2. Vorlesung - Zahlen

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

20.10.2025

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} := \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$

Reelle Zahlen: $\mathbb{R} := \{x | x \text{ ist eine reelle Zahl}\}$

Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} \rightsquigarrow$ VL 3

Zusammenfassend:

Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$:

x kleiner y, x kleiner gleich y,

x größer y, x größer gleich y

Axiome für Ungleichungen

(A1) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau einer der Fälle $x < y$, $x > y$, oder $x = y$

(A2) Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$

(A3) Aus $x < y$ und $a \leq b$ folgt $x + a < y + b$

(A4) Aus $x < y$ und $a > 0$ folgt $ax < ay$

Weitere Eigenschaften

Definition: Sei $a \geq 0$. Dann ist die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Allgemein: $\sqrt[n]{a}$ ist eine Lösung der Gleichung $x^n = a$.

n gerade:

n ungerade:

Beispiel:

2.4 Absolutbetrag

Definition: Der Absolutbetrag einer reellen Zahl ist

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Beispiel:

Eigenschaften:

Pingo Umfrage

Finde alle $x \in \mathbb{R}$, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{2}{x} \leq 1$$

- $x \in [2, \infty[$
- $x \in]-\infty, 0[\cup [2, \infty[$
- $x \in]-\infty, 0] \cup [2, \infty[$
- $x \in \mathbb{R} \setminus]0, 2[$

Beispiel: Finde $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{2x}{x+2} > 1$

Beispiel: Finde $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| \leq 2x+5$

Definition: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

- Für $m \leq n$ ist $\sum\limits_{k=m}^{n} x_k := x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n$.
- Für $m > n$ ist $\sum\limits_{k=m}^{n} x_k := 0$.

Beispiele:

- $\sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=m}^{n} y_k = \sum_{k=m}^{n} (x_k + y_k).$
- $\sum_{k=m}^{n} a x_k = a \sum_{k=m}^{n} x_k.$
- $\sum_{k=m}^{n} x_k \sum_{l=p}^{q} y_l = \sum_{k=m,l=p}^{n,q} (x_k y_l).$
- $\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=m}^{p} x_k + \sum_{k=p+1}^{n} x_k$, falls $m \leq p \leq n$.
- $\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=m-1}^{n-1} x_{k+1}$ (Indexverschiebung)

Geometrische Summe: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{für} q \neq 1 \\ n+1 & \text{für} q = 1 \end{cases}$$

Beweis:

Pingo Umfrage

Es gilt $2^6 = 64$. Berechne $\sum_{k=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

- $\frac{63}{128}$
- $\frac{63}{64}$
- $\frac{63}{32}$
- 64

Definition: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

- Für $m \leq n$ ist $\prod\limits_{k=m}^{n} x_k := x_m \cdot x_{m+1} \ldots x_n.$
- Für $m > n$ ist $\prod\limits_{k=m}^{n} x_k := 1.$

Beispiel: