2. Vorlesung - Zahlen

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

20.10.2025

Pingo Umfrage

War Ihnen bekannt, dass in der Zeit vom 22.09 - 02.10 ein Vorkurs Mathematik in Präsenz (nicht der Online-Brückenkurs) stattgefunden hat?

- Nein.
- Ja, aber ich habe davon zu spät erfahren.
- Ja, aber ich hatte keine Zeit bzw. kein Interesse.
- Ja, ich habe daran (teilweise) teilgenommen.

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

- $x+2=5$ hat die Lösung $x=3 \in \mathbb{N}$
- Aber $x+5=2$ hat keine Lösung in $\mathbb{N}$.

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} := \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$

- $2x=-6$ hat die Lösung $x=-3 \in \mathbb{Z}$
- Aber $3x=2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$.

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$

Beispiel: 1) $-0{,}75 = \frac{-3}{4} \in \mathbb{Q}$

2) $\frac{20}{11} = 1{,}818181\dots$

typisch, dass diese abbrechen oder periodisch sind.

- $x^2=9$ hat die Lösung $x=3 \in \mathbb{Q}$
- Aber $x^2=2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} := \{x | x \text{ ist eine reelle Zahl}\}$

z.B. $\sqrt{2}$, π, e

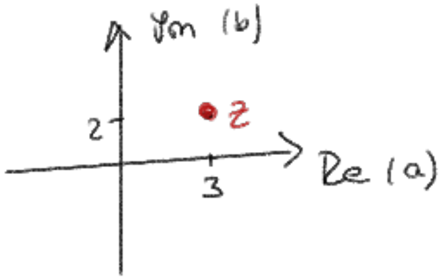
- $x^2 = 2$ hat eine Lösung $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Aber $x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} \rightsquigarrow$ VL 3

Definiere $\mathbb{C} := \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ mit $i^2 = -1$

z.B. $z = 3 + 2i$

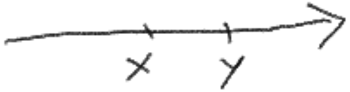


Zusammenfassend: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

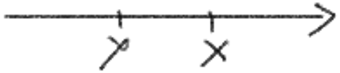
2.2 Ungleichungen

Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$:

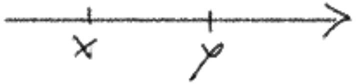
x kleiner y,



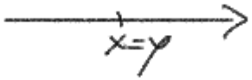
x größer y,



x kleiner gleich y,



oder

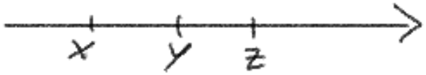


x größer gleich y

Axiome für Ungleichungen

(A1) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau einer der Fälle $x < y$, $x > y$, oder $x = y$

(A2) Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$



(A3) Aus $x < y$ und $a \leq b$ folgt $x + a < y + b$

(A4) Aus $x < y$ und $a > 0$ folgt $ax < ay$

Weitere Eigenschaften

1) Falls $x < 0$, dann $-x > 0$

Beweis: $x < 0 \Rightarrow x + (-x) < 0 + (-x) \Rightarrow 0 < -x$

2) Aus $x < y$ und $a < 0$ folgt $ax > ay$

Beispiel: $2 < 3 \Rightarrow -2 > -3$

3) Für $x \neq 0$ gilt $x^2 > 0$

1. Fall $x > 0$: $x \cdot x > 0 \cdot x \Rightarrow x^2 > 0$

2. Fall $x < 0$: $x\, x > 0 \cdot x \Rightarrow x^2 > 0$

Eigenschaft 2

4) Allgemein: Für $x > 0$ gilt: $x^n > 0$

Fur $x < 0$ gilt: $x^n \begin{cases} > 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ < 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Definition: Sei $a \geq 0$. Dann ist die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Allgemein: $\sqrt[n]{a}$ ist eine Lösung der Gleichung $x^n = a$.

n gerade: ist nichtnegative Lösung von $x^n = a$

n ungerade: ist eindeutige Lösung von $x^n = a$

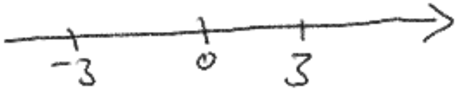
Beispiel:

- $\sqrt[3]{8} = 2$ $(a = 8, n = 3)$, da $2^3 = 8$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$ $(a = -8, n = 3)$ da $(-2)^3 = -8$

2.4 Absolutbetrag

Definition: Der Absolutbetrag einer reellen Zahl ist

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$



Beispiel: $|-2| = -(-2) = 2 = |2|$, $|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{falls } x-5 \geq 0 \\ -(x-5), & \text{falls } x-5 < 0 \end{cases}$

Eigenschaften:

1) $-|x| \leq x \leq |x|$

2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

4) $\sqrt{x^2} = |x|$, z.B. $\sqrt{(-3)^2} = 3$

5) Dreiecksungleichungen

$|x+y| \leq |x| + |y|$

Hinweis: Bei Beträgen niemals quadrieren:

$|x| \leq -3$ hat keine Lösung. Aber: $x^2 = (|x|)^2 \leq (-3)^2 = 9$ hat keine Lösungen

Pingo Umfrage

Finde alle $x \in \mathbb{R}$, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{2}{x} \leq 1$$

- $x \in [2, \infty[$
- $x \in]-\infty, 0[\cup [2, \infty[$
- $x \in]-\infty, 0] \cup [2, \infty[$
- $x \in \mathbb{R} \setminus]0, 2[$

Für $x \neq 0$ müssen wir 2 Fälle unterscheiden:

1. Fall: $x > 0$: Dann

$\frac{2}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x$

$\Rightarrow x > 0$ und $x \geq 2$

$\Rightarrow x \in [2, \infty[$

2. Fall: $x < 0$. Dann

$\frac{2}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 2 \geq x$

$\Rightarrow x < 0$ und $x \leq 2$

$\Rightarrow x \in]-\infty, 0[$

Beispiel: Finde $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{2x}{x+2} > 1$

nicht in der VL geschafft

Es muss gelten $x \neq 2$.

1. Fall: $x+2>0 \Rightarrow \boxed{x>-2}$

Dann $\frac{2x}{x+2} > 1 \quad | \cdot (x+2)$

$\Leftrightarrow 2x > x+2$

$\Leftrightarrow \boxed{x > 2}$

$\Rightarrow \mathbb{L}_1 =]-2,\infty[\cap]2,\infty[=]2,\infty[$

2. Fall: $x+2<0 \Rightarrow x<-2$

Dann $\frac{2x}{x+2} > 1$

$\Leftrightarrow 2x < x+2$

$\Leftrightarrow x < 2$

$\Rightarrow \mathbb{L}_2 =]-\infty,-2[\cap]-\infty,2[=]-\infty,-2[$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 =]-\infty,-2[\cup]2,\infty[= \mathbb{R} \setminus [-2,2]$

Beispiel: Finde $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| \le 2x+5$

1\. Fall $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

Dann $|x-2| \le 2x+5$

$\overset{x-2\geq 0}{\Leftrightarrow}$ $x-2 \le 2x+5$ $\quad | -x$

$\Leftrightarrow$ $-2 \le x+5$ $\quad | -5$

$\Leftrightarrow$ $-7 \le x$

$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = [2,\infty[\cap [-7,\infty[$

$= [2,\infty[$

2\. Fall: $x-2<0 \Rightarrow x<2$

Dann $|x-2| \le 2x+5$

$\overset{x-2<0}{\Leftrightarrow}$ $-(x-2) \le 2x+5$

$\Leftrightarrow$ $-x+2 \le 2x+5$ $\quad | +x$

$\Leftrightarrow$ $2 \le 3x+5$ $\quad | -5$

$\Leftrightarrow$ $-3 \le 3x$ $\quad | :3$

$\Leftrightarrow$ $-1 \le x$

$\Rightarrow \mathbb{L}_2 =]-\infty, 2[\cap [-1,\infty[= [-1, 2[$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = [2,\infty[\cup [-1,2[= [-1,\infty[$

Definition: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

- Für $m \leq n$ ist $\sum\limits_{k=m}^{n} x_k := x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n$.
- Für $m > n$ ist $\sum\limits_{k=m}^{n} x_k := 0$.

Beispiele:

1) $$\sum_{k=3}^{7} k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 135 =$$
$$= \sum_{j=3}^{7} j^2 = \sum_{k=2}^{6} (k+1)^2$$

2) $$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} = \sum_{k=3}^{7} \frac{k}{k+1} = \sum_{k=4}^{8} \frac{k-1}{k}$$

- $\sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=m}^{n} y_k = \sum_{k=m}^{n} (x_k + y_k).$
- $\sum_{k=m}^{n} a x_k = a \sum_{k=m}^{n} x_k.$
- $\sum_{k=m}^{n} x_k \sum_{l=p}^{q} y_l = \sum_{k=m,l=p}^{n,q} (x_k y_l).$
- $\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=m}^{p} x_k + \sum_{k=p+1}^{n} x_k$, falls $m \leq p \leq n$.
- $\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=m-1}^{n-1} x_{k+1}$ (Indexverschiebung)

Geometrische Summe: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{für} q \neq 1 \\ n+1 & \text{für} q = 1 \end{cases}$$

Beweis:

Pingo Umfrage

Es gilt $2^6 = 64$. Berechne $\sum_{k=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

- $\frac{63}{128}$
- $\frac{63}{64}$
- $\frac{63}{32}$
- 64

Definition: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

- Für $m \leq n$ ist $\prod_{k=m}^{n} x_k := x_m \cdot x_{m+1} \ldots x_n$.
- Für $m > n$ ist $\prod_{k=m}^{n} x_k := 1$.

Beispiel: