so ist A nicht diagonalisierbar.)
- 3) Bestimme für $j = 1, \dots, k$ die Eigenräume

$$V_{\lambda_j} = \text{Kern}(A - \lambda_j I_n) = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n \mid (A - \lambda_j I_n)\vec{x} = \vec{0}\}$$

und bestimme jeweils eine Basis \mathcal{B}_j und die geometrische Vielfachheit $g(\lambda_j)$.

- 4) Gilt $g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$ für alle $j = 1, \dots, k$? (Wenn nicht, ist A nicht diagonalisierbar.)
- 5) $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ ist eine Basis aus Eigenvektoren, die als die Spalten von S genommen werden können. Schreibe $S = [\vec{s}_1 \ \dots \ \vec{s}_n] \in \mathbb{K}^{n,n}$. Dann ist $S^{-1}AS = D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, wobei μ_j der Eigenwert zum Eigenvektor \vec{s}_j ist (j -te Spalte von S).

Beispiel 34.6. Wir berechnen (wenn möglich) eine Diagonalisierung von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 1) Es ist $p_A(z) = (1 - z)^2(3 - z)$ (untere Dreiecksmatrix)
- 2) Somit hat A die Eigenwerte 1 mit $a(1) = 2$ und 3 mit $a(3) = 1$.
- 3) Für den Eigenwert 1 ist

$$\text{Kern}(A - I_3) = \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{span}\{\vec{s}_1, \vec{s}_2\},$$

somit ist $g(1) = 2 = a(1)$.

Für den Eigenwert 3 ist

$$\text{Kern}(A - 3I_3) = \text{Kern} \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{span}\{\vec{s}_3\}.$$

4) Setze

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(Beachte: Reihenfolge der Eigenwerte = Reihenfolge der Eigenvektoren!) Dann ist

$$S^{-1}AS = D.$$

Zur Probe kann man am Besten $AS = SD$ nachrechnen, dann braucht man die Matrix S nicht zu invertieren.

Beispiel 34.7. 1) Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist $p_A(z) = z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$, so dass A die beiden Eigenwerte i und $-i$ hat. Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} A - iI &= \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{I} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A + iI &= \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{I-iII} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

also sind zum Beispiel $\vec{s}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(A - iI)$, $\vec{s}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(A + iI)$. Mit

$$S = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

ist $S^{-1}AS = D$, oder $A = SDS^{-1}$.

2) Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ aus Beispiel 33.11 hat den Eigenwert $\lambda_1 = 2i$ mit Eigenvektor $\vec{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ mit Eigenvektor $\vec{s}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1+3i}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$. Setzen wir daher

$$S = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1+3i}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

so ist

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-3i}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-3i}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2i & 1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1+3i}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & \frac{6+2i}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1+3i}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= D. \end{aligned}$$

Dass D diese Gestalt hat, wissen wir aber bereits, man hätte sich die Rechnung auch sparen können.

Tauscht man die Spalten von S , betrachtet also $X = \begin{bmatrix} \frac{-1+3i}{5} & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, so tauschen auch die Einträge in D . Das kann man zur Übung nachrechnen: $X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}$.

34.2 Anwendungen

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ diagonalisierbar mit $S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonal, also $A = SDS^{-1}$. Dann können wir ganz einfach berechnen:

1) Potenzen von A :

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^2S^{-1}, \\ A^3 &= AA^2 = SDS^{-1}SD^2S^{-1} = SD^3S^{-1}, \end{aligned}$$

und allgemein (Induktion!)

$$A^k = SD^kS^{-1} = S \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Vorteil: Für A^k brauchen wir k Matrixmultiplikationen, mit der Diagonalisierung nur zwei.

2) Polynome von Matrizen: Ist $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m$ ein Polynom, so ist

$$\begin{aligned} p(A) &= a_0I_n + a_1A + \dots + a_mA^m = a_0SI_nS^{-1} + a_1SDS^{-1} + \dots + a_mSD^mS^{-1} \\ &= Sp(D)S^{-1} = S \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{bmatrix} S^{-1}, \end{aligned}$$

d.h. wir brauchen nur die $p(\lambda_j)$ berechnen, sowie zwei Matrizenmultiplikationen.

3) Funktionen von Matrizen: Wir schreiben

$$f(A) := S \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} S^{-1},$$

falls die Funktion an den Eigenwerten definiert ist.

Das wird insbesondere für $f(x) = e^x$ wichtig beim Lösen von Differentialgleichungen in Vorlesung 43.

4) Rekursionen auflösen: Für die Fibonacci-Folge $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 2$) können wir schreiben

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}, \quad n \geq 2, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dann folgt

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

so dass wir a_n direkt berechnen können (ohne alle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} vorher zu berechnen). Hier ist mit $z_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $z_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} z_+ & z_- \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_+ & 0 \\ 0 & z_- \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -z_- \\ -1 & z_+ \end{bmatrix}$$

also

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(z_+^n - z_-^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Allgemeiner kann man $a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_k a_{n-k}$ mit gegebenen a_0, a_1, \dots, a_{k-1} schreiben als

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{bmatrix}$$

Lässt sich die Matrix diagonalisieren, kann man wie eben eine explizite Formel für a_n finden.

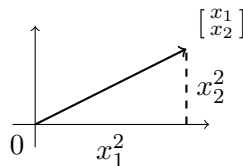
Vorlesung 35

Vektorräume mit Skalarprodukt 1

In der Ebene und im dreidimensionalen Raum haben wir einen Abstandsbegriff und können Winkel zwischen Vektoren messen. Die zugrundeliegenden Begriffe sind die Norm und das Skalarprodukt, die wir für allgemeine Vektorräume über \mathbb{R} oder \mathbb{C} kennen lernen.

35.1 Norm

Wir wollen die Länge von Vektoren und den Abstand zwischen zwei Vektoren messen. In \mathbb{R} oder \mathbb{C} messen wir Abstände und Längen meist mit dem Absolutbetrag. In \mathbb{R}^2 ist die „übliche“ Länge eines Vektors $\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

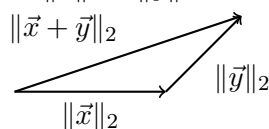


Die Länge hat die folgenden Eigenschaften:

- Längen sind immer positiv: $\|\vec{x}\|_2 \geq 0$, und $\|\vec{x}\|_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.
- Bei Streckung des Vektors um λ wird seine Länge mit $|\lambda|$ multipliziert:

$$\|\lambda \vec{x}\|_2 = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2} = |\lambda| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\lambda| \|\vec{x}\|_2.$$

- Dreiecksungleichung: $\|\vec{x} + \vec{y}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2$.



Der Begriff der Norm verallgemeinert diesen Begriff der Länge.

Definition 35.1 (Norm). Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

- 1) Positive Definitheit: Für alle $v \in V$ ist $\|v\| \geq 0$, und $\|v\| = 0$ nur für $v = 0$.
- 2) Homogenität: Für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.
- 3) Dreiecksungleichung: Für alle $v, w \in V$ gilt $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Beispiel 35.2. 1) Der Absolutbetrag auf $V = \mathbb{R}$ oder $V = \mathbb{C}$ ist eine Norm.

- 2) In \mathbb{K}^n ist

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$$

eine Norm, die sogenannte *2-Norm* oder *Standardnorm*. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ so wird sie auch *euklidische Norm* genannt. In \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 ist das genau die „übliche Länge“ von Vektoren.

Allgemeiner ist für reelles $1 \leq p < \infty$

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

eine Norm auf \mathbb{K}^n , die sogenannte *p-Norm*.

- 3) Die *Maximumsnorm*

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} |x_j| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

ist eine Norm auf \mathbb{K}^n . Man kann zeigen, dass $\lim_{p \rightarrow \infty} \|\vec{x}\|_p = \|\vec{x}\|_\infty$ für jedes $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ gilt. Daher wird die Maximumsnorm auch *∞ -Norm* genannt.

- 4) Eine weitere Norm ist die *Maximumsnorm* (von Funktionen)

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

35.2 Skalarprodukte

Definition 35.3 (Skalarprodukt). Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} . Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt ein *Skalarprodukt* auf V falls für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

- 1) Linearität im ersten Argument:

$$\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \\ \langle \lambda v, w \rangle &= \lambda \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

- 2) Symmetrie: $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

- 3) Positive Definitheit: $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle v , und $\langle v, v \rangle = 0$ genau dann wenn $v = 0$.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ so heißt ein Vektorraum mit Skalarprodukt ein *euklidischer Vektorraum*, ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ so nennt man ihn einen *unitären Vektorraum*.

Bemerkung 35.4. 1) Für das zweite Argument eines Skalarprodukts gilt:

$$\langle v, u + w \rangle = \overline{\langle u + w, v \rangle} = \overline{\langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle} = \overline{\langle u, v \rangle} + \overline{\langle w, v \rangle} = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$$

und

$$\langle v, \lambda w \rangle = \overline{\langle \lambda w, v \rangle} = \overline{\lambda \langle w, v \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle w, v \rangle} = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle.$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $\bar{\lambda} = \lambda$ und das Skalarprodukt ist auch linear im zweiten Argument.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist das Skalarprodukt nicht linear im zweiten Argument, da man zwar Summen auseinander ziehen kann, aber Skalare komplex konjugiert aus dem zweiten Argument „herausgezogen“ werden. (Man sagt, das Skalarprodukt ist *se-milinear* oder *antilinear* im zweiten Argument.)

- 2) In einem *reellen* Vektorraum mit Skalarprodukt ist $\langle w, v \rangle \in \mathbb{R}$, so dass man das komplex Konjugieren bei der Symmetrie weglassen kann: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.
- 3) In manchen Büchern (insbesondere in der Physik) wird gefordert, dass ein Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum linear im zweiten Argument ist, so dass man dann $\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle = \langle \bar{\lambda} v, w \rangle$ hat.

Beispiel 35.5. 1) Das *Standardskalarprodukt* in \mathbb{K}^n ist

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j = \vec{y}^H \vec{x}.$$

Speziell für \mathbb{R}^2 haben wir das Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Dies ist tatsächlich ein Skalarprodukt, denn:

(a) Linearität im ersten Argument:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{z} \rangle &= \sum_{j=1}^n (x_j + y_j) \bar{z}_j = \sum_{j=1}^n x_j \bar{z}_j + \sum_{j=1}^n y_j \bar{z}_j = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle, \\ \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle &= \sum_{j=1}^n \lambda x_j \bar{y}_j = \lambda \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

(b) Symmetrie:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j = \sum_{j=1}^n \bar{\bar{x}_j} \bar{y}_j = \overline{\sum_{j=1}^n \bar{x}_j y_j} = \overline{\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle}.$$

- (c) Positive Definitheit: $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{x}_j = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \geq 0$. Weiter folgt aus $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, dass alle Summanden $|x_j|^2 \geq 0$ auch $= 0$ sind, also $|x_j| = 0$ und dann $x_j = 0$, so dass $\vec{x} = \vec{0}$ ist.

- 2) Gewichtetes Skalarprodukt auf \mathbb{K}^n : Sind $w_1, \dots, w_n > 0$, so definiert

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_w = \sum_{j=1}^n w_j x_j \bar{y}_j$$

ein Skalarprodukt auf \mathbb{K}^n . Sind alle $w_j = 1$, so ist dies das Standardskalarprodukt.

- 3) Das L^2 -Skalarprodukt auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen $V = C([a, b])$ ist

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Linearität im ersten Argument und Symmetrie rechnen sich genauso einfach nach wie eben (versuchen Sie es!). Die positive Definitheit ist etwas komplizierter, wir verzichten darauf.

Beim Standardskalarprodukt sehen wir, dass $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|_2^2$ ist, d.h. die 2-Norm lässt sich aus dem Skalarprodukt berechnen: $\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$. Allgemein erhält man so aus einem Skalarprodukt eine Norm.

Satz 35.6. Ist V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so ist

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle},$$

eine Norm auf V . Diese heißt vom Skalarprodukt induzierte Norm (= zum Skalarprodukt zugehörige Norm).

Beweis. Nachrechnen der drei Normeigenschaften:

- 1) Positive Definitheit: Wegen $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $= 0$ nur für $v = 0$, folgt dass $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$ und $\|v\| = 0$ ist äquivalent zu $\langle v, v \rangle = 0$, also zu $v = 0$.
- 2) Homogenität: Es ist

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle v, v \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda}} \sqrt{\langle v, v \rangle} = |\lambda| \|v\|.$$

- 3) Dreiecksungleichung: Für die Dreiecksungleichung benötigt man die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$, die wir nicht nachrechnen. Für $v, w \in V$ ist

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} + \|w\|^2 = \|v\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2, \end{aligned}$$

woraus durch Wurzelziehen die Dreiecksungleichung folgt.

□

Beispiel 35.7. 1) Die 2-Norm wird vom Standardskalarprodukt induziert:

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}.$$

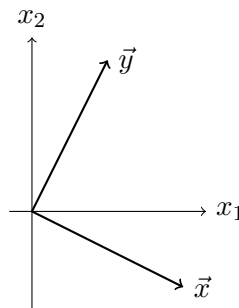
2) Die L^2 -Norm wird vom L^2 -Skalarprodukt induziert:

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f(x) \overline{f(x)} dx} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

3) Nicht von einem Skalarprodukt induziert sind: Die p -Norm falls $p \neq 2$, die Maximumsnorm.

35.3 Orthogonale Vektoren

Aus dem \mathbb{R}^2 mit dem Standardskalarprodukt wissen Sie: zwei Vektoren sind senkrecht zueinander, genau dann wenn ihr Skalarprodukt Null ist. Zum Beispiel sind $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ senkrecht zueinander:



Das Skalarprodukt ist $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0$. Dies nimmt man als Ausgangspunkt für die folgende Definition.

Definition 35.8 (orthogonale und orthonormale Vektoren). Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$ heißen

1) *orthogonal* (=senkrecht), falls

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

2) *orthonormal*, falls

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j, \end{cases}$$

d.h. wenn sie orthogonal sind und Norm (Länge) 1 haben.

Zwei Vektoren u, v sind also orthogonal genau dann, wenn $\langle u, v \rangle = 0$.

Für eine von einem Skalarprodukt induzierte Norm gilt der Satz des Pythagoras.

Satz 35.9 (Satz des Pythagoras). *Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\|\cdot\|$. Sind $u, v \in V$ orthogonal, so gilt*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

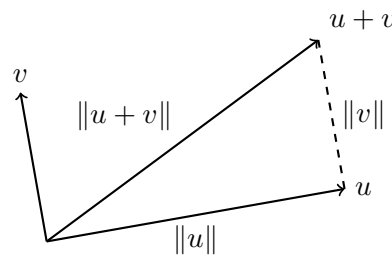
Allgemeiner gilt: Sind $v_1, \dots, v_k \in V$ orthogonal, so gilt

$$\|v_1 + \dots + v_k\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_k\|^2,$$

Beweis. Das rechnen wir direkt nach:

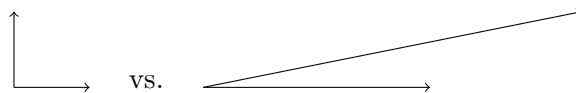
$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u + v \rangle + \langle v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v, u \rangle}_{=0} + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Für k Vektoren geht es ähnlich. □



35.4 Orthonormalbasen

Was macht kartesische Koordinatensysteme besser als andere Koordinatensysteme?



Ein Vorteil ist, dass wir einen Vektor in der ersten (kartesischen) Basis ganz einfach als Linearkombination der beiden Basisvektoren schreiben können, während das in der zweiten komplizierter ist.

Definition 35.10 (Orthonormalbasis). Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Eine Basis $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ von V heißt *Orthonormalbasis* (kurz ONB), falls die Vektoren orthonormal sind.

Satz 35.11. 1) *Orthonormale Vektoren sind linear unabhängig.*

2) *Sind u_1, \dots, u_n orthonormal und ist $n = \dim(V)$, so ist $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine ONB von V .*

Beweis. Seien u_1, \dots, u_n orthonormal und seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j$. Dann ist

$$0 = \langle 0, u_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j, u_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \underbrace{\langle u_j, u_k \rangle}_{=0 \text{ für } j \neq k} = \lambda_k \underbrace{\langle u_k, u_k \rangle}_{=1} = \lambda_k.$$

Da dies für jedes $k = 1, \dots, n$ gilt, sind $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ und u_1, \dots, u_n sind linear unabhängig. Die zweite Aussage gilt, da n linear unabhängige Vektoren eines n -dimensionalen Vektorraums eine Basis bilden (Satz 11.9). \square

Beispiel 35.12. 1) Die Standardbasis im \mathbb{K}^2 ist eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts, denn

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 1, \quad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1.$$

2) Allgemeiner ist die Standardbasis im \mathbb{K}^n eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts im \mathbb{K}^n .

3) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die Vektoren $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sind orthonormal, denn

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \\ \langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \\ \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle &= \langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Daher ist $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 .

Orthonormalbasen haben viele Vorzüge. Insbesondere lassen sich die Koordinaten eines Vektors ganz einfach berechnen.

Satz 35.13. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$. Dann gilt für jeden Vektor $v \in V$

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j,$$

d.h. die Koordinaten von v in der Orthonormalbasis \mathcal{B} lassen sich durch Berechnung der Skalarprodukte $\langle v, u_j \rangle$ bestimmen.

Beweis. Das lässt sich leicht nachrechnen. Da \mathcal{B} eine Basis ist, lässt sich v darstellen als

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$$

mit Skalaren $\alpha_j \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$\langle v, u_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j, u_k \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \underbrace{\langle u_j, u_k \rangle}_{=0 \text{ für } j \neq k} = \alpha_k \underbrace{\langle u_k, u_k \rangle}_{=1} = \alpha_k.$$

□

35.5 Orthogonale Matrizen

Wir untersuchen nun Matrizen, deren Spalten eine Orthonormalbasis bilden. Wie sich herausstellt werden zum Beispiel Drehungen und Spiegelungen durch solche Matrizen beschrieben.

Definition 35.14 (Orthogonale Matrix). Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt *orthogonal*, falls $Q^T Q = I_n$.

Schreibe $Q = [q_1 \ \dots \ q_n]$ mit den Spalten $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} [q_1 \ \dots \ q_n] = \begin{bmatrix} q_1^T q_1 & \dots & q_1^T q_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^T q_1 & \dots & q_n^T q_n \end{bmatrix}$$

also

$$Q^T Q = I_n \quad \Leftrightarrow \quad q_i^T q_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Dies zeigt: Q ist orthogonal genau dann, wenn die Spalten von Q eine Orthonormalbasis (bzgl. des Standardskalarprodukts) von \mathbb{R}^n sind.

Beispiel 35.15. 1) Die Einheitsmatrix ist orthogonal: $I_n^T I_n = I_n I_n = I_n$.

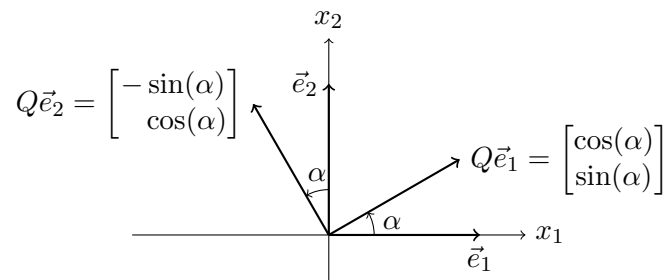
2) Die Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

ist orthogonal, denn

$$\begin{aligned} Q^T Q &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Multiplikation mit der Matrix Q führt eine Drehung um den Winkel α aus (mathematisch positiv, also entgegen dem Uhrzeigersinn):



Satz 35.16. Sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal. Dann gilt:

- 1) $\det(Q) = \pm 1$
- 2) Q ist invertierbar und $Q^{-1} = Q^T$. Insbesondere gilt auch $QQ^T = I_n$.
- 3) Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle Q\vec{x}, Q\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ (Standardskalarprodukt).
- 4) Für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Q\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\|_2$.

Die letzten beiden Eigenschaften bedeuten, dass die Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix sowohl Winkel als auch die euklidische Länge erhält.

Beweis. 1) Übungsaufgabe.

2) Da $\det(Q) \neq 0$ ist, ist Q invertierbar, und da $Q^T Q = I_n$ ist $Q^T = Q^{-1}$ die Inverse.

3) Mit dem Standardskalarprodukt ist

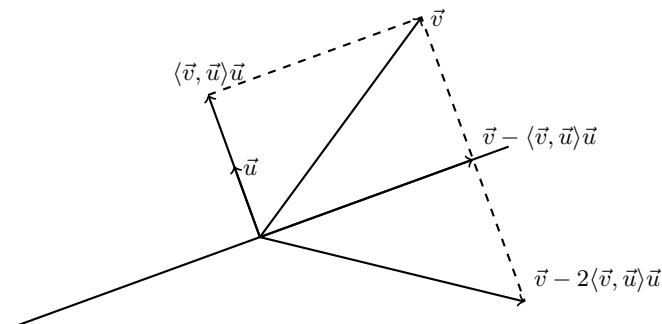
$$\langle Q\vec{x}, Q\vec{y} \rangle = (Q\vec{y})^T Q\vec{x} = \vec{y}^T \underbrace{Q^T Q}_{=I_n} \vec{x} = \vec{y}^T \vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

4) Mit 3) ist

$$\|Q\vec{x}\|_2 = \sqrt{\langle Q\vec{x}, Q\vec{x} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \|\vec{x}\|_2.$$

□

Beispiel 35.17. Sei $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{u} \neq \vec{0}$. Wir wollen die Spiegelung an der zu \vec{u} orthogonalen Ursprungsgeraden bestimmen. Wir nehmen zuerst \vec{u} als normiert an ($\|\vec{u}\|_2 = 1$), so dass $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u}$ der Anteil von \vec{v} in Richtung \vec{u} ist.



Die Spiegelung von \vec{v} an der zu \vec{u} orthogonalen Ursprungsgeraden ist daher

$$\vec{v} - 2\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u} = \vec{v} - 2\vec{u}\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = \vec{v} - 2\vec{u}\vec{u}^T \vec{v} = (I_2 - 2\vec{u}\vec{u}^T)\vec{v}.$$

Für allgemeines $\vec{u} \neq \vec{0}$ ist $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_2}$ normiert und die Spiegelung von \vec{v} ist dann

$$\left(I_2 - 2 \frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\|\vec{u}\|_2^2} \right) \vec{v} = \underbrace{\left(I_2 - 2 \frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}} \right)}_{=: H(\vec{u})} \vec{v}.$$

Die *Householder-Matrix* $H(\vec{u})$ beschreibt die Spiegelung an der Ursprungsgeraden, die senkrecht zu \vec{u} ist.

Allgemeiner beschreibt für $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, die *Householder-Matrix*

$$H(\vec{u}) = I - 2 \frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}}$$

die Spiegelung an der zu \vec{u} orthogonalen Hyperebene $U = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0\}$, die ein $(n-1)$ -dimensionaler Teilraum von \mathbb{R}^n ist.

35.6 Unitäre Matrizen

Unitäre Matrizen sind wie orthogonale Matrizen, nur komplex.

Definition 35.18 (Unitäre Matrix). Eine Matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ heißt *unitär*, falls $U^H U = I_n$.

Wie für orthogonale Matrizen rechnet man nach: *U ist unitär genau dann, wenn die Spalten von U eine Orthonormalbasis (bzgl. des Standardskalarprodukts) von \mathbb{C}^n sind.*

Auch Satz 35.16 gilt entsprechend für unitäre Matrizen.

Satz 35.19. Sei $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ unitär. Dann gilt:

- 1) $|\det(U)| = 1$, d.h. $\det(U) = e^{i\varphi}$ für $\varphi \in \mathbb{R}$.
- 2) U ist invertierbar und $U^{-1} = U^H$. Insbesondere gilt auch $U U^H = I_n$.
- 3) Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ gilt $\langle U\vec{x}, U\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ (Standardskalarprodukt).
- 4) Für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt $\|U\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\|_2$.
- 5) Die Eigenwerte von U liegen auf dem Einheitskreis: $|\lambda| = 1$.

Beweis. Nur 5): Da $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ eine komplexe Matrix ist, hat U Eigenwerte, etwa $U\vec{x} = \lambda\vec{x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Dann gilt mit 4)

$$\|\vec{x}\|_2 = \|U\vec{x}\|_2 = \|\lambda\vec{x}\|_2 = |\lambda| \|\vec{x}\|_2.$$

Da $\vec{x} \neq \vec{0}$ ist auch $\|\vec{x}\|_2 \neq 0$, also folgt $|\lambda| = 1$, d.h. λ liegt auf dem Einheitskreis. □

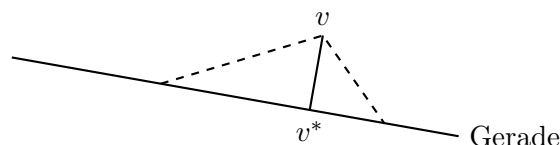
Vorlesung 36

Vektorräume mit Skalarprodukt 2

Wir lernen wichtige Anwendungen von Skalarprodukten kennen. Dies sind einmal die Berechnung des kürzesten Abstands von einem Punkt zu einer Geraden oder zu einem Teilraum. Zum Anderen lernen wir das Gram-Schmidt-Verfahren kennen, mit dem sich Orthonormalbasen berechnen lassen, und einige Anwendungen kennen.

36.1 Kürzeste Abstände und orthogonale Projektion

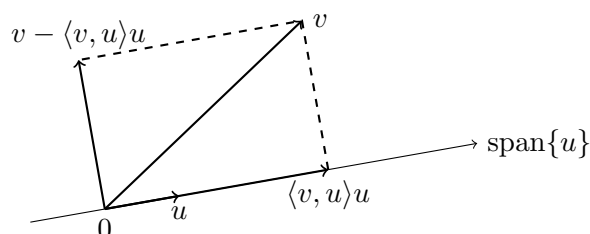
Frage: Was ist der kürzeste Abstand zwischen einem Punkt v und einer Geraden? Anders gefragt suchen wir den Punkt v^* auf der Geraden, der am nächsten am Punkt v liegt. Anschaulich muss $v - v^*$ senkrecht zur Geraden sein:



Wie sieht v^* dann aus? Dazu sei $u \in V$ mit $\|u\| = 1$ der Richtungsvektor der Ursprungsgeraden $U = \text{span}\{u\}$. Wir machen den Ansatz $v^* = \alpha u$. Die Bedingung $v - v^* \perp u$ ergibt

$$0 = \langle v - v^*, u \rangle = \langle v, u \rangle - \langle v^*, u \rangle = \langle v, u \rangle - \langle \alpha u, u \rangle = \langle v, u \rangle - \alpha \langle u, u \rangle = \langle v, u \rangle - \alpha,$$

also $v^* = \alpha u = \langle v, u \rangle u$. Andersherum zeigt die Rechnung: Wenn $v^* = \alpha u = \langle v, u \rangle u$ ist, dann ist $v - v^* \perp u$.



Daher zerlegen wir v als

$$v = v - v^* + v^* = (v - \langle v, u \rangle u) + \langle v, u \rangle u.$$

Dabei steht $v - \langle v, u \rangle u$ senkrecht zur von u aufgespannten Geraden, und $\langle v, u \rangle u$ ist die *orthogonale Projektion* (= das *Lot*) von v auf diese Gerade. Dies legt nahe, dass $v^* = \langle v, u \rangle u$ der Punkt der Geraden mit kleinstem Abstand zu v ist.

Satz 36.1. *Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U = \text{span}\{u\}$ mit $\|u\| = 1$. Für $v \in V$ ist $v^* = \langle v, u \rangle u$ die orthogonale Projektion von v auf U . Dann ist v^* der Punkt aus U mit kleinstem Abstand zu v . Der Abstand von v zu U ist dann genau*

$$\|v - \langle v, u \rangle u\| = \sqrt{\|v\|^2 - |\langle v, u \rangle|^2}.$$

Beweis. Der Abstand von v zum Punkt $\alpha u \in U$ ist $\|v - \alpha u\|$. Wie wir gerade nachgerechnet haben, sind $v - \langle v, u \rangle u$ und u orthogonal, also gilt mit dem Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} \|v - \alpha u\|^2 &= \|v - \langle v, u \rangle u + \langle v, u \rangle u - \alpha u\|^2 = \|v - \langle v, u \rangle u + (\langle v, u \rangle - \alpha)u\|^2 \\ &= \|v - \langle v, u \rangle u\|^2 + \|(\langle v, u \rangle - \alpha)u\|^2 = \|v - \langle v, u \rangle u\|^2 + |\langle v, u \rangle - \alpha|^2 \|u\|^2 \\ &= \|v - \langle v, u \rangle u\|^2 + |\langle v, u \rangle - \alpha|^2. \end{aligned}$$

Der zweite Term ist ≥ 0 und $= 0$ genau dann, wenn $\alpha = \langle v, u \rangle$. D.h. $\|v - \alpha u\|^2$ ist am kleinsten für $\alpha = \langle v, u \rangle$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \|v - \langle v, u \rangle u + \langle v, u \rangle u\|^2 \stackrel{\text{Pythagoras}}{=} \|v - \langle v, u \rangle u\|^2 + \|\langle v, u \rangle u\|^2 \\ &= \|v - \langle v, u \rangle u\|^2 + |\langle v, u \rangle|^2 \underbrace{\|u\|^2}_{=1}. \end{aligned}$$

Durch Umstellen folgt die Formel für $\|v - \langle v, u \rangle u\|$. □

Genauso findet man den Abstand von einem Punkt zu einer Ebene, und allgemeiner zu einem Teilraum. Wir halten das als Satz fest, versuchen Sie diesen nachzurechnen!

Satz 36.2. *Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ mit einer Orthonormalbasis u_1, \dots, u_k von U . Für $v \in V$ ist $v^* = \sum_{j=1}^k \langle v, u_j \rangle u_j$ die orthogonale Projektion von v auf U . Dann ist v^* der Punkt aus U mit kleinstem Abstand zu v . Der Abstand von v zu U ist dann genau*

$$\|v - \sum_{j=1}^k \langle v, u_j \rangle u_j\| = \sqrt{\|v\|^2 - \|v^*\|^2} = \sqrt{\|v\|^2 - \sum_{j=1}^k |\langle v, u_j \rangle|^2}.$$

Die orthogonale Projektion von $v \in V$ auf U sieht also fast so aus wie eine „ONB-Entwicklung“ von $v \in V$ im Teilraum (statt im ganzen Raum).

36.2 Das Gram-Schmidt-Verfahren

Das Gram-Schmidt-Verfahren erlaubt es, aus einer gegebenen Basis eine Orthonormalbasis zu berechnen.

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\|\cdot\|$. Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V . Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert eine ONB von V :

- 1) Normiere b_1 : $u_1 := \frac{1}{\|b_1\|} b_1$.
- 2) Für $k = 2, \dots, n$:
 - (a) Orthogonalisiere b_k : Entferne den Anteil von b_k in die bereits gefundenen Richtungen u_1, \dots, u_{k-1} :

$$\hat{u}_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_k, u_j \rangle u_j$$

(Dann ist $\langle \hat{u}_k, u_\ell \rangle = 0$ für $\ell = 1, 2, \dots, k-1$.)

- (b) Normiere \hat{u}_k :

$$u_k = \frac{1}{\|\hat{u}_k\|} \hat{u}_k.$$

Dann ist $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine ONB von V mit der Eigenschaft, dass

$$\text{span}\{u_1, \dots, u_k\} = \text{span}\{b_1, \dots, b_k\} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n.$$

Beispiel 36.3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\|b_1\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2},$$

also

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir orthogonalisieren b_2 :

$$\hat{u}_2 = b_2 - \langle b_2, u_1 \rangle u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Normiere \hat{u}_2 : Wegen $\|\hat{u}_2\| = 1$ ist

$$u_2 = \frac{1}{1}\hat{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Orthogonalisiere b_3 :

$$\begin{aligned} \hat{u}_3 &= b_3 - \langle b_3, u_1 \rangle u_1 - \langle b_3, u_2 \rangle u_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=0} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Normiere \hat{u}_3 : Mit $\|\hat{u}_3\| = \sqrt{2}$ ist

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\{u_1, u_2, u_3\}$ eine ONB von \mathbb{R}^3 .

36.3 QR-Zerlegung

Die QR-Zerlegung ist eine für die Anwendung sehr wichtige Matrix-Zerlegung.

Satz 36.4 (QR-Zerlegung). *Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $m \geq n$. Dann ist*

$$A = QR$$

mit einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m,m}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m,n}$, also

$$R = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ist $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ mit $m \geq n$, so ist

$$A = QR$$

mit einer unitären Matrix $Q \in \mathbb{C}^{m,n}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{C}^{m,n}$.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall einer quadratischen Matrix A mit linear unabhängigen Spalten (also ein invertierbares A).

Sei $A = [a_1 \ \dots \ a_n] \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar mit den Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$. Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens (mit dem Standardskalarprodukt und der 2-Norm) auf a_1, \dots, a_n ergibt orthonormale Vektoren u_1, \dots, u_n mit

$$\text{span}\{a_1, \dots, a_j\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_j\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Daher gilt insbesondere

$$a_j = \sum_{i=1}^j r_{i,j} u_i.$$

Aus dem Gram-Schmidt-Verfahren sehen wir, dass

$$a_j = \sum_{i=1}^{j-1} \langle a_j, u_i \rangle u_i + \widehat{u}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \langle a_j, u_i \rangle u_i + \|\widehat{u}_j\|_2 u_j.$$

Dann ist $r_{i,j} = \langle a_j, u_i \rangle$ für $i = 1, \dots, j-1$. Weiter ist $\langle a_j, u_j \rangle = \|\widehat{u}_j\|_2$ und für $i > j$ ist $r_{i,j} = \langle a_j, u_i \rangle = 0$, da u_1, \dots, u_n orthogonal sind. Insgesamt ist also $r_{i,j} = \langle a_j, u_i \rangle$ für alle i, j und

$$A = QR$$

mit orthogonalem (bzw. unitärem) $Q = [u_1 \ \dots \ u_n]$ und einer oberen Dreiecksmatrix $R = [r_{i,j}]$. \square

Berechnung der QR-Zerlegung für invertierbares $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{n,n}$):

- 1) Wende das Gram-Schmidt-Verfahren (mit dem Standardskalarprodukt) auf die Spalten a_1, \dots, a_n von A an, um die ONB u_1, \dots, u_n zu erhalten.
- 2) Setze $Q := [u_1 \ \dots \ u_n]$. Dann ist Q orthogonal (bzw. unitär). (Probe: $Q^T Q = I_n$ bzw. $Q^H Q = I_n$.)
- 3) Berechnung von $R = [r_{i,j}]$: Zwei Möglichkeiten:
 - berechne $r_{i,j} = \langle a_j, u_i \rangle$ (wird bei Gram-Schmidt mit berechnet), oder
 - berechne $R = Q^T A$ (bzw. $R = Q^H A$).

Dann ist R eine obere Dreiecksmatrix.

Dann ist $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A .

Beispiel 36.5. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

In Beispiel 36.3 haben wir die Spalten von A mit Gram-Schmidt orthonormalisiert. Daher ist

$$Q = [u_1 \ u_2 \ u_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

orthogonal (rechnen Sie zur Probe $Q^T Q = I_3$ nach). Die Matrix R erhalten wir als

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

oder aus den berechneten Koeffizienten:

$$R = \begin{bmatrix} \|\hat{u}_1\|_2 & \langle a_2, u_1 \rangle & \langle a_3, u_1 \rangle \\ 0 & \|\hat{u}_2\|_2 & \langle a_3, u_2 \rangle \\ 0 & 0 & \|\hat{u}_3\|_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Bemerkung 36.6. Falls A nicht quadratisch ist oder die Spalten linear abhängig sind, modifiziert man das vorgehen wie folgt: Man rechnet Gram-Schmidt auf den Spalten von A . Ist einer der Vektoren $\hat{u}_j = 0$ (dies passiert genau dann, wenn a_j linear abhängig von u_1, \dots, u_{j-1} ist), so lässt man \hat{u}_j weg, behält aber die berechneten Einträge $r_{i,j} = \langle a_j, u_i \rangle$, $i = 1, \dots, j-1$ von R .

Am Ende hat man $A = QR$ mit einer Matrix Q mit orthonormalen Spalten und einer oberen Dreiecksmatrix R . Nun ergänzt man Q zu einer orthogonalen (unitären) Matrix und hängt genügend Nullen unten an R an.

Beispiel 36.7. Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Hier ist $\|a_1\| = \sqrt{2}$, also

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\hat{u}_2 = a_2 - \langle a_2, u_1 \rangle u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Das ergibt

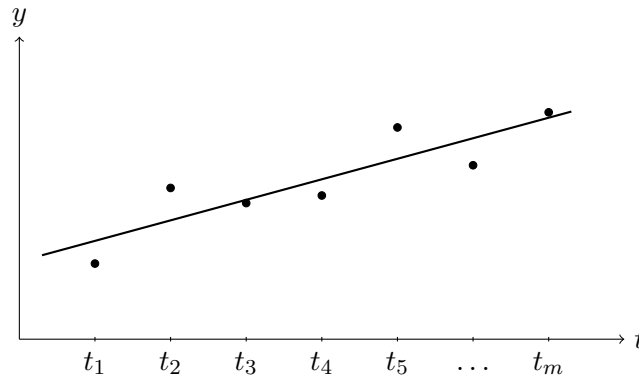
$$A = [u_1] \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{=Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=R}.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt Q zu einer orthogonalen Matrix ergänzt. (Sieht man nicht direkt, wie man Q ergänzen kann, kann man nach und nach die Standardbasisvektoren versuchen und zum Orthonormalisieren noch einmal Gram-Schmidt anwenden.)

36.4 Lineare Regression

Gegeben seien Daten oder Messwerte: (t_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$.

Gesucht ist eine Gerade $y(t) = a_1 t + a_2$ die diese Punkte „am Besten“ repräsentiert. Wegen Messfehlern gilt typischerweise $y_i \approx a_1 t_i + a_2$ für alle i , aber nicht Gleichheit.



Gesucht sind also die Koeffizienten a_0, a_1 so dass

$$a_1 t_i + a_2 - y_i = \begin{bmatrix} t_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - y_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

möglichst klein wird. Den Abstand messen wir in der 2-Norm (kleinste-Quadrate-Approximation; engl. least squares approximation), und suchen also a_1, a_2 so dass

$$\left\| \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m (a_1 t_i + a_2 - y_i)^2}$$

möglichst klein wird. Setzen wir

$$A = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 1 \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

so wollen wir also $\|Aa - y\|_2$ möglichst klein bekommen. Mit der QR-Zerlegung $A = QR$ ist dann

$$\|Aa - y\|_2 = \|Q Ra - y\|_2 = \|Q(Ra - Q^T y)\|_2 = \|Ra - Q^T y\|_2.$$

Da A nur zwei Spalten hat, ist R von der Form

$$R = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mit } \tilde{R} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Teilen wir dann $b = Q^T y = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ auf mit $b_1 \in \mathbb{R}^2$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{n-2}$, so ist

$$\|Aa - y\|_2^2 = \|Ra - b\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \tilde{R}a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{bmatrix} \tilde{R}a - b_1 \\ -b_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \|\tilde{R}a - b_1\|_2^2 + \|b_2\|_2^2,$$

und das wird am kleinsten wenn $\|\tilde{R}a - b_1\|_2 = 0$, also $\tilde{R}a - b_1 = 0$, also $a = \tilde{R}^{-1}b_1$ gilt. Für dieses a ist der verbleibende Fehler also $\|Aa - y\|_2 = \|b_2\|_2$. Wir fassen zusammen.

Lösung des kleinsten-Quadrate-Problems: Gegeben Messwerte (t_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, m$, setze:

$$A = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

- 1) Berechne die QR-Zerlegung $A = QR$.
- 2) Erhalte $\tilde{R} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{bmatrix}$ und $b_1 = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{bmatrix} y$.
- 3) Löse das LGS $\tilde{R} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = b_1$.

Dann ist $y(t) = a_1 t + a_2$ die Gerade durch die Messwerte, deren Abweichung den kleinsten Fehler hat (in der 2-Norm).

Beispiel 36.8. Der Plot am Anfang des Abschnitts illustriert die Datenpunkte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.8 \\ 1.9 \\ 3 \\ 2.5 \\ 3.2 \end{bmatrix}.$$

Für diese berechnet man $a_1 = 0.2714$ und $a_2 = 1.0286$ (auf 4 Nachkommastellen gerundet), was die eingezeichnete Gerade ergibt.

Vorlesung 37

Reelle Fourieranalysis

- Differenzierbare Funktionen lassen sich lokal gut durch (Taylor-)Polynome approximieren.
- Wir lernen, wie man periodische Funktionen sogar global durch Sinus- und Cosinusfunktionen approximiert.
- Die Fourierapproximation ist das mathematische Werkzeug für die Frequenzanalyse von periodischen Schwingungen.

Die Taylorformel gibt einem die Möglichkeit, eine (genügend oft differenzierbare) Funktion f in der Nähe eines Punktes x_0 durch ein Polynom zu approximieren:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k \quad \text{mit } a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Die Taylor-Approximation eines Polynoms liefert wieder dasselbe Polynom. Für andere Funktionen gibt der Satz von Taylor (Satz 24.2) Auskunft über den Approximationsfehler.

In der Taylor-Theorie approximiert man also „komplizierte“ Funktionen mit einfachen Bausteinen, nämlich Potenzen von x , genauer mit Linearkombinationen von Potenzen von x , also mit Polynomen.

Bei den in der Mechanik und Elektrotechnik häufig auftretenden periodischen Funktionen (Schwingungen, Wechselstrom) ist es nahe liegend, andere Bausteine zu nehmen, nämlich solche die selber schon periodisch sind: Sinus- und Cosinusschwingungen zum Beispiel, sogenannte *harmonische Schwingungen* (vgl. Beispiel 6.6). Wir bezeichnen die Variable in diesem Abschnitt mit t , weil sie oft die Zeit repräsentiert.

37.1 Trigonometrische Polynome

Definition 37.1 (periodische Funktion). Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *periodisch mit der Periode* $T > 0$ oder kurz *T -periodisch*, wenn $f(t + T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Eine Periode muss nicht die kleinste Zahl mit der Eigenschaft $f(t + T) = f(t)$ für alle t sein. Ist T eine Periode von f , so sind auch $2T, 3T, 4T, \dots$ Perioden der Funktion, zum Beispiel ist $f(t + 2T) = f((t + T) + T) = f(t + T) = f(t)$.

Beispiel 37.2. Sei $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die zugehörige Frequenz. Die Funktionen

$$\cos(k\omega t), \quad \sin(k\omega t)$$

sind für jedes $k \in \mathbb{N}$ periodisch mit der Periode T :

$$\cos(k\omega(t + T)) = \cos(k\omega t + k\omega T) = \cos(k\omega t + k2\pi) = \cos(k\omega t).$$

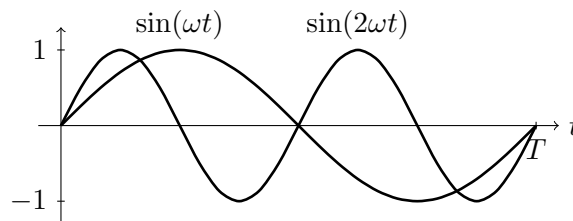
Genauso für $\sin(k\omega t)$. Dann sind auch die Linearkombinationen

$$\sum_{k=0}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

T -periodisch. Dabei sind $\sin(0\omega t) = 0$ und $\cos(0\omega t) = 1$, und man schreibt typischerweise

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

(Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist Konvention, wir werden später sehen, warum dies sinnvoll ist.)



Auch $\sin(2\omega t)$ ist periodisch mit Periode T . Die kleinste Periode von $\sin(2\omega t)$ ist $T/2$.

Definition 37.3 (Trigonometrische Polynome). Funktionen der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

heißen *trigonometrische Polynome* vom Grad oder von der Ordnung n .

Physikalische Interpretation. Physikalisch besteht ein trigonometrisches Polynom aus der Überlagerung einer *Grundschiwingung* der Frequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und *Oberschwingungen* der Frequenzen $k\omega$. Die Koeffizienten geben an, mit welcher Amplitude, d.h. wie stark, die Oberschwingungen vertreten sind.

Umrechnung der Periode: Seien $T, S > 0$. Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -periodisch, dann ist

$$\tilde{f}(t) := f\left(\frac{T}{S}t\right)$$

S -periodisch, denn:

$$\tilde{f}(t + S) = f\left(\frac{T}{S}(t + S)\right) = f\left(\frac{T}{S}t + T\right) = f\left(\frac{T}{S}t\right) = \tilde{f}(t).$$

37.2 Reelle Fourierapproximation

Für die Bausteine der trigonometrischen Polynome gelten die folgenden Orthogonalitätsrelationen.

Satz 37.4 (Orthogonalitätsrelationen). *Sei $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann gilt für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt &= \begin{cases} 2 & k = \ell = 0, \\ 1 & k = \ell > 0 \\ 0 & k \neq \ell \end{cases} \\ \frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) \sin(\ell\omega t) dt &= \begin{cases} 1 & k = \ell > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Das haben wir bereits in Beispiel 30.3 nachgerechnet. Ebenso folgt die Aussage aus Beispiel 30.8, wenn man Real- und Imaginärteile der Integrale dort vergleicht.

Wir können das auch noch auf einem dritten Weg mit der komplexen Exponentialfunktion nachrechnen: Für $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, ist

$$\int_0^T e^{im\omega t} dt = \frac{1}{im\omega} e^{im\omega t} \Big|_0^T = \frac{1}{im\omega} (e^{im\omega T} - e^0) = \frac{1}{im\omega} (e^{im2\pi} - 1) = 0.$$

Daher rechnet man für $k, \ell \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2} \cdot \frac{e^{i\ell\omega t} + e^{-i\ell\omega t}}{2} dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T \left(e^{i(k+\ell)\omega t} + e^{i(k-\ell)\omega t} + e^{i(-k+\ell)\omega t} + e^{i(-k-\ell)\omega t} \right) dt \end{aligned}$$

Für $k \neq \ell$ sind $k + \ell$, $k - \ell$, $-k + \ell$, $-k - \ell$ alle $\neq 0$, so dass das Integral verschwindet. Ist $k = \ell = 0$, so ist der Integrand 4, und wir erhalten $\frac{4T}{2T} = 2$, wie behauptet. Ist hingegen $k = \ell > 0$, so sind $k + \ell$, $-k - \ell \neq 0$, aber $k - \ell = 0 = -k + \ell$. Dann ist der Integrand 2, und das Integral ergibt 1.

Die anderen beiden Formeln findet man genauso, indem man auch den Sinus mit der komplexen Exponentialfunktion schreibt. \square

Die Orthogonalitätsrelationen besagen, dass die Funktionen $\cos(k\omega t)$ und $\sin(k\omega t)$ *orthogonal* bezüglich des L^2 -Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt \quad (37.1)$$

sind. Für $k \geq 1$ sind $\cos(k\omega t)$ und $\sin(k\omega t)$ sogar *orthonormal*, denn

$$\begin{aligned} \langle \cos(k\omega t), \cos(k\omega t) \rangle &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(k\omega t) dt = 1, \\ \langle \sin(k\omega t), \sin(k\omega t) \rangle &= \frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) \sin(k\omega t) dt = 1. \end{aligned}$$

Nur für $k = 0$ haben wir den Sonderfall $\cos(0\omega t) = 1$, für den

$$\langle \cos(0\omega t), \cos(0\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T 1 dt = 2$$

ist. Dieses Wissen machen wir uns gleich zunutze, um Funktionen durch trigonometrische Polynome zu approximieren.

Stückweise Monotonie. Im Folgenden haben wir es oft mit Integralen zu tun, an denen eine T -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beteiligt ist. Damit diese Integrale existieren, machen wir folgende Generalvoraussetzung.

Generalvoraussetzung: Alle im Zusammenhang mit der Fourieranalysis betrachteten reellen Funktionen seien auf dem Periodenintervall $[0, T]$ stückweise monoton (vergleiche Definition 28.4). Komplexwertige Funktionen sollen stückweise monotonen Real- und Imaginärteil haben.

Das impliziert insbesondere, dass f beschränkt ist. Beispiele sind natürlich die Sinus- und Cosinusfunktionen aber auch Sägezahn- oder Rechtecksfunktionen.

Aus Satz 35.13 wissen wir, dass ein Vektor bezüglich einer Orthonormalbasis die Darstellung

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j$$

hat. Da $\cos(k\omega t)$ und $\sin(k\omega t)$ orthonormal bzgl. des L^2 -Skalarprodukts (37.1) sind, definieren wir die Approximation durch trigonometrische Polynome wie folgt.

Definition 37.5 (Fourierkoeffizienten und Fourierpolynom). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) eine stückweise monotone Funktion der Periode $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann heißen

$$\begin{aligned} a_k &= \langle f, \cos(k\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt, \\ b_k &= \langle f, \sin(k\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt, \end{aligned}$$

die reellen *Fourierkoeffizienten* von f , und

$$\phi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

heißt das n -te *Fourierpolynom* oder das *Fourierpolynom der Ordnung n* von f . Manchmal schreibt man auch $\phi_n^f(t)$ oder Ähnliches.

Bemerkung 37.6. 1) Die Fourierkoeffizienten sind genau wie die Koeffizienten eines Vektors bezüglich einer ONB definiert.

2) Der konstante Term ist $a_0/2$ und nicht a_0 , da $\langle \cos(0\omega t), \cos(0\omega t) \rangle = 2$ und nicht 1 ist (s.o.), was hier ausgeglichen wird.

3) Es ist immer $b_0 = 0$, da $\sin(0\omega t) = 0$ ist.

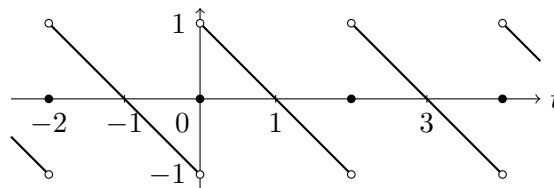
4) Für die Fourierkoeffizienten von ϕ_n gilt

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_0^T \phi_n(t) \cos(k\omega t) dt &= a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt, \\ \frac{2}{T} \int_0^T \phi_n(t) \sin(k\omega t) dt &= b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt. \end{aligned}$$

Das rechnet man leicht mit den Orthogonalitätsrelationen nach (oder noch einfacher mit dem Skalarprodukt).

Mit Blick auf Satz 35.13 und Satz 36.2 (ONB-Entwicklung und beste Approximation) hat man die Hoffnung, dass die Fourierpolynome die Funktion f approximieren. Es ist aber nicht klar, ob das Fourierpolynom n -ter Ordnung (für hinreichend großes n) wirklich eine gute Approximation für $f(t)$ darstellt. Wie groß ist der Fehler? Wir kommen auf diese Frage in Abschnitt 38.2 zurück. Zunächst betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 37.7. Sägezahnkurve



Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist 2-periodisch (d.h. $T = 2$) mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{für } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Berechnung der Fourierkoeffizienten: Da $T = 2$ ist $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Dann ist für $k \geq 1$:

$$b_k = \frac{2}{2} \int_0^2 (1 - t) \sin(k\pi t) dt = \int_0^2 \sin(k\pi t) dt - \int_0^2 t \sin(k\pi t) dt.$$

Das zweite Integral berechnen wir mit partieller Integration: $u'(t) = \sin(k\pi t)$ und $v(t) = t$, also

$$\begin{aligned} b_k &= -\frac{1}{k\pi} \cos(k\pi t) \Big|_0^2 - \left(-\frac{t}{k\pi} \cos(k\pi t) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{k\pi} \cos(k\pi t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{k\pi} (1 - 1) - \left(-\frac{2}{k\pi} + \frac{0}{k\pi} - \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) \Big|_0^2 \right) = \frac{2}{k\pi}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$a_0 = \int_0^2 (1-t) \underbrace{\cos(0\pi t)}_{=1} dt = \left(t - \frac{1}{2}t^2 \right) \Big|_0^2 = 0$$

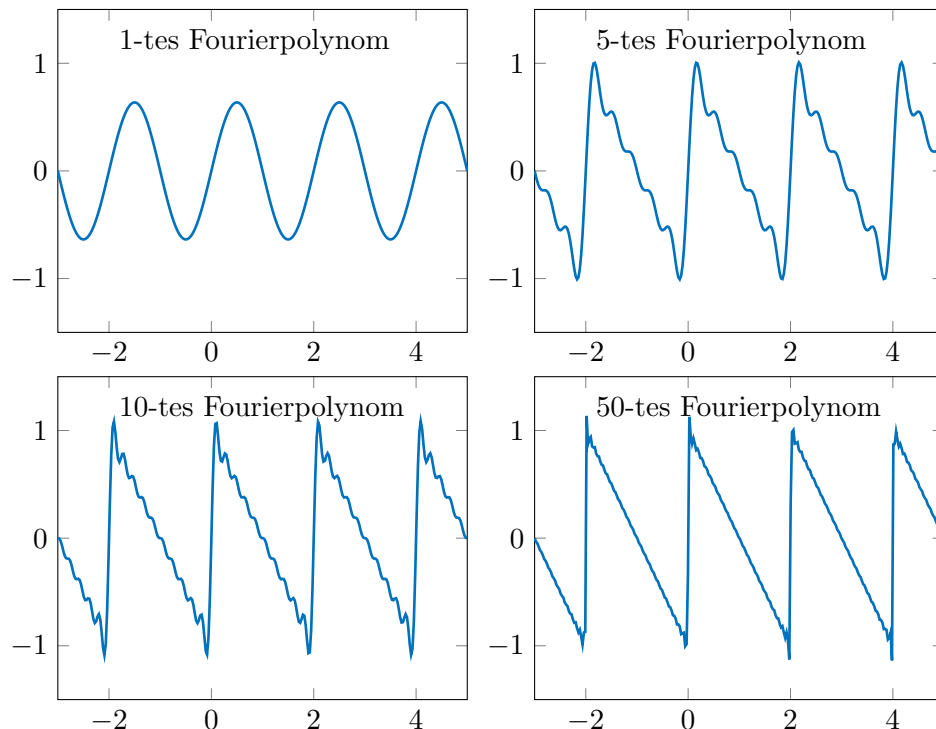
und für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^2 (1-t) \cos(k\pi t) dt = \underbrace{\int_0^2 \cos(k\pi t) dt}_{=0} - \int_0^2 t \cos(k\pi t) dt \\ &= -\left(t \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) dt \right) = 0. \end{aligned}$$

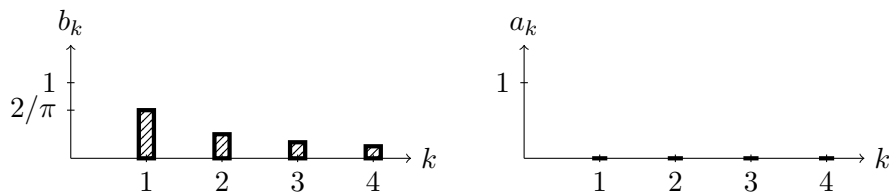
Damit ist das n -te Fourierpolynom von f

$$\phi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi t).$$

Die Fourierpolynome approximieren die Funktion für wachsendes n immer besser:



Frequenzspektrum:



Anwendungen. Die *Fourieranalyse* einer periodischen Funktion $f(t)$, d.h. die Berechnung der a_k und b_k , und die *Fouriersynthese*, das Zusammenfügen der Koeffizienten zu einem trigonometrischen Polynom, haben viele Anwendungen.

- Eine benutzen Sie ständig: Im menschlichen Ohr sind die Haarzellen des Cortischen Organs jeweils für bestimmte Frequenzen empfindlich. Das Ohr übermittelt dem Gehirn also die Fourierkoeffizienten der von ihm aufgenommenen akustischen Signale.
- Rauschunterdrückungs- oder Kompressionsverfahren (etwa für MP3) zerlegen Signale mit der Fourieranalyse in ihr Frequenzspektrum, filtern die unerwünschten oder überflüssigen Frequenzen heraus und setzen das Signal dann wieder zusammen.
- Die Wirkung linearer Systeme etwa in der Regelungstechnik läßt sich an harmonischen Schwingungen testen und mit der Fourieranalyse für beliebigen periodischen Input vorhersagen.
- Während Generatoren natürlicherweise harmonische Spannungen liefern, ist man bei technischen Anwendungen zum Beispiel an linearen Sägezahnspannungen interessiert (etwa für die Zeilensteuerung des Elektronenstrahls in einer Bildröhre). Die Fourieranalyse liefert Auskunft darüber, wie man durch Überlagerung harmonischer Schwingungen solche „willkürlichen“ Spannungen „synthetisieren“ kann.
- Auf überraschend andere Weise dient die Fourieranalyse bei Rand-Anfangswert-Problemen partieller Differentialgleichungen und damit bei sehr vielen Problemen der Verfahrens-, Energie- oder Elektrotechnik als wichtiges Hilfsmittel.

Vorlesung 38

Approximation im quadratischen Mittel

In dieser Vorlesung untersuchen wir, wie gut die Fourierpolynome ϕ_n eine periodische Funktion f approximieren. Hier gibt es zwei wesentliche Aussagen: Für festes n ist das Fourierpolynom dasjenige trigonometrische Polynom, das f am Besten in der L^2 -Norm approximiert, d.h. unter den trigonometrischen Polynomen mit vorgegebener Ordnung ist das Fourierpolynom am nächsten an f (Bestapproximation; siehe Abschnitt 38.2).

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert $\|f - \phi_n\|_{L^2}$ in der L^2 -Norm (dem quadratischen Mittel) gegen Null. Aber hier gilt noch mehr: Die Fourierpolynome konvergieren nicht nur im quadratischen Mittel gegen f , sondern wir können sogar genaue Aussagen über die Funktionswerte in jedem Punkt treffen (Satz 38.6).

Vorweg behandeln wir einige Aussagen, die die Berechnung der Fourierkoeffizienten im Falle von geraden oder ungeraden Funktionen vereinfachen.

38.1 Fourierkoeffizienten für gerade und ungerade Funktionen

Ist f eine gerade oder ungerade T -periodische Funktion, so lassen sich die Fourierkoeffizienten leichter berechnen.

Wir beginnen mit einigen elementaren Beobachtungen:

- 1) Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ ist
 - $\cos(k\omega t)$ eine gerade Funktion: $\cos(k\omega(-t)) = \cos(k\omega t)$,
 - $\sin(k\omega t)$ eine ungerade Funktion: $\sin(k\omega(-t)) = -\sin(k\omega t)$.
- 2) Seien $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade Funktion und $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Dann gilt:
 - Ist f gerade, so ist fg gerade und fu ungerade.
 - Ist f ungerade, so ist fg ungerade und fu gerade.

Beweis. Für gerades f sind

$$\begin{aligned}(fg)(-t) &= f(-t)g(-t) = f(t)g(t) = (fg)(t), \\ (fu)(-t) &= f(-t)u(-t) = f(t)(-u(t)) = -(fu)(t).\end{aligned}$$

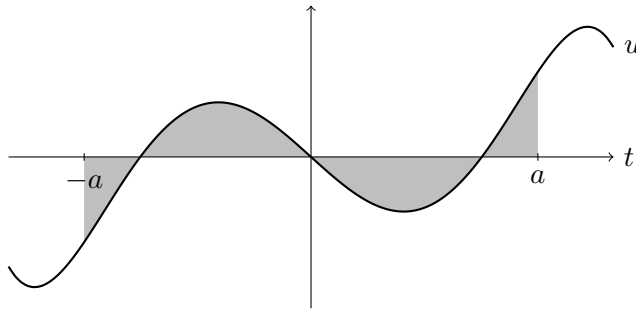
Für ungerades f geht es analog. □

3) Sei g eine gerade und u eine ungerade Funktion. Dann gilt

$$\int_{-a}^a u(t) dt = 0, \quad \int_{-a}^a g(t) dt = 2 \int_0^a g(t) dt.$$

Beweis. Für u ist

$$\int_{-a}^a u(t) dt = \int_{-a}^0 u(t) dt + \int_0^a u(t) dt,$$

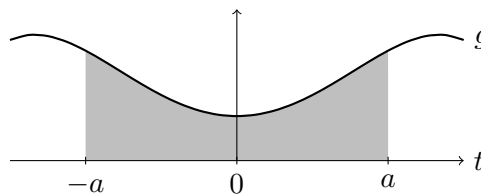


und Substitution $s = -t$ ergibt

$$\int_{-a}^0 u(t) dt = - \int_a^0 u(-s) ds = \int_0^a u(-s) ds \stackrel{u \text{ ungerade}}{=} - \int_0^a u(s) ds,$$

woraus die erste Formel folgt. Genauso ist für g

$$\int_{-a}^a g(t) dt = \int_{-a}^0 g(t) dt + \int_0^a g(t) dt$$



und

$$\int_{-a}^0 g(t) dt = - \int_a^0 g(-s) ds = \int_0^a g(s) ds.$$

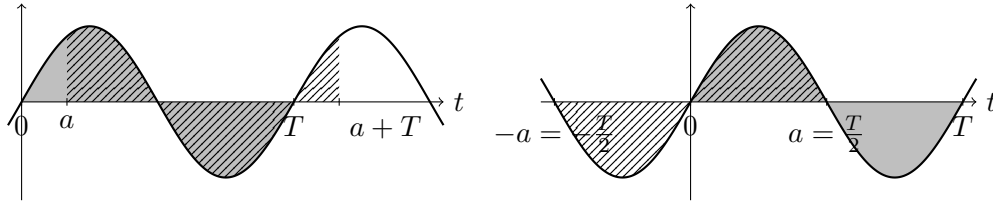
Das ergibt die zweite Formel. □

- 4) Ist f T -periodisch, so können wir statt über $[0, T]$ über ein beliebiges anderes Intervall der Länge T integrieren. In Zeichen: Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt.$$

Speziell für $a = -\frac{T}{2}$ ist

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt.$$



Mit diesen Vorbereitungen erhalten wir die folgenden Aussagen über die Fourierkoeffizienten von geraden oder ungeraden Funktionen. (Natürlich gibt es auch andere Funktionen, wie $1 + t$, die weder gerade noch ungerade sind.)

Satz 38.1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine T -periodische Funktion und $\omega = \frac{2\pi}{T} > 0$.

- 1) Ist f ungerade, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

- 2) Ist f eine gerade Funktion, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k = 0.$$

Beweis. Nach 4) können wir die Fourierkoeffizienten von f schreiben als

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

Nach 1) ist $\cos(k\omega t)$ gerade und $\sin(k\omega t)$ ungerade.

Für ungerades f ist $f(t) \cos(k\omega t)$ ungerade, also $a_k = 0$, und $f(t) \sin(k\omega t)$ ist gerade, also

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

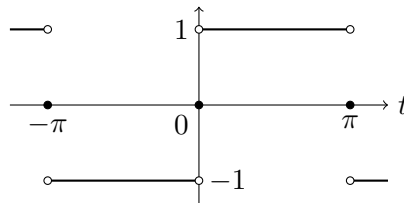
Ist hingegen f gerade, so ist $f(t) \sin(k\omega t)$ ungerade, also $b_k = 0$, und $f(t) \cos(k\omega t)$ ist gerade, also

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt.$$

□

Beispiel 38.2 (Rechteckspannung). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch ($T = 2\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$),

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < t < 0 \\ 0 & \text{für } t = 0, \pi \\ 1 & \text{für } 0 < t < \pi. \end{cases}$$



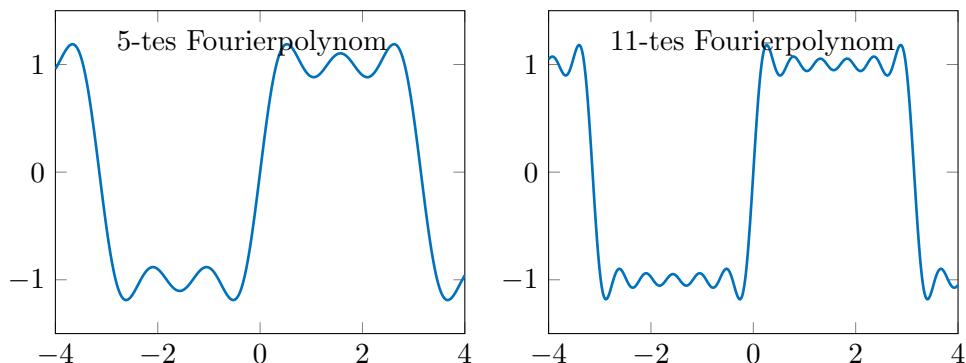
Der Funktionswert an den Punkten 0 und π ist nicht wesentlich, aber mit dem Wert 0 wird die Funktion ungerade, was die Berechnung der Fourierkoeffizienten vereinfacht: Für alle $k \in \mathbb{N}$ sind $a_k = 0$ und

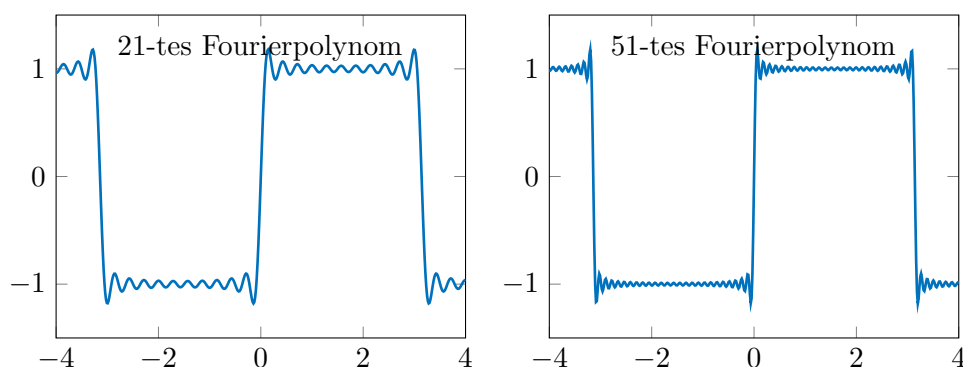
$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kt) dt = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{k} \cos(kt) \Big|_0^\pi \\ &= -\frac{2}{k\pi} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist das $(2n+1)$ -te Fourierpolynom

$$\begin{aligned} \phi_{2n+1}(t) &= \sum_{k=1}^{2n+1} b_k \sin(k\omega t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^n \frac{1}{2m+1} \sin((2m+1)t) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sin(t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{5} \sin(5t) + \dots + \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)t) \right). \end{aligned}$$

Im Folgenden sind die Fourierpolynome der Ordnungen $n = 5, 11, 21, 51$ geplottet.





Der „Überschuss“ an den Sprungstellen ist ein nach Gibbs benanntes typisches Phänomen bei der Approximation von Sprungfunktionen durch Fourierpolynome. Er beträgt knapp 9% des Sprungs.

38.2 Approximation im quadratischen Mittel

Wir untersuchen, wie gut das Fourierpolynom die gegebene Funktion annähert.

Erinnerung: Wenn wir eine Gerade $U = \text{span}\{u\}$ mit $\|u\| = 1$ in der Ebene haben und einen Punkt v , so ist $\langle v, u \rangle u$ der Punkt der Geraden, der am nächsten an v ist (gemessen in der zum Skalarprodukt gehörenden Norm). Genauso verhält es sich wenn U eine Ebene oder gar ein Teilraum ist (vergleiche Satz 36.1 und Satz 36.2). Nun ist das Fourierpolynom genau solch eine orthogonale Projektion der Funktion f auf den Teilraum der trigonometrischen Polynome. Das Skalarprodukt ist dabei

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt \quad (38.1)$$

mit induzierter Norm

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt}.$$

Diese wird auch als *quadratisches Mittel* der Funktion bezeichnet.

Satz 38.3 (Approximation im quadratischen Mittel). *Sei f eine stückweise monotone Funktion mit Periode $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$ und den Fourierkoeffizienten a_k, b_k . Unter allen trigonometrischen Polynomen der Ordnung n liefert das n -te Fourierpolynom von f*

$$\phi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

die beste Approximation im quadratischen Mittel. Für dieses ist der „quadratische Fehler“ $\|f - \phi_n\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \|\phi_n\|_{L^2}^2$, also

$$\frac{2}{T} \int_0^T (f(t) - \phi_n(t))^2 dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Dieser Fehler konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen 0, d.h. $f(t)$ kann im quadratischen Mittel beliebig gut durch Fourierpolynome approximiert werden.

Beweis. Die Konvergenzaussage beweisen wir nicht, den Anfang des Satzes schon.

Die Eigenschaft der Bestapproximation und die Fehlerformel sind Satz 36.2 (das Fourierpolynom ist genau die orthogonale Projektion von f auf den Teilraum der trigonometrischen Polynome, für den $\cos(k\omega t)$ und $\sin(k\omega t)$ eine ONB bzgl. (38.1) bilden).

Das kann man auch noch einmal direkt nachrechnen. Um den Schreibaufwand zu reduzieren, rechnen wir das nur für eine ungerade Funktion nach und suchen unter allen ungeraden trigonometrischen Polynomen der Ordnung n

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^n \beta_k \sin(k\omega t)$$

dasjenige, für das

$$\|f - \phi\|_{L^2}^2 = \frac{2}{T} \int_0^T (f(t) - \phi(t))^2 dt = \min.$$

Wegen der Orthogonalitätsrelationen (Satz 37.4) ist

$$\frac{2}{T} \int_0^T \phi(t)^2 dt = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \beta_k \beta_\ell \frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) \sin(\ell\omega t) dt = \sum_{k=1}^n \beta_k^2$$

und, wenn b_k die Fourierkoeffizienten von f bezeichnen,

$$\langle f, \phi \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \phi(t) dt = \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = \sum_{k=1}^n \beta_k b_k.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \|f - \phi\|_{L^2}^2 &= \frac{2}{T} \int_0^T (f(t) - \phi(t))^2 dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt - 2 \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \phi(t) dt + \frac{2}{T} \int_0^T \phi(t)^2 dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt - 2 \sum_{k=1}^n \beta_k b_k + \sum_{k=1}^n \beta_k^2 \\ &= \underbrace{\frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt - \sum_{k=1}^n b_k^2}_{\text{konstant}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n (b_k - \beta_k)^2}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Die rechte Seite wird also am kleinsten für $\beta_k = b_k$ für alle k , d.h. wenn $\phi(t) = \phi_n(t)$ das n -te Fourierpolynom von f ist. \square

38.3 Fourierreihen

Wir wollen nun untersuchen, wie gut die Fourierpolynome $\phi_n(t)$ für $n \rightarrow \infty$ die Funktion f annähern. Ähnlich zu Taylorreihen definieren wir Fourierreihen.

Definition 38.4 (Fourierreihe). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine T -periodische Funktion mit den Fourierkoeffizienten a_k und b_k und sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann heißt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \right)$$

die *Fourierreihe* von f .

Bemerkung 38.5. 1) Die Fourierreihe von f entspricht der ONB-Entwicklung (siehe Satz 35.13), nur mit unendlich vielen Termen.

2) Die Fourierpolynome entsprechen der Bestapproximation durch trigonometrische Polynome (siehe Satz 36.2).

Satz 38.3 besagt, dass die Fourierreihe im quadratischen Mittel gegen f konvergiert: Der Approximationsfehler

$$\|f - \phi_n\|_{L^2} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T (f(t) - \phi_n(t))^2 dt}$$

konvergiert gegen 0 für $n \rightarrow \infty$.

Der folgende Satz gibt Auskunft, wann die Fourierpolynome in einem Punkt (und nicht nur im quadratischen Mittel) gegen die Funktion f konvergiert.

Satz 38.6 (Konvergenz von Fourierreihen). *Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei T -periodisch und stückweise monoton und es sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann gilt:*

- An allen Stetigkeitsstellen t von f konvergiert die Fourierreihe von f gegen $f(t)$.
- An allen Unstetigkeitsstellen existieren wegen der stückweisen Monotonie der links- und rechtsseitige Grenzwert $f(t-) = \lim_{\tau \nearrow t} f(\tau)$ und $f(t+) = \lim_{\tau \searrow t} f(\tau)$ von f , und die Fourierreihe konvergiert gegen den Mittelwert $\frac{f(t-) + f(t+)}{2}$.

Man hat also für alle t :

$$\frac{f(t-) + f(t+)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)).$$

Einen Beweis des Satzes in dieser bequemen, aber nicht sehr verbreiteten Version findet man etwa in *Mangoldt-Knopp, Einführung in die Höhere Mathematik, Band III*. Wir gehen hier nicht weiter darauf ein.

Beispiel 38.7. 1) Wir betrachten die 2-periodische Sägezahn-Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{für } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{für } t = 0, \end{cases}$$

aus Beispiel 37.7. An der Unstetigkeitsstelle 0 sind der links- und rechtsseitige Grenzwert $f(0-) = -1$ und $f(0+) = 1$, so dass $(f(0-) + f(0+))/2 = 0 = f(0)$ ist. Daher wird die Funktion f überall durch ihre Fourierreihe dargestellt:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin(k\pi t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

2) Ähnlich gilt für die 2π -periodische Rechteckspannung

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < t < 0 \\ 0 & \text{für } t = 0, \pi \\ 1 & \text{für } 0 < t < \pi, \end{cases}$$

aus Beispiel 38.2, dass

$$g(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Als letztes notieren wir noch eine Folgerung aus Satz 38.3. Da der Fehler im quadratischen Mittel gegen 0 konvergiert, erhalten wir die sogenannte Parsevalsche Gleichung.

Satz 38.8 (Parsevalsche Gleichung und Besselsche Ungleichung). *Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $T = \frac{2\pi}{\omega}$ -periodisch und stückweise monoton mit Fourierkoeffizienten a_k und b_k . Dann gilt die Parsevalsche Gleichung*

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Durch Abschneiden der Summe erhält man die Besselsche Ungleichung

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = \|\phi_n\|_{L^2}^2.$$

Mit der Parsevalschen Gleichung lassen sich unter anderem Grenzwerte von Folgen von Summen (Reihen) berechnen.

Beispiel 38.9. 1) Für die Funktion f aus Beispiel 38.7 gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} = \frac{2}{2} \int_0^2 (1-t)^2 dt = -\frac{1}{3} (1-t)^3 \Big|_0^2 = \frac{2}{3},$$

also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2) Für die Funktion g aus Beispiel 38.7 gilt

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)^2 dt = 2,$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Integration und Differenziation von Fourierreihen. Konvergente Fourierreihen darf man gliedweise integrieren, d.h. man kann wie bei einer endlichen Summe jeden Summand einzeln integrieren:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{a_0}{2} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) dt. \end{aligned}$$

Beim differenzieren ist das anders: Man darf Fourierreihen im Allgemeinen nicht gliedweise differenzieren. Dabei machen nicht nur die Sprungstellen Probleme, wie man denken könnte. Nach Beispiel 38.7 gilt

$$1 - t = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi t) \quad \text{für } 0 < t < 2.$$

Durch gliedweises differenzieren der Reihe erhält man die Reihe $2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi t)$. An der Stelle $t = 1$, an der f keinen Sprung hat, ist die Reihe $2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ divergent.

Wir fassen zusammen: *Konvergente Fourierreihen darf man*

- *gliedweise integrieren,*
- *im Allgemeinen nicht gliedweise differenzieren.*

Vorlesung 39

Komplexe Fourieranalysis

Wir haben schon gesehen, dass sich Sinus- und Cosinusfunktionen oft bequemer mittels der Euler-Formel durch

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

ersetzen lassen. Es ist also

$$\cos(\varphi) = \operatorname{Re}(e^{i\varphi}) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin(\varphi) = \operatorname{Im}(e^{i\varphi}) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

Damit lassen sich trigonometrische Polynome sehr einfach komplex schreiben:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k}{2} e^{-ik\omega t} + \frac{b_k}{2i} e^{ik\omega t} - \frac{b_k}{2i} e^{-ik\omega t} \right) \\ &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=:c_0} + \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{\left(\frac{a_k}{2} - i \frac{b_k}{2} \right)}_{=:c_k} e^{ik\omega t} + \underbrace{\left(\frac{a_k}{2} + i \frac{b_k}{2} \right)}_{=:c_{-k}} e^{-ik\omega t} \right) \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}. \end{aligned}$$

Aus Beispiel 30.8 wissen wir, dass die Basisfunktionen $e^{ik\omega t}$ orthonormal sind bzgl. des (komplexen) Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt, \quad (39.1)$$

d.h. für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t} dt = \begin{cases} 1 & \text{für } k = \ell \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 39.1 (Komplexe trigonometrische Polynome). Sei $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Die komplexwertigen Funktionen der Form

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

heißen komplexe *trigonometrische Polynome* vom Grad oder von der Ordnung n . Diese sind T -periodisch.

Sind die a_k und b_k die Fourierkoeffizienten einer Funktion mit Periode $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, so erhalten wir für $k \geq 0$

$$c_k = \frac{a_k}{2} - i \frac{b_k}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt - i \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt.$$

Genauso findet man, dass die Formel auch für $k < 0$ gilt.

Definition 39.2 (komplexe Fourierkoeffizienten und Fourierpolynome). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) eine stückweise monotone Funktion der Periode $T > 0$ und es sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Die *komplexen Fourierkoeffizienten* von f sind

$$c_k = \langle f, e^{ik\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

und

$$\phi_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}$$

ist das n -te *komplexe Fourierpolynom* von f .

Bemerkung 39.3. 1) Die Formeln sind ein Stück weit einfacher als die für das reelle Fourierpolynom: Der Faktor vor dem Integral ist $\frac{1}{T}$ statt $\frac{2}{T}$, und die Sonderrolle von a_0 ist verschwunden.

2) Analog zu Satz 38.3 ist das komplexe Fourierpolynom vom Grad n dasjenige komplexe trigonometrische Polynom vom Grad n , das f am Besten im quadratischen Mittel approximiert (jetzt mit dem komplexen Skalarprodukt (39.1)), also in der Norm

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

3) Ist f reellwertig, so sind die Fourierkoeffizienten a_k und b_k reell und es gilt

$$\overline{c_{-k}} = c_k,$$

was die Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten vereinfachen kann.

Beispiel 39.4. Wir betrachten noch einmal die 2-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus Beispiel 37.7:

$$f(t) = \begin{cases} 1-t & \text{für } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Es ist $T = 2$, also $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$, und die komplexen Fourierkoeffizienten sind

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 (1-t) e^{i0\pi t} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 (1-t) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_0^2 = 0$$

und für $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^2 (1-t) e^{-ik\pi t} dt = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^2 1 e^{-ik\pi t} dt}_{=0, \text{ da orthogonal}} + \frac{1}{2} \int_0^2 t e^{ik\pi t} dt.$$

Das erste Integral verschwindet, da $e^{i0\pi t}$ und $e^{ik\pi t}$ orthogonal sind (oder explizit ausrechnen), beim zweiten Integral integrieren wir partiell: $u'(t) = e^{ik\pi t}$, $v(t) = t$, also $u(t) = \frac{1}{ik\pi} e^{ik\pi t}$ und $v'(t) = 1$, also

$$c_k = \frac{1}{2} \frac{1}{ik\pi} t e^{ik\pi t} \Big|_0^2 - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{ik\pi} e^{ik\pi t} dt}_{=0} = \frac{1}{ik\pi}.$$

Damit ist das n -te Fourierpolynom von f

$$\phi_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t} = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{1}{ik} e^{ik\omega t}.$$

Durch Zusammenfassen der Terme mit negativem und positiven Index erhalten wir das reelle Fourierpolynom (siehe Beispiel 37.7):

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{ik} e^{ik\omega t} + \frac{1}{-ik} e^{-ik\omega t} \right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\omega t)}{k}.$$

Umrechnungsformeln zwischen reellen und komplexen Fourierkoeffizienten.

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) eine T -periodische Funktion und $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

1) Sind die reellen Fourierkoeffizienten a_k, b_k gegeben, so sind

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad k \geq 1, \\ c_0 &= \frac{a_0}{2}, \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

2) Sind die komplexen Fourierkoeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$, gegeben, so gilt

$$\frac{a_0}{2} = c_0,$$

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad k \geq 1,$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \geq 1.$$

Vorlesung 40

Reihen

Unendliche Reihen sind grob gesprochen Grenzwerte $n \rightarrow \infty$ von Summen $\sum_{k=0}^n a_k$. Reihen sind uns schon öfter begegnet: In Abschnitt 18.4 sowie als Taylorreihen und Fourierreihen. Wir beginnen mit Reihen, deren Glieder Konstanten sind. Anschließend betrachten wir noch einmal die Taylorreihen (=Potenzreihen) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$, die Grenzwerte von Polynomen sind.

40.1 Konvergenz von Reihen

Wir beginnen mit der Definition einer Reihe und ihrer Konvergenz.

Definition 40.1 (Reihe). 1) Aus einer gegebenen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bilden wir eine neue Folge von Summen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nennen wir eine *unendliche Reihe* und schreiben auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Die a_k heißen *Glieder* der Reihe, die Summe s_n heißt die *n-te Partialsumme* der Reihe.

- 2) Die Reihe *konvergiert* (bzw. *divergiert*), falls die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (bzw. divergiert).
- 3) Existiert der Grenzwert $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, so heißt s der *Wert* (oder die *Summe*) der Reihe und wir schreiben dafür $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beobachtung: Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_{m-1} + \sum_{k=m}^{\infty} a_k.$$

D.h. die ersten Summanden spielen keine Rolle für die Konvergenz, wohl aber für den Wert der Reihe.

Bemerkung 40.2. Die Bezeichnung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hat zwei Bedeutungen:

- 1) Alleinstehend bezeichnet $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2) In einer Gleichung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$ bezeichnet $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ den Grenzwert $s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$.

Statt \mathbb{N} betrachtet man auch andere Summationsbereiche, zum Beispiel $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ in $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Beispiel 40.3 (Die geometrische Reihe). Sei $q \in \mathbb{R}$ und $a_k = q^k$. Die zugehörige Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

heißt die *geometrische Reihe*. Sie ist die wichtigste Reihe überhaupt. In Beispiel 18.12 hatten wir bereits die Konvergenz der geometrischen Reihe untersucht: Für $|q| < 1$ ist die geometrische Reihe konvergent und hat den Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

Für $|q| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

Beispiel 40.4. 1) Achilles und die Schildkröte: Achilles ist 100 m von der Schildkröte entfernt und ist 10 mal so schnell wie diese. Wann hat Achilles die Schildkröte eingeholt?

Während Achilles die 100 m zurücklegt, läuft die Schildkröte 10 m, so dass der Abstand nun 10 m beträgt. Läuft Achilles diese weiteren 10 m, läuft die Schildkröte 1 m, usw. Daher holt Achilles die Schildkröte ein nach

$$\begin{aligned} 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots &= 110 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 110 + \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 110 + \frac{10}{9} \\ &= 111,\bar{1} \text{ m.} \end{aligned}$$

- 2) Wir zeigen $0,\bar{9} = 1$. Mit der geometrischen Reihe ist

$$0,\bar{9} = 0,999\dots = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Aus den Grenzwertsätzen für Folgen (Satz 18.1), erhalten wir sofort Rechenregeln für konvergente Reihen.

Satz 40.5 (Rechenregeln für konvergente Reihen). Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $c \in \mathbb{R}$, so konvergieren auch $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} ca_k$ und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Mit Produkten ist es nicht ganz so einfach, weil man jedes Glied der einen Reihe mit jedem Glied der anderen Reihe multiplizieren muss, was bei unendlich vielen Gliedern Probleme machen kann. Eine sinnvolle Anordnung der Produkte gibt die sogenannte *Produktformel von Cauchy*:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad \text{wobei } c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \dots + a_k b_0.$$

Diese Anordnung kann man sich wie folgt überlegen und merken: Multipliziert man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ und sortiert anschließend nach Potenzen von x , so erhält man

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

mit obigen Koeffizienten c_k . Für $x = 1$ hat man dann die Formel des Cauchy-Produkts.

Die Gleichung im Cauchy-Produkt stimmt, wenn alle drei Reihen konvergieren. Es kann aber sein, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, ohne dass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert. Um aus der Konvergenz der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ auch die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ zu erhalten, brauchen wir einen besseren Konvergenzbegriff, den der absoluten Konvergenz (siehe Definition 41.1).

40.2 Konvergenzkriterien

Konvergenzkriterien für Reihen sind Tests, ob eine Reihe konvergiert. Dabei sagen sie oft nur aus, ob eine Reihe konvergiert oder nicht, ohne etwas über den Wert der Reihe zu sagen. In vielen Fällen reicht das aber bereits.

Satz 40.6 (Notwendiges Kriterium). *Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.*

Beweis. Wenn die Reihe konvergiert, so konvergieren die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ gegen eine reelle Zahl s , d.h. es ist $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Dann gilt aber auch $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1}$, und daher

$$0 = s - s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

□

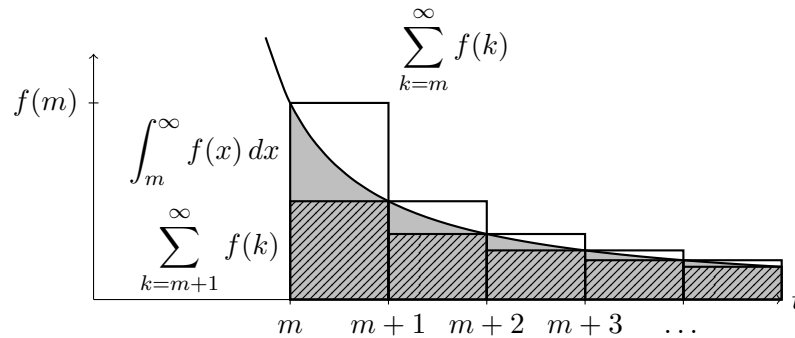
D.h., wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ ist (oder die Folge $(a_k)_k$ gar nicht konvergiert), dann konvergiert auch die Reihe nicht. Das notwendige Kriterium ist also ein Test, ob die Reihe divergiert.

Ein weiteres sehr nützliches Kriterium ist das folgende Integralvergleichskriterium.

Satz 40.7 (Integralvergleichskriterium). *Sei $f : [m, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [m, \infty[$. Dann gilt:*

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \int_m^{\infty} f(x) dx \text{ existiert.}$$

Beweis. Die folgende Skizze zeigt, warum es funktioniert:



Eine ausführlichere Begründung ist wie folgt: Da f monoton fallend ist, gilt

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) \quad \text{für alle } x \in [k, k+1].$$

Integrieren wir von k bis $k+1$, so folgt mit der Monotonie des Integrals (Satz 28.8)

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1) dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx = f(k).$$

Summieren wir dieses auf, folgt

$$\sum_{k=m}^n f(k+1) \leq \sum_{k=m}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=m}^n f(k),$$

also

$$\sum_{k=m+1}^{n+1} f(k) \leq \int_m^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=m}^n f(k).$$

Wir nehmen nun an, dass die Reihe konvergiert mit Summe $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n f(k)$. Da f positiv ist, ist die Folge der Partialsummen monoton wachsend und daher

$$\int_m^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=m}^n f(k) \leq s.$$

Da $f(x) \geq 0$ für alle x ist, ist auch die Folge $(\int_m^{n+1} f(x) dx)_n$ monoton wachsend und nach oben durch s beschränkt, also konvergent. Daher existiert das uneigentliche Integral.

Nun zur Rückrichtung. Wir nehmen an, dass das uneigentliche Integral existiert. Da $f(x) \geq 0$ ist, ist die Folge $(\int_m^{n+1} f(x) dx)_n$ monoton wachsend, also gilt insbesondere

$$\int_m^{n+1} f(x) dx \leq \int_m^{\infty} f(x) dx = s.$$

Dann ist $\sum_{k=m+1}^{n+1} f(k) \leq s$ für alle n , und auch diese Folge ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Daher konvergiert auch die Reihe. \square

Beispiel 40.8. 1) Die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent, denn: Die Funktion $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, ist monoton fallend mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, \infty[$, und das Integral

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

ist divergent (Beispiel 31.2).

2) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent, da $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ konvergiert (Beispiel 31.2).

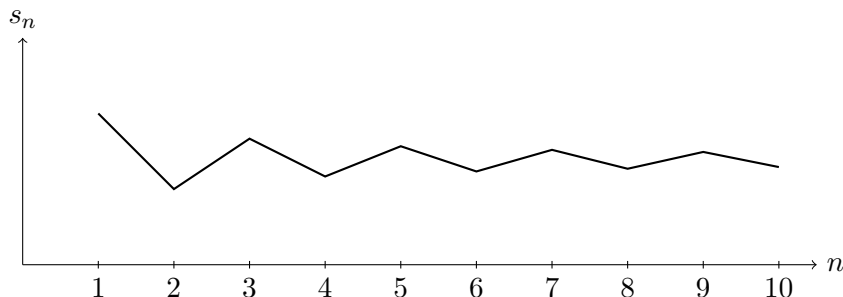
3) Allgemein gilt: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $0 < \alpha \leq 1$, da die entsprechende Aussage für die uneigentlichen Integrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ gilt (siehe Beispiel 31.2).

Bei den Integralen konnten wir den Wert einfach ausrechnen, bei den Reihen ist das leider nicht so.

Ist die aufsummierte Folge nicht monoton fallend (wie beim Integralvergleichskriterium), sondern wechselt immer ihr Vorzeichen, so kann das Leibnizkriterium weiterhelfen, das wir ohne Beweis angeben.

Satz 40.9 (Leibnizkriterium). *Ist die Folge $(a_k)_k$ streng monoton fallend und gegen Null konvergent, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.*

Die Idee ist, dass die Partialsummen mit abnehmender Amplitude „oszillieren“, da aufeinander folgende Glieder der Reihe verschiedene Vorzeichen haben und das nächste Glied a_{k+1} kleineren Betrag als das vorangehende Glied a_k hat:



Beispiel 40.10. Die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ist nach dem Leibnizkriterium konvergent, denn: $a_k = \frac{1}{k}$ ist eine streng monoton fallende Folge mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$.

Vorlesung 41

Absolut konvergente Reihen

Wir lernen einen stärkeren Konvergenzbegriff für Reihen kennen, die absolute Konvergenz.

41.1 Absolute Konvergenz

Oft ist der folgende stärkere Konvergenzbegriff hilfreich und wichtig.

Definition 41.1 (absolute Konvergenz). Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Absolute Konvergenz ist besser als gewöhnliche Konvergenz, denn es gilt: Konvergiert eine Reihe absolut, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinne. Kurz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent.}$$

Andersherum ist nicht richtig: Es gibt konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren. Ein Beispiel ist die alternierende harmonische Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert, aber $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist die harmonische Reihe, die divergiert.

Mit absolut konvergenten Reihen kann man meist so rechnen wie mit endlichen Summen. Insbesondere können wir sie wie folgt multiplizieren.

Satz 41.2 (Cauchy-Produkt). Sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ beide absolut konvergent, so ist auch ihr Produkt (das Cauchy-Produkt) absolut konvergent:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k, \quad \text{wobei } c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0.$$

41.2 Konvergenzkriterien für absolute Konvergenz

Wir sammeln die wichtigsten Konvergenzkriterien für absolut konvergente Reihen. In der Literatur finden Sie zahlreiche weitere.

Satz 41.3 (Majorantenkriterium). Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei konvergent, und es gelte

$$|a_k| \leq b_k \quad \text{für alle } k.$$

(Es genügt auch, wenn $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq k_0$ ab einem Startwert $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt.) Dann ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergent.

Beweis. Wegen $b_k \geq |a_k| \geq 0$ sind alle $b_k \geq 0$ und die Folge der Partialsummen $\sum_{k=0}^n b_k$ ist monoton wachsend. Insbesondere gilt

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^n b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k =: M.$$

Daher ist die Folge der Partialsummen $\sum_{k=0}^n |a_k|$ durch M beschränkt und monoton wachsend (da $|a_k| \geq 0$), also konvergent. Damit konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent. \square

Beispiel 41.4. Wir vergleichen die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

Für $k \geq 2$ ist

$$\left| \frac{1}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Man kann hier direkt nachrechnen, dass die zweite Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1.$$

Dies zeigt noch einmal die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, siehe Beispiel 40.8. Den Wert der Reihe direkt zu bestimmen ist schwieriger, aber mit Hilfe der Fourier-Analyse haben wir schon in Beispiel 38.9 nachgerechnet, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Satz 41.5 (Minorantenkriterium). Gilt $0 \leq b_k \leq a_k$ und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ bestimmt divergent, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bestimmt divergent.

Beweis. Aus $0 \leq b_k \leq a_k$ folgt

$$\sum_{k=0}^n b_k \leq \sum_{k=0}^n a_k.$$

Da die erste Summe über alle Schranken wächst, tut das auch die zweite. \square

Der Nachteil beim Majorantenkriterium ist, dass man schon eine konvergente Majorante $\sum b_k$ haben muss. Das folgende Kriterium benutzt nur die zu untersuchende Reihe und ist deshalb meistens die **erste Wahl**, wenn man eine Reihe auf Konvergenz untersuchen will. Erst wenn das Quotientenkriterium keine Auskunft über die Konvergenz gibt, versucht man andere Kriterien.

Satz 41.6 (Quotientenkriterium). *Gegeben sei die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Falls der Grenzwert $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ existiert, so gilt:*

- Ist $r < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.
- Ist $r > 1$, so divergiert die Reihe.
- Ist $r = 1$, so ist alles möglich und das Kriterium trifft keine Aussage.

Beweis. Sei zuerst $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$. Wir wählen ein q mit $r < q < 1$. Nach Definition der Konvergenz ist dann

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < q$$

für alle k ab einem gewissen Wert k_0 . Daher ist für $k \geq k_0$:

$$|a_k| < q|a_{k-1}| < q^2|a_{k-2}| < \dots < q^{k-k_0}|a_{k_0}| = q^k \frac{|a_{k_0}|}{q^{k_0}}.$$

Mit der geometrischen Reihe rechnen wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \frac{|a_{k_0}|}{q^{k_0}} = \frac{|a_{k_0}|}{q^{k_0}} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{|a_{k_0}|}{q^{k_0}} \frac{1}{1-q},$$

d.h. wir haben eine konvergente Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, und das Majorantenkriterium (mit $b_k = q^k \frac{|a_{k_0}|}{q^{k_0}}$) zeigt die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Ist $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$, so gilt für große k , dass $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$, also dass $|a_{k+1}| > |a_k|$ ist. Dann ist aber $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge, so dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert (Satz 40.6). \square

Bemerkung 41.7. Im Beweis haben wir nicht wirklich den Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ verwendet, es reicht, dass $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1$ für alle $k \geq k_0$ gilt. Wir haben damit die folgende bessere Aussage:

Gibt es ein $q < 1$ und ein k_0 , so dass $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$ für alle $k \geq k_0$, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beispiel 41.8. 1) Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

ist absolut konvergent nach dem Quotientenkriterium, denn:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \frac{k+1}{2^{k+1}} \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k} \right) \rightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

2) Bei den Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

liefert das Quotientenkriterium beide Male keine Aussage, denn:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k}{k+1} \right| = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k^2}{(k+1)^2} \right| = 1.$$

Wir wissen aber bereits, dass die erste Reihe divergiert (die harmonische Reihe), und die zweite Reihe konvergiert. Das zeigt noch einmal: Ist der Grenzwert im Quotientenkriterium 1, so kann alles passieren.

41.3 Komplexe Reihen

Für Reihen mit komplexen Gliedern definiert man die Konvergenz und absolute Konvergenz genauso wie für Reihen mit reellen Gliedern. Für komplexe Reihen gilt ebenfalls: Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz der Reihe. Das notwendige Kriterium (Satz 40.6), sowie das Majoranten-, Minoranten-, und Quotientenkriterium gelten genauso für komplexe Reihen. Das wichtigste Beispiel ist auch hier die geometrische Reihe: Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$

Vorlesung 42

Potenzreihen

Die wichtigsten Funktionen lassen sich als Potenzreihen (=Taylorreihen) darstellen, d.h. als Grenzwerte $n \rightarrow \infty$ von Polynomen $\sum_{k=0}^n a_k(z - z_0)^k$. Potenzreihen können damit als Verallgemeinerung von Polynomen angesehen werden. Solche Grenzwerte von Polynomen haben wir bereits bei Taylorreihen in Abschnitt 25.4 gesehen. Nun wollen wir die Konvergenz und weitere Eigenschaften von Potenzreihen näher untersuchen.

42.1 Konvergenz von Potenzreihen

Definition 42.1 (Potenzreihe). Eine *Potenzreihe* ist eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

Die a_k heißen die *Koeffizienten* der Potenzreihe, und z_0 heißt der *Entwicklungspunkt* der Potenzreihe.

Wir wollen Potenzreihen, wie schon Polynome, gleich im Komplexen betrachten. Das ist nicht komplizierter, aber die Begriffe „Konvergenzradius“ und „Konvergenzkreis“ werden viel anschaulicher. Wir nehmen deshalb an, dass die Koeffizienten a_k und der Entwicklungspunkt z_0 reelle oder komplexe Zahlen sind. Weiter ist z eine komplexe Variable.

Auf der Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ aller z , für die die Reihe konvergiert, liefert

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

eine Funktionen

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}.$$

Wir untersuchen die Frage, für welche Werte von z die Reihe konvergiert. Dazu versuchen wir das Quotientenkriterium: Nun sind die Glieder der Reihe $a_k(z - z_0)^k$, also betrachten

wir den Quotienten

$$\left| \frac{a_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{a_k(z - z_0)^k} \right| = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \cdot |z - z_0|.$$

Wir nehmen an, dass der Grenzwert $A = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ existiert. (Das muss nicht sein, und in diesem Fall kommen wir mit dem Quotientenkriterium nicht weiter.) Dann ist die Potenzreihe für $A|z - z_0| < 1$ absolut konvergent und für $A|z - z_0| > 1$ divergent. Bei $A = 0$ ist die Reihe also für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, bei $0 < A < \infty$ ist die Reihe für alle z mit

$$|z - z_0| < R = \frac{1}{A} \text{ absolut konvergent,}$$

$$|z - z_0| > R = \frac{1}{A} \text{ divergent.}$$

Ist $A = \infty$, so ist die Reihe nur für $z = z_0$ konvergent. Wir fassen zusammen.

Satz 42.2 (Konvergenz von Potenzreihen). *Die Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

ist

- für alle z in einem offenen Kreis (dem Konvergenzkreis) vom Radius R um den Mittelpunkt z_0 absolut konvergent (also für alle z mit $|z - z_0| < R$) und
- für alle z außerhalb des abgeschlossenen Kreises divergent (also divergent für alle z mit $|z - z_0| > R$).
- Das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Kreises muss man bei jeder speziellen Reihe in jedem Punkt einzeln untersuchen (also für alle z mit $|z - z_0| = R$).

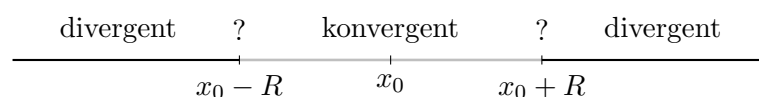
Für den sogenannten Konvergenzradius R gilt

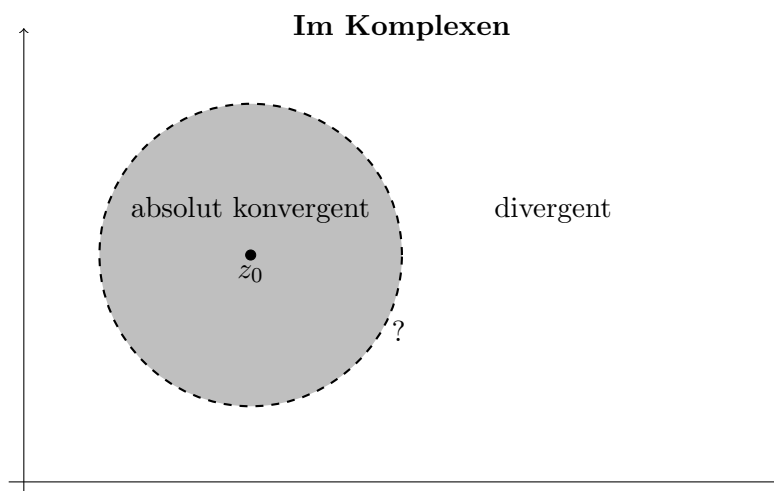
$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \quad (42.1)$$

falls der Grenzwert existiert. Dabei ist auch der Wert $R = \infty$ zugelassen, ein Kreis mit unendlichem Radius ist die ganze Ebene \mathbb{C} .

Beachten Sie, dass der Quotient der a_k hier genau das Reziproke von der Formel im Quotientenkriterium ist. Beachten Sie weiter, dass wir die obige Aussage nur unter der Annahme nachgerechnet haben, dass der Grenzwert existiert. Sie bleibt aber auch dann richtig, wenn der Grenzwert nicht existiert, nur hat man dann keine so einfache Formel für den Konvergenzradius R .

Im Reellen





Ein Wort zur Sprache: Sagen Sie nicht, die Reihe sei innerhalb des Konvergenzradius konvergent. Der Konvergenzradius ist eine Zahl, z.B. 7. Was soll es bedeuten, dass die Reihe innerhalb von 7 konvergiert? Sagen Sie besser, dass die Reihe innerhalb des Konvergenz**kreises** konvergiert.

Beispiel 42.3. Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist eine Potenzreihe (alle $a_k = 1$) mit Konvergenzradius $R = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}/a_k| = 1$. Es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } |z| < 1.$$

Für $|z| > 1$ ist die Reihe divergent. Hier können wir auch die Punkte auf dem Rand des Konvergenzkreises untersuchen: Für $|z| = 1$ ist nämlich $|z^k| = 1$ keine Nullfolge, also ist die geometrische Reihe für $|z| = 1$ divergent nach Satz 40.6.

Beispiel 42.4. Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} z^{2k+1}$$

enthält nur ungerade Potenzen von z , es ist $a_k = 0$ für alle geraden k . Darum ist $a_{2k}/a_{2k-1} = 0$ und a_{2k+1}/a_{2k} nicht definiert. Der Grenzwert (42.1) zur Berechnung des Konvergenzradius existiert daher nicht, und wir müssen uns anders helfen.

Eine Möglichkeit ist, das das Quotientenkriterium direkt zu versuchen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{5^{k+1}}{k+2} z^{2k+3}}{\frac{5^k}{k+1} z^{2k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k+1}{k+2} 5z^2 \right| = 5|z|^2.$$

Also hat man absolute Konvergenz für $|z| < \frac{1}{\sqrt{5}}$ und Divergenz für $|z| > \frac{1}{\sqrt{5}}$. Der Konvergenzradius ist $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Eine andere Möglichkeit ist, wie folgt umzuformen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} z^{2k+1} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} (z^2)^k.$$

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} w^k$ hat den Konvergenzradius

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{5^k}{k+1}}{\frac{5^{k+1}}{k+2}} \right| = \frac{1}{5}$$

und konvergiert somit für $|w| < \frac{1}{5}$. Die Originalreihe konvergiert daher für $|z^2| < \frac{1}{5}$, also für

$$|z| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

42.2 Ableitung von Potenzreihen

Als nächsten betrachten wir die Ableitung von Potenzreihen. Da wir die Ableitung nur für Funktionen einer reellen Variablen erklärt haben, beschränken wir uns auf reelle Reihen. Im Komplexen geht es ganz genau so, mehr dazu in der „Analysis III für Ingenieurwissenschaften“.

Satz 42.5 (Differentiation von Potenzreihen). *Die reelle Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

habe den Konvergenzradius $R > 0$. Sie konvergiert also auf dem Intervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ und definiert dort eine Funktion $f(x)$. Diese Funktion ist differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}.$$

Der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe ist wieder R .

D.h.: Potenzreihen darf man gliedweise differenzieren. Der Konvergenzradius bleibt gleich. Ebenso darf man Potenzreihen gliedweise integrieren.

Bei endlichen Summen (also bei Polynomen) ist das ganz klar. Das man bei Reihen die Grenzwerte der Reihe und des Ableitens (bzw. Integrierens) vertauschen darf ist hingegen nicht so einfach zu sehen, und wir verzichten auf den Beweis.

Beispiel 42.6. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1}$ hat den Konvergenzradius $R = 1$. An den Randpunkten des Konvergenzintervalls gilt: Für $x = 1$ ist die Reihe divergent (harmonische Reihe), und für $x = -1$ ist sie konvergent (alternierende harmonische Reihe). Wir zeigen nun: Für reelles $x \in [-1, 1[$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = -\ln(1-x). \quad (42.2)$$

Das sieht man durch eine Taylorentwicklung von $-\ln(1-x)$ oder wie folgt. Die Ableitungen der beiden Seiten sind $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ und $\frac{1}{1-x}$ und sind damit gleich (geometrische Reihe). Deshalb sind die beiden Funktionen gleich bis auf eine Konstante (nach dem Konstanzkriterium, Satz 23.7), d.h. es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = -\ln(1-x) + c$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $x = 0$ liefert $c = 0$. Das liefert die Gleichheit (42.2) in $] -1, 1[$. Man kann zeigen, dass Gleichheit auch noch in -1 wahr ist. Daraus erhalten wir nach Multiplikation mit -1 den Wert der alternierenden harmonischen Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \ln(2).$$

42.3 Taylor- und Potenzreihen

Ist die Funktion f auf einem Intervall um x_0 unendlich oft differenzierbar, so kann man die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

bilden, die Taylorreihe von f im Punkt x_0 . Die Funktion stimmt genau dann mit ihrer Taylorreihe überein, wenn das Restglied gegen 0 konvergiert; vergleiche Abschnitt 25.4. Das ist nicht für alle Funktionen der Fall, aber für die meisten Funktionen, die in der Praxis auftreten. Insbesondere lassen sich fast alle elementaren Funktionen als Potenzreihen darstellen, die auf ganz \mathbb{C} konvergieren: \exp , \sin , \cos , sowie \sinh und \cosh ; siehe Vorlesungen 26 und 27. Auch Polynome sind Potenzreihen, bei denen die Koeffizienten a_k irgendwann alle Null sind. Die anderen elementaren Funktionen lassen sich ebenfalls in eine Taylorreihe entwickeln, die aber nicht in der ganzen Ebene konvergiert, sondern nur in einem Kreis, etwa die Wurzelfunktionen, der Logarithmus und die Arcus- und Area-Funktionen.

Ist die Funktion f durch eine Potenzreihe um x_0 gegeben, so stimmt die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt x_0 mit der Potenzreihe überein: Ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

so gilt $f(x_0) = a_0$ und

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}, & f'(x_0) &= 1 a_1, \\ f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k (x - x_0)^{k-2}, & f''(x_0) &= 2! a_2, \end{aligned}$$

usw. Per Induktion rechnet man nach, dass

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k \quad \text{für alle } k = 0, 1, 2, \dots$$

so dass $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = a_k$ für alle k gilt. Damit haben wir folgenden Satz nachgerechnet.

Satz 42.7. *Ist f durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 gegeben,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

so ist die Taylorreihe von f in x_0 genau wieder die Potenzreihe von f .

Vorlesung 43

Lineare Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen, deren Lösung eine Funktion ist. In der Gleichung können sowohl die gesuchte Funktion als auch die Ableitungen der Funktion auftreten. Wir behandeln zwei einfache Beispiele:

$$y' = ay \quad \text{und} \quad y'' = -ay.$$

Die *Ordnung* einer Differentialgleichung (DGL) ist die höchste auftretende Ableitung. So hat die DGL $y' = ay$ die Ordnung 1 (da y' die höchste auftretende Ableitung ist) und $y'' = -ay$ hat die Ordnung 2 (wegen y''). Wir sprechen von einer *linearen Differentialgleichung*, wenn nur Linearkombinationen der Funktion y und ihrer Ableitung vorkommen. So sind beide DGL oben lineare DGL, aber zum Beispiel $y' = y^2$ ist keine lineare DGL.

43.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = ay$$

mit gegebenem $a \in \mathbb{K}$ (wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und gesuchter Funktion y . Eine Lösung ist

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}, \quad y(t) = e^{at},$$

denn es gilt

$$y'(t) = \frac{d}{dt} e^{at} = a e^{at} = a y(t).$$

Aber auch jedes Vielfache von y ist eine Lösung, also jede Funktion $y(t) = c e^{at}$, mit beliebiger Konstanten c , denn für diese ist $y'(t) = c a e^{at} = a y(t)$. Gibt es weitere Lösungen? Der nächste Satz zeigt, dass dies alle Lösungen sind.

Satz 43.1. *Jede Lösung der DGL*

$$y' = ay$$

ist von der Form

$$y(t) = ce^{at}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{K}$.

Beweis. Sei $y(t)$ eine Lösung der DGL, d.h. es ist $y'(t) = ay(t)$. Betrachte die Funktion $f(t) = e^{-at}y(t)$. Für diese gilt

$$f'(t) = (e^{-at}y(t))' = -ae^{-at}y(t) + e^{-at}y'(t) = -ae^{-at}y(t) + e^{-at}ay(t) = 0.$$

Daher ist f auf ganz \mathbb{R} konstant (Satz 23.7), d.h. es gibt eine Konstante c mit

$$c = f(t) = e^{-at}y(t),$$

und daher ist $y(t) = ce^{at}$. □

Insbesondere ist die Lösungsmenge der DGL $y' = ay$ ein eindimensionaler Teilraum der differenzierbaren Funktionen, und $\{e^{at}\}$ ist eine Basis dieses Teilraums.

Anfangswertprobleme Beschreibt man ein gegebenes Problem mit einer Differentialgleichung $y' = ay$, etwa den radioaktiven Zerfall einer Substanz, so wissen wir, dass $y(t) = ce^{at}$ mit einer Konstanten c ist. Aber wie viel der Substanz haben wir nun zum Zeitpunkt t ? Dazu müssen wir die Konstante c bestimmen. Dies geht, wenn wir die Funktion zu einem Zeitpunkt, etwa t_0 , kennen.

Erfüllt die Funktion y die Differentialgleichung $y' = ay$, und hat die Funktion zu einem Zeitpunkt t_0 einen bekannten Wert y_0 , d.h. gilt auch $y(t_0) = y_0$, so spricht man von einem *Anfangswertproblem*. Man denkt sich t_0 als Anfangszeitpunkt und y_0 als Anfangswert der Funktion. Mit dem Anfangswert können wir die Konstante c bestimmen und die Lösung wird eindeutig.

Satz 43.2. *Das Anfangswertproblem (AWP)*

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

hat die eindeutige Lösung

$$y(t) = e^{a(t-t_0)}y_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Jede Lösung der Differentialgleichung hat die Form $y(t) = ce^{at}$. Gilt nun $y_0 = y(t_0) = ce^{at_0}$, so ist $c = e^{-at_0}y_0$, und damit $y(t) = e^{-at_0}y_0e^{at} = e^{a(t-t_0)}y_0$. □

Beispiel 43.3. Radioaktives Kalium-42 zerfällt gemäß der DGL $y' = -0.055y$, wobei $y(t)$ die Masse (in Gramm) an vorhandenem Kalium zum Zeitpunkt t (in Stunden) ist. Daher ist $y(t) = e^{-0.055t}c$. Beträgt die Masse zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ dann 12 g, so ist $y(t) = 12e^{-0.055t}$ die Masse zum Zeitpunkt t .

43.2 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten nun ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$\vec{y}' = A\vec{y},$$

wobei die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gegeben ist, und die Funktion

$$\vec{y}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad t \mapsto \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix},$$

gesucht ist. Dabei ist die Ableitung von \vec{y} eintragsweise definiert:

$$\vec{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix}.$$

Wir wollen zunächst annehmen, dass A diagonalisierbar ist, das heißt $A = SDS^{-1}$ mit einem invertierbaren S und einer Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dann ist

$$\vec{y}' = A\vec{y} = SDS^{-1}\vec{y},$$

also

$$(S^{-1}\vec{y})' = S^{-1}\vec{y}' = D(S^{-1}\vec{y}).$$

Setzen wir $\vec{z} = S^{-1}\vec{y}$, so ist also

$$\vec{z}' = D\vec{z},$$

was ausgeschrieben die Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda_1 z_1, \\ z_2' &= \lambda_2 z_2, \\ &\vdots \\ z_n' &= \lambda_n z_n, \end{aligned}$$

ergibt. Wir konnten das DGL-System *entkoppeln*, jede Gleichung beinhaltet nur noch eine gesuchte Funktion und wir sind zurück im skalaren Fall. Die skalaren DGL können wir lösen: Es sind

$$z_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad z_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}$$

mit Konstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$. Dann ist also

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{=: e^{tD}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{=: \vec{c}},$$

vergleiche Abschnitt 34.2 für die Definition von e^{tD} . Es ist also $\vec{z}(t) = e^{tD}\vec{c}$. Nun sind wir an der Lösung \vec{y} der DGL $\vec{y}' = A\vec{y}$ interessiert und rechnen daher zurück:

$$\vec{y}(t) = S\vec{z}(t) = Se^{tD}\vec{c} = Se^{tD}S^{-1} \underbrace{S\vec{c}}_{=\vec{c}} = e^{tA}\vec{c},$$

wobei

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1}, \quad e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}. \quad (43.1)$$

Die Lösung $\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{c}$ sieht aus wie im skalaren Fall, nur dass e^{tA} eine matrixwertige Funktion ist und \vec{c} ein Vektor von Konstanten.

Bemerkung 43.4. Auf die Definition von e^{tD} kommt man auch mit der Exponentialreihe:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k = e^{tD}.$$

Auf (43.1) kommt man dann, da

$$A^k = (SDS^{-1})^k = SDS^{-1}SDS^{-1} \dots SDS^{-1} = SD^kS^{-1}$$

ist, so dass man S und S^{-1} aus der Reihe herausziehen kann.

Bemerkung 43.5. Auch wenn A nicht diagonalisierbar ist, ist jede Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$ von der Form $\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{c}$. In diesem Fall lässt sich e^{tA} nicht durch Diagonalisieren von A berechnen, man kann aber die Reihe $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ verwenden.

Ist ein Anfangswert gegeben, $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$, so lässt sich der Konstantenvektor wie im skalaren Fall eindeutig bestimmen, denn

$$\vec{y}_0 = \vec{y}(t_0) = e^{t_0 A}\vec{c},$$

also ist $\vec{c} = e^{-t_0 A}\vec{y}_0$ und daher

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{y}_0.$$

Wir fassen zusammen und erhalten die Verallgemeinerung der Sätze 43.1 und 43.2 für allgemeines $n \geq 1$.

Satz 43.6. Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

1) Das lineare Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

hat die allgemeine Lösung

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{c}$$

mit $\vec{c} \in \mathbb{K}^n$. Insbesondere ist die Lösungsmenge ein n -dimensionaler Vektorraum.

2) Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \vec{y}' = A\vec{y} \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \in \mathbb{K}^n \end{cases}$$

hat die eindeutige Lösung

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A} \vec{y}_0.$$

Für diagonalisierbares A kann e^{tA} über (43.1) berechnet werden, wobei die Gleichungen beim Diagonalisieren entkoppelt werden.

Beispiel 43.7. 1) Die DGL $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{y}$ hat die Lösungen

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Geben wir den Anfangswert $\vec{y}(1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ vor, so hat das Anfangswertproblem die eindeutige Lösung

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 5e^{2(t-1)} \\ 7e^{3(t-1)} \end{bmatrix}.$$

2) $\vec{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \vec{y}$: Eine Diagonalisierung von A ist

$$A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

also ist

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= e^{tA} \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} - e^{2t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \vec{c} \\ &= \begin{bmatrix} (c_1 - c_2)e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ c_2 e^{3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Geben wir wieder den Anfangswert $\vec{y}(1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ vor, so hat das Anfangswertproblem die eindeutige Lösung

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} -2e^{2(t-1)} + 5e^{3(t-1)} \\ 5e^{3(t-1)} \end{bmatrix}.$$

43.3 Lineare skalare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

wobei $\omega > 0$ gegeben und $x = x(t)$ die gesuchte Funktion ist. Sicher sind $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ Lösungen, und, da die DGL linear ist, auch alle Linearkombinationen dieser beiden Funktionen (also alle Funktionen $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$). Gibt es weitere Lösungen?

Um diese Frage zu beantworten benutzen wir folgenden Trick: Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\vec{y}'(t) = \begin{bmatrix} x''(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = A\vec{y}(t),$$

d.h. \vec{y} erfüllt ein lineares DGL-System erster Ordnung, dessen Lösung wir kennen und ausrechnen können (Satz 43.6):

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{c}.$$

Insbesondere ist der Lösungsraum zweidimensional, d.h. es gibt nur zwei linear unabhängige Lösungen. Da die Lösungen $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ für $\omega > 0$ linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis des Lösungsraum, und alle Lösungen von $x'' + \omega^2 x = 0$ haben die Gestalt

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

mit Konstanten c_1, c_2 . Die Lösungen sind also harmonische Schwingungen.

Um eine eindeutige Lösung zu bekommen, brauchen wir zwei Bedingungen, um die beiden Konstanten zu bestimmen. Oft stellt man diese als Anfangswertbedingungen an $x(t_0)$ und $x'(t_0)$ („Startort“ und „Startgeschwindigkeit“).

Die Lösungen können wir auch direkt als $y(t) = e^{tA}\vec{c}$ berechnen. Das charakteristische Polynom von A ist $p_A(z) = z^2 + \omega^2 = (z - i\omega)(z + i\omega)$, also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = i\omega$ und $\lambda_2 = -i\omega$. Die zugehörigen Eigenräume sind

$$\text{Kern}(A - i\omega I) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} -i\omega & -\omega^2 \\ 1 & -i\omega \end{bmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} i\omega \\ 1 \end{bmatrix}\right\},$$

$$\text{Kern}(A + i\omega I) = \text{Kern}\left(\begin{bmatrix} i\omega & -\omega^2 \\ 1 & i\omega \end{bmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -i\omega \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Daher ist $A = SDS^{-1}$ mit $D = \begin{bmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{bmatrix}$ und $S = \begin{bmatrix} i\omega & -i\omega \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, und damit $S^{-1} = \frac{1}{2i\omega} \begin{bmatrix} 1 & i\omega \\ -1 & i\omega \end{bmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned} e^{tA} &= S e^{tD} S^{-1} = \begin{bmatrix} i\omega & -i\omega \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix} \frac{1}{2i\omega} \begin{bmatrix} 1 & i\omega \\ -1 & i\omega \end{bmatrix} = \frac{1}{2i\omega} \begin{bmatrix} i\omega & -i\omega \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\omega t} & i\omega e^{i\omega t} \\ -e^{-i\omega t} & i\omega e^{-i\omega t} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2i\omega} \begin{bmatrix} i\omega(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) & i^2\omega^2(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \\ e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} & i\omega(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & -\omega \sin(\omega t) \\ \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Euler-Formel $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ verwendet, aus der folgt

$$\cos(\omega t) = \text{Re}(e^{i\omega t}) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad \sin(\omega t) = \text{Im}(e^{i\omega t}) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}). \quad (43.2)$$

Da $x(t)$ der zweite Eintrag von $\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{c}$ ist, finden wir also $x(t) = c_1 \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$ mit beliebigen Konstanten c_1, c_2 .

Eine allgemeine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 = 0$$

kann man genauso lösen. Wir verwenden den gleichen Trick: Mit $y(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$ ist

$$\vec{y}'(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{y}(t),$$

also $\vec{y}(t) = e^{tA} \vec{c}$ gilt.

Für allgemeine skalare lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0$$

funktioniert der gleiche Trick, nun mit $\vec{y} = \begin{bmatrix} x^{(n-1)} \\ \vdots \\ x' \\ x \end{bmatrix}$. Dann sind wieder $\vec{y}' = A\vec{y}$ und

daher $\vec{y} = e^{tA} \vec{c}$.

Beispiel 43.8 (Gedämpfte harmonische Schwingung). Als letztes Beispiel betrachten wir die linear gedämpfte Schwingung

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$$

wobei $\beta = \frac{b}{2m} > 0$ die Abklingkonstante und $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz sind. Die Bedeutung der Konstanten wird erst beim Betrachten der Lösungen klar.

Wir Lösen wir eben: Mit $\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$ ist

$$\vec{y}'(t) = \begin{bmatrix} x''(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\beta x'(t) - \omega_0^2 x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\beta & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = A\vec{y}(t),$$

und $\vec{y}(t) = e^{tA} \vec{c}$. Das charakteristische Polynom der Matrix ist $p_A(z) = \det(A - zI_2) = z^2 + 2\beta z + \omega_0^2$, somit sind die Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Das Verhalten der Lösungen hängt davon ab, ob $\beta^2 - \omega_0^2$ positiv, null oder negativ ist.

- Fall $\beta^2 > \omega_0^2$: Dann ist der Term unter der Wurzel positiv, also hat A zwei verschiedene reelle Eigenwerte. Da $\vec{y}(t) = e^{tA} \vec{d} = S e^{tD} S^{-1} \vec{d}$, ist der zweite Eintrag (egal wie S und S^{-1} aussehen) eine Linearkombination von $e^{\lambda_+ t}$ und $e^{\lambda_- t}$:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t},$$

mit Konstanten c_1, c_2 . Da beide Eigenwerte negativ sind, klingt die Lösung exponentiell ab, und der Fall wird auch *Kriechfall* genannt.

- Fall $\beta^2 = \omega_0^2$: In diesem Fall hat A zwei gleiche Eigenwerte $\lambda_+ = \lambda_- = -\beta$. Man kann nachrechnen, dass A nicht diagonalisierbar ist. Die Lösung erhält man als

$$x(t) = c_1 e^{-\beta t} + c_2 t e^{-\beta t}.$$

Dieser Fall wird *aperiodischer Grenzfall* genannt.

- Fall $\beta^2 < \omega_0^2$: Dann ist der Term unter der Wurzel negativ, und A hat zwei verschiedene komplexe Eigenwerte:

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \mp i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \mp i\omega_d.$$

($\omega_d > 0$ ist die gedämpfte Eigenkreisfrequenz.) Die Lösung hat dann die Gestalt

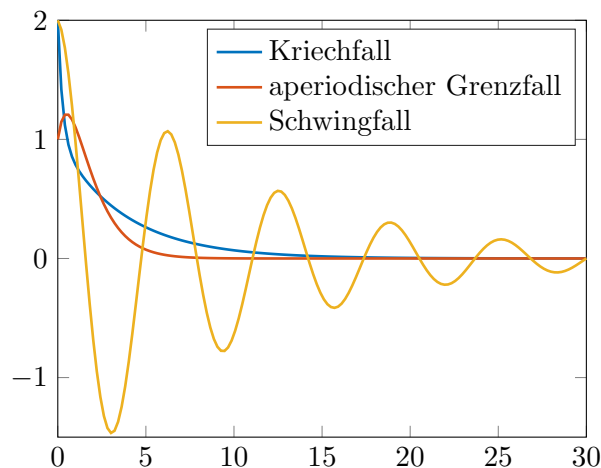
$$x(t) = c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t} = e^{-\beta t} (c_1 e^{i\omega_d t} + c_2 e^{-i\omega_d t}).$$

Die komplexen Exponentialfunktionen können wie in (43.2) mit Sinus und Cosinus geschrieben werden, so dass

$$x(t) = e^{-\beta t} (d_1 \sin(\omega_d t) + d_1 \cos(\omega_d t)).$$

Der zweite Faktor beschreibt eine Schwingung (mit Frequenz ω_d), der erste Faktor $e^{-\beta t}$ klingt exponentiell ab und dämpft die Schwingung. Zusammen haben wir eine gedämpfte Schwingung (falls $\beta > 0$). Dieser Fall wird daher auch *Schwingfall* genannt.

Ist $\beta = 0$ (keine Dämpfung), so ist die DGL $x'' + \omega^2 x = 0$, in der Lösung verschwindet der Dämpfungsterm und wir haben wieder eine freie Sinus- und Cosinusschwingung.



Mehr zu Differentialgleichungen können Sie in den Vorlesungen „Differentialgleichungen für Ingenieurwissenschaften“ und „Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen“ lernen.

Index

- Abbildung, 39
 - Bild, 40
 - Inverse, 43
 - Komposition, 42
 - linear, 115
 - Urbild, 40
 - Verkettung, 42
- ableiten, 160
- Ableitung, 160
 - der Umkehrfunktion, 165
 - der Wurzel, 166
 - Diskretisierung, 189
 - höhere, 167
 - zweite, 167
- absolut konvergent, 309
- Absolutbetrag
 - einer komplexen Zahl, 29, 30
 - einer reellen Zahl, 20
- Absolute Konvergenz, 309
- Addition
 - von Matrizen, 93
 - von Vektoren, 75
- Additionstheorem
 - für den Tangens, 54
 - für Sinus und Cosinus, 50, 199
- adjungiert, 98
- Adjungierte, 98
- äquivalente Aussagen, 15
- algebraische Vielfachheit, 252
- allgemeine Potenz, 196
- alternierende harmonische Reihe, 307
- Amplitude, 51, 282
- Anfangswertproblem, 320
- Approximation
 - lineare, 162
- Arcus Tangens, 56
- Arcus-Funktionen, 201
- Arcuscosinus, 202
- Arcussinus, 202
 - Hauptwert, 202
- Arcustangens, 203
- Area Cosinus hyperbolicus, 205
- Area Sinus hyperbolicus, 205
- Argument, 55
- arithmetisches Mittel, 19
- Aussage, 15
 - äquivalent, 15
 - Negation, 15
- AWP, *siehe* Anfangswertproblem
- Basis, 85, 196
 - des Bildes, 119
 - des Kerns, 119
 - eines Vektorraums, 85
 - natürliche, 196
- Basisübergangsmatrix, 127
- Basiswechsel
 - darstellende Matrix, 127
 - Koordinatenvektor, 127
- Basiswechselmatrix, 127
- Bernoulli-Ungleichung, 35
- Beschleunigung, 168
- Beschränktheit, 46
 - einer Folge, 132
 - einer Funktion, 46
- Besselsche Ungleichung, 296
- bestimmt divergent, 135
- bestimmtes Integral, 210
- Betrag
 - einer komplexen Zahl, 29, 30, 55
 - einer reellen Zahl, 20

Beweis durch Widerspruch, 16
 bijektiv, 43
 Bild, 40, 118
 Basis, 119
 Binomialkoeffizient, 36
 binomische Formel, 37
 Binomischer Lehrsatz, 37
 Bisektionsverfahren, 152
 Bogenmaß, 49, 55

 Cauchy-Produkt, 305, 309
 Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 266
 charakteristisches Polynom, 252
 Cosinus, 50, 164, 192, 199
 Cosinus hyperbolicus, 204
 Cosinusschwingung, 53
 Cotangens, 200
 Cotanges hyperbolicus, 206

 darstellende Matrix, 125
 Definitionsbereich, 39
 Determinante, 241
 Determinantenmultiplikationssatz, 245
 Dezimalzahl, 18
 DGL, *siehe* Differentialgleichung
 diagonalisierbare Matrix, 257
 Diagonalisierbarkeit, 257
 Diagonalisierung, 257
 Diagonalmatrix, 257
 Differentialgleichung, 319
 lineare, 319
 Ordnung, 319
 Differentialquotient, 161
 Differenzenquotient, 161
 differenzierbar
 auf einer Menge, 160
 in einem Punkt, 160
 differenzieren, 160
 Differenzmenge, 13
 Dimension
 eines Vektorraums, 86
 Dimensionsformel für lineare Abbildungen, 120
 direkter Beweis, 16

 Diskretisierung der Ableitung, 189
 Diskriminante, 31, 60
 divergent, 133
 divergente Folge, 133
 Division mit Rest, 62
 Divisionsrest, 62
 Drei-Folgen-Satz, 139
 Dreiecksform, 100
 Dreiecksmatrix, 242
 obere, 242
 Dreiecksungleichung, 20, 31
 Norm, 264

 Eigenraum, 251
 Eigenvektor, 250
 Eigenwert, 250
 Eigenwertgleichung, 250
 einfacher Pol, 67
 Einheitskreis, 49
 Einheitsmatrix, 92
 Element, 11
 elementare Zeilenoperationen, 100
 endlichdimensionaler Vektorraum, 86
 Entwicklungspunkt, 180
 Entwicklungspunkt, 313
 erweiterte Koeffizientenmatrix, 103
 Erzeugendensystem, 80
 Erzeugnis, *siehe* Span
 euklidische Norm, 264
 euklidischer Vektorraum, 265
 Euler-Formel, 58, 192, 198, 299
 Eulerdarstellung, 58
 Eulersche Zahl, 186, 193, 196
 Exponent, 196
 Exponentialfunktion, 47, 193
 komplexe, 198
 Extremalstelle, 154
 Extremum, 154, 171
 strenges, 172
 striktes, 172
 Extremwert, 171
 Extremwert-Test, 176
 Extremwerte
 hinreichendes Kriterium, 176, 182

- notwendiges Kriterium, 173
- Fakultät, 25
- Fehlerabschätzung, 187
- Fehlerapproximation
 - qualitativ, 187
- Fibonacci-Folge, 132, 261
- Flächenberechnung, 211
- Flächenbilanz, 211
- Folge, 131
 - beschränkt, 132
 - nach oben, 132
 - nach unten, 132
 - bestimmt divergent, 135
 - divergent, 133
 - explizit definiert, 132
 - Fibonacci, 261
 - Glied, 131
 - Grenzwert, 133
 - komplexer Zahlen, 131, 136
 - konvergent, 133
 - Konvergenz, 133
 - monoton, 132
 - monoton fallend, 132
 - monoton wachsend, 132
 - nach oben beschränkt, 132
 - nach unten beschränkt, 132
 - Nullfolge, 133
 - reeller Zahlen, 131
 - rekursiv definiert, 132
 - streng monoton, 132
 - streng monoton fallend, 132
 - streng monoton wachsend, 132
- Folglied, 131
- Fourierkoeffizienten
 - komplex, 300
 - reell, 285
- Fourierpolynom
 - komplex, 300
 - reell, 285
- Fourierreihe, 295
- Frequenz, 51–53, 282
- Fundamentalsatz der Algebra, 64
- Funktion, 39
 - Ableitung, 160
 - beschränkt, 46
 - differenzierbar, 160
 - gerade, 44
 - Grenzwert, 143
 - integrierbar, 213
 - monoton fallend, 45, 175
 - monoton wachsend, 45, 175
 - Monotonie, 45
 - nach oben beschränkt, 46
 - nach unten beschränkt, 46
 - Nullfunktion, 40
 - Periode, 281
 - periodisch, 50, 281
 - punktsymmetrisch, 45
 - quadratisches Mittel, 293
 - spiegelsymmetrisch, 45
 - stetig, 146, 147
 - streng monoton fallend, 45, 175
 - streng monoton wachsend, 45, 175
 - strenge Monotonie, 45
 - stückweise monoton, 213
 - stückweise stetig, 213
 - T -periodisch, 281
 - uneigentlich integrierbar, 231, 232, 234
 - ungerade, 45
- Funktionalgleichung
 - der Exponentialfunktion, 47
 - des Logarithmus, 48
- ganze Zahlen, 17
- Gauß-Algorithmus, 101
- Gaußsche Zahlenebene, 28
- geometrische Folge, 141
- geometrische Reihe, 142, 304
- geometrische Summe, 23, 24, 34
- geometrische Vielfachheit, 251
- geometrisches Mittel, 19
- gerade Funktion, 44
- Geschwindigkeit, 162
- Gleichung
 - quadratische, 31, 60
- Glied
 - einer Folge, 131

- einer Reihe, 303
- globales Maximum, 172
- globales Minimum, 172
- Grad eines Polynoms, 61
- Gradformel, 62
- Gram-Schmidt-Verfahren, 275
- Grenzwert
 - einer Folge, 133
 - einer Funktion, 143
 - linksseitig, 145
 - rechtsseitig, 146
- Grenzwertsätze
 - für Folgen, 137
 - für Funktionen, 145
- Grundintegrale, 220
- Grundschiwingung, 282
- harmonische Reihe, 307
- harmonische Schwingung, 53, 281
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 218
- Hauptwert
 - des Arcussinus, 202
- Hermesch, 98
- Homogenität, 264
- Homomorphismus, 115
- Householder-Matrix, 272
- Hutfunktion, 90
- Hyperbelfunktionen, 204
 - Cosinus hyperbolicus, 204
 - Cotangens hyperbolicus, 206
 - Sinus hyperbolicus, 204
 - Tangens hyperbolicus, 206
- Identität, 40
- Imaginärteil, 29
- Implikation, 15
- Index, 131
- Indexverschiebung, 23
- Induktion, 33
- Induktionsanfang, 33
- Induktionsbehauptung, 34
- Induktionsschritt, 33, 34
- Induktionsvoraussetzung, 34
- Infimum, 156
- Inhomogenität, 99
- injektiv, 43
- Integral, 210
 - bestimmtes, 210
 - einer komplexwertigen Funktion, 229
 - uneigentliches, 231, 232, 234
- Integralfunktion, 218
- Integralvergleichskriterium, 305
- Integrand, 210
- Integration
 - partielle, 222
- Integrationsgrenze
 - obere, 210
 - untere, 210
- Integrationsvariable, 210
- integrierbar, 213
 - uneigentlich, 231, 232, 234
- Intervall, 13
 - kompakt, 13
- Intervallhalbierungsverfahren, 151
- Inverse, 43, 96, 113, 117
 - Koordinatenabbildung, 124
 - lineare Abbildung, 117
 - Matrix, 96
- Isomorphismus, 117
- kartesisches Produkt, 13
- Kern, 118
 - Basis, 119
- Kettenregel, 163
- kleinste-Quadrate-Approximation, 279
- Koeffizienten
 - einer Linearkombination, 78
 - einer Potenzreihe, 313
 - eines linearen Gleichungssystems, 99
 - eines Polynoms, 61
- Koeffizientenmatrix, 99
 - erweiterte, 103
- Koeffizientenvergleich, 64
- kompaktes Intervall, 13
- komplex konjugiert, 29
- komplexe Exponentialfunktion, 198
- komplexe Folge, 131, 136

komplexe Partialbruchzerlegung, 68
 komplexe Wurzel, 59
 komplexe Zahlen, 27
 komplexe Zahlenfolge, 131, 136
 komplexes trigonometrisches Polynom, 300
 Komposition, 42
 Konjugation, 29, 30
 Kontraposition, 16
 konvergente Folge, 133
 Konvergenz
 bei Funktionen, 143
 einer Reihe, 303
 einer Zahlenfolge, 133
 Konvergenzkreis, 314
 Konvergenzkriterium
 Integralvergleichskriterium, 305
 Leibnizkriterium, 307
 Majorantenkriterium, 310
 Minorantenkriterium, 310
 Notwendiges Kriterium, 305
 Quotientenkriterium, 311
 Konvergenzradius, 314
 Koordinaten, 88
 eines Vektors, 88
 Koordinatenabbildung, 124
 Koordinatenvektor, 88, 123
 bei Basiswechsel, 127
 Krümmung, 168
 l'Hospital
 Regel von, 168
 Lagrange-Restglied, 180
 Laplace-Entwicklung, 244
 least squares approximation, 279
 leere Menge, 12
 leere Summe, 23
 leeres Produkt, 25
 Leibnizkriterium, 307
 LGS, *siehe* Lineares Gleichungssystem
 Limes, *siehe* Grenzwert
 linear abhängig, 83
 linear unabhängig, 83
 Lineare Abbildung, 115
 lineare Abbildung
 Bild, 118
 Dimensionsformel, 120
 injektiv, 120
 Kern, 118
 Matrixdarstellung, 125
 Potenz, 117
 surjektiv, 121
 Umkehrabbildung, 117
 lineare Abhängigkeit, 83
 lineare Approximation, 162
 lineare Differentialgleichung, 319
 1. Ordnung, 319
 2. Ordnung, 323, 324
 n -ter Ordnung, 325
 lineare Hülle, *siehe* Span
 Lineare Regression, 279
 lineare Unabhängigkeit, 83
 Lineares Gleichungssystem, 99
 homogen, 99
 inhomogen, 99
 Inhomogenität, 99
 Koeffizienten, 99
 Koeffizientenmatrix, 99
 komplexes, 99
 Lösung, 100
 Lösungsmenge, 100, 106
 partikuläre Lösung, 106
 reelles, 99
 spezielle Lösung, 106
 Linearfaktor, 63
 Linearfaktorzerlegung, 64
 Linearkombination, 78
 Lineares Gleichungssystem
 Lösbarkeitskriterium, 111
 linksseitiger Grenzwert, 145
 Lösbarkeitskriterium für LGS, 111
 Lösung
 eines linearen Gleichungssystems, 100
 Lösungsmenge
 eines linearen Gleichungssystems, 100, 106
 Logarithmus, 48, 195
 zur Basis a , 197

- lokales Maximum, 172
- lokales Minimum, 172
- Lot, 274
- Majorantenkriterium, 310
- Matrix, 91
 - Addition, 93
 - Adjungierte, 98
 - darstellende, 125
 - diagonalisierbar, 257
 - Dreiecksform, 100
 - Hermesch, 98
 - Householder-Matrix, 272
 - Inverse, 96, 113
 - Multiplikation, 94
 - orthogonal, 270
 - quadratisch, 91
 - Rang, 109
 - Skalarmultiplikation, 93
 - Transponierte, 97
 - unitär, 272
 - Zeilenstufenform, 101
- Matrixdarstellung, 125
 - bei Basiswechsel, 127
- Matrizenmultiplikation, 94
- Maximalstelle, 154
- Maximum, 154
 - globales, 172
 - lokales, 172
 - strenges, 172
 - striktes, 172
- Maximumsnorm, 264
- mehrfacher Pol, 67
- Menge, 11
 - Differenz, 13
 - Element, 11
 - leere Menge, 12
 - Schnitt, 12
 - Teilmenge, 12
 - Vereinigung, 12
- Minimalstelle, 154
- Minimum, 154
 - globales, 172
 - lokales, 172
 - strenges, 172
 - striktes, 172
- Minorantenkriterium, 310
- Mittelwert
 - einer Funktion, 215
- Mittelwertsatz, 174
 - der Integralrechnung, 215
- monoton
 - stückweise, 213
- Monotonie, 45
 - einer Folge, 132
 - einer Funktion, 45
- Monotoniekriterium
 - für Folgen, 140
 - für Funktionen, 175
- natürliche Zahlen, 17
- natürliche Basis, 196
- natürlicher Logarithmus, 48
- Negation, 15
- Newton-Verfahren, 166
- Norm, 263
 - Dreiecksungleichung, 264
 - euklidische, 264
 - homogen, 264
 - Maximumsnorm, 264
 - p -Norm, 264
 - positiv definit, 264
 - Standardnorm, 264
- normierte Zeilenstufenform, 102
- Notwendiges Extremwertkriterium, 173
- Nullabbildung, 40
- Nullfolge, 133
- Nullmatrix, 92
- Nullstelle, 63
 - eines Polynoms, 63
 - einfache, 64
 - mehrfache, 64
 - Vielfachheit, 64
- Nullvektor, 75
- NZSF, *siehe* normierte Zeilenstufenform
- obere Dreiecksmatrix, 242
- obere Integrationsgrenze, 210

- Oberschwingung, 282
- ONB, *siehe* Orthonormalbasis
- Ordnung
 - einer Differentialgleichung, 319
 - eines Pols, 67
- orthogonal, 267
 - Matrix, 270
 - Vektor, 267
- orthogonale Projektion, 274
- Orthogonalitätsrelationen, 283
- orthonormal, 267
- Orthonormalbasis, 268
- p -Norm, 264
- Parallelepiped, 240
- Parallelotop, 240
- Parsevalsche Gleichung, 296
- Partialbruchzerlegung, 68
 - komplexe, 68
 - reelle, 71
- Partialsumme, 303
- partielle Integration, 222
- partikuläre Lösung
 - eines LGS, 106
- Pascalsches Dreieck, 36
- PBZ, *siehe* Partialbruchzerlegung
- Periode, 52, 281
- periodische Funktion, 281
- Phasenverschiebung, 51, 52
- Pol, 67
 - der Ordnung k , 67
 - einfacher, 67
 - mehrfacher, 67
- Polardarstellung, 55
- Polstelle, *siehe* Pol
- Polynom, 61
 - Addition, 62
 - charakteristisches, 252
 - Division mit Rest, 62
 - Grad, 61
 - Koeffizienten, 61
 - Koeffizientenvergleich, 64
 - Linearfaktorzerlegung, 64
 - Multiplikation, 62
 - reelle Zerlegung, 65
 - reelles, 61
 - Skalarmultiplikation, 62
 - trigonometrisches, 282, 300
 - Vektorraum, 76
- Polynomdivision, 62
- Positive Definitheit
 - Norm, 264
 - Skalarprodukt, 265
- Potenz
 - allgemeine, 196
 - einer linearen Abbildung, 117
- Potenzreihe, 313
 - Ableitung, 316
 - Entwicklungspunkt, 313
 - Koeffizienten, 313
 - Konvergenzkreis, 314
 - Konvergenzradius, 314
- Produkt
 - leeres Produkt, 25
- Produktformel von Cauchy, 305
- Produktregel, 163
- Produktzeichen, 25
- Projektion, 274
- punktsymmetrisch, 45
- QR-Zerlegung, 276
 - Berechnung, 277
- quadratische Gleichung
 - komplexe Koeffizienten, 60
 - reelle Koeffizienten, 31
- quadratische Matrix, 91
- quadratischer Fehler, 293
- quadratisches Mittel, 293
- Quadratwurzel, 20
- qualitative Fehlerapproximation, 187
- Quotientenkriterium, 311
- Quotientenregel, 163
- Rang, 109
- rationale Funktion, 67
 - Pol, 67
- rationale Zahlen, 17
- Realteil, 29

- Rechteckspannung, 292
- rechtsseitiger Grenzwert, 146
- reelle Folge, 131
- reelle Fourierkoeffizienten, 285
- reelle Partialbruchzerlegung, 71
- reelle Zahlen, 18
- reelle Zahlenfolge, 131
- reelles Polynom, 61
- reelles trigonometrisches Polynom, 282
- Regel von l'Hospital, 168
- Reihe, 142, 303
 - absolut konvergent, 309
 - Absolute Konvergenz, 309
 - divergent, 303
 - Divergenz, 303
 - Glied, 303
 - konvergent, 303
 - Konvergenz, 303
 - Partialsumme, 303
 - Summe, 303
 - unendliche, 303
 - Wert, 303
- Rest, 62
- Restglied, 180
 - Lagrange-Darstellung, 180
- Riemann-Summe, 210
- Riemannsche Summe, 210
- Rückwärtssubstitution, 100
- Sandwich-Theorem, 139
- Satz des Pythagoras, 268
- Schnitt, 12
- Schwingung
 - Cosinusschwingung, 53
 - harmonische, 53
 - Sinusschwingung, 51
- Sekante, 159
- senkrecht, *siehe* orthogonal
- Sinus, 50, 164, 191, 199
- Sinus hyperbolicus, 204
- Sinusschwingung, 51
- Skalar, 75
- Skalarmultiplikation
 - von Matrizen, 93
 - von Vektoren, 75
- Skalarprodukt, 264
- Spaltenvektor, 92
- Span, 79
- Spat, 240
- Spatprodukt, 240
- spezielle Lösung
 - eines LGS, 106
- spiegelsymmetrisch, 45
- Stammfunktion, 217
- Standardbasis von \mathbb{K}^n , 86
- Standardnorm, 264
- Standardskalarprodukt, 265
- Stelle
 - eines globalen Maximums, 172
 - eines globalen Minimums, 172
 - eines lokalen Maximums, 172
 - eines lokalen Minimums, 172
 - eines Maximums, 154
 - eines Minimums, 154
- stetig
 - stückweise, 213
- stetige Fortsetzung, 149
- Stetigkeit, 146, 147
- Streichungsmatrix, 241
- strenges
 - Extremum, 172
 - Maximum, 172
 - Minimum, 172
- strikt
 - Extremum, 172
 - Maximum, 172
 - Minimum, 172
- stückweise
 - monoton, 213
 - stetig, 213
- Substitutionsregel
 - 1. Version, 225
 - 2. Version, 227
- Summationsindex, 23
- Summe
 - einer Reihe, 303
 - geometrische Summe, 23, 24

- leere Summe, 23
- Summenzeichen, 22
- Supremum, 156
- surjektiv, 43
- Tangens, 53, 200
- Tangens hyperbolicus, 206
- Tangente, 159, 161
- Taylorformel, 180
- Taylorpolynom, 180
- Taylorreihe, 190
 - von \cos , 192
 - von \exp , 190, 191
 - von \ln , 195
 - von \sin , 191
- Teilmenge, 12
- Teilraum, 77
- Teilraumkriterium, 77
- Transponierte, 97
- Transposition, 97
- Trigonometrische Funktion
 - Cosinus, 50, 164, 192, 199
 - Cotangens, 200
 - Sinus, 50, 164, 191, 199
 - Tangens, 53, 200
- Trigonometrischer Pythagoras, 50
- trigonometrisches Polynom
 - komplex, 300
 - reell, 282
- Umkehrabbildung, 43
 - einer linearen Abbildung, 117
- Umkehrfunktion
 - Ableitung, 165
- Unbekannte, 99
- unbestimmtes Integral, 217
- uneigentlich integrierbar, 231, 232, 234
- uneigentliches Integral, 231, 232, 234
 - divergent, 232, 234
 - konvergent, 232, 234
- unendlichdimensionaler Vektorraum, 86
- unendliche Reihe, 303
- ungerade Funktion, 45
- unitär
 - Matrix, 272
 - unitärer Vektorraum, 265
 - untere Integrationsgrenze, 210
 - Unterraum, *siehe* Teilraum
 - Untervektorraum, *siehe* Teilraum
 - Urbild, 40
- Vektor, 75
 - Koordinaten, 88
 - Nullvektor, 75
 - orthogonal, 267
 - orthonormal, 267
- Vektorraum, 75
 - Addition, 75
 - Basis, 85
 - der linearen Abbildungen, 116
 - der Polynome, 76
 - vom Grad höchstens n , 78
 - Dimension, 86
 - endlichdimensional, 86
 - euklidisch, 265
 - \mathbb{K}^n , 76
 - Skalarmultiplikation, 75
 - unendlichdimensional, 86
 - unitär, 265
- Vereinigung, 12
- Verkettung, 42
- Vielfachheit
 - algebraische, 252
 - einer Nullstelle, 64
 - geometrische, 251
- vollständige Induktion, 33
- Wahrheitstafel, 15
- Wendepunkte, 168
- Wertebereich, 39
- Wheatstone-Brücke, 188
- Wurzel, 20, 166
 - Ableitung, 166
 - komplexe, 59
 - n -te Wurzel, 20
 - Quadratwurzel, 20
- Wurzelfolge, 140, 167

- Zahlen
 - ganze Zahlen, 17
 - komplexe Zahlen, 27
 - natürliche Zahlen, 17
 - rationale Zahlen, 17
 - reelle Zahlen, 18
- Zahlenfolge, 131
 - komplexe, 131, 136
 - reelle, 131
- Zeilenstufenform, 101
 - normierte, 102
- Zeilenvektor, 92
- ZSF, *siehe* Zeilenstufenform
- Zuhaltemethode, 69
- zweite Ableitung, 167
- Zwischenwertsatz, 151, 154