1. VL Ana1-LinA Ing, 15.10.2025

Themen:
- Organisatorisches
- Mengen, Operationen von Mengen, Intervalle, Aussagen, Verknüpfungen von Aussagen, Beweistechniken

---

1 Grundlagen: Mengen und Logik

Folie 2

Beispiele

(1) $\{1,2,3,4\} = \{2,1,4,3\} = \{2,1,2,4,3,4\}$

geschweifte Klammern für Mengen

(2) $\mathbb{N} := \{0,1,2,3,\dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

„ist per Definition gleich"

(3) $U := \{1,3,5,7,\dots\}$ Menge d. ungeraden natürlichen Zahlen

$= \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade}\}$

„mit der Eigenschaft"

$= \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ z.B. $7 \in U$, $14 \notin U$

(4) $G = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ Menge d. geraden natürlichen Zahlen, z.B. $0 \in G$, $7 \notin G$

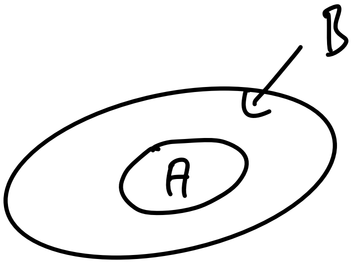
(5) Leere Menge: $\emptyset$ oder $\{\,\}$

Folie 3

„$\Longleftrightarrow$" bedeutet „genau dann, wenn"

„$\Longrightarrow$" bedeutet „daraus folgt"

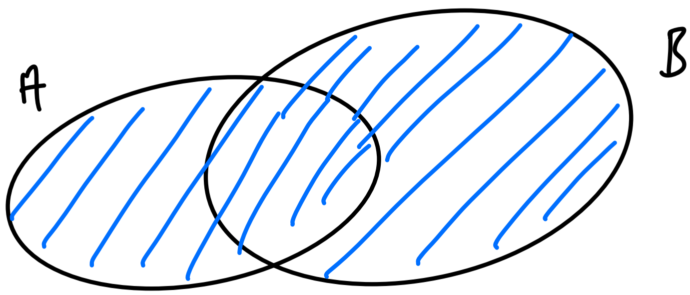
(1)



$A \subseteq B$, z. B. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ (siehe oben)

(2) z. B. $\{1,2\} = \{2,1\} = \{1,2,1\}$

(3)



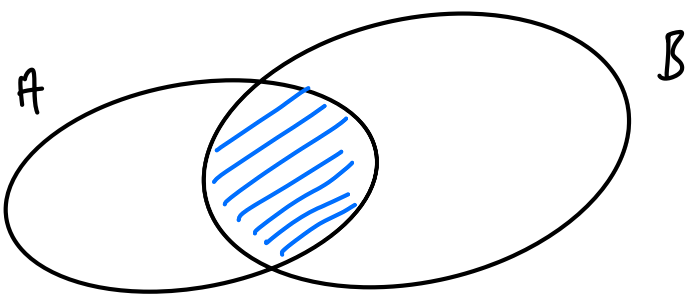
$A \cup B$

z. B.

$\{1,2,3\} \cup \{3,4\}$

$= \{1,2,3,4\}$

(4)



$A \cap B$

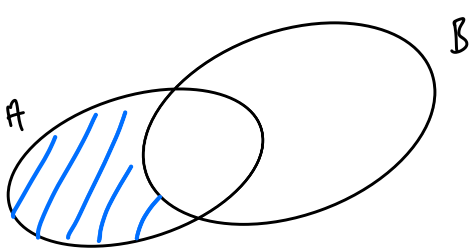
z. B.

$\{1,2,3\} \cap \{3,4\}$

$= \{3\}$

Folie 4

(5)



$A \setminus B$

z. B.

$\{1,2,3\} \setminus \{3,4\}$

$= \{1,2\}$

(6) Sei z. B.

$A = \{2,3\}$ und $B = \{2,3,4\}$

Dann ist

$$A \times B = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$$

Achtung: Es kommt auf die Reihenfolge an,

z. B. ist $(2,3) \neq (3,2)$

Folie 5

$$]-\infty,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$$

Hinweis: ∞ und $-\infty$ sind keine reellen Zahlen und sind daher in keinem Intervall enthalten.

Folie 6

Beispiele

A: „Berlin ist eine Stadt" (wahr)

B: „$4+5=17$" (falsch)

C: „Hallo!" (keine Aussage)

D: „$x^2-1=0$" ist keine Aussage, was ist x?

Aussage durch Quantifizierung:

(a) „Es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 - 1 = 0$." (wahr)

(b) „Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 - 1 = 0$." (falsch)

Folie 7

(1) (a) „$4 + 5 = 17$" (falsch)

Also ist „$\neg(4+5 = 17)$"

bzw. „$4+5 \neq 17$" wahr

(b) A: „Alle Schafe sind weiß."

$\neg A$: „Nicht alle Schafe sind weiß."

Genauer: $\neg A$: „Es gibt mindestens ein Schaf, das nicht weiß ist."

Merke: Aus „es gibt" wird bei der Negation „für alle" und umgekehrt.

(2) Seien z. B.

A: „9 ist durch 3 teilbar" (wahr)

B: „8 ist eine Quadratzahl." (falsch)

Somit: $A \vee B$ ist wahr, $A \wedge B$ ist falsch

Folie 8

(3) (a) „Wenn heute Montag ist, dann ist morgen Dienstag."

↳ Dies ist immer wahr (egal ob heute Montag ist)

(b) „Wenn $1=0$, dann ist $1=1$" (wahr)

Denn: $1=0 \Rightarrow 0=1 \Rightarrow 1=1$

Nach der Vorlesung noch hinzugefügt:

Folie 9

(2) Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\underbrace{n^2 \text{ ist gerade}}_{\text{Aussage } A} \Rightarrow \underbrace{n \text{ ist gerade}}_{\text{Aussage } B} \qquad (*)$$

Beweis durch Kontraposition:

Wir zeigen:

$$\underbrace{n \text{ ist ungerade}}_{\neg B} \Rightarrow \underbrace{n^2 \text{ ist ungerade}}_{\neg A}$$

Sei n ungerade, d.h. $n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}$ (vgl. Def. d. Menge U)

$$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{\in \mathbb{N}}+1,$$

d.h. n^2 ist ungerade.

Damit ist die Implikation (*) gezeigt.

(3) Zeigen: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Beweis durch Widerspruch:

Annahme: $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl,

d.h. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ teilerfremd

$\Rightarrow m = \sqrt{2}\, n \quad \Rightarrow m^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow m^2$ ist gerade (vgl. Def. d. Menge G)

$\Rightarrow m$ ist gerade (siehe oben (2))

Somit: $m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \quad 2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

d.h. $n^2 = 2k^2$

siehe (2)

$\Rightarrow n^2$ ist gerade $\Rightarrow n$ ist gerade

$\Rightarrow n$ und m sind beide durch 2 teilbar

↯ Das ist ein Widerspruch da n, m teilerfremd (siehe Annahme)

Somit ist die Annahme falsch, d.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.