

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

1. Vorlesung: Grundlagen: Mengen und Logik

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Menge)

Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

$m \in M$: m ist ein Element von M

$m \notin M$: m ist kein Element von M

Hinweis

Bei Mengen kommt es nicht auf die Reihenfolge der Elemente an und jedes Element wird nur einmal gezählt.

Definition (Operationen mit Mengen)

Seien A, B Mengen.

- (1) A heißt **Teilmenge** von B (Schreibweise: $A \subseteq B$), falls jedes Element von A auch in B liegt, d.h.

$$A \subseteq B \quad :\Leftrightarrow \quad (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

- (2) Die Mengen A und B sind **gleich** (Schreibweise: $A = B$), wenn sie die gleichen Elemente haben, d.h.

$$A = B \quad :\Leftrightarrow \quad (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

- (3) Die **Vereinigungsmenge** (auch **Vereinigung**) von A und B ist

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

- (4) Die **Schnittmenge** (auch **Durchschnitt** oder **Schnitt**) von A und B ist

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Definition (Operationen mit Mengen (Fortsetzung))

- (5) Die **Differenzmenge** (auch **Differenz**) von A und B ist

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Diese Differenzmenge entsteht, indem man aus der Menge A alle Elemente von B entfernt.

- (6) Das **kartesische Produkt** von A und B ist die Menge aller (geordneten) Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$, d.h.

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Allgemeiner definiert man das kartesische Produkt der n Mengen A_1, \dots, A_n als

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i, i = 1, \dots, n\},$$

also als die Menge der geordneten n -Tupel.

Beispiele von Mengen: Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann heißen

$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall

$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ kompaktes bzw.
abgeschlossenes Intervall

$]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ offenes Intervall

$[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ halboffenes Intervall

$] - \infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ offenes Intervall

$] - \infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ halboffenes Intervall

Es gilt $] - \infty, +\infty[:= \mathbb{R}$ und

kompakt \Leftrightarrow abgeschlossen und beschränkt

Definition (Aussage)

Eine **Aussage** ist ein Satz, dem genau einer der beiden Wahrheitswerte „wahr“ (w) oder „falsch“ (f) zugeordnet werden kann.

Verknüpfungen von Aussagen

Seien A, B Aussagen.

- (1) Die **Negation** der Aussage A ist „nicht A “. Schreibweise: $\neg A$
Wahrheitstafel:

| A | $\neg A$ |
|-----|----------|
| w | f |
| f | w |

- (2) „ A und B “ Schreibweise: $A \wedge B$
„ A oder B “ Schreibweise: $A \vee B$
Wahrheitstafeln:

| A | B | $A \wedge B$ |
|-----|-----|--------------|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

| A | B | $A \vee B$ |
|-----|-----|------------|
| w | w | w |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

Verknüpfungen von Aussagen (Fortsetzung)

- (3) Die **Implikation** (Folgerung) $A \Rightarrow B$ (lies „aus A folgt B “ oder „wenn A , dann B “) ist wie folgt definiert:

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

- (4) Zwei Aussagen sind **äquivalent**, $A \Leftrightarrow B$, falls sie den gleichen Wahrheitswert haben:

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ |
|-----|-----|-----------------------|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | w |

Beweistechniken

(1) **Logisches Folgern** (auch **direkter Beweis**):

Wenn A wahr ist, und wir B aus A folgern, d.h. $A \Rightarrow B$ ist wahr, dann ist auch B wahr.

(2) **Kontraposition:**

$A \Rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr ist.

(3) **Beweis durch Widerspruch:**

Man nimmt an, dass die Aussage, die man zeigen möchte, falsch ist, und führt das zu einem Widerspruch.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

2. Vorlesung Zahlen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Erweiterung der natürlichen Zahlen

Erinnerung: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \rightarrow$ **Natürliche Zahlen**

Problem 1: In \mathbb{N} ist $x - y$ nicht immer definiert, z.B. $2 - 7 \notin \mathbb{N}$

Lösung: Definiere

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &:= \mathbb{N} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \text{Ganze Zahlen} \\ &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}\end{aligned}$$

Jetzt ist $x - y$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ definiert.

Problem 2: In \mathbb{Z} ist $\frac{x}{y}$ nicht immer definiert, z.B. $\frac{2}{7} \notin \mathbb{Z}$

Lösung: Definiere

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &:= \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, a, b \text{ teilerfremd} \right\} \\ &\rightarrow \text{Rationale Zahlen}\end{aligned}$$

z.B. $\frac{14}{8} = \frac{7}{4} \in \mathbb{Q}$ oder $\frac{2}{-7} = \frac{-2}{7} \in \mathbb{Q}$.

Jetzt ist $\frac{a}{b}$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $b \neq 0$ definiert.

Problem 3: In \mathbb{Q} ist z. B. $x^2 = 2$ nicht lösbar (Quadratwurzeln).

Lösung: Definiere

$$\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ ist eine Dezimalzahl}\}$$

→ **Reelle Zahlen**

Problem 4: In \mathbb{R} haben Gleichungen wie z.B. $x^2 = -1$ keine Lösung.

Lösung: Definiere

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit } i^2 = -1$$

→ **Komplexe Zahlen** (3. Vorlesung)

Zusammenfassend gilt:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

\mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} sind Körper → Alle Grundrechenarten durchführbar.

Darstellung als Dezimalzahl

Die rationale Zahlen \mathbb{Q} lassen sich als abbrechende oder periodische Dezimalzahlen schreiben:

$$\frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{1}{3} = 0.\bar{3} = 0.3333333 \dots,$$

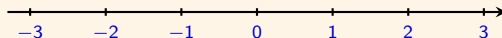
$$\frac{22}{7} = 3.\overline{142857} = 3.142857142857142857142857 \dots$$

Die reelle Zahlen \mathbb{R} enthalten auch nicht abbrechende, nicht periodische Dezimalzahlen:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095048801688724209 \dots$$

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279 \dots$$

Jede reelle Zahl entspricht einem Punkt der Zahlengeraden und jeder Punkt auf der Zahlengeraden ist eine reelle Zahl:



Fazit: \mathbb{Q} hat „Löcher“, \mathbb{R} hat keine „Löcher“.

Wir haben auf \mathbb{R} eine Ordnungsrelation:

$x < y$: „ x kleiner y “ $x \leq y$: „ x kleiner gleich y “

$x > y$: „ x größer y “ $x \geq y$: „ x größer gleich y “

Genauer:

$$x \leq y : \Longleftrightarrow x < y \text{ oder } x = y$$

$$x > y : \Longleftrightarrow y < x.$$

Grundregeln (Axiome)

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) Es gilt genau einer der drei Fälle: $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.
- (2) Sind $x < y$ und $y < z$, so folgt $x < z$.
- (3) Sind $x < y$ und $a \leq b$, so folgt $x + a < y + b$.
- (4) Sind $x < y$ und $0 < a$, so folgt $ax < ay$.

Die Axiome (2)–(4) gelten jeweils auch, wenn man überall „ $<$ “ durch „ \leq “ ersetzt.

Weitere Rechenregeln

Für alle $x, y, a \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

- (1) Für $x < 0$ ist $-x > 0$. Für $x > 0$ ist $-x < 0$.
- (2) Allgemeiner: Multiplikation mit einer negativen Zahl ändert die „Richtung“ einer Ungleichung:
Ist $x < y$ und $a < 0$, so ist $ax > ay$.
- (3) Für $x \neq 0$ ist $x^2 > 0$. Insbesondere sind Quadrate reeller Zahlen nichtnegativ.
- (4) Allgemeiner gilt:
 - Ist $x > 0$, so folgt $x^n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
 - Ist $x < 0$, so ist $x^n \begin{cases} > 0 & \text{für alle geraden } n \in \mathbb{N} \\ < 0 & \text{für alle ungeraden } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Beispiel: Für $x = -3$ ist $x^2 = (-3)^2 = 9 > 0$, aber
 $x^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3) \cdot 9 = -27 < 0$

Definition (Quadratwurzel, n -te Wurzel)

Sei $a \geq 0$. Dann ist die **Quadratwurzel** oder kurz **Wurzel** \sqrt{a} die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Die n -te **Wurzel** von a , geschrieben $\sqrt[n]{a}$, ist wie folgt definiert:

- (1) Für gerades $n \geq 2$ und $a \geq 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ die nichtnegative Lösung von $x^n = a$.
- (2) Für ungerades $n \geq 1$ und reelles a ist $\sqrt[n]{a}$ die reelle Lösung von $x^n = a$.
Ist $a \geq 0$, so ist $\sqrt[n]{a} \geq 0$.
Ist $a < 0$, so ist $\sqrt[n]{a} < 0$.

Beispiel

Für $n = 3$ und $a = 8$ ist $\sqrt[3]{8} = 2$.

Für $n = 3$ und $a = -8$ ist $\sqrt[3]{-8} = -2$, denn $(-2)^3 = -8$.

Definition (Absolutbetrag)

Der **Absolutbetrag** oder kurz **Betrag** einer reellen Zahl ist definiert als

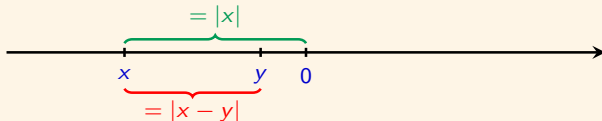
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Somit: $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Betrag entfernt also negative Vorzeichen.

Interpretation

$|x|$ ist der Abstand von x zum Ursprung (=Nullpunkt) der Zahlengerade.

$|x - y|$ ist der Abstand von x und y auf der Zahlengerade.



Eigenschaften des Betrags

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(1) -|x| \leq x \leq |x|;$$

$$(2) |x| = 0 \iff x = 0;$$

$$(3) |xy| = |x||y|, \text{ insbesondere } |-x| = |(-1) \cdot x| = |-1||x| = |x|;$$

$$(4) |x| = \sqrt{x^2},$$

$$(5) \text{Dreiecksungleichung: } |x + y| \leq |x| + |y|;$$

$$(6) \text{Umgekehrte Dreiecksungleichung: } ||x| - |y|| \leq |x \pm y|.$$

Definition (Summenzeichen)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

(1) Für $m \leq n$ ist

$$\sum_{k=m}^n x_k := x_m + x_{m+1} + \dots + x_n.$$

Lies: „Summe der x_k für k von m bis n “.

(2) Für $m > n$, d.h. die obere Grenze ist kleiner als die untere Grenze der Summe, ist

$$\sum_{k=m}^n x_k := 0$$

und wir sprechen von der **leeren Summe**.

Rechenregeln für das Summenzeichen

$$(1) \quad \sum_{k=m}^n x_k + \sum_{k=m}^n y_k = \sum_{k=m}^n (x_k + y_k),$$

$$(2) \quad \sum_{k=m}^n ax_k = a \sum_{k=m}^n x_k,$$

$$(3) \quad \sum_{i=m}^n x_i \sum_{j=p}^q y_j = \sum_{i=m}^n \sum_{j=p}^q x_i y_j = \sum_{j=p}^q \sum_{i=m}^n x_i y_j = \sum_{\substack{i=m, \dots, n \\ j=p, \dots, q}} x_i y_j,$$

$$(4) \quad \sum_{k=m}^n x_k = \sum_{\mu=m}^n x_{\mu} = \sum_{i=m}^n x_i,$$

$$(5) \quad \sum_{k=m}^n x_k = \sum_{k=m}^p x_k + \sum_{k=p+1}^n x_k, \quad \text{falls } m \leq p \leq n,$$

$$(6) \quad \sum_{k=m}^n x_k = \sum_{k=m-1}^{n-1} x_{k+1}, \quad (\text{Indexverschiebung}).$$

Geometrische Summe

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n q^k &= q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n \\ &= 1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n\end{aligned}$$

die **geometrische Summe**.

Berechnung der geometrischen Summe

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{für } q \neq 1, \\ n + 1 & \text{für } q = 1. \end{cases}$$

Definition (Produktzeichen)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

(1) Für $m \leq n$ definiert man

$$\prod_{k=m}^n x_k := x_m \cdot x_{m+1} \cdot \dots \cdot x_n.$$

(2) Falls $m > n$, definiert man das **leere Produkt** als

$$\prod_{k=m}^n x_k := 1.$$

Definition (Fakultät)

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir n **Fakultät** durch $n! := \prod_{k=1}^n k$.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

3. Vorlesung: Komplexe Zahlen 1

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Erinnerung an Problem 4 (letzte Vorlesung)

In \mathbb{R} haben Gleichungen wie z.B. $x^2 = -1$ keine Lösung.

Lösung: Komplexe Zahlen \mathbb{C}

Idee: Sei i eine Zahl mit $i^2 = -1 \rightarrow$ imaginäre Einheit

Definiere

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \text{Komplexe Zahlen}$$

Für komplexe Zahlen $a + ib$ und $c + id$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\text{Addition: } (a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d),$$

$$\begin{aligned} \text{Multiplikation: } (a + ib) \cdot (c + id) &:= ac + iad + ibc + \underbrace{i^2}_{=-1} bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

Jetzt kann $x^2 = -1$ in \mathbb{C} gelöst werden: $x_1 = i$ und $x_2 = -i$

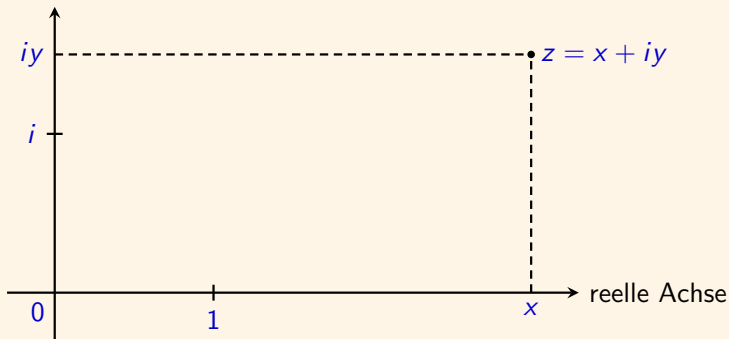
Bemerkungen

- Das Rechnen mit komplexen Zahlen ist genauso einfach wie das Rechnen mit reellen Zahlen, man beachte nur, dass $i^2 = -1$ gilt.
- Schreibweisen:
 - Anstatt $x + iy$ schreiben wir auch $x + yi$,
 - $x + i0 = x$ ist reell,
 - $0 + iy = iy$ ist eine **rein imaginäre Zahl**,
 - $2 + 1i = 2 + i$,
 - $3 + (-2)i = 3 - 2i$.
- Wegen $z = x + i0 = x$ gilt $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, d.h. \mathbb{C} ist eine Erweiterung von \mathbb{R} . Es wird sich zeigen, dass in \mathbb{C} nicht nur $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung hat, sondern **jede** quadratische Gleichung.
- Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Gaußsche Zahlenebene

- Benannt nach dem Mathematiker Carl-Friedrich Gauß (1777–1855)
- Idee: Komplexe Zahlen werden als Punkte der Ebene verstanden, die die reelle Zahlengerade enthält. Für eine komplexe Zahl $x + iy$ nennt man (x, y) die **kartesischen Koordinaten**.

imaginäre Achse



Definition (Realteil, Imaginärteil, Konjugierte, Absolutbetrag)

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

- (1) $\operatorname{Re}(z) := x$ heißt der **Realteil** von z ;
- (2) $\operatorname{Im}(z) := y \in \mathbb{R}$ heißt der **Imaginärteil** von z ;
- (3) $\bar{z} := x - iy$ heißt die zu z (**komplex**) **Konjugierte**
(lies \bar{z} als „ z komplex konjugiert“ oder „ z quer“);
- (4) $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ heißt der **Absolutbetrag** oder kurz **Betrag** von z .

Rechenregeln für die Konjugation

Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(1) \quad \overline{\overline{z}} = z,$$

$$(2) \quad z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

$$(3) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$(4) \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

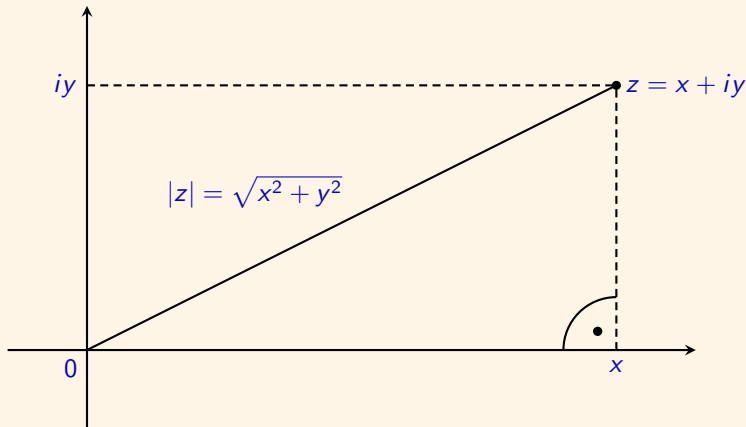
$$(5) \quad \overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}} \text{ für } z \neq 0,$$

$$(6) \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),$$

$$(7) \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Geometrische Interpretation des Betrages

Der Betrag $|z|$ ist Abstand zwischen $z = x + iy$ und 0 in der Gaußschen Zahlenebene. Analog: $|z - w|$ Abstand von z und w .



Rechenregeln für den Betrag

Für komplexe Zahlen z, z_1, z_2 gilt:

$$(1) |z| = \sqrt{z\bar{z}} \geq 0,$$

$$(2) |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

$$(3) \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ für } z_2 \neq 0,$$

$$(4) \text{Dreiecksungleichung: } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

4. Vorlesung: Vollständige Induktion

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Vollständige Induktion

Beweise eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ (also ab einem Startwert n_0). Vorgehen:

- (1) **Induktionsanfang (IA):** Wir zeigen, dass $A(n_0)$ gilt.
- (2) **Induktionsschritt (IS):** Wir zeigen „ $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ “, also dass wenn $A(n)$ wahr ist, auch $A(n+1)$ wahr ist.

Anschließend ist die Aussage für alle $n \geq n_0$ gezeigt.

Unterteilung Induktionsschritt

- (1) **Induktionsvoraussetzung (IV):** Wir nehmen an, dass $A(n)$ für ein $n \geq n_0$ richtig ist.
- (2) **Induktionsbehauptung (IB):** „Dann gilt auch $A(n+1)$ “,
- (3) eigentlicher **Induktionsschritt** (auch **Induktionsschluss** genannt): Zeige die Induktionsbehauptung unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung

Bernoulli-Ungleichung

Sei x eine reelle Zahl mit $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Definition (Binomialkoeffizient)

Für $n, k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n$ definieren wir den **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Lies $\binom{n}{k}$ als „ n über k “

Andere Schreibweise

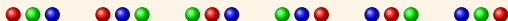
Für $n, k \in \mathbb{N}$ und $0 < k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j}.$$

Fakultät

Anzahl der Möglichkeiten, n Objekte, die alle unterscheidbar sind, anzuordnen: $n!$

Z.B. gibt es $3! = 6$ mögliche Anordnungen von drei verschiedenfarbigen Kugeln in einer Reihe:



Anzahl der Möglichkeiten k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln zu ziehen

| | Reihenfolge relevant | Reihenfolge irrelevant |
|--------------------------|----------------------|------------------------|
| mit Zurück- legen | n^k | $\binom{n+k-1}{k}$ |
| ohne Zurück- legen | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | $\binom{n}{k}$ |

Anzahl der Möglichkeiten k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln zu ziehen: Beispiele mit $n = 4$ und $k = 2$

| | Reihenfolge relevant | Reihenfolge irrelevant |
|--------------------------|--|--|
| mit Zurück- legen | $n^k = 4^2 = 16$ Urne: ①②③④ ①①, ①②, ①③, ①④ ②①, ②②, ②③, ②④ ③①, ③②, ③③, ③④ ④①, ④②, ④③, ④④ | $\binom{n+k-1}{k} = \binom{4+2-1}{2} = 10$ Urne: ①②③④ ①①, ①②, ①③, ①④ ②②, ②③, ②④ ③③, ③④ ④④ |
| ohne Zurück- legen | $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ Urne: ①②③④ ①②, ①③, ①④ ②①, ②③, ②④ ③①, ③②, ③④ ④①, ④②, ④③ | $\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = 6$ Urne: ①②③④ ①②, ①③, ①④ ②③, ②④, ③④ |

Lotto 6 aus 49

$\binom{49}{6} = 13.983.816$ verschiedene Möglichkeiten → lohnt sich nicht :)

Rechenregeln für Binomialkoeffizienten

Seien $k, n \in \mathbb{N}$.

(1)

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

(2) Für alle $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

da

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \underbrace{(n-(n-k))!}_{=k!}} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

(3) Für alle $1 \leq k \leq n$ gilt die Rekursionsformel

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Binomischer Lehrsatz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und reelle oder komplexe a, b gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Beweis: mittels vollständiger Induktion

Beispiel für eine falsche Induktion

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Induktionsanfang:

Für $n_0 = 1$ und $a_1 \in \mathbb{R}$ gilt $a_1 = a_1 \Rightarrow$ Aussage wahr

Induktionsvoraussetzung:

Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Induktionsbehauptung:

Dann gilt die Aussage auch für $n + 1$.

Induktionsbeweis:

Seien $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n \quad \text{und} \quad a_2 = a_3 = \dots = a_{n+1},$$

da dies jeweils n Zahlen sind. Dann folgt

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_{n+1}.$$

Wo liegt der Fehler ?

Der Induktionsbeweis selbst ist korrekt, allerdings benötigt dieser mindestens 2 Zahlen, d.h. der Induktionsbeweis funktioniert nur für $n \geq 2$. Dann funktioniert der Induktionsanfang aber nicht.

Die obige Aussage gilt im Allgemeinen nicht!

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

5. Vorlesung: Abbildungen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Abbildung, Definitionsbereich, Wertebereich)

Seien A, B Mengen. Eine **Abbildung** f von A nach B ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y = f(x) \in B$ zuordnet.

- (1) Falls $B = \mathbb{R}$ oder $B = \mathbb{C}$ so sagt man oft **Funktion** anstatt Abbildung.
- (2) Man nennt A den **Definitionsbereich** und B den **Wertebereich** von f .
- (3) Schreibweisen: $f: A \rightarrow B$, $x \mapsto y$ oder $f: A \rightarrow B$, $f(x) = y$.

Beispiel:

$f: A \rightarrow B$ mit

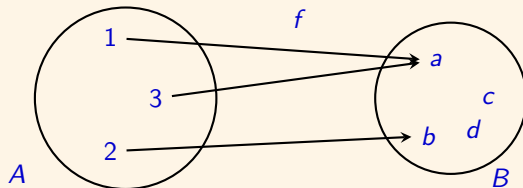
$A = \{1, 2, 3\}$,

$B = \{a, b, c, d\}$,

$f(1) = a$,

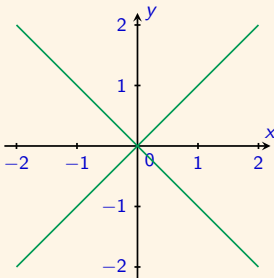
$f(2) = b$,

$f(3) = a$



Weitere Beispiele für Abbildungen

- (1) $\pm x$ ist keine Abbildung, denn zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existieren zwei y -Werte.



- (2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist eine Abbildung, auch wenn $f(2) = 4$ und $f(-2) = 4$. Verschiedene x -Werte dürfen denselben y -Wert (Funktionswert) haben.
- (3) Sei A eine Menge. Dann heißt

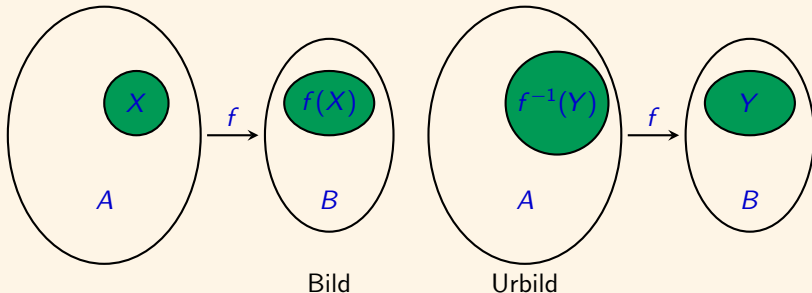
$$\text{id}_A: A \rightarrow A, \quad a \mapsto a$$

die **Identität** oder **identische Abbildung**.

Definition (Bild, Urbild)

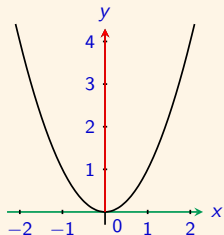
Sei $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung.

- (1) Für $X \subseteq A$ heißt $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$ das **Bild** von X unter f . Insbesondere ist $f(X) \subseteq B$.
Speziell heißt $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ das **Bild von f** .
- (2) Für $Y \subseteq B$ heißt $f^{-1}(Y) := \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ das **Urbild** von Y unter f . Insbesondere ist $f^{-1}(Y) \subseteq A$.

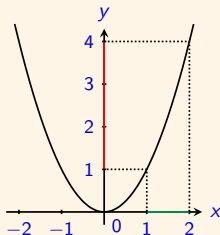


Beispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

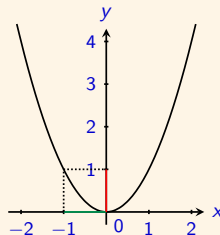
$$f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$$



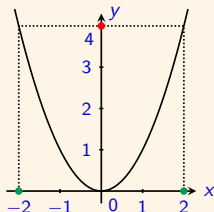
$$f([1, 2]) = [1, 4]$$



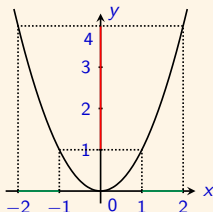
$$f([-1, 0]) = [0, 1]$$



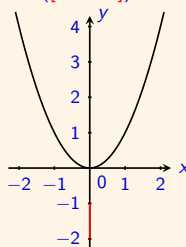
$$f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$$



$$f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$$



$$f^{-1}([-2, -1]) = \emptyset$$



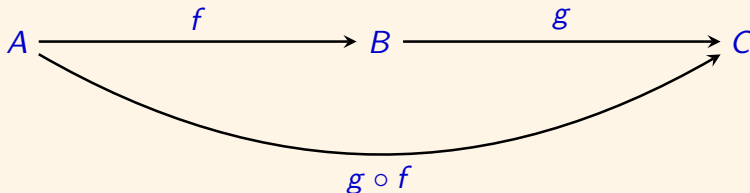
Definition (Komposition/Verkettung von Abbildungen)

Für Abbildungen $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ heißt die Abbildung

$$g \circ f: A \rightarrow C, \quad x \mapsto g(f(x))$$

die **Komposition** oder **Verkettung** von f und g .

Man liest $g \circ f$ als „ g nach f “ oder als „ g Kringel f “.



Definition (injektiv, surjektiv, bijektiv)

Sei $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung.

- (1) f heißt **injektiv**, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Äquivalent dazu ist (Kontraposition):

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

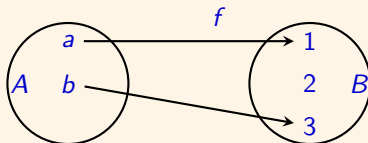
Ist f injektiv, so wird jedes Element aus B von höchstens einem Punkt aus erreicht.

- (2) f heißt **surjektiv**, falls $f(A) = B$ ist, d.h. falls zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $y = f(x)$.

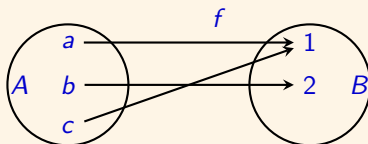
Ist f surjektiv, so wird jeder Punkt y in B erreicht.

- (3) f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

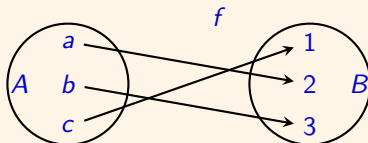
Beispiele



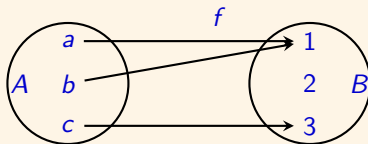
Jedes Element des Wertebereichs hat höchstens ein Urbild. f ist injektiv, aber nicht surjektiv.



Jedes Element des Wertebereichs wird erreicht. f ist surjektiv, aber nicht injektiv.



f ist injektiv und surjektiv. Also ist f auch bijektiv.



f ist weder injektiv noch surjektiv

Definition (Umkehrabbildung, Inverse)

Ist $f: A \rightarrow B$ injektiv, so gibt es zu jedem $y \in f(A)$ genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y$, für das wir $x = f^{-1}(y)$ schreiben.

Damit können wir die **Umkehrabbildung** (oder **Inverse**) bilden:

$$f^{-1}: f(A) \rightarrow A, \quad y \mapsto f^{-1}(y).$$

Die Umkehrabbildung macht also f „rückgängig“, und es gelten

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in A,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{für alle } y \in f(A).$$

Kurzschreibweise: $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_{f(A)}$.

Man erhält $f^{-1}(y)$ durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x .

Ist f injektiv und surjektiv (also bijektiv), so ist $f(A) = B$ und der Definitionsbereich von f^{-1} ist ganz B .

Verwechslungsgefahr

f^{-1} bezeichnet also einmal das Urbild (kann man immer angeben) und zum anderen die Umkehrabbildung (welche nicht immer existiert). Am Argument erkennt man die richtige Bezeichnung.

Sei $f: A \rightarrow B$ und sei $y \in B$. Dann gilt

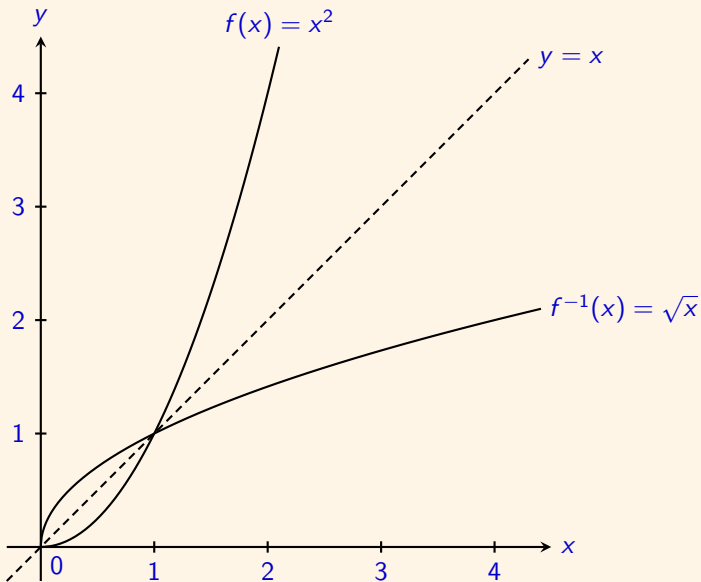
$f^{-1}(\{y\})$ ist das Urbild von der Menge $\{y\}$ unter f .

$f^{-1}(y)$ ist das Bild der Umkehrabbildung von f an der Stelle y .

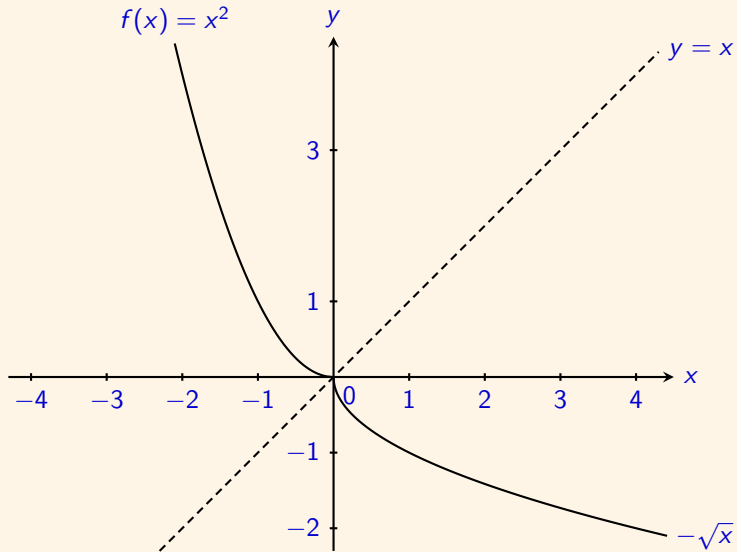
Bemerkung

Wir erhalten die Umkehrabbildung einer reellen Funktion durch Spiegeln des Funktionsgraphen an der Winkelhalbierenden $y = x$.

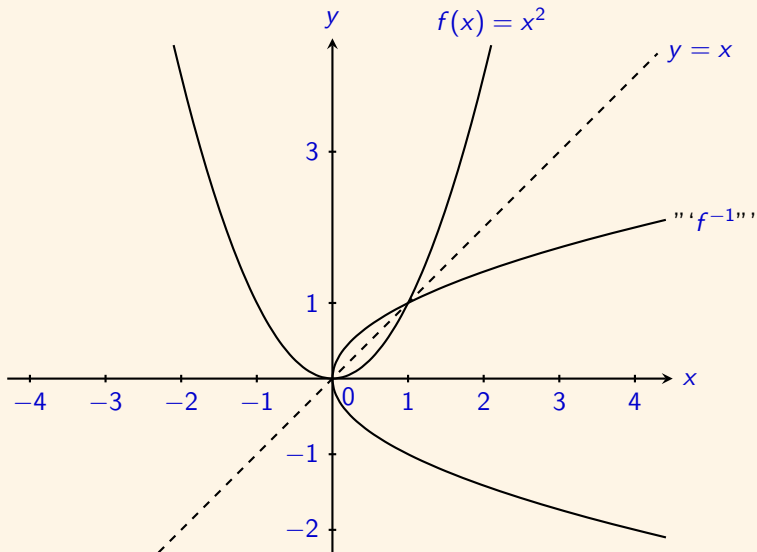
$f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist injektiv $\Rightarrow f^{-1}: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, x \mapsto \sqrt{x}$



$f:]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist injektiv $\Rightarrow f^{-1}: [0, \infty[\rightarrow]-\infty, 0], x \mapsto -\sqrt{x}$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv \Rightarrow „ f^{-1} “ ist keine Funktion



Definition (gerade und ungerade Funktionen)

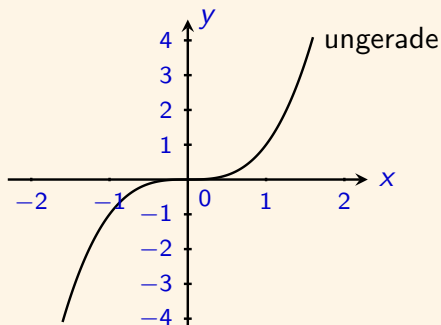
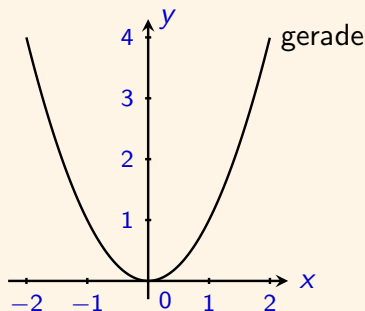
Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- (1) **gerade**, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
- (2) **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Gerade Funktionen sind spiegelsymmetrisch zur y -Achse.

Ungerade Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

(punktsymmetrisch: Drehung um $180^\circ \rightarrow$ Gleiche Funktion)



Definition (Monotonie von Funktionen)

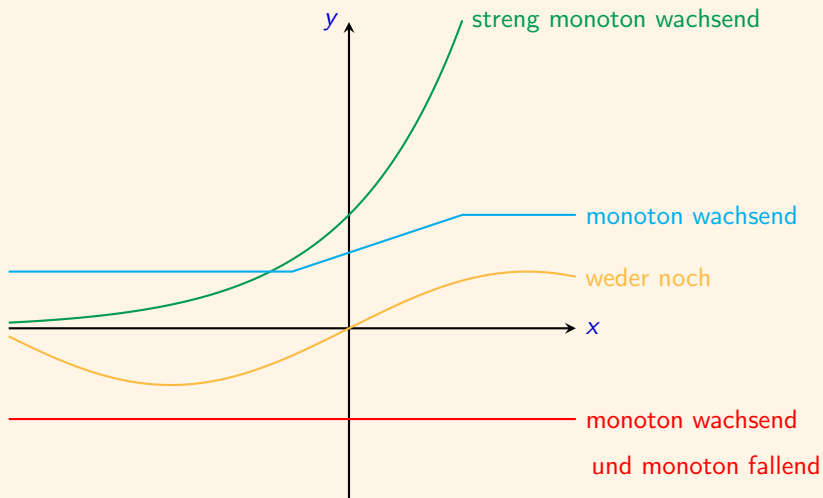
Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt

- (1) f **streng monoton wachsend**, wenn aus $x, y \in A$ mit $x < y$ folgt, dass $f(x) < f(y)$ ist;
- (2) f **monoton wachsend**, wenn aus $x, y \in A$ mit $x < y$ folgt, dass $f(x) \leq f(y)$ ist;
- (3) f **streng monoton fallend**, wenn aus $x, y \in A$ mit $x < y$ folgt, dass $f(x) > f(y)$ ist;
- (4) f **monoton fallend**, wenn aus $x, y \in A$ mit $x < y$ folgt, dass $f(x) \geq f(y)$ ist.

Strenge Monotonie impliziert Injektivität

Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton. Dann ist f injektiv und damit $f: A \rightarrow f(A)$ umkehrbar.

Beispiele für Monotonie



Definition (Beschränktheit von Funktionen)

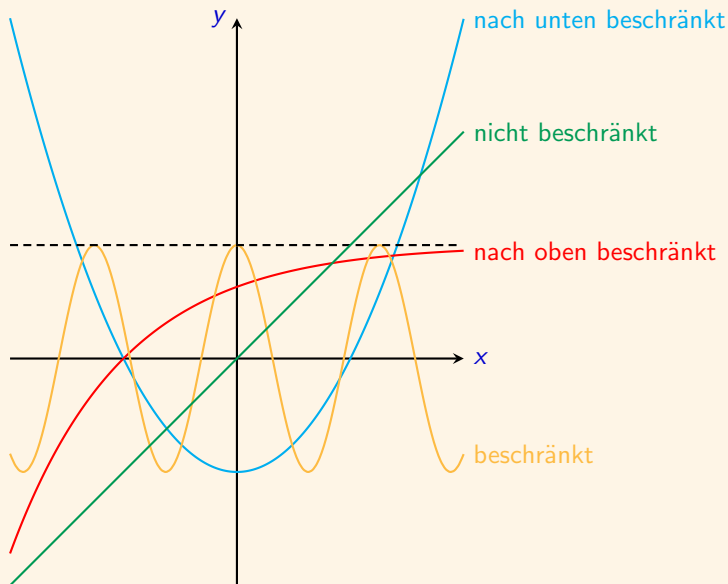
Eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- (1) **nach oben beschränkt**, wenn eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) \leq M$ für alle $x \in A$;
- (2) **nach unten beschränkt**, wenn eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) \geq m$ für alle $x \in A$;
- (3) **beschränkt**, wenn f nach oben und nach unten beschränkt ist, also wenn es $m, M \in \mathbb{R}$ gibt mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in A$.

Bemerkung

Für Beschränktheit genügt es zu zeigen, dass es ein $M \geq 0$ gibt mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in A$.

Beispiele für Beschränktheit



Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

6. Vorlesung: Elementare Funktionen 1

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Eigenschaften der Exponentialfunktion

Für die Exponentialfunktion gilt:

- (1) $e^0 = 1$.
- (2) Funktionalgleichung: $e^{x+y} = e^x e^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- (3) $e^x \neq 0$ und $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (4) $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (5) \exp ist streng monoton wachsend.
- (6) $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ ist bijektiv.

Der Beweis wird in Vorlesung 26 gezeigt.

Eigenschaften des Logarithmus'

Für den Logarithmus gilt:

(1) $\ln(1) = 0$.

(2) Funktionalgleichung: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$.

(3) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ für alle $x > 0$.

(4) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ für alle $x, y > 0$.

(5) $\ln(x^n) = n \ln(x)$ für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$.

(6) \ln ist streng monoton wachsend.

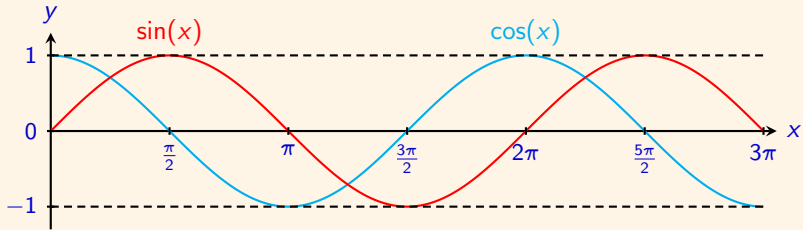
(7) $\ln:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv.

Eigenschaften von Sinus und Cosinus

Es gelten für alle $x \in \mathbb{R}$:

- (1) $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ und $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- (2) $\cos(-x) = \cos(x)$, d.h. der Cosinus ist eine gerade Funktion.
- (3) $\sin(-x) = -\sin(x)$, d.h. der Sinus ist eine ungerade Funktion.
- (4) Trigonometrischer Pythagoras: $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.
- (5) $\cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$ und $\sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$ für $k \in \mathbb{Z}$,
d.h. \cos und \sin sind 2π -periodische Funktionen.
- (6) $\cos(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots$
- (7) $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$

Sinus und Cosinus



Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y),$$

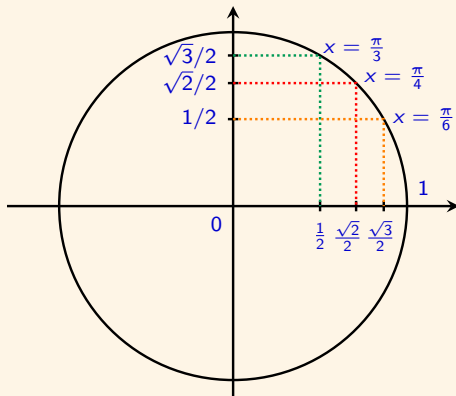
$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y).$$

Der Beweis wird in Vorlesung 27 gezeigt.

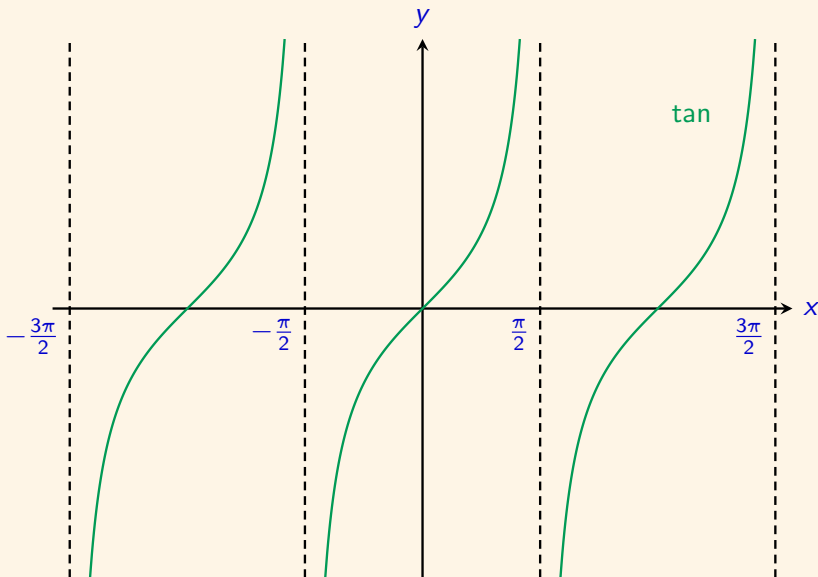
Wertetabelle für den Sinus und den Cosinus

| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|-----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |

Die Werte können leicht abgelesen werden:



$\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$ (Tangens)



Sinusschwingung: Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung

Wir betrachten eine sogenannte Sinusschwingung, also eine Funktion der Form

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto A \sin(\omega x - \varphi),$$

wobei

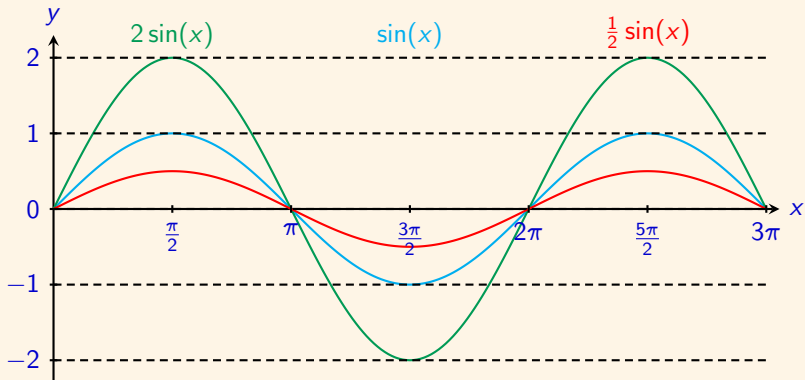
- A die Amplitude,
- ω die Frequenz,
- φ die Phasenverschiebung

der Sinusschwingung ist.

Was passiert mit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für unterschiedliche Werte für A , ω und/oder φ ?

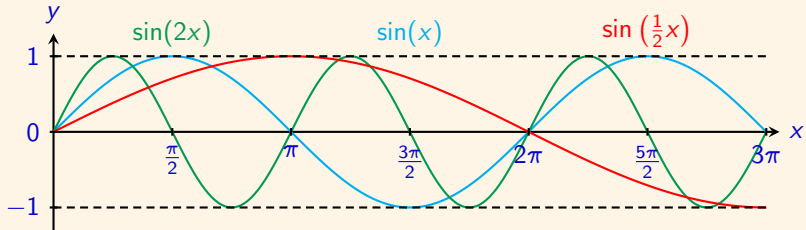
Sinusschwingungen mit verschiedenen Amplituden

$A \sin(x)$ ist eine Streckung oder Stauchung von $\sin(x)$ in y -Richtung:



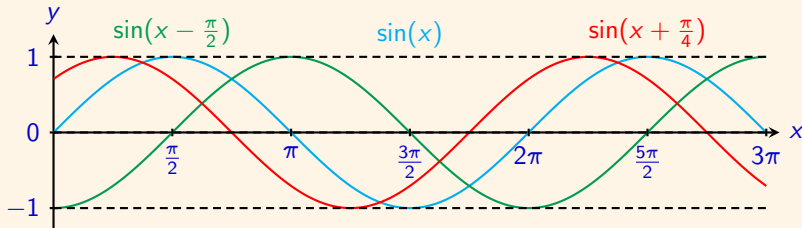
Sinusschwingungen mit verschiedenen Frequenzen

$\sin(\omega x)$ ist eine Streckung oder Stauchung von $\sin(x)$ in x -Richtung:



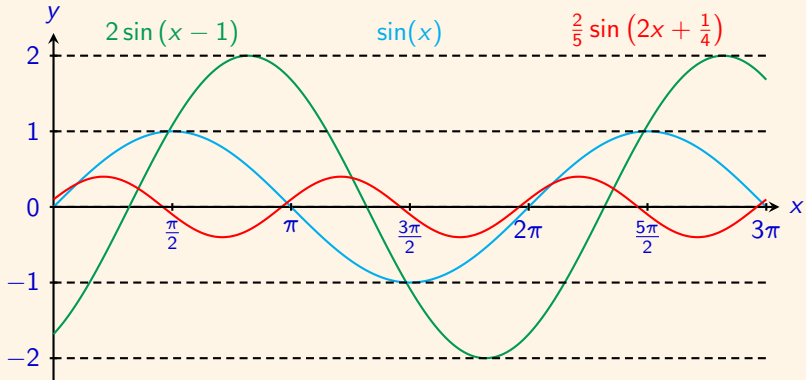
Sinusschwingungen mit verschiedenen Phasenverschiebungen

$\sin(x - \varphi)$ ist eine Verschiebung des Funktionsgraphen entlang der x -Achse:



Sinusschwingungen mit verschiedenen Parametern

Alle drei Parameter sind unterschiedlich:



Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

7. Vorlesung: Komplexe Zahlen 2

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Wiederholung

Komplexe Zahlen sind definiert als

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

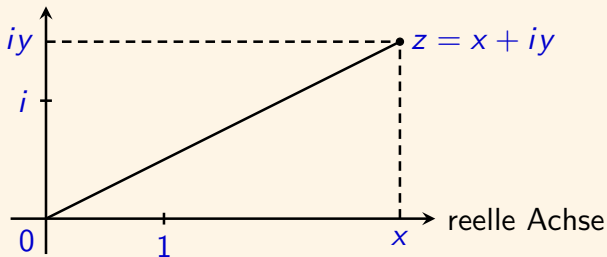
wobei i die imaginäre Einheit ist, d.h. $i^2 = -1$.

Kartesische Darstellung:

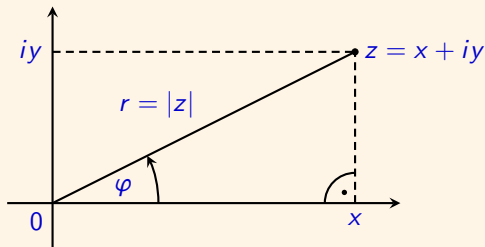
$$z = x + iy$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$.

imaginäre Achse



Herleitung der Polarkoordinaten



Es gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \cdot \sin(\varphi), \quad \cos(\varphi) = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cdot \cos(\varphi).$$

Damit ist:

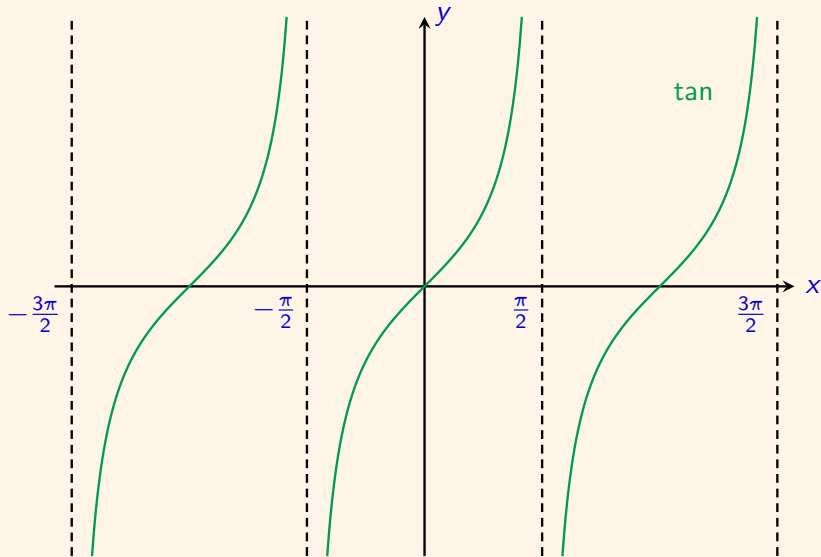
$$z = x + iy = r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi) = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)),$$

wobei

- $r = |z|$ der **Betrag** von z ist (Abstand zu 0).
- $\varphi = \arg(z)$ das **Argument** von z ist. Das ist der Winkel zwischen z und der positiven reellen Achse (im Bogenmaß gemessen). Das Argument ist eindeutig bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π .

Wiederholung Tangens:

$$\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$$



Periodizität des Tangens'

Es gilt: $\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist π -periodisch, d.h. für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\tan(\varphi + k\pi) = \tan(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \tilde{k}\pi \mid \tilde{k} \in \mathbb{Z} \right\},$$

denn:

$$\sin(\varphi + \pi) = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{VL 6}}{=} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{VL 6}}{=} -\sin(\varphi),$$

$$\cos(\varphi + \pi) = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{VL 6}}{=} -\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{VL 6}}{=} -\cos(\varphi).$$

Also ist

$$\tan(\varphi + \pi) = \frac{\sin(\varphi + \pi)}{\cos(\varphi + \pi)} = \frac{-\sin(\varphi)}{-\cos(\varphi)} = \tan(\varphi).$$

Somit ist der Tangens nicht injektiv, also auch nicht umkehrbar.

Zusammenfassung: Berechnung von r und φ

Gegeben: $z = x + iy \neq 0$ in kartesischer Darstellung

Gesucht: $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$, also z in Polardarstellung

Dann gilt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{falls } x > 0, \quad (1. \text{ und } 4. \text{ Quadrant}) \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{falls } x < 0, \quad (2. \text{ und } 3. \text{ Quadrant}) \\ +\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0, y > 0, \quad (\text{auf positiver } y\text{-Achse}) \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0, y < 0. \quad (\text{auf negativer } y\text{-Achse}) \end{cases}$$

Hier: $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Hinweis: φ und $\varphi + 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ beschreiben den gleichen Winkel (z.B. $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$)

Abkürzung der Schreibweise: Euler-Formel (Nachweis in VL 26)

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Mit der Euler-Formel können wir eine komplexe Zahl schreiben als

$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}.$$

Die Schreibweise $re^{i\varphi}$ heißt auch **Eulerdarstellung** von z .

Beispiele von den Mitschriften unter Verwendung der Euler-Formel

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = -1 - i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$z_3 = -1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_4 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Multiplikation mit Polardarstellung

Seien

$$z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)), \quad z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2))$$

zwei komplexe Zahlen in Polardarstellung. Dann gilt

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Vorteile der Euler- und Polardarstellungen

Potenzen von komplexen Zahlen lassen sich sehr leicht darstellen:

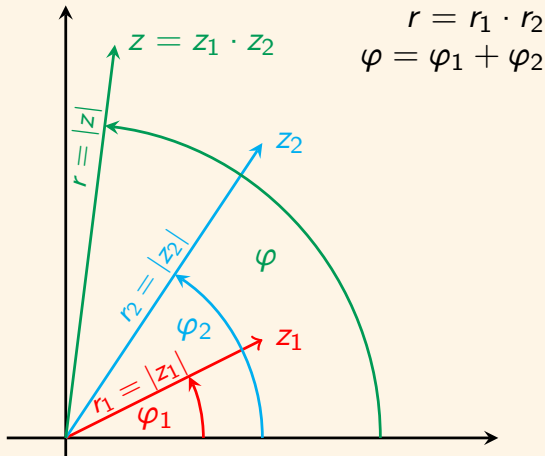
$$z^{243} = (re^{i\varphi})^{243} = r^{243} e^{i243\varphi}.$$

Zum Vergleich: In kartesischer Darstellung hätte man

$$z^{243} = (x + iy)^{243} = \dots ?$$

Selbst mittels des Binomischen Lehrsatzes (Vorlesung 4, Folie 38) ist dies sehr kompliziert.

Geometrische Interpretation der Multiplikation in Polarkoordinaten



Bei der Multiplikation von zwei komplexen Zahlen in Polarkoordinaten multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Argumente (=Winkel).

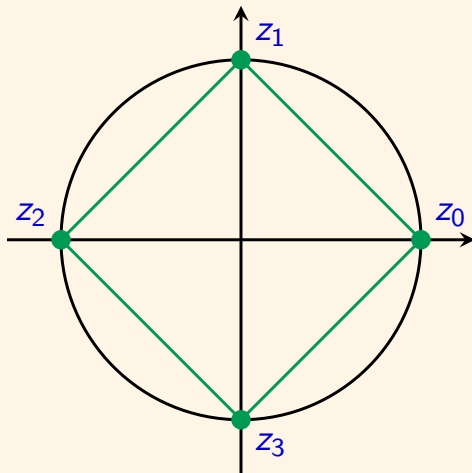
Lösungen von $z^n = 1$ für $n = 4$:

$$z_0 = 1e^{i0} = 1,$$

$$z_1 = 1e^{i\frac{2\pi}{4}1} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i,$$

$$z_2 = 1e^{i\frac{2\pi}{4}2} = e^{i\pi} = -1,$$

$$z_3 = 1e^{i\frac{2\pi}{4}3} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$



Lösungen von $z^n = 1$ für $n = 5$:

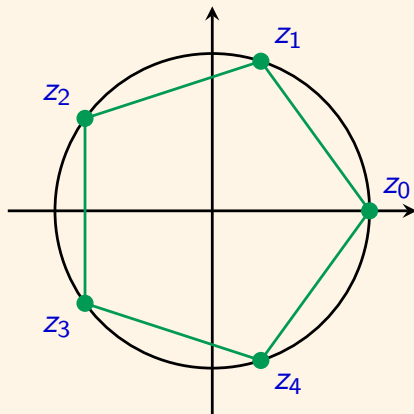
$$z_0 = 1e^{i0} = 1,$$

$$z_1 = 1e^{j\frac{2\pi}{5}1} = e^{j\frac{2\pi}{5}},$$

$$z_2 = 1e^{j\frac{2\pi}{5}2} = e^{j\frac{4\pi}{5}},$$

$$z_3 = 1e^{j\frac{2\pi}{5}3} = e^{j\frac{6\pi}{5}},$$

$$z_4 = 1e^{j\frac{2\pi}{5}4} = e^{j\frac{8\pi}{5}}.$$



Lösungen von $z^n = 1$ für $n = 6$:

$$z_0 = 1e^{i0} = 1,$$

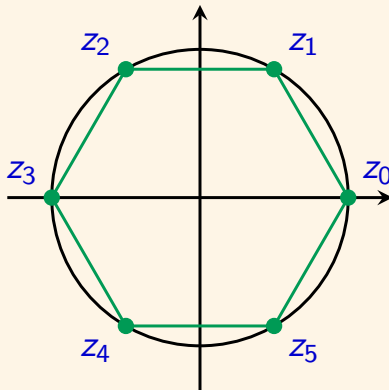
$$z_1 = 1e^{i\frac{2\pi}{6}1} = e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$z_2 = 1e^{i\frac{2\pi}{6}2} = e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

$$z_3 = 1e^{i\frac{2\pi}{6}3} = e^{i\pi} = -1,$$

$$z_4 = 1e^{i\frac{2\pi}{6}4} = e^{i\frac{4\pi}{3}},$$

$$z_5 = 1e^{i\frac{2\pi}{6}5} = e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$



Wir suchen die Lösungen der Gleichung $z^2 + pz + q = 0$

Jetzt: $p, q \in \mathbb{C}$ (anstatt $p, q \in \mathbb{R}$, vgl. Vorlesung 3)

Die Gleichung hat immer die beiden Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Wie ist das Wurzelzeichen zu verstehen? Sei $d = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ die Diskriminante. Folgende Fälle können auftreten.

- 1. Fall: Ist $d = 0$, so ist $z_1 = z_2$ (doppelte Nullstelle).
- 2. Fall: Ist d reell und $d > 0$, so ist \sqrt{d} die gewöhnliche reelle Quadratwurzel. Falls $d < 0$, so schreiben wir $\sqrt{d} = i\sqrt{-d}$.
- 3. Fall: Ist d komplex, so sind die beiden Wurzeln „ $\pm\sqrt{d}$ “ die beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = d$, also

$$\sqrt{|d|}e^{i\frac{\arg(d)}{2}} \quad \text{und} \quad \sqrt{|d|}e^{i\left(\frac{\arg(d)}{2} + \pi\right)} = -\sqrt{|d|}e^{i\frac{\arg(d)}{2}},$$

die sich nur um das Vorzeichen unterscheiden (vgl. das Beispiel $z^2 = 4i$ in der Mitschrift oder im Skript).

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

8. Vorlesung: Polynome

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Polynom, Koeffizient, reelles Polynome, Grad)

(1) Ein **Polynom** p hat die Form

$$p(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = \sum_{k=0}^n a_k z^k,$$

wobei $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Die a_k heißen die **Koeffizienten** des Polynoms.

Dadurch wird eine Funktion

$$p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

gegeben.

Sind alle a_k reell, nennt man p ein **reelles Polynom**.

Dann betrachten wir p als Funktion $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ oder

$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(2) Ist der höchste Koeffizient $a_n \neq 0$, so heißt n der **Grad** von p , in Zeichen $n = \deg(p)$. Sind alle Koeffizienten null, also p das Nullpolynom, so setzt man $\deg(p) = -\infty$.

Gradformel

Seien p, q Polynome. Dann gilt bei der Multiplikation

$$\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q).$$

Konvention

Beim Rechnen mit dem Grad von Polynomen vereinbaren wir Folgendes:

$$-\infty < n \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad -\infty + n = -\infty.$$

Division mit Rest

Sind p, q zwei Polynome und $q \neq 0$, so existieren Polynome r, s mit

$$p = sq + r \quad \text{und} \quad \deg(r) < \deg(q).$$

Dabei heißt r der **Divisionsrest** oder kurz **Rest**.

Ist der Rest gleich null, so ist $\frac{p}{q} = s$ ein Polynom und man sagt, die **Division geht auf** und q **teilt** p .

Überlegung

Sei p ein Polynom und sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p , d.h. $p(z_0) = 0$.

Idee: Spalte den Linearfaktor $z - z_0$ von p ab (Division mit Rest).

Abspalten von Nullstellen

Ist p ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$, so gibt es ein Polynom s vom Grad $n - 1$ mit

$$p(z) = (z - z_0)s(z).$$

Definition (Vielfachheit einer Nullstelle)

Die **Vielfachheit** der Nullstelle z_0 ist die Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$p(z) = (z - z_0)^k q(z),$$

wobei q ein Polynom mit $q(z_0) \neq 0$ ist.

Nullstellen mit Vielfachheit 1 nennt man auch **einfache Nullstellen**, Nullstellen mit Vielfachheit $k \geq 2$ nennt man auch **mehrfache Nullstellen**.

Hier: Spalte die Nullstelle k -mal ab bis $q(z_0) \neq 0$.

Fundamentalsatz der Algebra

Sei

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, dann gibt es eine bis auf die Reihenfolge eindeutige **Linearfaktorzerlegung**

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$$

mit $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Daher hat p genau n Nullstellen, die aber nicht unbedingt voneinander verschieden sein müssen: mehrfache Nullstellen werden entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.

Anzahl Nullstellen größer als n

Sei p ein Polynom mit $\deg(p) \leq n$. Falls p mehr als n Nullstellen besitzt, so muss p das Nullpolynom sein, d.h. $p(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Koeffizientenvergleich

Sind

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{und} \quad q(z) = \sum_{k=0}^m b_k z^k$$

und gilt $p(z) = q(z)$ für alle z , so sind die Koeffizienten gleich:
 $a_k = b_k$ für alle k .

Dabei genügt Gleichheit in $N + 1$ Stellen, wenn N der größere der beiden Grade n und m ist.

Fazit

Wir haben zwei Darstellungen für Polynome:

(1) Gut zum Rechnen (Addition, Subtraktion, Polynomdivision):

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

(2) Nullstellen können sofort abgelesen werden:

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$$

Tipp

Wenn Sie Nullstellen suchen und bereits einen Faktor $z - z_0$ ausgeklammert haben, multiplizieren Sie diesen auf keinen Fall aus!

Komplex konjugierte Nullstellen bei reellen Polynomen

Sei p ein reelles Polynome mit $\deg(p) \geq 1$. Dann treten die nichtreellen Nullstellen von p in komplex konjugierten Paaren auf, d.h. für $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $p(z_0) = 0$ gilt $p(\overline{z_0}) = 0$.

Folgerung

Ein reelles Polynom mit ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Reelle Zerlegung

Sei

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad $n \geq 1$, dann gibt es eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Zerlegung in reelle Linearfaktoren und in reelle quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen:

$$p(z) = a_n(z - x_1) \cdot \dots \cdot (z - x_k) \\ \cdot ((z - \alpha_1)^2 + \beta_1^2) \cdot \dots \cdot ((z - \alpha_m)^2 + \beta_m^2),$$

mit reellen $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ und reellen $\beta_1 \neq 0, \dots, \beta_m \neq 0$.

Wie findet man Nullstellen?

$n = 1$ Lineare Gleichungen:

$$p(z) = a_1 z + a_0 \rightarrow \text{einzige Nullstelle ist } -\frac{a_0}{a_1}$$

$n = 2$ Quadratische Gleichung:

$$p(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \rightarrow pq\text{-Formel}$$

$n = 3$ Kubische Gleichung: Sehr komplizierte Formeln
(Cardanische Formeln)

$n = 4$ Quartische Gleichung: Sehr komplizierte Formeln (Ferrari
(Schüler von Cardano), Cardano, Euler)

$n \geq 5$ Es gibt keine Lösungsformel (Satz von Abel-Ruffini).

Ausnahmen: $z^n = a$ (vgl. VL 7) oder Nullstelle raten und abspalten

Ansonsten: Numerische Verfahren (z.B. das Bisektionsverfahren
(vgl. VL 20) und das Newtonverfahren (vgl. VL 22)).

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

9. Vorlesung: Rationale Funktionen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (rationale Funktionen, Pol, Pol der Ordnung k)

Rationale Funktionen sind Brüche von Polynomen, also

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

wobei p und q Polynome sind. Dadurch werden Funktionen

$$f: D \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad D = \mathbb{C} \setminus \{z \mid q(z) = 0\},$$

bzw. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D = \mathbb{R} \setminus \{z \mid q(z) = 0\}$ (falls p, q reell) definiert.

An einer Nullstelle des Nenners, also z_0 mit $q(z_0) = 0$, ist f zunächst nicht definiert.

- (1) Ist $p(z_0) \neq 0$, so heißt z_0 ein **Pol** oder eine **Polstelle** von f . Wir sagen, z_0 ist ein **Pol der Ordnung k** von f , wenn z_0 eine Nullstelle von q der Vielfachheit k ist. Ein Pol der Ordnung 1 heißt auch **einfacher Pol** und ein Pol höherer Ordnung ($k \geq 2$) heißt **mehrfacher Pol**.
- (2) Ist auch $p(z_0) = 0$, so kürze $z - z_0$ so oft wie möglich in Zähler und Nenner.

Motivation

Ziel: Finde eine einfachere Darstellung für

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

Genauer: Zerlege eine rationale Funktion als Summe eines Polynoms und einfacher rationaler Funktionen der Form

$$\frac{A}{z - a} \quad \text{oder allgemeiner} \quad \frac{A}{(z - a)^k}.$$

Diese Darstellung heißt die **Partialbruchzerlegung (PBZ)** der rationalen Funktion.

Anwendungen:

- (1) bei der Integration von rationalen Funktionen (vgl. VL 31)
- (2) im Zusammenhang mit der sogenannten Laplace-Transformation (Anwendung in der Regelungstechnik, der Netzwerktheorie, bei der Signalverarbeitung etc.) (vgl. VL DGL und ITPDG)



Komplexe Partialbruchzerlegung

Sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ eine rationale Funktion. Hat q die einfachen Nullstellen z_1, \dots, z_n , also

$$q(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

so hat f die **Partialbruchzerlegung**

$$f(z) = s(z) + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - z_k} = s(z) + \frac{A_1}{z - z_1} + \dots + \frac{A_n}{z - z_n}$$

mit einem Polynom $s(z)$ und Koeffizienten $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{C}$.

Polynom und Koeffizienten sind eindeutig bestimmt.

Ist z_k eine m_k -fache Nullstelle von q , so wird der Summand $\frac{A_k}{z - z_k}$ ersetzt durch die m_k Summanden

$$\frac{A_{k,1}}{z - z_k} + \frac{A_{k,2}}{(z - z_k)^2} + \dots + \frac{A_{k,m_k}}{(z - z_k)^{m_k}},$$

wobei die Koeffizienten auch eindeutig bestimmt sind.

Schritt 1: Polynomdivision

1. Fall: $\deg(p) \geq \deg(q)$

Polynomdivision von p durch q ergibt

$$p(z) = s(z)q(z) + r(z)$$

mit eindeutig bestimmten Polynomen s und r mit $\deg(r) < \deg(q)$, also

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = s(z) + \frac{r(z)}{q(z)} \quad \text{mit} \quad \deg(r) < \deg(q).$$

2. Fall: $\deg(p) < \deg(q)$

In diesem Fall ist $s(z) = 0$ und $r(z) = p(z)$. Man benötigt hier keine Polynomdivision.

Schritt 2: Ansatz wählen

Ansatz falls q nur einfache Nullstellen z_k hat:

$$\frac{r(z)}{q(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - z_k}. \quad (*)$$

Ansatz falls q mehrfache Nullstellen hat:

Ist z_k eine Nullstelle mit Vielfachheit m_k , so ersetzen wir

$$\frac{A_k}{z - z_k}$$

in (*) durch

$$\frac{A_{k,1}}{z - z_k} + \frac{A_{k,2}}{(z - z_k)^2} + \dots + \frac{A_{k,m_k}}{(z - z_k)^{m_k}}.$$

Jetzt: Koeffizienten bestimmen

Schritt 3: Koeffizienten bestimmen

Möglichkeit 1: Koeffizientenvergleich

Multipliziere den Ansatz für $\frac{r(z)}{q(z)}$ mit dem Nenner $q(z)$

→ Liefert eine Gleichung von Polynomen

→ Koeffizientenvergleich → lineares Gleichungssystem (VL 13/14)

Möglichkeit 2: Einsetzen spezieller Werte

Setze in den Ansatz für $\frac{r(z)}{q(z)}$ spezielle Werte für z ein

→ einen Teil oder alle Koeffizienten können bestimmt werden

Spezialfall von Möglichkeit 2: Multipliziere den Ansatz mit $(z - z_k)^{m_k}$ und setze anschließend $z = z_k$ in die Gleichung ein → liefert genau den Koeffizienten A_{k,m_k} .

Da man dabei nur $(z - z_k)^{m_k}$ in $\frac{r(z)}{q(z)}$ zuhalten braucht und in den Rest $z = z_k$ einsetzt, ist diese Methode zur Bestimmung von A_{k,m_k} auch als **Zuhaltemethode** bekannt → Details nächste Folie 103

Zuhaltemethode: Vorgehen bei einfachen Nullstellen

Multipliziere den Ansatz

$$\frac{r(z)}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)} = \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \dots + \frac{A_n}{z - z_n}$$

mit $z - z_1$, so folgt

$$\frac{r(z)}{(z - z_2) \dots (z - z_n)} = A_1 + (z - z_1) \frac{A_2}{z - z_2} + \dots + (z - z_1) \frac{A_n}{z - z_n}$$

und Einsetzen von $z = z_1$ ergibt

$$\frac{r(z_1)}{(z_1 - z_2) \dots (z_1 - z_n)} = A_1.$$

Dabei erhalten wir A_1 , indem wir $z - z_1$ in $\frac{r(z)}{q(z)}$ zuhalten, und in den Rest z_1 einsetzen. Genauso berechnet man A_2, \dots, A_n .

Hinweis: Bei einer Nullstelle mit Vielfachheit m_k bekommt man mit der Zuhaltemethode nur den Koeffizienten $A_{k,m}$ (vgl. Ansatz auf Folie 101)

Reelle Partialbruchzerlegung

Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine reelle rationale Funktion, d.h. die Polynome p und q haben reelle Koeffizienten.

1. Fall: f hat nur reelle Pole

→ Partialbruchzerlegung funktioniert wie im komplexen Fall und die Koeffizienten sind dann auch alle reell.

2. Fall: f hat komplexe Pole

→ Partialbruchzerlegung funktioniert wie im komplexen Fall und die Koeffizienten sind dann auch komplex.

Wie bekommt man eine reelle Zerlegung, d.h. eine Zerlegung mit reellen Koeffizienten?

Einfache komplexe Pole für reelle rationale Funktionen

Falls $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle von q ist (also $b \neq 0$), so ist auch $\bar{\lambda} = a - bi$ eine Nullstelle von q (vgl. VL 8).

Fasse die Linearfaktoren zusammen (schon gesehen in VL 8):

$$(z - \lambda)(z - \bar{\lambda}) = (z - (a + ib))(z - (a - ib)) = (z - a)^2 + b^2.$$

Fasse dann die komplexen Summanden in der Partialbruchzerlegung zusammenfassen

$$\frac{A}{z - (a + ib)} + \frac{B}{z - (a - ib)} = \frac{Cz + D}{(z - a)^2 + b^2}.$$

Hintergrund für reelle rationale Funktionen

Sei $\lambda = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle von q . Dann folgt aus dem Ansatz

$$\frac{A}{z - (a + ib)} + \frac{B}{z - (a - ib)},$$

dass $B = \bar{A}$ (komplex konjugiert) sein muss.

Mehrfache komplexe Pole für reelle rationale Funktionen

Ist λ eine nichtreelle Polstelle der Ordnung m , so ist auch $\bar{\lambda}$ eine nichtreelle Polstelle der Ordnung m , und man ersetzt

$$\frac{A_1}{z - \lambda} + \frac{A_2}{(z - \lambda)^2} + \dots + \frac{A_m}{(z - \lambda)^m} + \frac{B_1}{z - \bar{\lambda}} + \frac{B_2}{(z - \bar{\lambda})^2} + \dots + \frac{B_m}{(z - \bar{\lambda})^m}$$

im Ansatz für die Partialbruchzerlegung durch

$$\frac{C_1 z + D_1}{(z - a)^2 + b^2} + \frac{C_2 z + D_2}{((z - a)^2 + b^2)^2} + \dots + \frac{C_m z + D_m}{((z - a)^2 + b^2)^m}$$

mit reellen $C_1, D_1, C_2, D_2, \dots, C_m, D_m$.

Schritt 1: Polynomdivision

Nur erforderlich, falls $\deg(p) \geq \deg(q)$: Polynomdivision

$$p(z) = s(z)q(z) + r(z) \quad \text{mit} \quad \deg(r) < \deg(q).$$

Falls $\deg(p) < \deg(q)$ ist $s(z) = 0$ und $r(z) = p(z)$.

Schritt 2: Zerlegung des Nenners

Bestimme die Nullstellen des Nenners $q(z)$ und zerlege q so weit wie möglich in Faktoren.

- (1) Für eine komplexe PBZ in Linearfaktoren.
- (2) Für eine reelle PBZ in Linearfaktoren und quadratische Faktoren ohne reelle Nullstellen.

Anschließend werden gleiche Faktoren zu Potenzen zusammengefasst.

Schritt 2: Ansatz zur Partialbruchzerlegung (Fortsetzung)

- (1) Der Ansatz bestimmt sich allein aus den Faktoren des Nenners.
- (2) Die gesamte Anzahl der Koeffizienten in den Ansatztermen stimmt mit dem Grad des Nenners überein.

| Faktor des Nenners | Ansatzterm |
|-----------------------|---|
| $z - z_0$ | $\frac{A}{z - z_0}$ |
| $(z - z_0)^m$ | $\frac{A_1}{z - z_0} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{A_k}{(z - z_0)^m}$ |
| $(z - a)^2 + b^2$ | $\frac{Cz + D}{(z - a)^2 + b^2}$ |
| $((z - a)^2 + b^2)^m$ | $\frac{C_1z + D_1}{(z - a)^2 + b^2} + \dots + \frac{C_mz + D_m}{((z - a)^2 + b^2)^m}$ |

Schritt 3: Koeffizienten bestimmen

Mehrere Möglichkeiten:

- (1) Koeffizientenvergleich (immer möglich)
- (2) Zuhalttemethode: Gibt die Koeffizienten von einfachen Polstellen bzw. den Koeffizienten bei der höchsten Potenz eines Pols.
Bestimme verbleibende Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich oder durch Einsetzen weiterer Zahlen.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

10. Vorlesung: Vektorräume

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Vektorraum)

Ein **\mathbb{K} -Vektorraum** ist eine Menge V mit einer Addition $+$ und einer skalaren Multiplikation \cdot , so dass

$$v + w \in V \quad \text{und} \quad \lambda \cdot v \in V$$

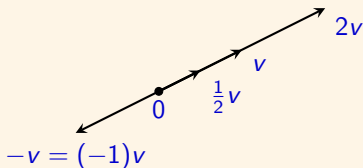
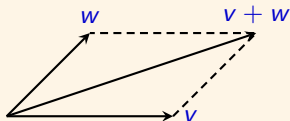
für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) gilt und folgende Rechenregeln für alle $v, w, x \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gelten:

- (1) $+$ ist assoziativ: $(v + w) + x = v + (w + x)$,
- (2) $+$ ist kommutativ: $v + w = w + v$,
- (3) es gibt einen **Nullvektor** $0 \in V$ mit $0 + v = v$,
- (4) zu jedem Vektor $v \in V$ gibt es $-v \in V$ mit $v + (-v) = 0$,
- (5) es gilt: $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$,
- (6) Distributivgesetz: $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
- (7) Distributivgesetz: $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$.
- (8) $1 \cdot v = v$.

Ein **Vektor** ist ein Element eines Vektorraums.

Bemerkung

- (1) Die Elemente von \mathbb{K} heißen Skalare. \mathbb{K} steht für einen Körper.
- (2) Insbesondere enthält jeder \mathbb{K} -Vektorraum den Nullvektor und ist somit nicht leer, d.h. $V \neq \emptyset$.
- (3) Das \mathbb{K} bei „ \mathbb{K} -Vektorraum“ sagt, aus welchem Zahlbereich die Zahlen (=Skalare) kommen, mit denen multipliziert wird.
- (4) Kurzschreibweise: λv anstatt $\lambda \cdot v$ oder Vektorraum anstatt \mathbb{K} -Vektorraum
- (5) Die geometrische Anschauung zu den Vektorraumoperationen ist die aus dem \mathbb{R}^2 :



Definition (Teilraum)

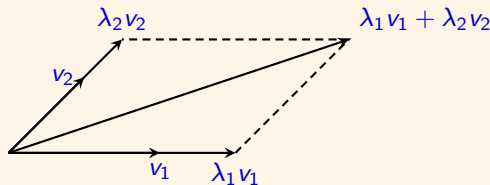
Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Teilmenge $T \subseteq V$ ist ein **Teilraum** (oder **Unterraum** oder **Untervektorraum**) von V , falls T selbst ein \mathbb{K} -Vektorraum ist (mit dem gleichen $+$ und \cdot wie V).

Teilraumkriterium

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Dann ist $T \subseteq V$ ein Teilraum von V , genau dann wenn

- (i) $0 \in T$,
- (ii) für alle $v, w \in T$ ist $v + w \in T$,
- (iii) für alle $v \in T$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda v \in T$.

Jetzt: Linearkombination von zwei Vektoren



Definition (Linearkombination)

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Ein Vektor $v \in V$ heißt **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$, wenn Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ existieren, so dass

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j.$$

Man sagt, v lässt sich aus v_1, \dots, v_k **linear kombinieren**. Die $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ heißen **Koeffizienten** der Linearkombination.

Definition (Spann, lineare Hülle)

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_k \in V$ heißt der **Spann** (oder die **lineare Hülle** oder das **Erzeugnis**) von v_1, \dots, v_k .

Schreibweise:

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}.$$

Spann ist ein Vektorraum

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und $v_1, \dots, v_k \in V$. Dann ist $\text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ ein Teilraum von V .

Definition (Erzeugendensystem)

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und T ein Teilraum von V . Eine Menge $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq T$ heißt **Erzeugendensystem (EZS)** von T , falls ihr Spann gleich T ist:

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = T.$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

11. Vorlesung: Basis und Dimension

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (linear unabhängig, linear abhängig)

Seien v_1, \dots, v_k Vektoren des \mathbb{K} -Vektorraums V .

- (1) Die Vektoren v_1, \dots, v_k heißen **linear unabhängig** genau dann, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

für die Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ hat.

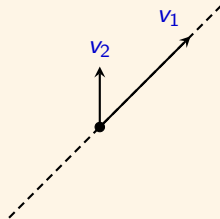
- (2) Die Vektoren v_1, \dots, v_k heißen **linear abhängig**, wenn sie nicht linear unabhängig sind. D.h. sie sind linear abhängig genau dann, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

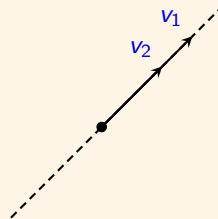
neben der Lösung $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ noch weitere Lösungen besitzt (also wenn die Lösung nicht eindeutig ist).

Vektoren im \mathbb{R}^2 sind linear unabhängig, wenn jeder Vektor in eine neue eigene „Richtung“ zeigt.

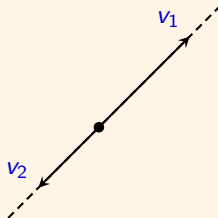
linear unabhängig



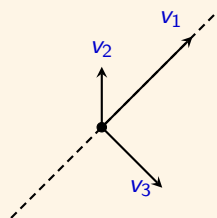
linear abhängig



linear abhängig

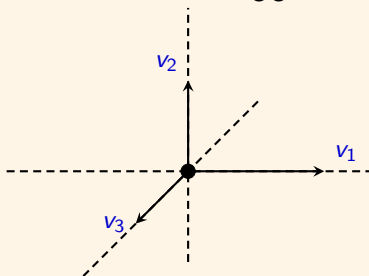


linear abhängig

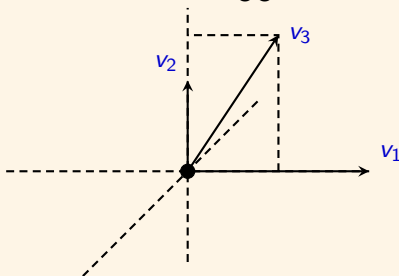


Vektoren im \mathbb{R}^3 sind linear unabhängig, wenn jeder Vektor in eine neue eigene „Richtung“ zeigt.

linear unabhängig



linear abhängig



Definition (Basis)

Sei $V \neq \{0\}$ ein \mathbb{K} -Vektorraum. Ein endliches linear unabhängiges Erzeugendensystem $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V heißt **Basis** von V .

Ausführlich bedeutet das: $\{v_1, \dots, v_n\}$ heißt **Basis** von V , falls gilt

- (1) v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig.
- (2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist ein Erzeugendensystem von V , d.h.

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = V.$$

Für den Nullvektorraum $V = \{0\}$ definiert man die leere Menge \emptyset als Basis.

Bemerkung: Basen sind immer geordnet

Auch wenn Basen wie Mengen geschrieben werden (Mengen sind ungeordnet), sind Basen immer geordnet, d.h. in $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist v_1 der erste Basisvektor, v_2 der zweite Basisvektor, ... usw.

Bemerkung

Alle Basen eines Vektorraums haben die gleiche Anzahl an Elementen.

Definition (Dimension)

Die **Dimension** eines Vektorraums ist die Anzahl der Elemente einer Basis von V und wird mit $\dim(V)$ bezeichnet.

Hat V eine endliche Basis, so ist $\dim(V) \in \mathbb{N}$ und wir nennen V **endlichdimensional**.

Hat V keine endliche Basis, so schreiben wir $\dim(V) = \infty$ und nennen V **unendlichdimensional**.

Kriterien für Basen

Sei V ein Vektorraum mit Dimension $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann gilt:

- (1) Sind $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig, so ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V .
- (2) Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V , so ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V .

Konstruktion von Basen

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und seien v_1, \dots, v_k Vektoren aus V .

- (1) Ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ ein Erzeugendensystem von V , aber sind die Vektoren nicht linear unabhängig, so entferne so lange geeignete Vektoren, bis eine Basis übrig bleibt.
- (2) Sind v_1, \dots, v_k linear unabhängig, aber $\{v_1, \dots, v_k\}$ kein Erzeugendensystem, so nimm geeignete Vektoren $v_{k+1} \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ hinzu, bis eine Basis von V entsteht (falls $\dim(V) < \infty$).

Zusammenfassung

| | | |
|---|---|--|
| Linear unabhängiges System, aber kein Erzeugendensystem | Basis | Erzeugendensystem, aber nicht linear unabhängig |
| Zu wenige Vektoren | Passende Anzahl an Vektoren | Zu viele Vektoren |
| Nicht alle Vektoren aus V sind darstellbar als Linearkombination. | Alle Vektoren aus V sind eindeutig darstellbar als Linearkombination. | Alle Vektoren aus V sind mehrdeutig darstellbar als Linearkombination. |

Koordinaten und Koordinatenvektor

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann lässt sich jeder Vektor $v \in V$ schreiben als

$$v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n,$$

wobei die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ **eindeutig bestimmt** sind und **Koordinaten** von v heißen. Der Vektor

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

heißt der **Koordinatenvektor** von v bzgl. \mathcal{B} .

Beispiel Koordinatenvektor

Sei $V = \mathbb{R}[z]_{\leq 2}$ und $\mathcal{B} = \{z^2, z - 1, 2\}$ eine Basis von V (s.o.)
ges: Koordinatenvektor $\vec{p}_{\mathcal{B}}$ von $p \in V$, d.h. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = \lambda_1 z^2 + \lambda_2 (z - 1) + \lambda_3 2$$

Koeffizientenvergleich:

$$z^2 : a_2 = \lambda_1 \quad \implies \lambda_1 = a_2$$

$$z^1 : a_1 = \lambda_2 \quad \implies \lambda_2 = a_1$$

$$z^0 : a_0 = 2\lambda_3 - \lambda_2 \quad \implies \lambda_3 = \frac{a_0 + \lambda_2}{2} \stackrel{\lambda_2 = a_1}{=} \frac{a_0 + a_1}{2}$$

Dann ist

$$\vec{p}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ \frac{a_0 + a_1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{z.B. f\"ur } p(z) = 2 - 3z + 2z^2 \text{ ist } \vec{p}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Probe: $2 \cdot z^2 - 3 \cdot (z - 1) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 3z + 2z^2 = p(z)$.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

12. Vorlesung: Matrizen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Matrix, quadratische Matrix)

Für Zahlen $a_{i,j} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, heißt das Zahlenschema

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} = [a_{i,j}] = [a_{i,j}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

eine $m \times n$ -**Matrix** mit Einträgen in \mathbb{K} .

Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen mit Einträgen in \mathbb{K} wird mit $\mathbb{K}^{m,n}$ bezeichnet.

Eine Matrix heißt **quadratisch**, falls $m = n$ gilt.

Bemerkung

- (1) Die Indizes i, j setzt man nach der Regel „Zeile, Spalte“.
- (2) Singular: die Matrix, Plural: die Matrizen.
Falsch: die Matrixen
Eine „Matrize“ bezeichnet u. a. eine Gußform, Druckvorlage, oder auch ein Hilfsmittel beim Legen einer Zahnfüllung.
- (3) Man sagt auch kürzer „ $m \times n$ -Matrix über \mathbb{K} “, lies „ m kreuz n Matrix über \mathbb{K} “.
- (4) Man schreibt auch a_{ij} statt $a_{i,j}$, wenn keine Verwechslungsgefahr besteht.

Definition (Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen)

Seien $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{K}^{m,n}$ zwei $m \times n$ -Matrizen und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist die **Summe** von A und B die Matrix

$$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}] \in \mathbb{K}^{m,n}$$

und die **Multiplikation mit einem Skalar** (kurz: **Skalarmultiplikation**) ist die Matrix

$$\lambda A = [\lambda a_{i,j}] \in \mathbb{K}^{m,n}.$$

Hinweis

Nur Matrizen gleicher Größe dürfen addiert werden.

Rechenregeln für die Addition

Für $A, B, C \in \mathbb{K}^{m,n}$ gilt

- (1) $(A + B) + C = A + (B + C),$
- (2) $A + B = B + A.$

Rechenregeln für die Skalarmultiplikation

Für $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

- (1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,$
- (2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$
- (3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$

Bemerkung

$\mathbb{K}^{m,n}$ ist mit der Addition und Skalarmultiplikation ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Basis $\{E_{ij} \mid i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$, wobei $E_{ij} \in \mathbb{K}^{m,n}$ eine 1 in Eintrag (i, j) hat und alle anderen Einträge Null sind. Daher ist $\dim(\mathbb{K}^{m,n}) = mn$.

Definition (Matrizenmultiplikation)

Seien $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{K}^{n,p}$. Dann ist

$$AB := \left[\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right] = [a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}] \in \mathbb{K}^{m,p}.$$

Ausgeschrieben bedeutet das

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1,k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^n a_{1,k} b_{k,2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1,k} b_{k,p} \\ \sum_{k=1}^n a_{2,k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^n a_{2,k} b_{k,2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2,k} b_{k,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{m,k} b_{k,1} & \sum_{k=1}^n a_{m,k} b_{k,2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{m,k} b_{k,p} \end{bmatrix}.$$

Rechenregeln für die Matrizenmultiplikation

Für Matrizen A, B, C mit geeigneter Größe und für $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

- (1) $A(BC) = (AB)C$,
- (2) $A(B + C) = AB + AC$,
- (3) $(A + B)C = AC + BC$,
- (4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,
- (5) $I_m A = A = A I_n$ für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Bemerkung

Achtung: Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ**.

I.A. gilt also $A \cdot B \neq B \cdot A$ (im Unterschied zur Multiplikation von reellen oder komplexen Zahlen). Zum Beispiel ist

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = BA.$$

Definition (invertierbar, Inverse)

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ heißt **invertierbar**, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt mit

$$BA = I_n \quad \text{und} \quad AB = I_n.$$

Die Matrix B ist dann eindeutig bestimmt, wird die **Inverse** von A genannt und mit A^{-1} bezeichnet.

Hinweis: Man kann zeigen, dass es für quadratische Matrizen ausreicht, nur eine der beiden Gleichungen $BA = I_n$ und $AB = I_n$ zu überprüfen, die andere gilt dann automatisch.

Eigenschaften

Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertierbar, so gelten:

- (1) A^{-1} ist invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (2) AB ist invertierbar mit $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Definition (Transponierte)

Die **Transponierte** der Matrix $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{K}^{m,n}$ ist die $n \times m$ -Matrix

$$A^T := [b_{i,j}] \in \mathbb{K}^{n,m}, \quad \text{wobei} \quad b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Bei der Transposition werden also die Zeilen von A zu den Spalten von A^T . Lies: A^T als „ A transponiert“.

Rechenregeln für die Transponierte

Für $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$, $C \in \mathbb{K}^{n,\ell}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

- (1) $(A^T)^T = A$,
- (2) $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- (3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,
- (4) $(AC)^T = C^T A^T$.

Definition (Adjungierte)

Die **Adjungierte** der Matrix $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m,n}$ ist die $n \times m$ -Matrix

$$A^H := [b_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,m}, \quad \text{wobei} \quad b_{i,j} = \overline{a_{j,i}}.$$

Lies: A^H als „ A adjungiert“.

Andere Bezeichnung: Statt A^H wird auch A^* verwendet.

Rechenregeln für die Adjungierte

Für $A, B \in \mathbb{C}^{m,n}$, $C \in \mathbb{C}^{n,\ell}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

- (1) $(A^H)^H = A$,
- (2) $(A + B)^H = A^H + B^H$,
- (3) $(\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$,
- (4) $(AC)^H = C^H A^H$.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

13. Vorlesung: Lineare Gleichungssysteme

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Lineares Gleichungssystem (LGS))

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) mit m Gleichungen in n Unbekannten hat die Form

$$\begin{aligned}a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m.\end{aligned}\tag{13.1}$$

Die x_j heißen **Unbekannte** oder **Variablen** und sind gesucht.

Die **Koeffizienten** $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ und $b_i \in \mathbb{K}$ sind gegeben.

Wir sprechen von einem **reellen LGS**, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist (also $a_{i,j}$ und b_i reell sind) und von einem **komplexen LGS**, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist.

Sind alle $b_i = 0$, so heißt das LGS **homogen**, andernfalls heißt das LGS **inhomogen** (mindestens ein $b_i \neq 0$).

Matrixschreibweise

Das lineare Gleichungssystem (13.1) können wir auch schreiben als

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{=x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{=b},$$

also als

$$Ax = b.$$

Dabei heißt

$A \in \mathbb{K}^{m,n}$ die **Koeffizientenmatrix** des LGS,

$b \in \mathbb{K}^m$ die **rechte Seite** oder die **Inhomogenität** des LGS,

$x \in \mathbb{K}^n$ die **Lösung** (eventuell mehrere) von $Ax = b$,

$\mathbb{L} = \mathbb{L}(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$ die **Lösungsmenge**
(Menge aller Lösungen) von $Ax = b$.

Definition (elementare Zeilenoperationen)

Die folgenden Operationen werden als **elementare Zeilenoperationen** bezeichnet:

- (1) Vertauschen von zwei Zeilen
- (2) Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $\lambda \neq 0$ (wobei $\lambda \in \mathbb{K}$)
- (3) Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

Ziel: Bringe eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ auf Zeilenstufenform

Definition (Zeilenstufenform)

Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Dann kann A durch elementare Zeilenoperationen auf **Zeilenstufenform (ZSF)** gebracht werden, d.h. auf die Form

$$C = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|cc|cc} 0 & c_{1,j_1} & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & c_{2,j_2} & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3,j_3} & * & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & c_{r,j_r} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

wobei $c_{i,j_i} \neq 0$ für $i = 1, \dots, r$ und $*$ für beliebige Einträge steht. Die Einträge c_{i,j_i} werden **Pivotelemente** genannt.

Genauer ist die Matrix $C \in \mathbb{K}^{m,n}$ in Zeilenstufenform, falls gilt:

- (1) Der erste Nichtnulleintrag einer Zeile ist weiter rechts als die ersten Nichtnulleinträge der vorherigen Zeilen.
- (2) Alle Zeilen mit nur Nullen sind unter den Zeilen mit Nichtnulleinträgen.

Bestimmung der Zeilenstufenform (ZSF) einer Matrix $A \neq 0$

- (1) Suche die erste von Null verschiedene Spalte j_1 .
- (2) Suche in dieser Spalte den ersten Eintrag ungleich Null (**Pivotelement**) und tausche ihn ggf. in die erste Zeile. Wir haben nun eine Matrix der Form

$$\begin{bmatrix} 0 & c_{1,j_1} & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad c_{1,j_1} \neq 0.$$

- (3) Unter dem Pivotelement c_{1,j_1} werden alle Einträge eliminiert, indem geeignete Vielfache der ersten Zeile von den anderen Zeilen abgezogen werden.
- (4) Rekursion: Ist die Matrix in Zeilenstufenform, so sind wir fertig. Andernfalls haben wir die Form

$$\begin{bmatrix} 0 & c_{1,j_1} & * \\ 0 & 0 & A_1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad c_{1,j_1} \neq 0.$$

Die erste Zeile und die ersten Spalten (bis Spalte j_1) bleiben wie sie sind, und wir wenden das gleiche Verfahren auf die kleinere Matrix A_1 an.

Beispiel Zeilenstufenform (ZSF)

Gegeben: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Gesucht: Zeilenstufenform von A

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Zeilen vertauschen}]{I \leftrightarrow II} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{III}-2I} \\ \text{Vielfaches einer} \\ \text{Zeile zu einer} \\ \text{anderen Zeile} \\ \text{addieren} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren

Zeilenstufenform (ZSF) erreicht!

Bemerkung

- (1) Die Zeilenstufenform der Nullmatrix $A = 0$ ist $C = 0$.
- (2) Der Gauß-Algorithmus gibt einen Rechenweg an, um A in ZSF zu bringen.
- (3) Die Zeilenstufenform einer Matrix $A \neq 0$ ist nicht eindeutig bestimmt: Multipliziere eine Zeilenstufenform von A mit einer Zahl ungleich Null \rightarrow Dies liefert eine (andere) Zeilenstufenform von A

Definition (normierte Zeilenstufenform)

Sei $A \neq 0$ eine Matrix und sei C eine Zeilenstufenform von A . Die Matrix C ist in **normierter Zeilenstufenform** falls

- (1) alle Pivotelemente c_{i,j_i} normiert sind, d.h. $c_{i,j_i} = 1$,
- (2) alle Einträge über den Pivotelementen Null sind.

Die normierte Zeilenstufenform einer Matrix ist eindeutig und hat folgende Gestalt:

$$C = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c|cc} 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Beispiel normierte Zeilenstufenform (Fortsetzung von oben)

Gegeben: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Gesucht: normierte Zeilenstufenform (NZSF) von A

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$I \leftrightarrow II$
Zeilen vertauschen

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$III - 2I$
Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

$III - II$
Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$I - II$
Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\frac{1}{2}I$
Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich 0

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Normierte Zeilenstufenform (NZSF) erreicht

Das Lösen von linearen Gleichungssystemen

Um das LGS $Ax = b$ zu lösen, wenden wir den Gauß-Algorithmus auf die **erweiterte Koeffizientenmatrix** an:

$$[A | b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right]$$

Die Anwendung der elementaren Zeilenoperationen auf die erweiterte Koeffizientenmatrix verändert die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ nicht.

Ist die Matrix in ZSF oder NZSF, so können wir die Lösung(en) des Gleichungssystems durch Rückwärtssubstitution bestimmen.

Struktur der Lösungsmenge

Das LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ habe eine Lösung $x_P \in \mathbb{K}^n$. Diese spezielle Lösung wird auch **partikuläre Lösung** genannt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{L}(A, b) &= \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\} \\ &= \{x_P + x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \\ &=: x_P + \mathbb{L}(A, 0).\end{aligned}$$

Beispiel: Sei $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Dann ist für $x_2 = s \in \mathbb{R}$ und $x_4 = t \in \mathbb{R}$:

$$x_1 = 1 - 2s - 3t \quad x_3 = 3 - 4t$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(A, b) &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=x_p} + \underbrace{\left\{ s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}}_{=\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{L}(A, 0)} \end{aligned}$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

14. Vorlesung:

Weitere Anwendungen des Gauß-Algorithmus

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Wiederholung Vorlesung 13: Struktur der Lösungsmenge

Das LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ habe eine Lösung $x_P \in \mathbb{K}^n$. Diese spezielle Lösung wird auch **partikuläre Lösung** genannt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{L}(A, b) &= \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\} \\ &= \{x_P + x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} \\ &=: x_P + \mathbb{L}(A, 0).\end{aligned}$$

Beobachtung aus der letzten Vorlesung: Bei den Beispielen gab es nur die folgenden 3 Fälle für $\mathbb{L}(A, b)$

- (1) das LGS hat keine Lösungen,
- (2) das LGS hat genau eine Lösung,
- (3) das LGS hat unendlich viele Lösungen.

Dies ist kein Zufall, wie wir gleich sehen werden!

Definition (Rang)

Der **Rang** von $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ ist die Anzahl der Zeilen ungleich Null in einer Zeilenstufenform von A und wird mit $\text{Rang}(A)$ bezeichnet.

Bemerkung

Der Rang einer Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen oder – was dasselbe ist – die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten der Matrix.

Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten die erweiterte Koeffizientenmatrix $[A | b]$ und bringen diese in ZSF indem wir elementare Zeilenoperationen verwenden. Das ergibt eine Matrix der Form

$$[C | d] = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c|cc|c} 0 & c_{1,j_1} & * & * & * & * & * & * & * & * & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & c_{2,j_2} & * & * & * & * & * & * & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3,j_3} & * & * & * & * & d_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & * & * & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{r,j_r} & * & d_r \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_m \end{array} \right]$$

mit den Pivotelementen $c_{1,j_1}, c_{2,j_2}, \dots, c_{r,j_r} \neq 0$. Es gilt

$$\text{Rang}(A) = r = \text{Rang}(C),$$

$$\text{Rang}([A | b]) = \text{Rang}([C | d]) \geq r = \text{Rang}(A).$$

Lösbarkeitskriterium für lineare Gleichungssysteme

Seien $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Das LGS $Ax = b$ hat

(1) keine Lösung, genau dann wenn

$$\text{Rang}([A \mid b]) > \text{Rang}(A),$$

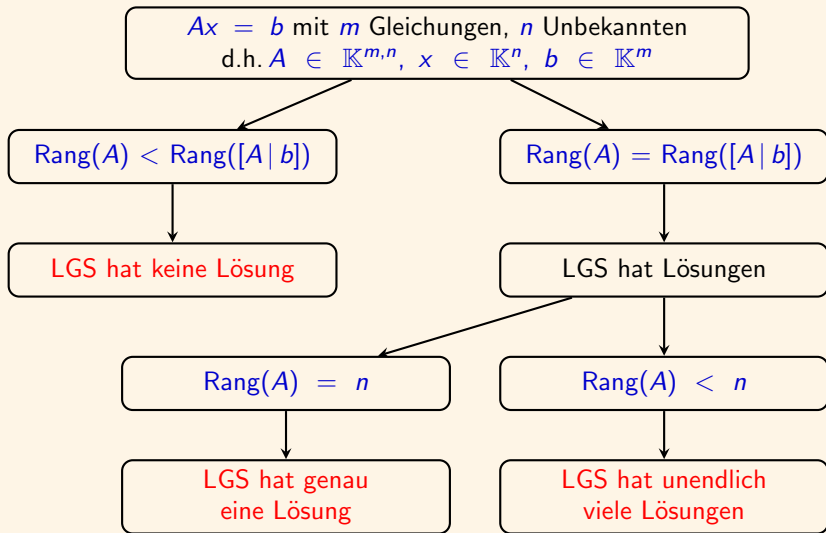
(2) genau eine Lösung, genau dann wenn

$$\text{Rang}([A \mid b]) = \text{Rang}(A) = n,$$

(3) unendlich viele Lösungen, genau dann wenn

$$\text{Rang}([A \mid b]) = \text{Rang}(A) < n.$$

Schema zum Lösbarkeitskriterium für LGS



Wiederholung: Definition Inverse (VL 12)

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ heißt **invertierbar**, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt mit $BA = I_n$ und $AB = I_n$. Die Matrix B ist dann eindeutig bestimmt, wird die **Inverse** von A genannt und mit A^{-1} bezeichnet.

Berechnung der Inversen

Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ (quadratisch), so gehen wir wie folgt vor, um A^{-1} zu berechnen (falls A invertierbar ist).

- (1) Bringe $[A \mid I_n]$ mit elementaren Zeilenoperationen in NZSF $[C \mid D]$.
- (2) Wenn $\text{Rang}(A) \neq n$ ist, ist A nicht invertierbar und wir können aufhören.
- (3) Wenn $\text{Rang}(A) = n$ ist, so ist $C = I_n$ und $A^{-1} = D$.

Spezialfall für $A \in \mathbb{K}^{2,2}$

Sei $A \in \mathbb{K}^{2,2}$ invertierbar und gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Dann ist die Inverse gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Hinweis: $ad - bc$ ist bei invertierbaren (2×2) -Matrizen immer ungleich Null (vgl. Vorlesung 32).

Beispiel

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} &\implies A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 5 - 1 \cdot (-3)} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Unterschiede zwischen Matrizen und Zahlen

Seien A, B Matrizen.

- (1) Im Allgemeinen gilt $AB \neq BA$, selbst wenn beide Produkte definiert sind.
- (2) Aus $A \neq 0$ folgt nicht, dass A invertierbar ist. Auch dann nicht, wenn A quadratisch ist.
- (3) Aus $AB = 0$ folgt im Allgemeinen nicht, dass $A = 0$ oder $B = 0$ sein müssen.
- (4) Ist $AB = 0$ und A invertierbar, so folgt

$$B = A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0.$$

Ist $AB = 0$ und B invertierbar, so folgt genauso, dass $A = 0$.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

15. Vorlesung: Lineare Abbildungen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Lineare Abbildung, Additivität, Homogenität)

Seien V, W zwei \mathbb{K} -Vektorräume. Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt **linear**, wenn für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(1) **Additivität:** $f(v + w) = f(v) + f(w)$,

(2) **Homogenität:** $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W wird mit $L(V, W)$ oder $\text{Hom}(V, W)$ bezeichnet.

Bemerkung

- (1) Lineare Abbildungen erhalten die Struktur eines Vektorraums (Addition und Skalarmultiplikation).
- (2) Eine andere Bezeichnung für eine lineare Abbildung ist **Homomorphismus**.
- (3) Die Menge $L(V, W)$ ist selbst wieder ein Vektorraum, insbesondere ein Teilraum von $\{f: V \rightarrow W\}$

Interpretation einer Matrix als lineare Abbildung

Sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}$. Dann ist $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax$, linear, denn nach den Rechenregeln für Matrizen gilt für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

(1) **Additivität:** $f(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = f(x) + f(y)$,

(2) **Homogenität:** $f(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda f(x)$.

Fazit: Jede Matrix kann als lineare Abbildung angesehen werden.

Jeder lineare Abbildung $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ wird durch eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ beschrieben

Sei $f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ linear. Dann gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Genauer gilt:

$$A = [f(e_1) \ \dots \ f(e_n)] \quad \text{wobei} \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eigenschaften linearer Abbildungen

Seien V, W, X \mathbb{K} -Vektorräume.

- (1) Ist $f: V \rightarrow W$ linear, so gilt $f(0) = 0$.
- (2) Sind $f: V \rightarrow W$ und $g: W \rightarrow X$ linear, so ist auch die Komposition $g \circ f: V \rightarrow X$ linear.
- (3) Ist $f: V \rightarrow W$ linear und bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1}: W \rightarrow V$ linear.

Bemerkung

Sei $f: V \rightarrow W$ eine Abbildung mit $f(0) \neq 0$. Dann ist f **nicht** linear.

Rechenregeln für lineare Abbildungen

Für lineare Abbildungen f, g, h und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt (falls die Verknüpfungen definiert sind):

- (1) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h,$
- (2) $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h),$
- (3) $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h),$
- (4) $\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g),$
- (5) $\text{id} \circ f = f = f \circ \text{id}.$

Definition (Kern und Bild)

Sei $f: V \rightarrow W$ linear.

- (1) Der **Kern** von f ist das Urbild von 0 :

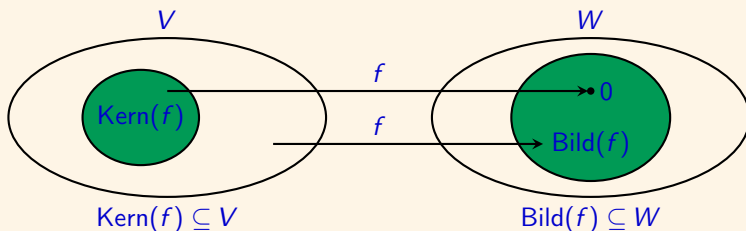
$$\text{Kern}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

$\text{Kern}(f)$ ist ein Teilraum von V .

- (2) Das **Bild** von f ist die Menge

$$\text{Bild}(f) = f(V) = \{f(v) \mid v \in V\}.$$

$\text{Bild}(f)$ ist ein Teilraum von W .



Erinnerung: $\text{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} = \mathbb{L}(A, 0)$

Gegeben: $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

Gesucht: Basis von $\text{Kern}(A)$

1. Schritt: Bringe die Matrix A in normierte Zeilenstufenform.

2. Schritt: Sei $\text{Rang}(A) = r$. Dann gibt es $n - r$ frei wählbare Variablen. Berechne die Lösung von $Ax = 0$ und setze die 1. frei wählbare Variable gleich 1, alle anderen frei wählbaren Variablen werden 0 gesetzt. Dies liefert den 1. Basisvektor.

3. Schritt: Wiederhole den 2. Schritt für die anderen frei wählbaren Variablen.

Das ergibt eine Basis von $\text{Kern}(A)$ mit $n - r$ Basisvektoren.
Insbesondere ist

$$\dim(\text{Kern}(A)) = n - r = n - \text{Rang}(A).$$

Beispiel Basis des Kerns einer Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{vgl. VL 14 (Mitschrift)}]{\text{Gauß-Algorithm.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{NZSF}(A)$$

$\text{Rang}(A) = 2 \Rightarrow n - \text{Rang}(A) = 4 - 2 = 2$ frei wählbare Variablen

Sei $x_2 = s$ und $x_4 = t$, dann ist $x_1 = 4x_4 = 4t$ und $x_3 = x_4 = t$.

$$\Rightarrow \text{Kern}(A) = \mathbb{L}(A, 0) = \left\{ \begin{bmatrix} 4t \\ s \\ t \\ t \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{ist die Lösungs-} \\ \text{menge von} \\ Ax = 0 \end{array}$$

(i) $x_2 = s = 1$ und $x_4 = t = 0 \rightarrow$ 1. Basisvektor

(ii) $x_2 = s = 0$ und $x_4 = t = 1 \rightarrow$ 2. Basisvektor

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{ist eine Basis von } \text{Kern}(A) \text{ mit} \\ \dim(\text{Kern}(A)) = n - \text{Rang}(A) = 4 - 2 = 2 \end{array}$$

Basis des Bildes einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{m,n}$

Die Spalten von A werden mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$ bezeichnet, d.h. es ist $A = [a_1 \ \dots \ a_n]$. Für $x \in \mathbb{K}^n$ ist

$$Ax = [a_1 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = \sum_{j=1}^n x_j a_j,$$

also die Linearkombination von den Spalten von A mit den Koeffizienten x_1, \dots, x_n . Daher ist

$$\text{Bild}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Gesucht: Basis von $\text{Bild}(A)$

1. Schritt: Bringe die Matrix A in Zeilenstufenform.

2. Schritt: Die Spaltenvektoren von A , die zu einem Pivotelement in einer Zeilenstufenform von A gehören, bilden eine Basis des Bildes.

Insbesondere ist $\dim(\text{Bild}(A)) = \text{Rang}(A)$.

Beispiel Basis des Bildes einer Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{vgl. VL 13} \\ \text{(Folien)}}]{\text{Gauß-Algorithm.}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{NZSF}(A)$$

$$\Rightarrow \text{Bild}(A) = \{\text{alle Linearkombination der Spalten von } A\}$$

$$= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Aber: Dies ist keine Basis von $\text{Bild}(A)$
(Nullvektor erzeugt immer lin. Abh.)

Pivotelemente in NZSF (ZSF genügt): 2. und 3. Spalte, wähle daher die 2. und 3. Spalte von A als Basis von $\text{Bild}(A)$, somit:

$$\text{Basis}(\text{Bild}(A)) = \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}_{\text{lin. unabh.}} \quad \text{ist eine Basis von } \text{Bild}(A) \text{ mit} \\ \dim(\text{Bild}(A)) = \text{Rang}(A) = 2$$

Beobachtung

Für $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\dim(\text{Kern}(A)) + \dim(\text{Bild}(A)) &= n - \text{Rang}(A) + \text{Rang}(A) \\ &= n = \dim(\mathbb{K}^n).\end{aligned}$$

Das ist die **Dimensionsformel** für Matrizen, die einen Zusammenhang zwischen der Dimension des Kerns und der Dimension des Bildes herstellt.

Dimensionsformel für lineare Abbildungen

Sei $f: V \rightarrow W$ linear und V endlichdimensional. Dann gilt

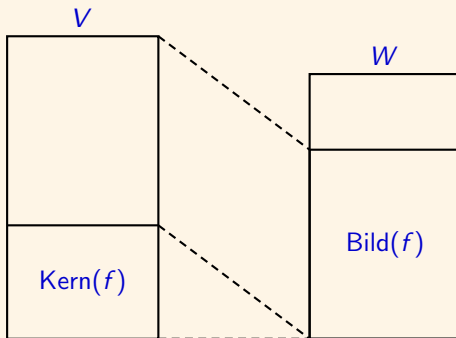
$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)).$$

Interpretation

Die folgende Skizze veranschaulicht die Dimensionsformel

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f)).$$

V ist aufgeteilt in den Kern von f (diese Vektoren werden auf $0 \in W$ abgebildet) und den Rest, der auf $\text{Bild}(f)$ abgebildet wird.



Folgerungen aus der Dimensionsformel

Sei $f: V \rightarrow W$ linear. Dann gilt:

- (1) f ist injektiv $\Leftrightarrow \text{Kern}(f) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(\text{Kern}(f)) = 0$.
- (2) f ist surjektiv $\Leftrightarrow \text{Bild}(f) = W \Leftrightarrow \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(W)$.
Dabei gilt die letzte Äquivalenz nur falls $\dim(W) < \infty$.
- (3) Wenn $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, so gilt:
 f ist bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist injektiv $\Leftrightarrow f$ ist surjektiv.

Beispiel

$f: \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}[z]_{\leq 2}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto az^2 + b$ ist linear.

- f ist nicht injektiv, da $\dim(\text{Kern}(f)) = 2 \neq 0$.
- f ist nicht surjektiv, da $\dim(\text{Bild}(f)) = 2 \neq \dim(\mathbb{R}[z]_{\leq 2}) = 3$.

Beispiel

$f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ ist linear mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$

- $\text{Rang}(A) = 3 \implies \dim(\text{Bild}(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$
 $\implies f$ ist surjektiv
- $\dim(\text{Kern}(f)) = n - \text{Rang}(A) = 5 - 3 = 2 \neq 0$
 $\implies f$ ist nicht injektiv

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

16. Vorlesung: Koordinaten und Matrixdarstellung

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Wiederholung Vorlesung 11

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann lässt sich jeder Vektor $v \in V$ schreiben als

$$v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n,$$

wobei die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ **eindeutig bestimmt** sind und **Koordinaten** von v heißen. Der Vektor

$$\vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

heißt der **Koordinatenvektor** von v bzgl. \mathcal{B} .

Definition (Koordinatenabbildung)

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$. Die **Koordinatenabbildung** von V bzgl. \mathcal{B} ist die Abbildung

$$K_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad v = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \mapsto \vec{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Eigenschaften der Koordinatenabbildung

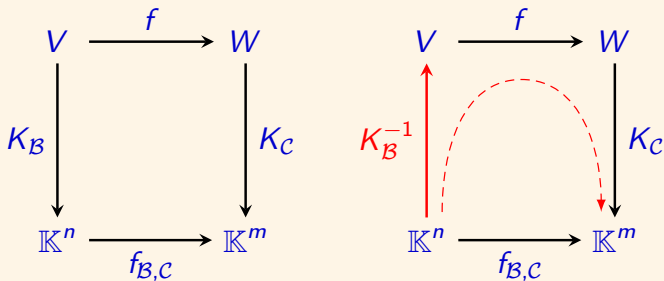
Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$. Die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}}$ ist linear und bijektiv. Die Inverse ist

$$K_{\mathcal{B}}^{-1}: \mathbb{K}^n \rightarrow V, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \mapsto v = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n.$$

Beschreibe eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ durch eine Matrix

(1) V endlichdimensional mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$

(2) W endlichdimensional mit Basis $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$



Es gilt $f_{B,C} = K_C \circ f \circ K_B^{-1}$.

Idee: $f_{B,C}(e_i) = K_C(f(K_B^{-1}(e_i))) = K_C(f(b_i))$ ist die i -te Spalte von $f_{B,C}$, wobei $e_i \in \mathbb{K}^n$ der i -te Standardbasisvektor ist.

Definition (Darstellende Matrix)

Sei $f: V \rightarrow W$ linear, wobei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ eine Basis von W ist. Dann heißt die Matrix

$$f_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} := \begin{bmatrix} K_{\mathcal{C}}(f(b_1)) & K_{\mathcal{C}}(f(b_2)) & \dots & K_{\mathcal{C}}(f(b_n)) \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{m, n}$$

die **darstellende Matrix** von f bzgl. \mathcal{B} und \mathcal{C} oder auch **Matrixdarstellung** von f bzgl. \mathcal{B} und \mathcal{C} .

Bemerkung

(1) Es gilt $f_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = K_{\mathcal{C}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}$, wobei

$$f_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(e_i) = K_{\mathcal{C}}(f(K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i))) = K_{\mathcal{C}}(f(b_i))$$

die i -te Spalte von $f_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ ist.

(2) **Hinweis:** $K_{\mathcal{B}}(b_i) = e_i$ da

$$b_i = 0 \cdot b_1 + \dots + 0 \cdot b_{i-1} + 1 \cdot b_i + 0 \cdot b_{i+1} + \dots + 0 \cdot b_n$$

$$\text{Somit: } K_{\mathcal{B}}(b_i) = e_i \iff K_{\mathcal{B}}^{-1}(K_{\mathcal{B}}(b_i)) = K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i)$$

$$\iff b_i = K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_i)$$

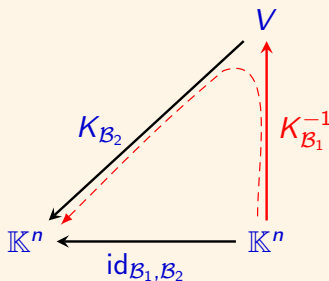
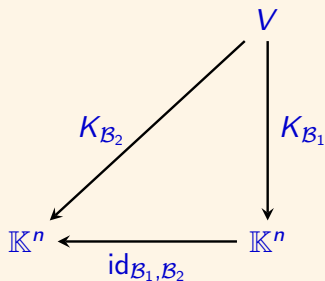


Vorüberlegungen

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit den Basen

$$\mathcal{B}_1 = \{b_1, \dots, b_n\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_2 = \{b'_1, \dots, b'_n\}.$$

Wie rechnet man die Koordinaten für verschiedene Basen \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 des \mathbb{K} -Vektorraums V ineinander um?



Es gilt: $\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$.

Bestimmung von $\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$

Es gilt:

$$\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(e_i) = K_{\mathcal{B}_2}(K_{\mathcal{B}_1}^{-1}(e_i)) = K_{\mathcal{B}_2}(b_i)$$

ist die i -te Spalte von $\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$, wobei $e_i \in \mathbb{K}^n$ der i -te Standardbasisvektor ist.

Bemerkung

- (1) Die Matrix $\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ heißt **Basiswechselmatrix** oder **Basisübergangsmatrix** oder **Transformationsmatrix**.
- (2) Sei V ein Vektorraum mit endlichen Basen \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 . Dann gilt für alle $v \in V$

$$\vec{v}_{\mathcal{B}_2} = \text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \vec{v}_{\mathcal{B}_1},$$

Darstellende Matrix bei Basiswechsel

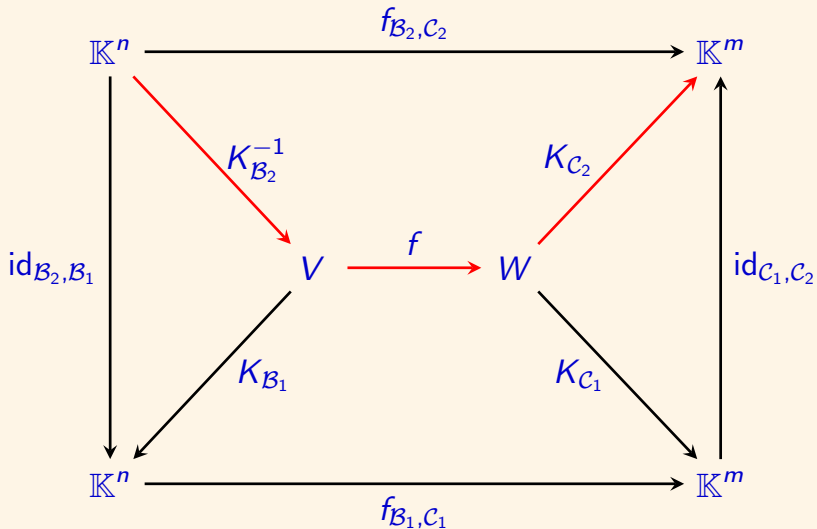
Sei $f: V \rightarrow W$ linear, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ Basen von V und $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ Basen von W . Dann gilt

$$f_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2} = \text{id}_{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2} f_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1} \text{id}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1},$$

d.h., wir erhalten die neue Matrixdarstellung aus der alten, indem wir mit den entsprechenden Basiswechselmatrizen multiplizieren.

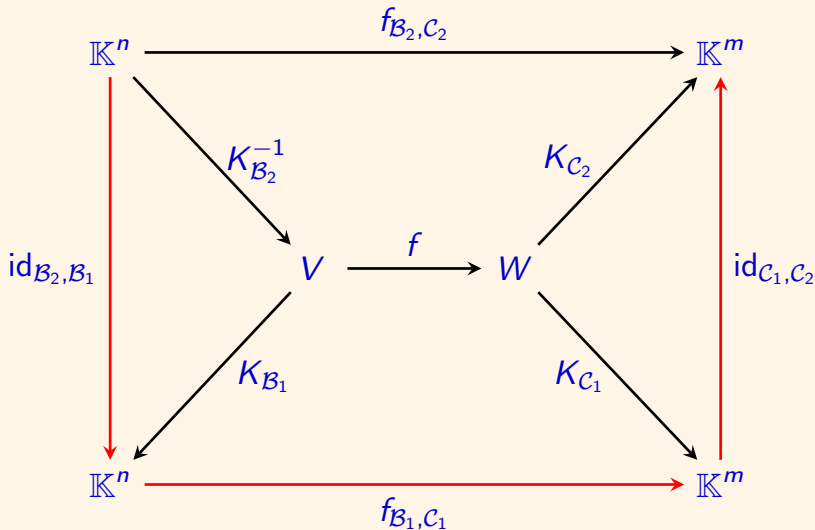
Darstellende Matrix bei Basiswechsel

Bisher: $f_{B_2, C_2} = K_{C_2} \circ f \circ K_{B_2}^{-1}$



Darstellende Matrix bei Basiswechsel

Jetzt: $f_{B_2, C_2} = \text{id}_{C_1, C_2} f_{B_1, C_1} \text{id}_{B_2, B_1}$ (Folie 181)



Beispiel: Bestimmen $f_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^{3,2}$ mittels $f_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = K_{\mathcal{C}} \circ f \circ K_{\mathcal{B}}^{-1}$

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$W = \mathbb{R}[z]_{\leq 2}, \quad \mathcal{C} = \{c_1 = z^2 + 1, c_2 = z - 1, c_3 = 1\}$$

$$f: V \rightarrow W, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mapsto (a+b)z^2 - bz \text{ ist linear}$$

1. Spalte

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(e_1) &= K_{\mathcal{C}}(f(K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_1))) = K_{\mathcal{C}}(f(b_1)) = K_{\mathcal{C}}\left(f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= K_{\mathcal{C}}(z^2) = K_{\mathcal{C}}(\mathbf{1} \cdot (z^2 + 1) + \mathbf{0} \cdot (z - 1) + (-\mathbf{1}) \cdot 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Spalte

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(e_2) &= K_{\mathcal{C}}(f(K_{\mathcal{B}}^{-1}(e_2))) = K_{\mathcal{C}}(f(b_2)) = K_{\mathcal{C}}\left(f\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right) = \\ &K_{\mathcal{C}}(z^2 - z) = K_{\mathcal{C}}(\mathbf{1} \cdot (z^2 + 1) + (-\mathbf{1}) \cdot (z - 1) + (-\mathbf{2}) \cdot 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

17. Vorlesung: Konvergenz von Zahlenfolgen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Folge, Zahlenfolge)

Eine **Folge** (auch **Zahlenfolge**) reeller Zahlen ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

Schreibweisen: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (a_0, a_1, a_2, \dots) .

Das Element a_n heißt **n -tes Folgenglied** und n ist der zugehörige **Index**.

Bemerkungen

(1) Allgemeiner kann man auch Folgen $(a_n)_{n \geq n_0}$, also

$$a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots,$$

für beliebiges $n_0 \in \mathbb{Z}$ betrachten.

(2) Genauso können wir Folgen komplexer Zahlen betrachten, bei denen die a_n dann komplexe Zahlen sein können.

Definition (Beschränktheit und Monotonie von Folgen)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt

- (1) **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ gibt mit $m \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (2) **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (3) **beschränkt**, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (4) **monoton wachsend**, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (5) **streng monoton wachsend**, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (6) **monoton fallend**, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (7) **streng monoton fallend**, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir sagen kurz **(streng) monoton**, wenn die Folge (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Definition (Konvergenz einer Zahlenfolge)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

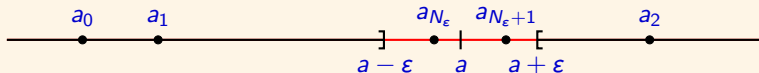
Die Zahl a heißt der **Grenzwert** (oder **Limes**) der Folge.

Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder „ $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ “ oder kurz „ $a_n \rightarrow a$ “.

- Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **konvergent**, falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Grenzwert hat.
- Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **divergent**, falls sie nicht konvergent ist.
- Eine Folge, die gegen Null konvergiert, heißt **Nullfolge**.
- **Hinweis:** N_ε hängt von ε ab.

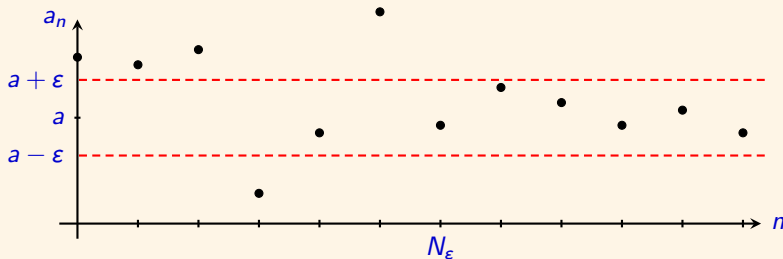
Interpretation auf der Zahlengerade

Konvergenz gegen $a \in \mathbb{R}$ bedeutet, dass für jedes $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder (ab N_ε) in dem roten Intervall liegen:



Weitere Interpretation

Konvergenz bedeutet, dass für jedes $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder (ab N_ε) in dem „ ε -Schlauch“ um a liegen:



Bemerkung

(1) Ende gut, alles gut!

Das Verhalten der ersten m Folgenglieder a_0, a_1, \dots, a_{m-1} hat keinen Einfluss auf die Konvergenz einer Folge.

Genauer gesagt ist die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ genau dann konvergent, wenn für ein n_0 die Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ konvergent ist.

(2) Analog definiert man Konvergenz für komplexe Zahlen $a_n \in \mathbb{C}$ mit $n \in \mathbb{N}$:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ (hier: $\varepsilon \in \mathbb{R}$) ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N_\varepsilon.$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann beschränkt, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nur Monotonie können wir nicht mehr erklären, da wir komplexe Zahlen nicht anordnen können.

Eigenschaften konvergenter Folgen

- (1) Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.
- (2) Konvergente Folgen sind beschränkt.
- (3) Unbeschränkte Folgen sind divergent.

Bemerkung

(i) Die Umkehrung in (2) gilt i.A. nicht, z.B. ist $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, aber nicht konvergent.

(ii) Die Folgen

$$a_n = n,$$

$$b_n = (-1)^n n,$$

$$c_n = n^2$$

sind unbeschränkt, also divergent.

Definition (Bestimmte Divergenz)

- (1) Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent** gegen $+\infty$, falls zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n > M \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

- (2) Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent** gegen $-\infty$, falls zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n < M \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Bemerkung

Manche Autor*innen verwenden statt **bestimmt divergent** gegen $+\infty$ auch den Begriff **uneigentlich konvergent** gegen $+\infty$. Wir machen das nicht. „Konvergent“ bedeutet immer „konvergent gegen eine reelle Zahl“.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

18. Vorlesung: Berechnung von Grenzwerten

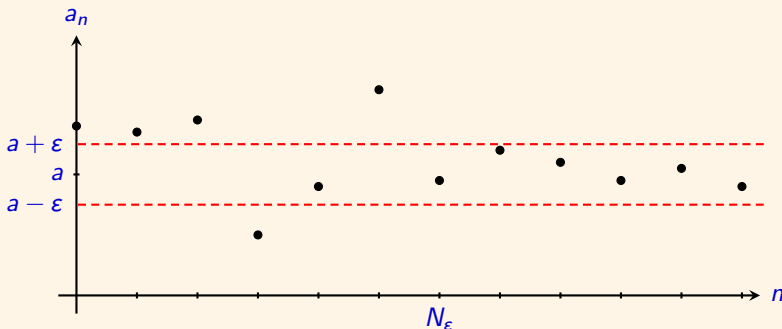
Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Wiederholung: Konvergenz einer Zahlenfolge

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Zahl a heißt der **Grenzwert** (oder **Limes**) der Folge.



Grenzwertsätze

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b.$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = ab.$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ca \quad \text{für } c \in \mathbb{R}.$$

(4) Ist $b \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Hinweis

Wenn die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergieren, dann gelten die Grenzwertsätze i.A. nicht.

Gegenbeispiel:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = \underbrace{\infty \cdot 0}_{\text{nicht definiert}}.$$

Wo liegt der Fehler? $\lim_{n \rightarrow \infty} n$ ist **nicht** konvergent.

Grenzwertbildung erhält schwache Ungleichungen (also „ \leq “, „ \geq “)

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

und sei $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $a \leq b$.

Hinweis

Aus $a_n < b_n$ folgt ebenfalls nur $a \leq b$.

Die strikte Ungleichung geht im Grenzwert verloren.

Gegenbeispiel: Seien $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ und $b_n = 1 + \frac{1}{n}$. Dann gilt

$$a_n < b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aber: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Sandwich-Theorem

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei reelle Folgen mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle } n$$

und mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

Dann konvergiert auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a , d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

Folgerung aus dem Sandwich-Theorem

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, dann ist $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Das Monotoniekriterium

Jede beschränkte und monotone Folge reeller Zahlen ist konvergent.

Bemerkung

- (1) **Achtung:** Das Monotoniekriterium ist nur hinreichend, aber nicht notwendig. Zwar ist jede konvergente Folge beschränkt, aber nicht notwendigerweise monoton: zum Beispiel konvergiert

$$\left(\frac{(-1)^n}{n} \right)_{n \geq 1},$$

ist aber nicht monoton.

- (2) Monotone Folgen, die nicht beschränkt sind, sind bestimmt divergent.

Wurzelfolge

$$a_0 > 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right), \quad n \geq 0,$$

Diese Folge ist beschränkt und monoton fallend (für alle $n \geq 1$), also konvergent. Der Grenzwert ist $\sqrt{2}$.

Eulerfolge

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad n \geq 1$$

Diese Folge ist beschränkt und monoton wachsend, also konvergent. Der Grenzwert ist die Eulersche Zahl

$$e = 2,718281828459045235360287471352....$$

Hinweis

Man muss zuerst die Konvergenz überprüfen bevor man den Grenzwert bestimmt.

Gegenbeispiel: Sei $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 3 - a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Falsch:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (3 - a_n) = 3 - a \\ \Rightarrow \quad a &= 3 - a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Richtig: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$ ist divergent.

Geometrische Folge

Für $q \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } -1 < q < 1, \\ 1, & \text{falls } q = 1, \\ +\infty, & \text{falls } 1 < q, \\ \text{divergent,} & \text{falls } q \leq -1. \end{cases}$$

Weitere Beispiele

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha q^n = 0 \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}, |q| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{e^{\beta n}} = 0 \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0 \text{ für } \alpha > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1 \text{ für } x > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Geometrische Summe (vgl. Vorlesung 2)

Für $q \in \mathbb{R}$ ist

$$s_n := \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & \text{falls } q \neq 1, \\ n + 1, & \text{falls } q = 1. \end{cases}$$

Geometrische Reihe

Für $q \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1}{1 - q}, & \text{falls } |q| < 1, \\ +\infty, & \text{falls } q \geq 1, \\ \text{divergent,} & \text{falls } q \leq -1. \end{cases}$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

19. Vorlesung: Stetigkeit

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Konvergenz, Grenzwerte von Funktionen)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ($D \subseteq \mathbb{R}$) und sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Wir sagen, f hat für x gegen a den **Grenzwert** $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, in Zeichen

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c,$$

falls gilt:

(1) Für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

(a) $x_n \in D$,

(b) $x_n \neq a$,

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$.

(2) Es gibt mindestens eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit (a)–(c).

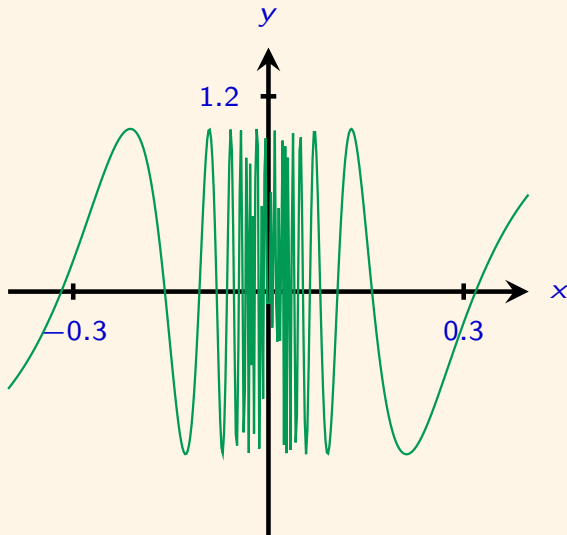
Bemerkung

- (1) a kann im Definitionsbereich von f sein, muss aber nicht.
- (2) In der Definition setzen wir voraus, dass es Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergieren:

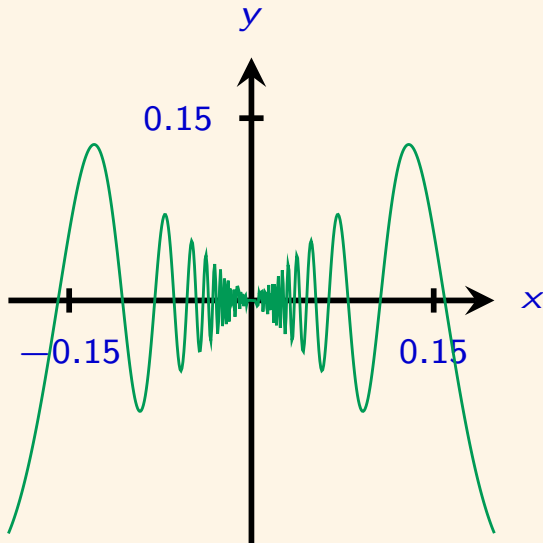
Der Punkt a **muss** von $D \setminus \{a\}$ „erreichbar“ sein.

Beispiel: Der Punkt $a = 3$ für $D = [0, 2] \cup \{3\}$ ist nicht aus $D \setminus \{3\} = [0, 2]$ erreichbar.

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



Grenzwertsätze für Funktionen

Sind $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c + d,$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = cd,$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha c \text{ für jedes } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{c}{d}, \text{ falls } d \neq 0.$$

$a = \pm\infty$ ist auch erlaubt, aber $c, d \in \mathbb{R}$.

Bemerkung

- Aus (1) und (3) folgt: Die Grenzwertbildung ist linear.
- Sandwich-Prinzip gilt auch für Grenzwerte von Funktionen.

Definition (Linksseitiger Grenzwert)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ($D \subseteq \mathbb{R}$) und sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Wir sagen, f hat für x gegen a den **linksseitigen Grenzwert** $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, in Zeichen

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = c \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c,$$

falls gilt:

(1) Für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

(a) $x_n \in D$,

(b) $x_n < a$,

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$.

(2) Es gibt mindestens eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit (a)–(c).

Unterschied zur Konvergenz auf Folie 205:

In (b) fordern wir nun $x_n < a$ anstatt $x_n \neq a$.

Definition (Rechtsseitiger Grenzwert)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ($D \subseteq \mathbb{R}$) und sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Wir sagen, f hat für x gegen a den **rechtsseitigen Grenzwert** $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, in Zeichen

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = c \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c,$$

falls gilt:

(1) Für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

(a) $x_n \in D$,

(b) $x_n > a$,

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$,

ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$.

(2) Es gibt mindestens eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit (a)–(c).

Unterschied zur Konvergenz auf Folie 205:

In (b) fordern wir nun $x_n > a$ anstatt $x_n \neq a$.

Bemerkung

- (1) Es gelten die gleichen Rechenregeln wie auf Folie 209 (Grenzwertsätze für Funktionen).
- (2) Man kann zeigen:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \iff \lim_{x \nearrow a} f(x) = c = \lim_{x \searrow a} f(x),$$

d.h. die Funktion hat den Grenzwert c für x gegen a genau dann, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren **und** beide gleich c sind.

Definition (Stetigkeit)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion.

(1) f heißt stetig in $a \in D$, falls gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (*)$$

Dies bedeutet, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ mit $x_n \neq a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right),$$

d.h. „ f vertauscht mit Limesbildung“.

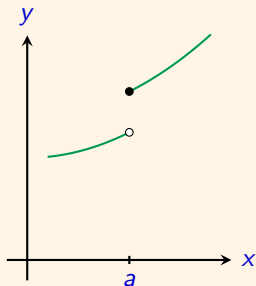
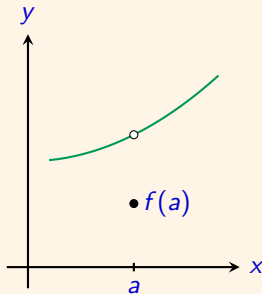
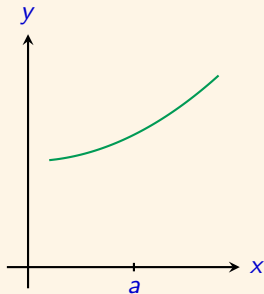
Gleichung $(*)$ beinhaltet zwei Bedingungen:

(i) Der Grenzwert existiert.

(ii) Dieser Grenzwert ist gleich $f(a)$.

(2) f heißt stetig auf D , falls f in allen $a \in D$ stetig ist.

Interpretation der Stetigkeit



Links oben: Funktion ist stetig.

Rechts oben: Funktion ist unstetig,
da $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Links: Funktion ist unstetig,
da $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ nicht existiert.

Rechenregeln für stetige Funktionen

- (1) Sind $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so sind $f + g$, $f - g$, αf für $\alpha \in \mathbb{R}$ und fg in D stetig.
- (2) Sind $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f/g in $D \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$ stetig, also überall dort wo f/g gebildet werden kann.
- (3) Sind $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g(E) \subseteq D$, so ist auch die Komposition $f \circ g: E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(g(x))$ in E stetig.

Bemerkung

Aus (1) folgt, dass die stetigen Funktionen einen Vektorraum bilden. Genauer: Die stetigen Funktionen bilden einen Teilraum von $\{f: D \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Stetige Fortsetzbarkeit

Sei $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei I ein Intervall ist und $a \in I$. Wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \in \mathbb{R}$ existiert, so können wir die Funktion

$$g: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \neq a \\ c, & \text{falls } x = a \end{cases}$$

definieren, die dann stetig auf ganz I ist.

Diese Funktion setzt f von $I \setminus \{a\}$ nach I fort und wird eine **stetige Fortsetzung** von f genannt. Häufig nennt man g auch wieder f .

Beispiele zur Stetigkeit

(1) Polynome

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$$

mit gegebenen $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ sind als Summe von Produkten von stetigen Funktionen selbst wieder stetig.

(2) Wurzelfunktionen, d.h. Funktionen der Form

$$f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[, \quad x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$$

mit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, sind stetig.

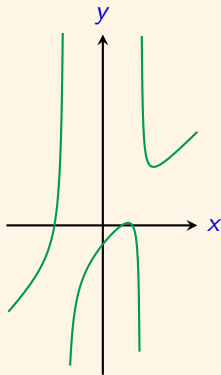
Beispiele zur Stetigkeit

(3) Rationale Funktionen sind stetig.

Der Definitionsbereich von

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^3 - 5x + 4}{x^2 - 4}$$

ist $D = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$. Die Funktion f ist stetig, da f stetig ist in allen $a \in D$ als Quotient stetiger Funktionen.

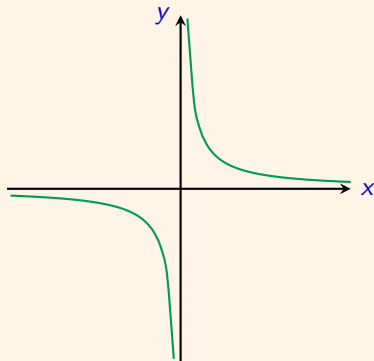


(4) Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

ist stetig, da f stetig ist in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hinweis: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht und daher lässt sich f nicht stetig auf \mathbb{R} fortsetzen. f hat in $x = 0$ eine nicht hebbare Polstelle.

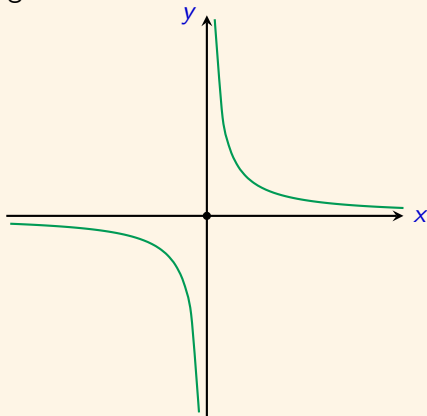


Beispiele zur Stetigkeit

(5) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

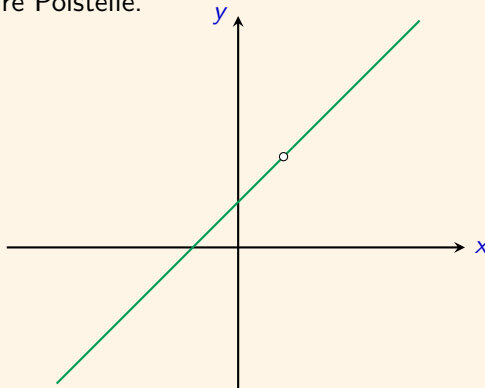
ist **nicht** stetig.



(6) Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ist stetig. Außerdem existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ und f lässt sich stetig auf \mathbb{R} fortsetzen. Man sagt, f hat in $x = 1$ eine hebbare Polstelle.

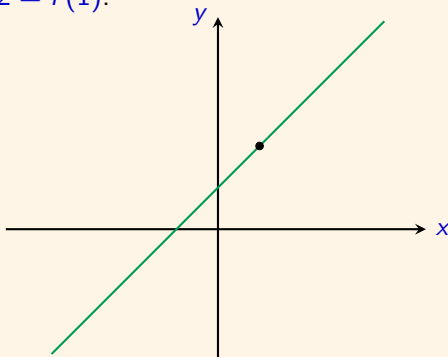


Beispiele zur Stetigkeit

(7) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{falls } x \neq 1 \\ 2 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

ist stetig, denn f ist als Quotient von Polynomen stetig in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und ist stetig in $x = 1$, denn $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 = f(1)$.

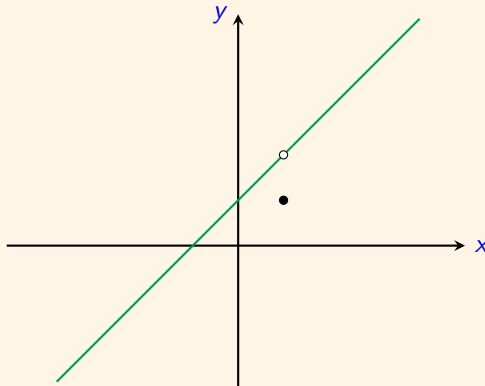


Beispiele zur Stetigkeit

(8) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{falls } x \neq 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

ist **nicht** stetig in $x = 1$, da $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq f(1) = 1$.



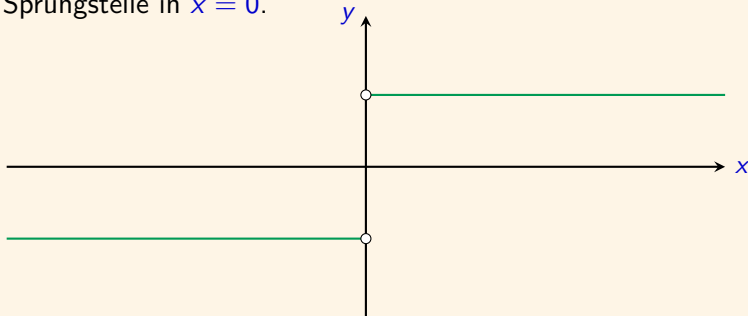
Beispiele zur Stetigkeit

(9) Die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist stetig, da f stetig in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.

Hinweis: Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht und daher lässt sich f nicht stetig auf \mathbb{R} fortsetzen. Man sagt, f hat eine Sprungstelle in $x = 0$.

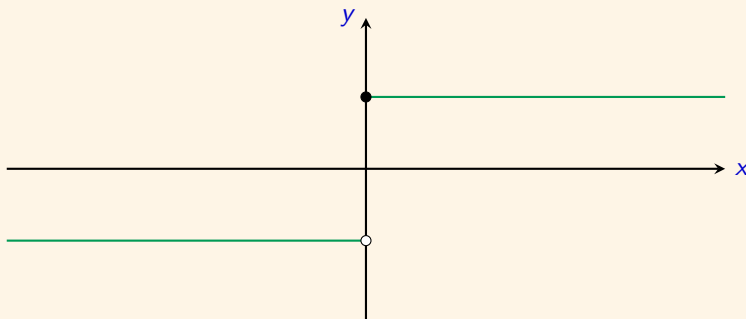


Beispiele zur Stetigkeit

(10) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist **nicht** stetig, da f nicht stetig in $x = 0$ ist, da der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nicht existiert.



Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

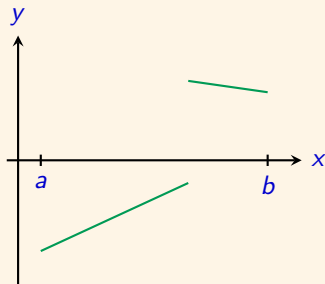
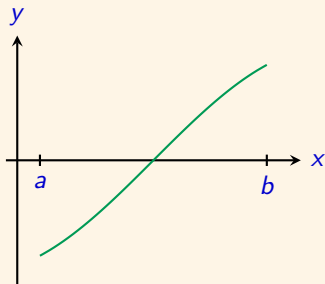
20. Vorlesung:

Sätze über stetige Funktionen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Nullstellensatz von Bolzano (Spezialfall des Zwischenwertsatzes)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Sind dann $a, b \in I$ mit $a < b$ und $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder umgekehrt $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$), dann hat f mindestens eine Nullstelle in $]a, b[$.



Beweis: Intervallhalbierungsverfahren (=Bisektionsverfahren)

→ Mitschrift

Beispiel: $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2$

Es gilt: $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$

Intervallhalbierungsverfahren

| k | a_k | b_k |
|-----|-----------|-----------|
| 0 | 0.0000000 | 2.0000000 |
| 1 | 1.0000000 | 2.0000000 |
| 2 | 1.0000000 | 1.5000000 |
| 3 | 1.2500000 | 1.5000000 |
| 4 | 1.3750000 | 1.5000000 |
| 5 | 1.3750000 | 1.4375000 |
| 6 | 1.4062500 | 1.4375000 |
| 7 | 1.4062500 | 1.4218750 |
| 8 | 1.4140625 | 1.4218750 |
| 9 | 1.4140625 | 1.4179688 |
| 10 | 1.4140625 | 1.4160156 |

Wurzelfolge (VL 18)

$x_0 > 0$ und

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$$

| k | x_k |
|-----|-----------|
| 0 | 1.0000000 |
| 1 | 1.5000000 |
| 2 | 1.4166666 |
| 3 | 1.4142156 |
| 4 | 1.4142135 |

Korrekte Stellen
sind rot markiert.

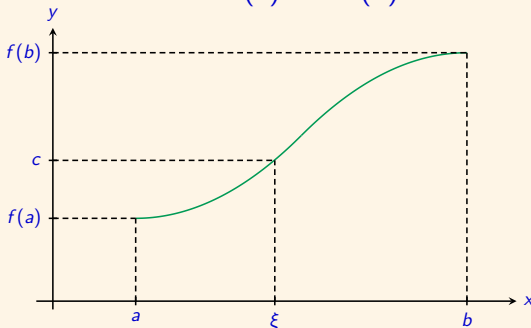
Fazit: Die Wurzelfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert viel schneller gegen $\sqrt{2} = 1.41421356237\dots$ als die beiden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Zwischenwertsatz (kurz: ZWS)

Seien $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, $a, b \in I$ und c ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es mindestens ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = c$.

Bemerkung

- (1) Für $c = 0$ ist dies der Nullstellensatz von Bolzano (Folie 227).
- (2) Interpretation des Zwischenwertsatzes: Eine stetige Funktion f nimmt alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



Definition (Maximum und Minimum)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt $x_0 \in D$ eine

- (1) **Maximalstelle** (oder **Stelle eines Maximums**), wenn $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D$ ist.

Der Wert $f(x_0)$ ist der größte Funktionswert, den f auf D annimmt und heißt das **Maximum** von f .

Bezeichnung: $\max_{x \in D} f(x)$ oder nur $\max f$.

- (2) **Minimalstelle** (oder **Stelle eines Minimums**), wenn $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$ ist.

Der Wert $f(x_0)$ ist der kleinste Funktionswert, den f auf D annimmt und heißt das **Minimum** von f .

Bezeichnung: $\min_{x \in D} f(x)$ oder nur $\min f$.

Ein **Extremum** bezeichnet ein Maximum oder Minimum und eine **Extremalstelle** ist eine zugehörige Maximal- oder Minimalstelle.

Plural: Maxima, Minima, Extrema.

Definition (Infimum und Supremum)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

(1) $y^* \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ist das **Supremum** von f , geschrieben $y^* = \sup_{x \in D} f(x) = \sup f$, wenn gilt:

(a) $f(x) \leq y^*$ für alle $x \in D$, d.h. y^* ist eine obere Schranke;

(b) es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y^*$.

(2) $y_* \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ist das **Infimum** von f , geschrieben $y_* = \inf_{x \in D} f(x) = \inf f$, wenn gilt:

(a) $f(x) \geq y_*$ für alle $x \in D$, d.h. y_* ist eine untere Schranke;

(b) es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_*$.

Dabei gilt für das Supremum und das Infimum: Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ braucht nicht zu konvergieren.

Bemerkung

- (1) Man definiert das **Supremum** als die **kleinste obere Schranke** der Funktion, d.h. man sucht den kleinsten Wert M mit $f(x) \leq M$ für alle x im Definitionsbereich von f . Analog definiert man das **Infimum** als die **größte untere Schranke** der Funktion.
- (2) Jede Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ hat ein Supremum und ein Infimum.
- (3) Nimmt f sein Supremum an, d.h. gibt es ein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \sup_{x \in D} f(x)$, so ist das Supremum von f auch ein Maximum.
- (4) Nimmt f sein Infimum an, d.h. gibt es ein $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \inf_{x \in D} f(x)$, so ist das Infimum von f auch ein Minimum.
- (5) Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann so gewählt werden, dass sie monoton ist.

Satz vom Minimum und Maximum

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es Stellen $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \quad \text{für alle } x \in [a, b],$$

d.h. f nimmt auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Satz vom Minimum und Maximum (Kurzform)

Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen besitzen ein Minimum und ein Maximum.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

21. Vorlesung: Differenzierbarkeit

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Differenzierbarkeit)

Sei $f: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

(1) f heißt **differenzierbar** in $x_0 \in D$, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt **Ableitung** von f in x_0 .

(2) f heißt **differenzierbar auf D** , falls f in allen $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Dann heißt die Abbildung

$$f': D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x),$$

die **Ableitung** von f .

Bemerkung

(1) **Achtung:** Damit der Grenzwert für $f'(x_0)$ überhaupt definiert ist, muss es Folgen in $D \setminus \{x_0\}$ geben, die gegen x_0 konvergieren. In „isolierten Punkten“ kann man nicht ableiten. Für $D =]-3, 2[\cup \{3\}$ ist z.B. 3 ein Punkt, in dem man nicht ableiten kann.

(2) **Umformulierung der Definition:** Mit $h := x - x_0$ ist

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

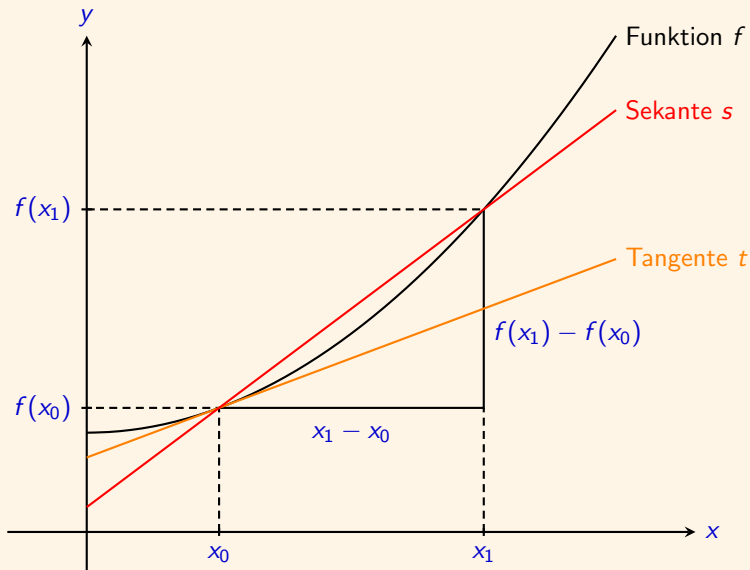
(3) **Weitere Schreibweisen:** Schreibt man x statt x_0 und Δx statt h und $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, so hat man die weiteren Schreibweisen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x).$$

Das Δ wird oft als Differenz zweier Werte gedacht.

(4) In der Physik wird oft $\dot{f}(t)$ statt $f'(t)$ geschrieben, wenn t die Zeit bezeichnet.

Geometrische Interpretation

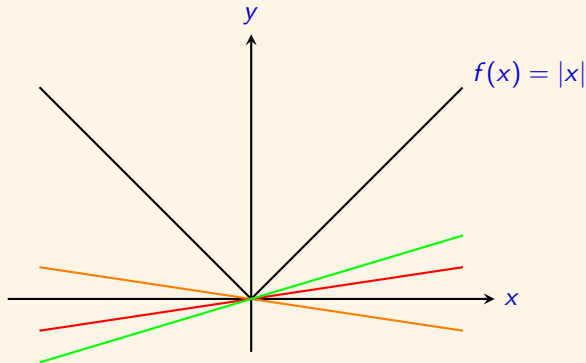


Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

Ist f in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Bemerkung

Die Umkehrung der obigen Aussage gilt im Allgemeinen nicht. Stetige Funktionen müssen nicht differenzierbar sein, z. B. ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ stetig auf \mathbb{R} , aber nicht differenzierbar in $x_0 = 0$.



Ableitungsregeln

Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in D$. Dann gilt:

(1) **Additivität:** $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(2) **Homogenität:** $(cf)'(x) = cf'(x)$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

(3) **Produktregel:** $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(4) **Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}, g(x) \neq 0$.

Insbesondere gilt: $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$.

(5) **Kettenregel:** Ist $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar und $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ in $g(x)$ mit $g(D) \subseteq E \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt
 $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Wegen (1) und (2) bilden differenzierbare Funktionen einen Vektorraum, der ein Teilraum des Vektorraums der stetigen Funktionen ist. Ableiten ist eine lineare Abbildung.

$$\sin'(x) = \cos(x), \cos'(x) = -\sin(x), \exp'(x) = \exp(x) \quad (\rightarrow \text{VL 26})$$

Nutzen: (*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ und (**) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$.

(*) bereits in VL 19 gezeigt. Beweis für (**):

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x) - 1}{x} &= \frac{(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)}{x(\cos(x) + 1)} = \frac{\cos(x)^2 - 1}{x(\cos(x) + 1)} \\ &= \frac{-\sin(x)^2}{x(\cos(x) + 1)} = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + 1} \rightarrow 1 \cdot \frac{-0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Dann gilt mit den Additionstheoremen

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h} \\ &= \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \frac{\sin(h)}{h} \cos(x) \rightarrow \cos(x) \\ \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \frac{\sin(h)}{h} \rightarrow -\sin(x) \end{aligned}$$



Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

22. Vorlesung:

Erste Anwendungen der Differenzierbarkeit

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Ableitung der Umkehrfunktion

Seien I und J Intervalle. Sei $f: I \rightarrow J$ differenzierbar und umkehrbar mit $f'(x) \neq 0$ für $x \in I$. Dann ist auch $f^{-1}: J \rightarrow I$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Bemerkung

Die Differenzierbarkeit von f^{-1} folgt bereits aus den obigen Voraussetzung und muss nicht extra gefordert werden. Der Beweis der Differenzierbarkeit von f^{-1} ist nicht ganz einfach zu zeigen.

Newton-Verfahren

Wähle einen Startwert x_0 „nahe“ der Nullstelle x^* von f . Ist x_n gegeben, konstruieren wir x_{n+1} wie folgt: Wir approximieren f in x_n durch ihre Tangente,

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

und bestimmen x_{n+1} als Nullstelle der Tangente, also aus

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Auflösen ergibt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Dabei setzen wir voraus, dass $f'(x_n) \neq 0$, und auch dass $f'(x^*) \neq 0$. Unter gewissen Voraussetzungen konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Nullstelle von f .

→ Numerische Mathematik I für Ingenieurwissenschaften

Beispiel: Sei $f(x) = x^2 - a$ mit $a > 0$

Die Nullstellen sind $\pm\sqrt{a}$ und es ist $f'(x) = 2x$.

$$\text{Ansatz: } x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)}_{\substack{\text{Wurzelfolge} \\ \text{aus VL 18 f\"ur } a=2}}.$$

Sei $a = 3$. Was ist $\sqrt{3}$? Wähle $x_0 = 2$, dann ist

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = 1 + \frac{3}{4} = 1.75,$$

also ist schon die erste Nachkommastelle korrekt. Die weiteren Folgenglieder sind (mit $x_0 = 2$ als Startwert):

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1.7500000000000000 & x_3 = 1.732050810014727 \\ x_2 = 1.732142857142857 & x_4 = 1.732050807568877, \end{array}$$

wobei korrekte Stellen rot markiert sind. Schon nach vier Schritten sind 15 Nachkommastellen korrekt berechnet.

Definition (Höhere Ableitungen)

Ist $f: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz D differenzierbar, so ist $f': D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, wieder eine Funktion. Ist f' differenzierbar, so schreiben wir $f'' = (f')'$ für die **zweite Ableitung** von f .

Wir definieren die k -te Ableitung von f per Induktion:

$$f^{(0)} := f, \quad f^{(k)} := (f^{(k-1)})' \quad \text{für } k \geq 1.$$

Die 0-te Ableitung ist die Funktion selbst, $f^{(0)} = f$, und es sind $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = (f')' = f''$, usw.

Bemerkung

Beachten Sie: Die Ordnung der Ableitung wird dabei in runden Klammern geschrieben, um Missverständnisse zu vermeiden.

Eine weitere oft verwendete Schreibweise ist

$$\frac{d^k f}{dx^k} := f^{(k)}.$$

Im Fall $k = 1$ schreiben wir nur $\frac{df}{dx}$.

Interpretation der zweiten Ableitung:

- **Geometrische Interpretation:**

$f''(x)$ beschreibt die **Krümmung** des Funktionsgraphen von f in x . Punkte, in denen f'' das Vorzeichen ändert, heißen **Wendepunkte**.

- **Physikalische Interpretation:**

Die zweite Ableitung ist die Ableitung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung, d.h.

$s(t)$: Weg

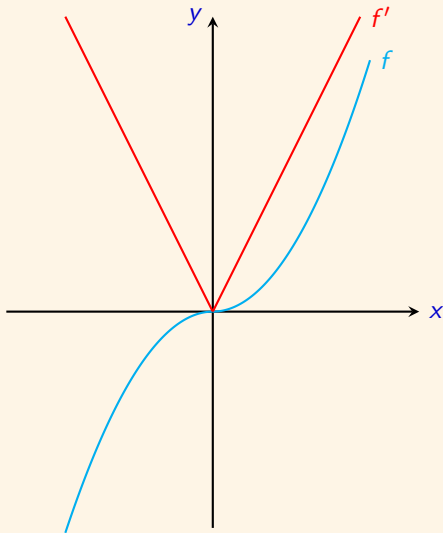
$s'(t)$: Geschwindigkeit

$s''(t)$: Beschleunigung

Bemerkung

Nicht jede differenzierbare Funktion ist auch zweimal differenzierbar.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x|x| \quad \text{und} \quad f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2|x|$$



Regel von Bernoulli/de l'Hospital

Seien $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$.
Weiter gelte

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow b} g(x) \in \{-\infty, \infty\}.$$

Falls

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

existiert (und $g'(x) \neq 0$ für alle x nahe b), dann ist

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Gleiches gilt für Grenzwerte $x \rightarrow a$.

Bemerkung

- (1) Es kommt vor, dass man den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

auch erst mit der Regel von l'Hospital berechnet, die Regel also mehrfach anwendet.

- (2) Bei Grenzwerten „ $0 \cdot \infty$ “ kann man oft umformen und anschließend die Regel von l'Hospital anwenden:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

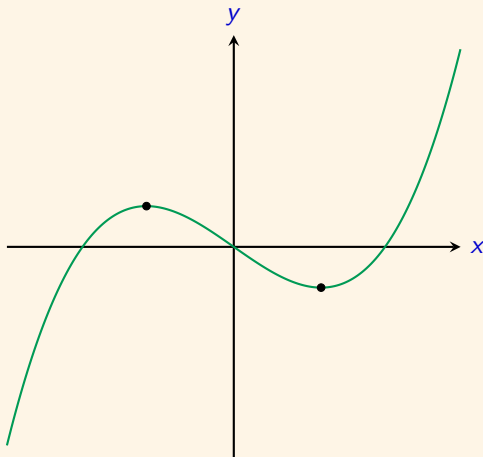
23. Vorlesung:

Mittelwertsatz und Anwendungen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Ziel: Bestimmung von Extremwerten und Extremstellen von differenzierbaren Funktionen

Bisher: Existenz bei stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall



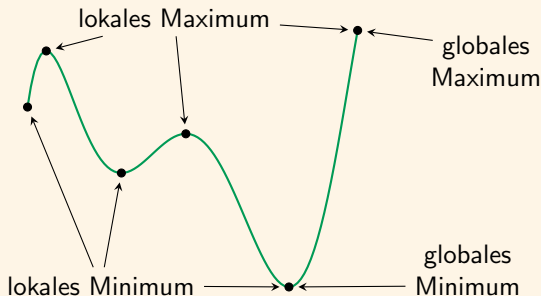
Definition (Lokale und globale Extrema)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Man nennt ein $x_0 \in D$

- (1) **Stelle eines globalen Maximums**, falls $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in D$. Man nennt dann $f(x_0)$ **das globale Maximum** (vgl. VL 20).
- (2) **Stelle eines globalen Minimums**, falls $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in D$. Man nennt dann $f(x_0)$ **das globale Minimum** (vgl. VL 20).
- (3) **Stelle eines lokalen Maximums**, falls es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt $f(x_0) \geq f(x)$. Man nennt dann $f(x_0)$ **ein lokales Maximum**.
- (4) **Stelle eines lokalen Minimums**, falls es $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt $f(x_0) \leq f(x)$. Man nennt dann $f(x_0)$ **ein lokales Minimum**.

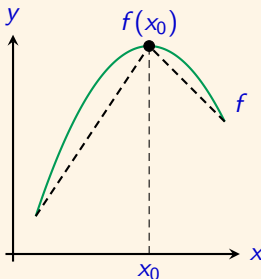
Gilt sogar $>$ statt \geq bzw. $<$ statt \leq und ist $x \in D \setminus \{x_0\}$, so spricht man von **strengen** oder **strikten** lokalen oder globalen Extrema.

Unterschied zwischen lokalen und globalen Maxima/Minima



Das globale Maximum ist der größte Wert, den die Funktion auf ihrem Definitionsbereich annimmt. Dieser Wert ist eindeutig, kann aber an mehreren Stellen angenommen werden. Für ein lokales Maximum reicht es, dass die Funktion in einer kleinen Umgebung kleiner oder gleich diesem Wert ist. Das globale Maximum ist auch ein lokales Maximum. Analoges gilt für globale und lokale Minima.

Nimmt die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt $x_0 \in]a, b[$ ein Maximum an, dann haben die Sekanten links davon eine Steigung ≥ 0 und rechts davon eine Steigung ≤ 0 .



Ist f dann in x_0 differenzierbar, so ist die Ableitung $f'(x_0)$ der Grenzwert der Steigungen der Sekanten, also einerseits ≥ 0 , andererseits ≤ 0 , und deshalb ist $f'(x_0) = 0$.

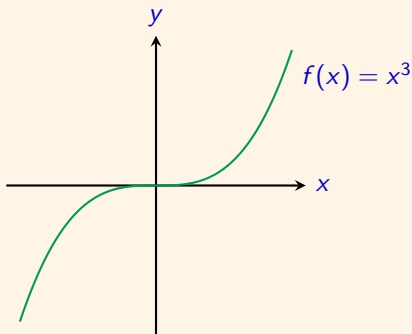
Notwendiges Extremwertkriterium

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ im inneren Punkt x_0 differenzierbar. Wenn x_0 eine lokale Extremstelle ist, so ist die Ableitung dort Null: $f'(x_0) = 0$.

Bemerkung zum notwendigen Extremwertkriterium

- (1) In Randpunkten muss das nicht sein.
- (2) Das ist nur eine **notwendige** Bedingung, d.h.
 - in einem lokalen Extremum ist $f'(x_0) = 0$,
 - aber $f'(x_0) = 0$ kann gelten, ohne dass in x_0 ein lokales Extremum vorliegt.

Ein Beispiel ist $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Dann hat $f'(x) = 3x^2$ eine Nullstelle in 0 , dort hat f aber kein lokales Extremum.



Kandidaten für lokale Extremstellen

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so sind die einzigen Kandidaten für lokale Extremstellen:

- die Randpunkte a und b ,
- die Nullstellen von f' in $]a, b[$. (Die Nullstellen von f' heißen auch **kritische Punkte** oder **stationäre Punkte** von f .)

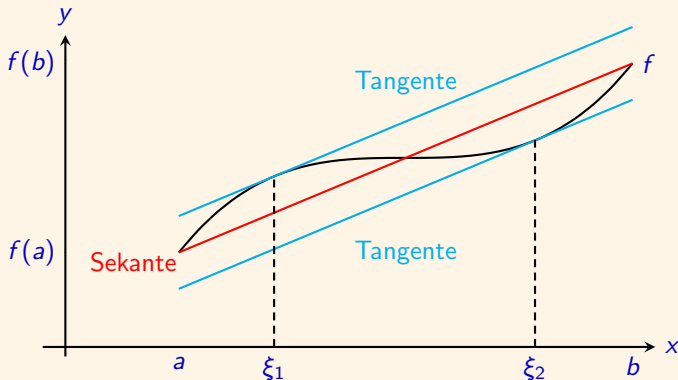
Typischerweise sind das nur endlich viele Punkte und man kann ausprobieren, wo f am größten oder kleinsten ist. Dort sind dann wirklich das globale Maximum und Minimum, da f stetig auf einem abgeschlossenen Intervall ist.

Hinweis: Ist f im Punkt x_0 **nicht** differenzierbar, so kann dort ebenfalls ein lokales Extremum vorliegen.

Mittelwertsatz

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Sind $a, b \in I$ beliebig mit $a < b$, so gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$



Physikalische Interpretation

Bezeichnet $s(t)$ den zum Zeitpunkt t zurückgelegten Weg, so besagt der Mittelwertsatz, dass es einen Zeitpunkt τ gibt, zu dem die Momentangeschwindigkeit gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit ist:

$$v(\tau) = s'(\tau) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

Der Mittelwertsatz ist die Brücke von Ableitungsinformationen zu Informationen über die Funktion selbst.

Schrankensatz

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Ist $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in]a, b[$ und für ein $M > 0$, so ist

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M(x_2 - x_1) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in [a, b] \text{ mit } x_1 < x_2.$$

Monotoniekriterium

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gilt:

- (1) Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f streng monoton wachsend auf $[a, b]$, d.h. für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$.
- (2) Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f streng monoton fallend auf $[a, b]$, d.h. für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_2) < f(x_1)$.
- (3) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in]a, b[$ gilt genau dann, wenn f monoton wachsend auf $[a, b]$ ist, d.h. für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- (4) $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a, b[$ gilt genau dann, wenn f monoton fallend auf $[a, b]$ ist, d.h. für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Bemerkungen zum Monotoniekriterium

- (1) Ist f in einem Randpunkt a oder b (oder in beiden Randpunkten) nicht definiert, so gilt das Monotoniekriterium immer noch, wenn man den betroffenen Punkt aus $[a, b]$ entfernt. Ist z. B. f nicht in a definiert, so ersetzt man $[a, b]$ durch $]a, b]$.
- (2) In (1) und (2) des Monotoniekriteriums gilt nur die Richtung „ \Rightarrow “. Die andere Richtung ist im Allgemeinen falsch. Beispiel: Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ist streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

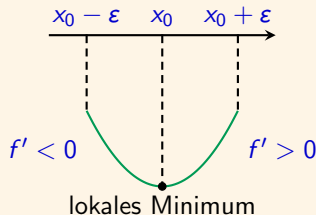
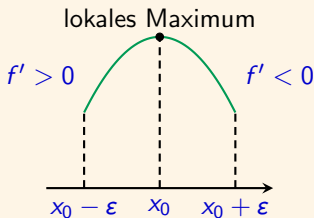
Konstanzkriterium

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar. Dann gilt: $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$ genau dann, wenn f konstant auf $[a, b]$ ist.

Extremwert-Test

Sei f differenzierbar im offenen Intervall $]a, b[$ und sei x_0 ein kritischer Punkt, also $f'(x_0) = 0$. Dann gilt:

- (1) f hat in x_0 ein lokales Maximum, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit:
 $f'(x) > 0$ für alle $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$.
- (2) f hat in x_0 ein lokales Minimum, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit:
 $f'(x) < 0$ für alle $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$.



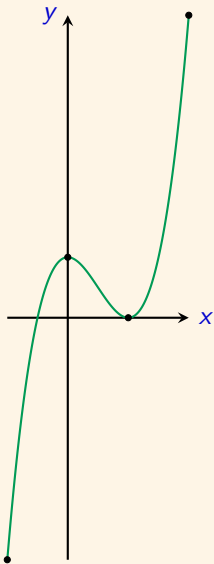
Bemerkung

- (1) Ist $f'(x) > 0$ für alle x links **und** rechts von x_0 (bzw. $f'(x) < 0$), so ist f streng monoton wachsend (bzw. fallend) und hat damit **kein** Extremum.
- (2) Der Test gibt nur für innere Punkte Auskunft. Randpunkte müssen immer getrennt betrachtet werden.
- (3) Ist f in a noch stetig, so gilt:
 - Ist $f'(x) > 0$ in $]a, a + \varepsilon[$, so ist f dort monoton wachsend und f hat in a ein lokales Minimum.
 - Ist $f'(x) < 0$ in $]a, a + \varepsilon[$, so ist f dort monoton fallend und f hat in a ein lokales Maximum.

Analog wenn f in b noch stetig ist:

- Ist $f'(x) > 0$ in $]b - \varepsilon, b[$, so ist f dort monoton wachsend und f hat in b ein lokales Maximum.
- Ist $f'(x) < 0$ in $]b - \varepsilon, b[$, so ist f dort monoton fallend und f hat in b ein lokales Minimum.

$$f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x^3 - 3x^2 + 1$$



Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

24. Vorlesung: Taylor-Approximation

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Taylorpolynom)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar und sei $x_0 \in D$. Dann heißt

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

das **n -te Taylorpolynom** von f im **Entwicklungspunkt** x_0 .

$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ heißt **Restglied** oder **Fehler** bei der Approximation von f durch T_n .

Taylorformel

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar im Intervall I und sei $x_0 \in I$.
Dann gilt

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x),$$

mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Ist f sogar $(n+1)$ -mal differenzierbar, so kann man das Restglied auch schreiben als

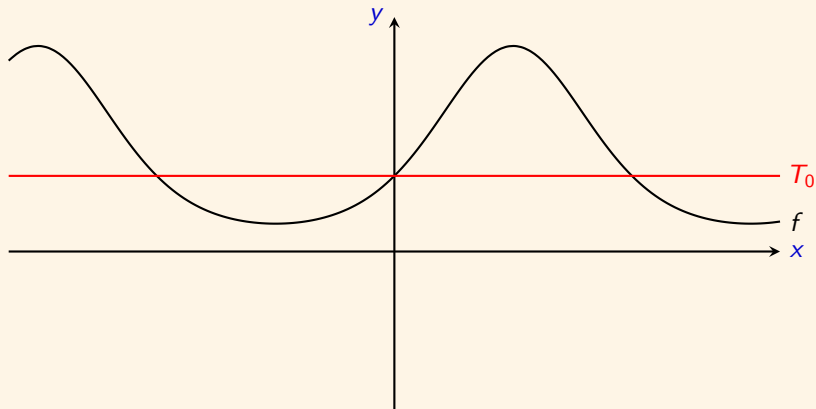
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

mit einem ξ zwischen x und x_0 . Das Restglied in dieser Darstellung nennt man auch das **Lagrange-Restglied**.

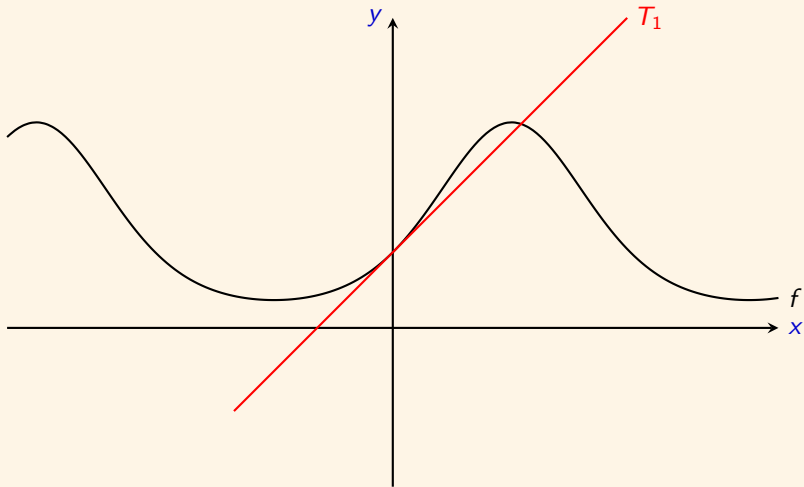
Bemerkung

- (1) Der Satz zeigt, dass der Fehler $R_n(x)$ für $x \rightarrow x_0$ sehr schnell gegen 0 geht, d.h. dass sich das Taylorpolynom wirklich sehr gut an die Funktion anschmiegt.
- (2) Für ein Polynom f vom Grad n gilt $f(x) = T_n(x)$, d.h. f stimmt mit seinem Taylorpolynom überein. Das kommt daher, dass $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle x ist und somit das Restglied Null ist.
- (3) Ist f eine Funktion mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist $R_n(x) = 0$ und $f(x) = T_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad höchstens n .
- (4) Die Stelle ξ im Lagrange-Restglied liegt zwischen x_0 und x . Da $x > x_0$ oder $x < x_0$ sein kann, kann man das in Intervallschreibweise als $\xi \in]x, x_0[\cup]x_0, x[$ angeben.

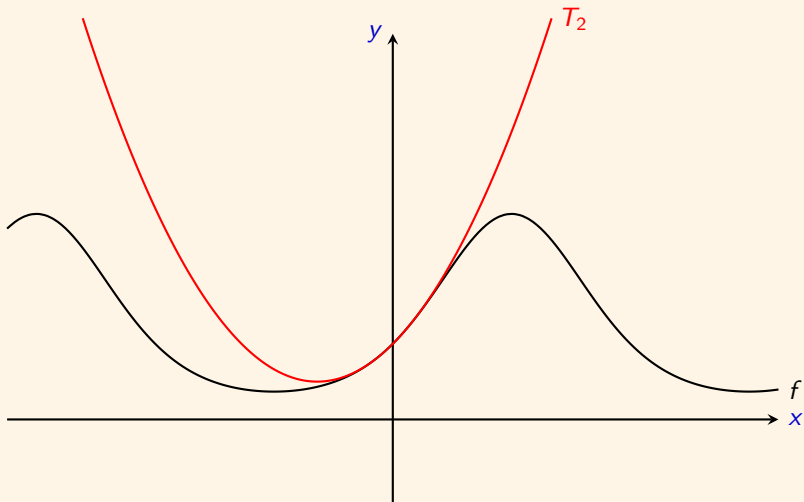
$$f(x) = e^{\sin(x)}, \quad T_0(x) = 1, \quad x_0 = 0$$



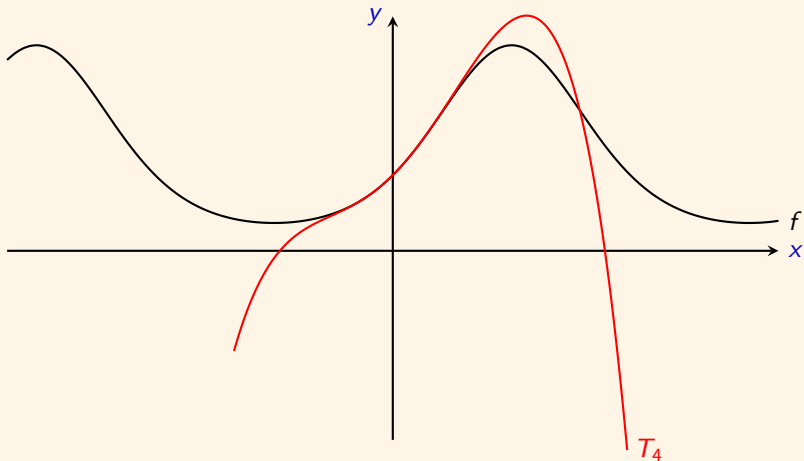
$$f(x) = e^{\sin(x)}, \quad T_1(x) = 1 + x, \quad x_0 = 0$$



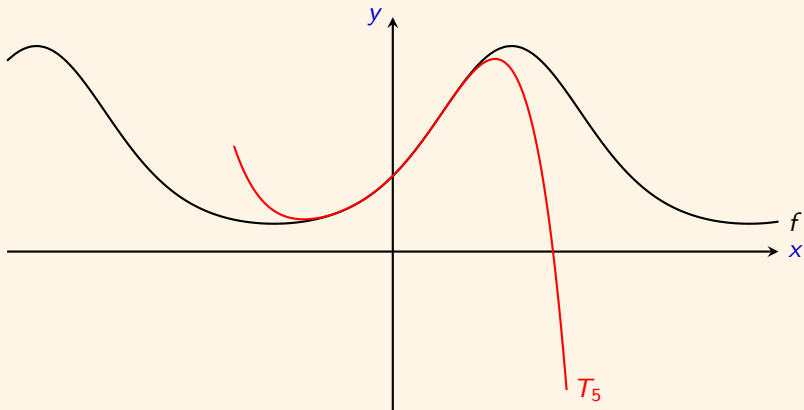
$$f(x) = e^{\sin(x)}, \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2, \quad x_0 = 0$$



$$f(x) = e^{\sin(x)}, \quad T_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4, \quad x_0 = 0$$

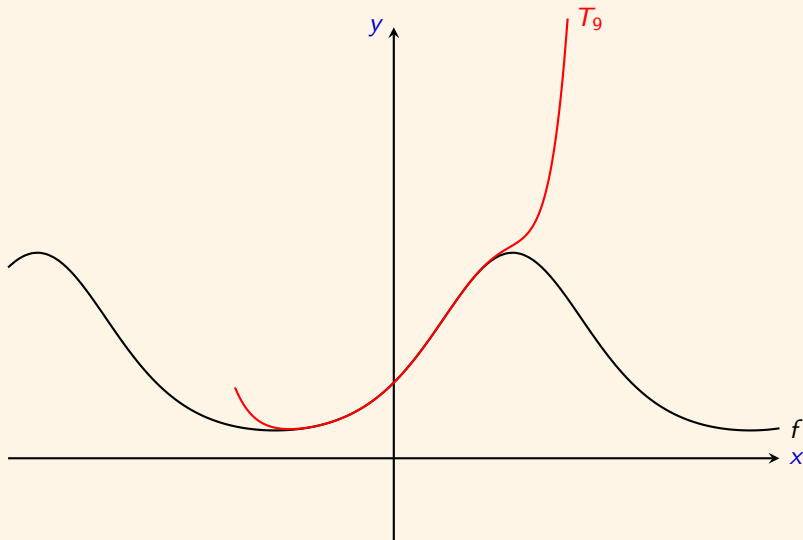


$$f(x) = e^{\sin(x)}, \quad T_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5, \quad x_0 = 0$$

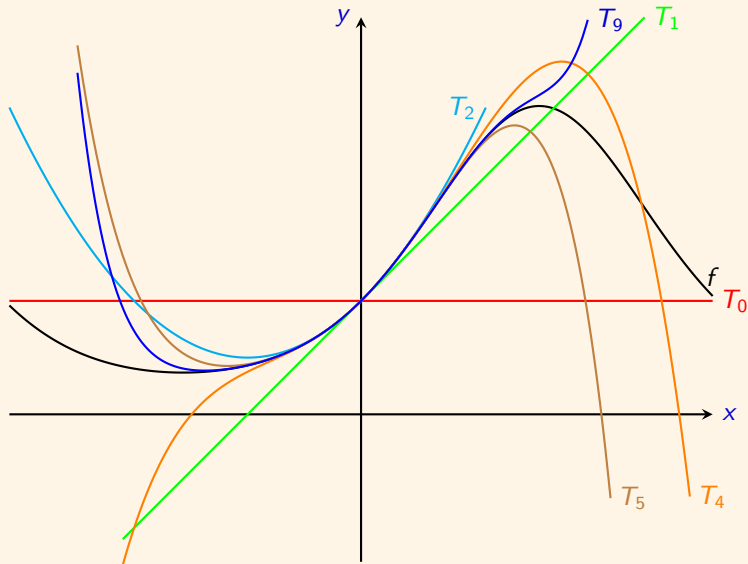


$$f(x) = e^{\sin(x)}, \quad x_0 = 0$$

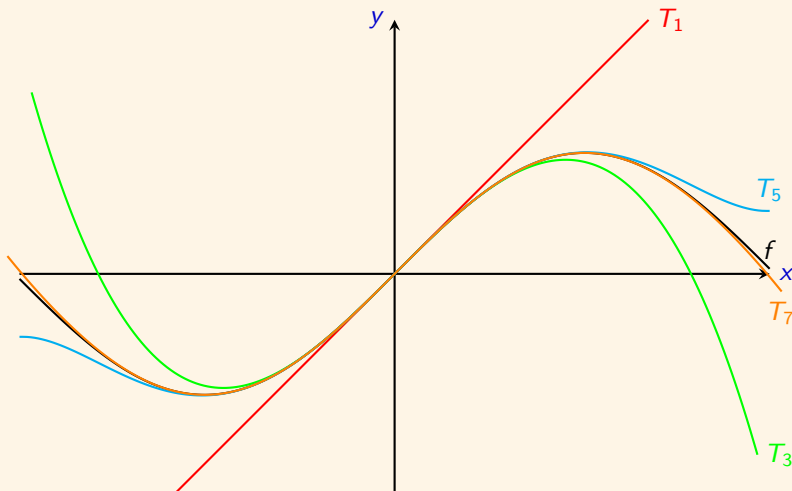
$$T_9(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{240}x^6 + \frac{1}{90}x^7 + \frac{31}{5760}x^8 + \frac{1}{5670}x^9$$



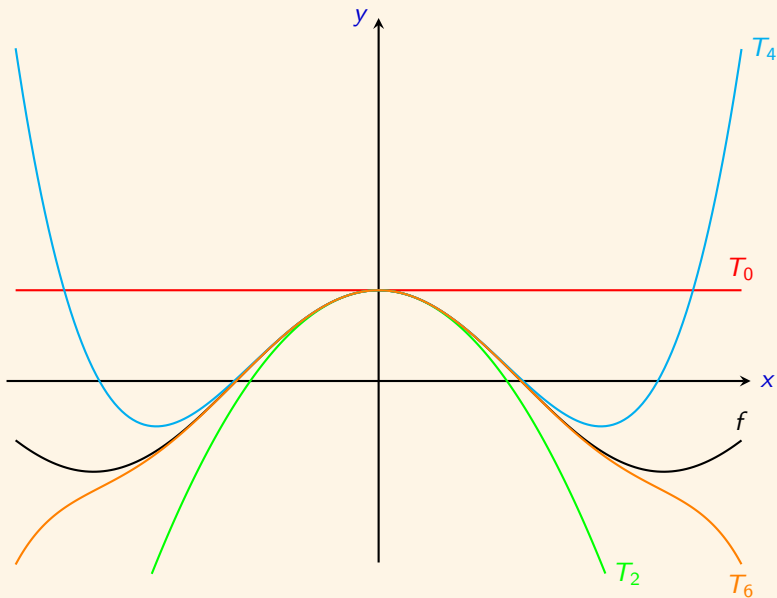
$f(x) = e^{\sin(x)}$ mit Taylorpolynomen T_0, T_1, T_2, T_4, T_5 und T_9 in $x_0 = 0$



$f(x) = \sin(x)$ mit Taylorpolynomen T_1, T_3, T_5 und T_7 in $x_0 = 0$



$f(x) = \cos(x)$ mit Taylorpolynomen T_0, T_2, T_4 und T_6 in $x_0 = 0$



Bereits bekannt:

- (1) Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so besitzt f ein globales Minimum und ein globales Maximum (VL 20, Satz vom Minimum und Maximum).
- (2) Ist f auch differenzierbar, so sind die einzigen Kandidaten für Extremstellen die Randpunkte a und b und die Punkte x mit $f'(x) = 0$ (VL 23, Notwendiges Extremwertkriterium).
- (3) Wenn die Ableitung ihr Vorzeichen an einem kritischen Punkt wechselt, so liegt dort ein Extremum vor (VL 23, Extremwert-Test).

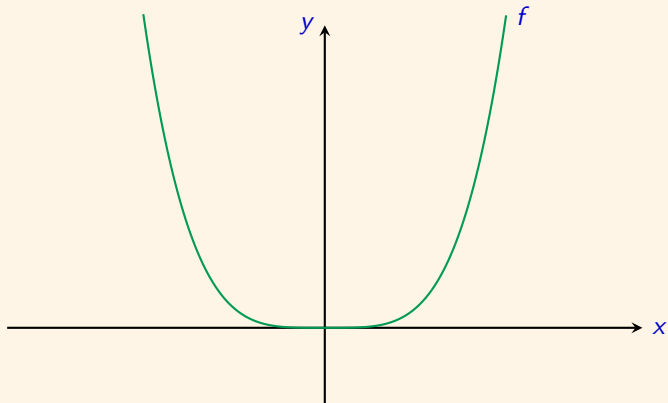
Kriterium für (lokale) Extremstellen mit der 2. Ableitung

Sei f auf $[a, b]$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in]a, b[$.

- (1) Wenn $f''(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.
- (2) Wenn $f''(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.

Was macht man bei $f(x) = x^4$?

Es gilt $f'(x) = 4x^3$, also $f'(0) = 0$ und $f''(x) = 12x^2$, also $f''(0) = 0$. Trotzdem hat f an der Stelle $x_0 = 0$ ein globales Minimum, also eine Extremstelle. Der letzte Satz liefert keine Aussage. **Idee:** Höhere Ableitungen untersuchen



Hinreichendes Extremwertkriterium

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal differenzierbare Funktion und sei x_0 ein innerer Punkt von I . Es gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

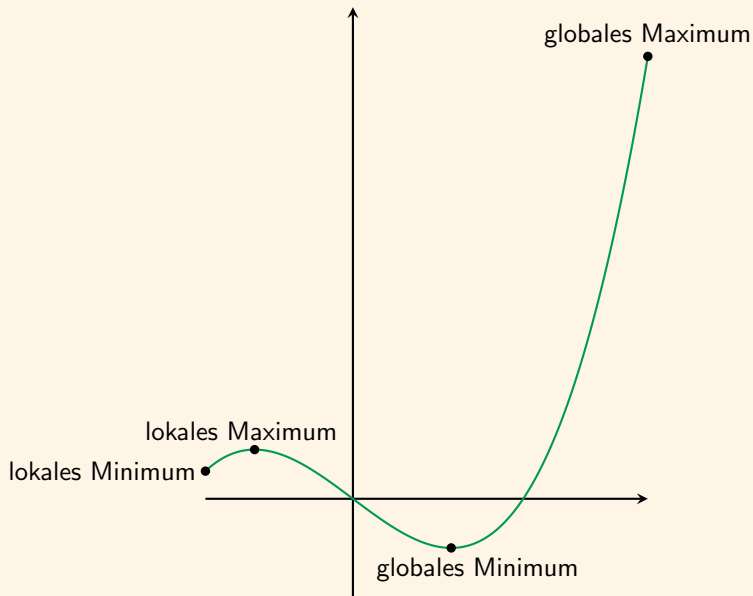
Dann gilt:

- (1) Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein lokales Extremum.
- (2) Ist n gerade, so hat f ein lokales Extremum:
 - Ist $f^{(n)}(x_0) < 0$, so hat f ein lokales Maximum.
 - Ist $f^{(n)}(x_0) > 0$, so hat f ein lokales Minimum.

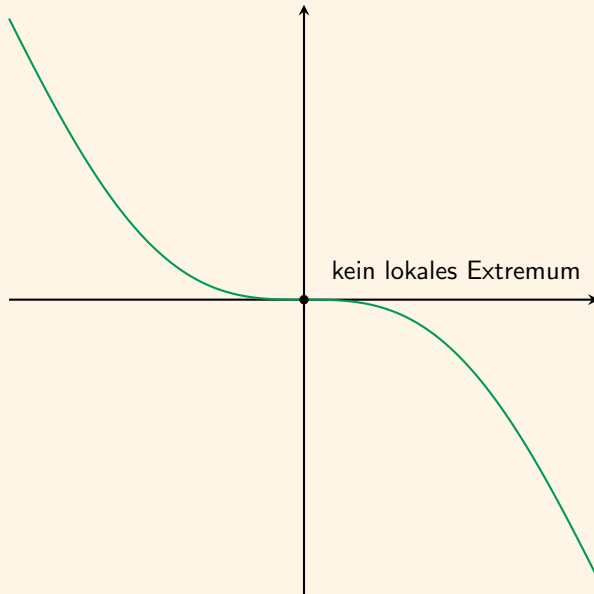
Bemerkung

- (1) Für $n = 1$ sagt das obige Kriterium noch einmal, dass innere Punkte mit $f'(x_0) \neq 0$ nicht als Extremstellen in Frage kommen.
- (2) Für $n = 2$ erhält man das Kriterium auf Folie 277.

$$f: \left[-\frac{3}{2}, 3\right] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 3x$$

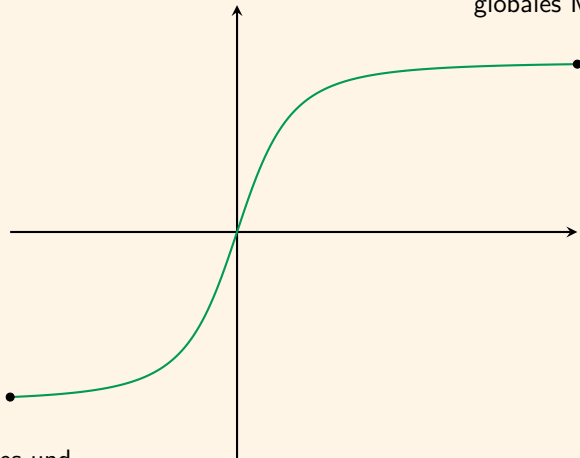


$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x) - x$$



$$f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

lokales und
globales Maximum



lokales und
globales Minimum

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

25. Vorlesung:

Anwendungen der Taylor-Approximation

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Wiederholung Taylorformel (VL 24)

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar im Intervall I und sei $x_0 \in I$.
Dann gilt

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x),$$

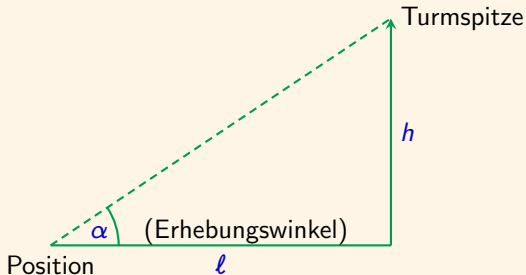
mit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Ist f sogar $(n+1)$ -mal differenzierbar, so kann man das Restglied auch schreiben als

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

mit einem ξ zwischen x und x_0 . Das Restglied in dieser Darstellung nennt man auch das **Lagrange-Restglied**.

Berechnung der Turmhöhe h aus der Entfernung ℓ :

Wir nehmen an, dass wir die Distanz ℓ exakt kennen, und wollen die Höhe h des Turms in Abhängigkeit vom Winkel α bestimmen.

Es ist

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{\ell}, \quad \text{also} \quad h = \ell \tan(\alpha).$$

Damit ist

$$h'(\alpha) = \ell \tan'(\alpha) = \frac{\ell}{(\cos(\alpha))^2}.$$

Definition (Taylorreihe)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Die **Taylorreihe** von f im Entwicklungspunkt $x_0 \in D$ ist der Grenzwert der Taylorpolynome:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Bemerkung

Der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ existiert und ist gleich $f(x)$ genau dann, wenn

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Bemerkung

Ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz von

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gegen $f(x)$ im Intervall $]a, b[$ ist

$$|f^{(n)}(x)| \leq A \cdot B^n \quad \text{für alle } x \in]a, b[$$

mit Konstanten A, B unabhängig von n .

Denn:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{AB^{n+1}}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \\ &= A \frac{(B|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Hinweis

(1) Es kann passieren, dass

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

für kein $x \neq x_0$ konvergiert.

(2) Es kann passieren, dass

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

zwar konvergiert, aber **nicht** gegen $f(x)$.

Das sind aber eher die Ausnahmen.

Taylorreihen

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$$

Bemerkung

Die Reihen von Sinus und Cosinus können alternativ als Definition für Sinus und Cosinus genommen werden.

Euler-Formel $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

Mit den Reihendarstellungen von **exp**, **cos** und **sin** können wir nun die Euler-Formel aus Vorlesung 7 nachrechnen: Für $x \in \mathbb{R}$ teilen wir die Reihe für e^{ix} in Summanden mit geraden ($k = 2\ell$) und mit ungeraden ($k = 2\ell + 1$) Summationsindizes:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ix)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} i^k x^k \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell)!} i^{2\ell} x^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!} i^{2\ell+1} x^{2\ell+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell)!} (i^2)^\ell x^{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!} i (i^2)^\ell x^{2\ell+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} x^{2\ell} + i \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1} \\ &= \cos(x) + i \sin(x). \end{aligned}$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

26. Vorlesung: Elementare Funktionen 2

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Ausgangspunkt

Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

konvergent. Dies wurde in VL 25 gezeigt.

Definition (Exponentialfunktion, Eulersche Zahl)

Die durch diesen Grenzwert definierte Funktion heißt
Exponentialfunktion:

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

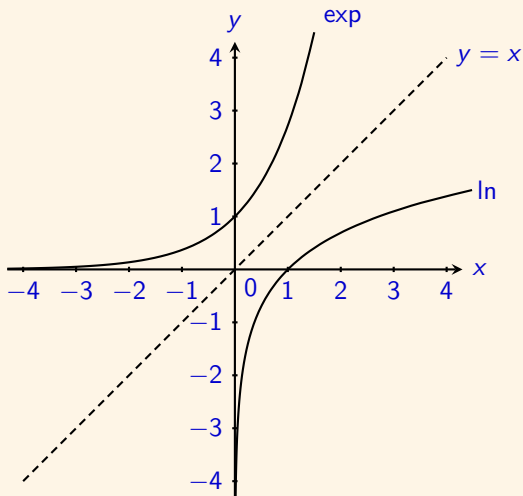
Die Zahl $e := \exp(1)$ heißt die **Eulersche Zahl**.

Eigenschaften der Exponentialfunktion (vgl. VL 6)

Für alle $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $\exp(x)$ ist differenzierbar mit $(\exp(x))' = \exp(x)$,
- (2) $\exp(0) = 1$,
- (3) Funktionalgleichung: $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \exp(x_2)$,
- (4) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, insbesondere gilt $\exp(x) \neq 0$,
- (5) $\exp(x) > 0$,
- (6) \exp ist streng monoton wachsend,
- (7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = \infty$,
- (8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (9) $\exp: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ ist bijektiv, also umkehrbar.

Schon gesehen: Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heißt
(natürliche) Logarithmusfunktion $\ln:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$



Eigenschaften des Logarithmus (vgl. VL 6)

Für den Logarithmus gilt:

(1) $\ln(1) = 0$,

(2) Funktionalgleichung: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$,

(3) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ für alle $x > 0$,

(4) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ für alle $x, y > 0$,

(5) $\ln(x^n) = n \ln(x)$ für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$,

(6) $\ln:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv,

(7) $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$,

(8) \ln ist streng monoton wachsend und

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty.$$

Taylorreihe von $\ln(1+x)$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

Bisher

Für $n \in \mathbb{N}$ haben wir a^n definiert als $a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n mal).
Was aber ist zum Beispiel 5^π ?

Definition (allgemeine Potenz)

Für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$a^b := \exp(b \ln(a)).$$

Dabei heißt a **Basis** und b **Exponent**. Das ergibt insbesondere zwei Funktionen:

- (1) die **allgemeine Potenz** $x \mapsto a^x$,
- (2) die **Potenzfunktion** $x \mapsto x^b$.

Rechenregeln für die allgemeine Potenz

Für reelles $a > 0$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

(1) $x \mapsto a^x$ ist stetig und beliebig oft differenzierbar,

(2) $a^0 = 1$,

(3) $a^{x+y} = a^x a^y$,

(4) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,

(5) $a^x > 0$,

(6) $\ln(a^x) = x \ln(a)$,

(7) $(a^x)^y = a^{xy}$,

(8) $a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}$.

(9) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, wobei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

(10) $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

(11) $e^x = \exp(x)$.

Hinweise

(1) Für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt im Allgemeinen

$$(a^x)^y \neq a^{(x^y)}.$$

Die Schreibweise a^{x^y} bedeutet $a^{(x^y)}$.

(2) $x \mapsto a^x$ ist nur für $a > 0$ definiert. Für $a < 0$ wäre sonst

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

nicht definiert.

Eigenschaften der allgemeinen Potenz und der Potenzfunktion

Für $a > 0$ ist die Funktion a^x auf ganz \mathbb{R} differenzierbar mit

$$(a^x)' = \ln(a)a^x.$$

Denn:

$$(a^x)' = (\exp(x \cdot \ln(a)))' = \underbrace{\exp(x \cdot \ln(a))}_{=a^x} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a).$$

- (1) Für $a > 1$ ist $\ln(a) > 0$, also a^x streng monoton wachsend.
- (2) Für $a = 1$ ist $\ln(a) = 0$, also $a^x = 1$ konstant.
- (3) Für $a < 1$ ist $\ln(a) < 0$, also a^x streng monoton fallend.

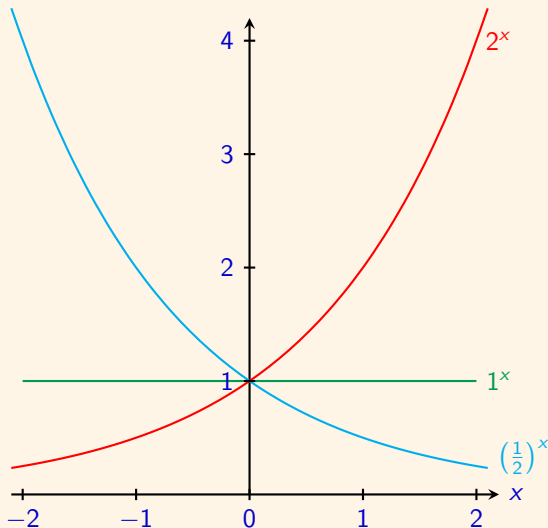
Für $b \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ ist

$$(x^b)' = bx^{b-1}.$$

Für $x > 0$ ist

$$(x^x)' = x^x(\ln(x) + 1).$$

Anwendungen: Für $a > 1$ beschreibt a^x Wachstumsprozesse, für $a < 1$ beschreibt a^x Zerfallsprozesse.



Definition (Logarithmus zur Basis a)

Für $a > 0$, $a \neq 1$, ist a^x somit injektiv und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist der **Logarithmus zur Basis a** :

$$\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x).$$

Es ist per Definition

$$a^y = x \quad \Longleftrightarrow \quad \log_a(x) = y.$$

Für $a = e$ ist $\log_e(x) = \ln(x)$ der **natürliche Logarithmus**.

Der Logarithmus zur Basis a lässt sich durch den natürlichen Logarithmus darstellen: Aus $a^{\log_a(x)} = x$ folgt

$$\ln(x) = \ln\left(a^{\log_a(x)}\right) = \log_a(x) \ln(a),$$

also

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Daher gelten für \log_a die gleichen Rechenregeln wie für \ln .

Rechenregeln für den Logarithmus zur Basis a

Für $a, x, y > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt

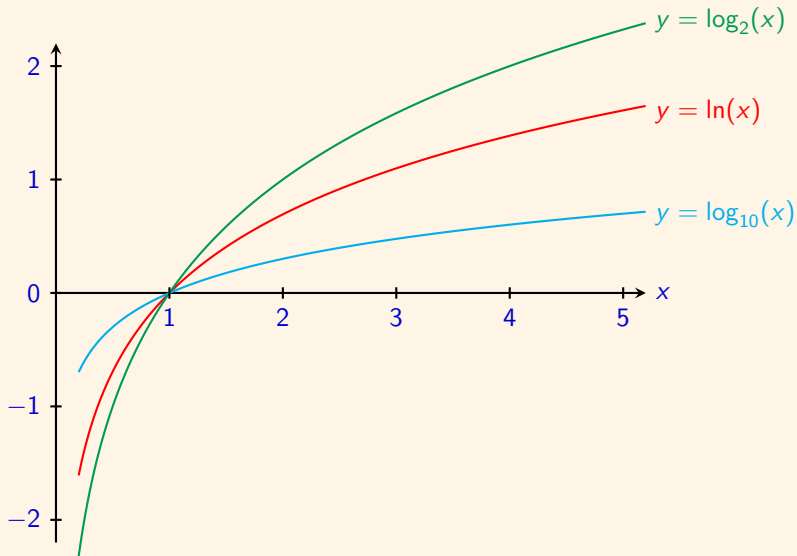
$$(1) \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$(2) \log_a(x^b) = b \log_a(x),$$

$$(3) \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x),$$

$$(4) \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y).$$

Logarithmus zur Basis $a = 2$, $a = e$ und $a = 10$



Definition (Komplexe Exponentialfunktion)

Die Exponentialreihe konvergiert für alle komplexen Zahlen z :

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

wodurch die **komplexe Exponentialfunktion** $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert wird. Für $z = x + iy$ mit reellen x, y gilt allgemein

$$\begin{aligned}\exp(z) &= \exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy) \\ &= \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y)).\end{aligned}$$

Definition (Komplexer Logarithmus)

Für $z = |z|e^{i\varphi} \neq 0$ definiert man

$$\log(z) := \ln(|z|) + i\varphi, \quad \varphi = \arg(z),$$

wobei $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Mehr dazu in „Analysis III für Ingenieurwissenschaften“.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

27. Vorlesung: Elementare Funktionen 3

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Additionstheoreme (vgl. VL 6)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y),$$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y).$$

Spezialfälle

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \cos(2\pi) - \sin(x) \sin(2\pi) = \cos(x),$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \cos(2\pi) + \cos(x) \sin(2\pi) = \sin(x),$$

$$\cos(x + \pi) = \cos(x) \cos(\pi) - \sin(x) \sin(\pi) = -\cos(x),$$

$$\sin(x + \pi) = \sin(x) \cos(\pi) + \cos(x) \sin(\pi) = -\sin(x).$$

Insbesondere sind also Sinus und Cosinus 2π -periodisch.

Definition (Tangens und Cotangens)

(1) Sei

$$D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dann heißt

$$\tan: D_1 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

der **Tangens**.

(2) Sei

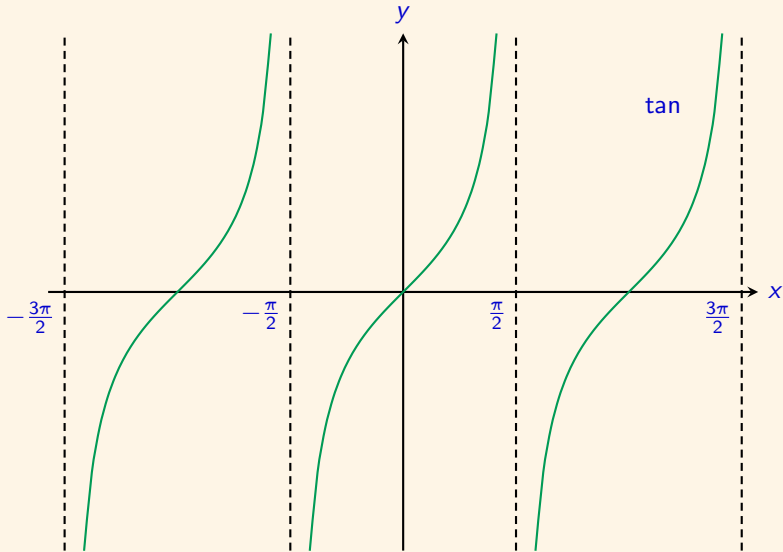
$$D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann heit

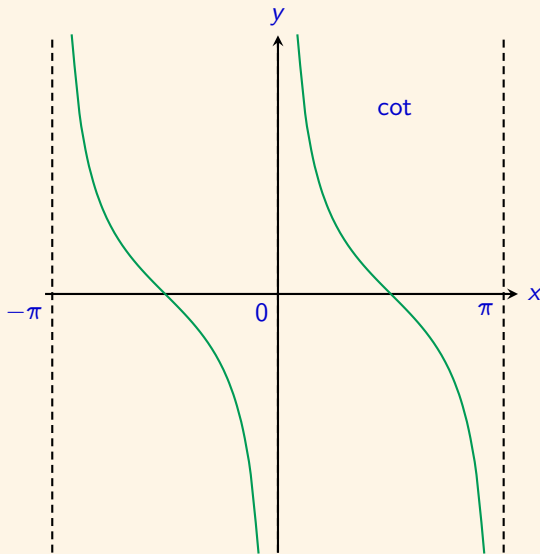
$$\cot: D_2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

der **Cotangens**.

$$\tan: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



$$\cot: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$



Eigenschaften (Tangens und Cotangens, vgl. auch VL 6)

(1) Für alle $x \in D_1 = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

(2) Für alle $x \in D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

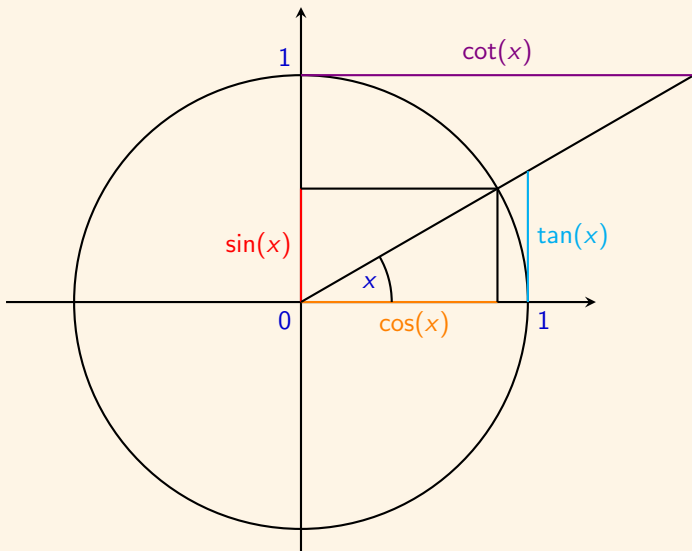
$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x).$$

(3) \tan und \cot sind π -periodisch.

(4) Es gilt

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

Tangens und Cotangens haben folgende geometrische Interpretation am Einheitskreis (Strahlensatz, vgl. Mitschrift VL 19)



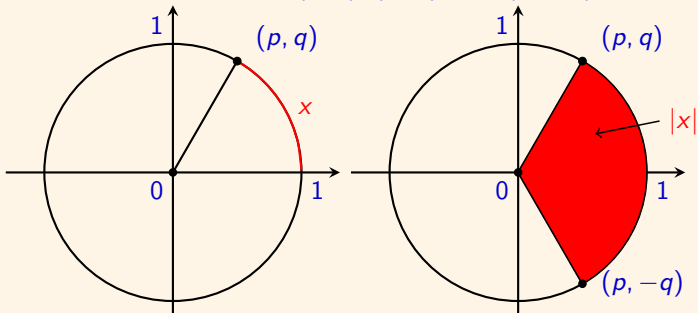
Interpretation am Einheitskreis

Wegen $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ liegt für $x \in [0, 2\pi]$ jeder Punkt $(\cos(x), \sin(x))$ auf dem Einheitskreis

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Wegen der Stetigkeit wird auch jeder Punkt angenommen, d.h. für $(p, q) \in K$ existiert ein $x \in [0, 2\pi]$ mit $p = \cos(x)$ und $q = \sin(x)$

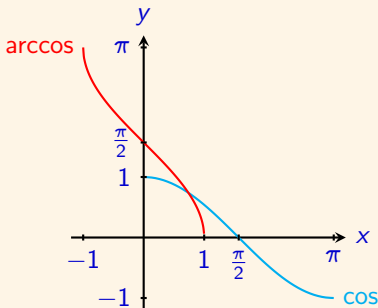
Es gilt: x entspricht der Länge des Bogenabschnitts auf dem Einheitskreis von $(1, 0)$ bis (p, q) und $|x|$ ist der Flächeninhalt des Kreisausschnitts der Punkte $(0, 0)$, (p, q) und $(p, -q)$.



Arcuscosinus

Der Cosinus ist streng monoton fallend auf $[0, \pi]$, also umkehrbar. Die Umkehrfunktion $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ heißt **Arcuscosinus**. Die Ableitung ist

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$



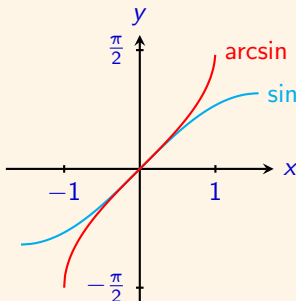
Arcussinus

Der Sinus ist streng monoton wachsend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, also umkehrbar. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

heißt **Arcussinus**. Die Ableitung ist

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$



Arcustangens

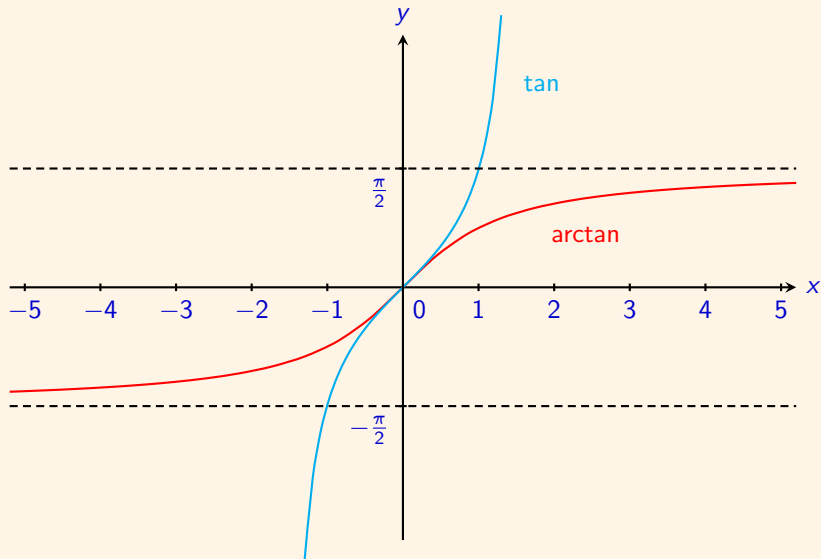
Der Tangens ist streng monoton wachsend auf $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, also umkehrbar. Die Umkehrfunktion

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

heißt **Arcustangens**. Die Ableitung ist

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tangens und Arcustangens



Arcuscotangens

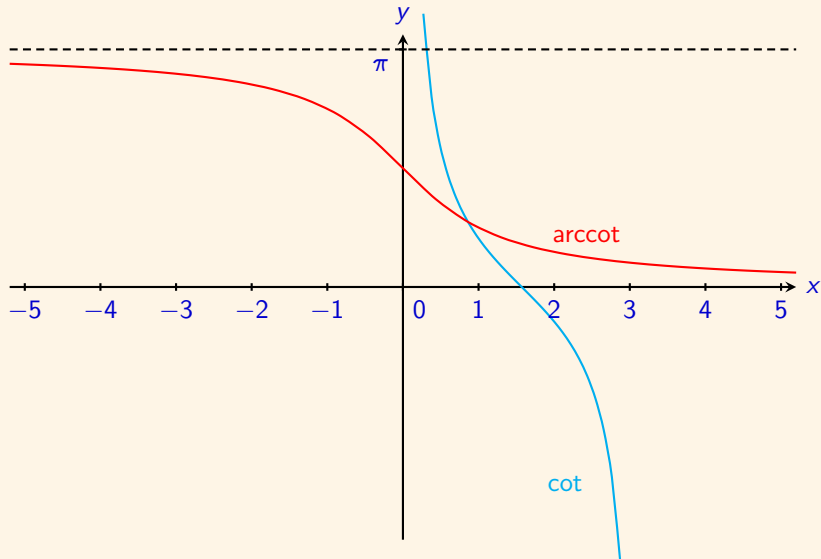
Der Cotangens ist streng monoton fallend auf $]0, \pi[$, also umkehrbar. Die Umkehrfunktion

$$\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$$

heißt **Arcuscotangens**. Die Ableitung ist

$$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cotangens und Arcuscotangens



Definition (Hyperbelfunktionen)

Die Hyperbelfunktionen sind der **Cosinus hyperbolicus**

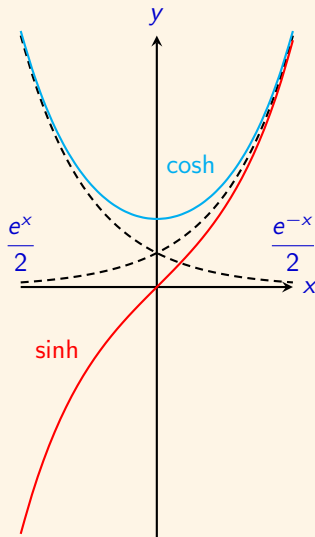
$\cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

und der **Sinus hyperbolicus** $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Der Graph des Cosinus hyperbolicus hat die Form einer durchhängenden Kette (Kettenlinie)



Eigenschaften hyperbolischer Funktionen

- (1) $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- (2) $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- (3) \cosh ist eine gerade Funktion: $\cosh(-x) = \cosh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- (4) \sinh ist eine ungerade Funktion: $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- (5) Es ist $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt **Areasinus hyperbolicus** und erfüllt

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- (6) Es ist $\cosh: [0, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt **Areacosinus hyperbolicus** und erfüllt

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad \text{für alle } x \geq 1.$$

Taylorreihen

Aus der Taylorreihe der Exponentialfunktion bekommen wir die Taylorreihen der hyperbolischen Funktionen:

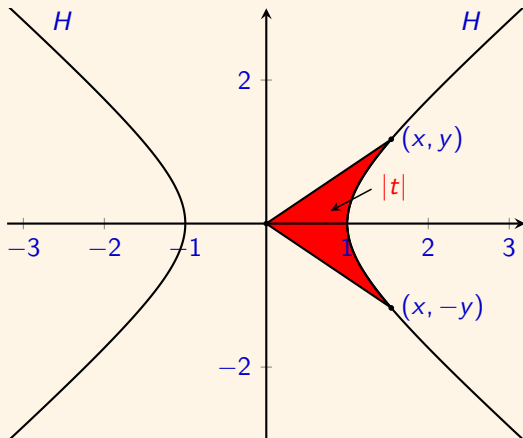
$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Interpretation an der Einheitshyperbel

Gleichung der Einheitshyperbel: $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$.

Es gilt: Zu jedem $(x, y) \in H$ mit $x > 0$ gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ mit $x = \cosh(t)$ und $y = \sinh(t)$.

$|t|$ ist der Flächeninhalt der rotmarkierten Fläche.



Definition (Tangens hyperbolicus und Cotangens hyperbolicus)

(1) Die Funktion

$$\tanh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

heißt der **Tangens hyperbolicus**. Der Tangens hyperbolicus ist eine bijektive Funktion von \mathbb{R} nach $] -1, 1[$. Die Umkehrfunktion heißt **Areatangens hyperbolicus** und erfüllt

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad \text{für alle } |x| < 1.$$

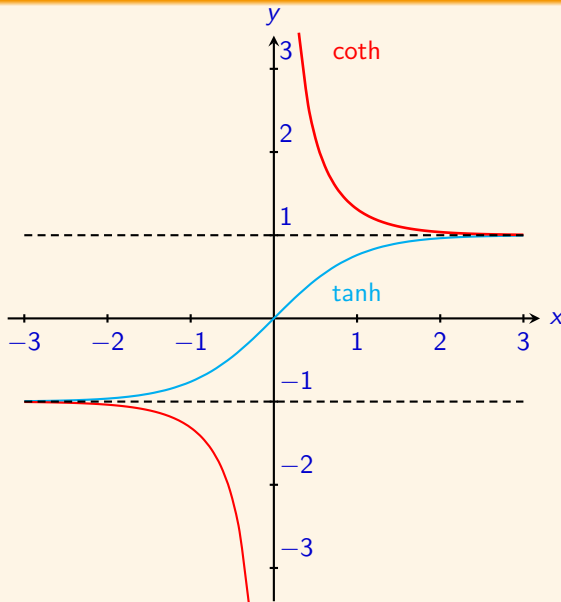
(2) Die Funktion

$$\coth: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

heißt der **Cotangens hyperbolicus**. Der Cotangens hyperbolicus ist eine bijektive Funktion von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Die Umkehrfunktion heißt **Areacotangens hyperbolicus** und erfüllt

$$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \quad \text{für alle } |x| > 1.$$

Tangens hyperbolicus und Cotangens hyperbolicus



Die Ableitungen der elementaren Funktionen Teil 1

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Bemerkungen |
|---------------|----------------------|---|
| x^n | nx^{n-1} | $n = 1, 2, 3, \dots$ |
| $\exp(x)$ | $\exp(x)$ | |
| a^x | $a^x \ln(a)$ | $a > 0, x \in \mathbb{R}$ |
| $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ | $x \neq 0$ |
| $\log_a(x)$ | $\frac{1}{x \ln(a)}$ | $a, x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ |
| x^a | ax^{a-1} | $x > 0, a \in \mathbb{R}$ |

Die Ableitungen der elementaren Funktionen Teil 2

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Bemerkungen |
|----------------------------|---|---|
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | |
| $\tan(x)$ | $1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| $\cot(x)$ | $-1 - \cot(x)^2 = -\frac{1}{\sin(x)^2}$ | $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $ x < 1$ |
| $\arccos(x)$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $ x < 1$ |
| $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | |
| $\operatorname{arccot}(x)$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ | |

Die Ableitungen der elementaren Funktionen Teil 3

| $f(x)$ | $f'(x)$ | Bemerkungen |
|----------------------------|--|---------------------|
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ | |
| $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ | |
| $\tanh(x)$ | $1 - \tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}$ | |
| $\coth(x)$ | $1 - \coth(x)^2 = -\frac{1}{\sinh(x)^2}$ | |
| $\operatorname{arsinh}(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | |
| $\operatorname{arcosh}(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $x \in]1, \infty[$ |
| $\operatorname{artanh}(x)$ | $\frac{1}{1-x^2}$ | $ x < 1$ |
| $\operatorname{arcoth}(x)$ | $\frac{1}{1-x^2}$ | $ x > 1$ |

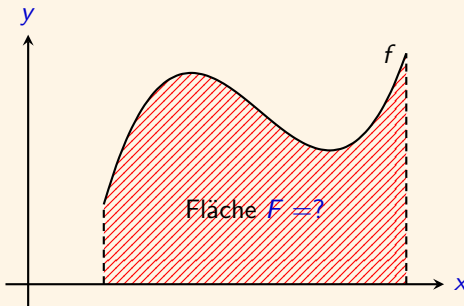
Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

28. Vorlesung: Das Integral

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und der x -Achse?

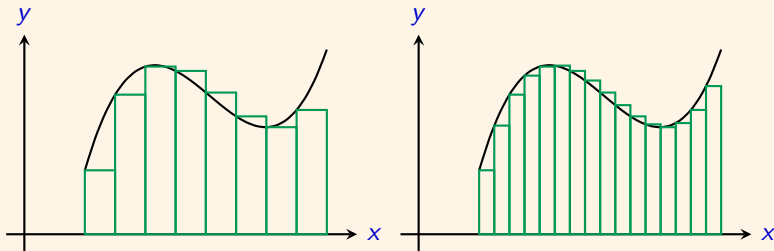


Definition (Riemannsche Summe)

Approximiere f auf $[x_{j-1}, x_j]$ durch die Konstante $f(x_{j-1})$. Dann heißt

$$F_n = \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})\Delta x = \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})\frac{b-a}{n}$$

eine **Riemannsche Summe** der Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Summe ist die Fläche aller Rechtecke, mit der wir die Fläche unter dem Funktionsgraphen von f approximieren.



Vermutung: Je größer n , desto besser die Approximation.

Das bestimmte Integral

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig oder monoton, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1}) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Wir nennen $\int_a^b f(x) \, dx$ das **bestimmte Integral** von f über $[a, b]$.

Bezeichnungen

In $\int_a^b f(x) \, dx$ heißt

- f der **Integrand**,
- x die **Integrationsvariable**,
- a die **untere Integrationsgrenze**,
- b die **obere Integrationsgrenze**.

Bemerkung

(1) Die Integrationsvariable kann beliebig benannt werden:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds = \int_a^b f(u) du.$$

(2) Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist eine reelle Zahl.

(3) In der Schreibweise

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1}) \cdot \Delta x$$

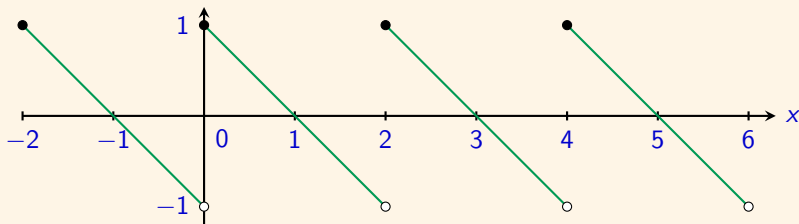
erinnert \int („S“ wie Summe) an \sum und dx an Δx .

Vgl. auch die Schreibweise

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Problem

Es gibt wichtige Funktionen, die weder stetig noch monoton sind, z. B. die Steuerspannung des Kathodenstrahls einer Fernseh r hre:



Lösung: Wir erweitern die Definition des Integrals.

Definition (Integrierbare Funktion)

- (1) Wir nennen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **stückweise stetig** (bzw. **stückweise monoton**), falls es endlich viele Stellen x_0, x_1, \dots, x_N gibt mit
- $$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b,$$
- so dass $f:]x_{j-1}, x_j[\rightarrow \mathbb{R}$ für jedes j die Einschränkung einer stetigen (bzw. monotonen) Funktion $f_j: [x_{j-1}, x_j] \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

- (2) Ist f wie in (1), so definieren wir

$$\int_a^b f(x) dx := \int_{x_0}^{x_1} f_1(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f_N(x) dx.$$

- (3) Funktionen wie in (1) heißen **integrierbar**.

Bemerkung

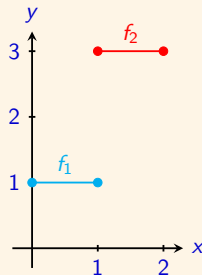
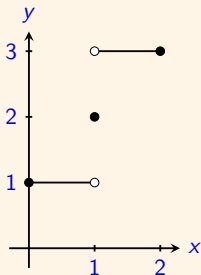
- (1) Integrierbare Funktionen sind beschränkt und auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ definiert.
- (2) Ist f wie in der Definition, so kann f in x_0, \dots, x_N beliebige Werte annehmen, die keinen Einfluss auf $\int_a^b f(x) dx$ haben.

Beispiel: Die Funktion $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1[, \\ 2 & \text{für } x = 1, \\ 3 & \text{für } x \in]1, 2], \end{cases}$$

ist stückweise stetig, denn

- (1) $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ ist die Einschränkung der stetigen Funktion $f_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$.
- (2) $f:]1, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ ist die Einschränkung der stetigen Funktion $f_2: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3$.



Definition

- (1) Wir definieren $\int_a^a f(x) \, dx := 0$ (kein Flächeninhalt).
- (2) Für $a < b$ definieren wir $\int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx$.

Rechenregeln (Teil 1)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- (1) Linearität:

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx,$$

$$\int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx.$$

Rechenregeln (Teil 2)

Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(2) Monotonie: Falls $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so ist

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

(3) Dreiecksungleichung:

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

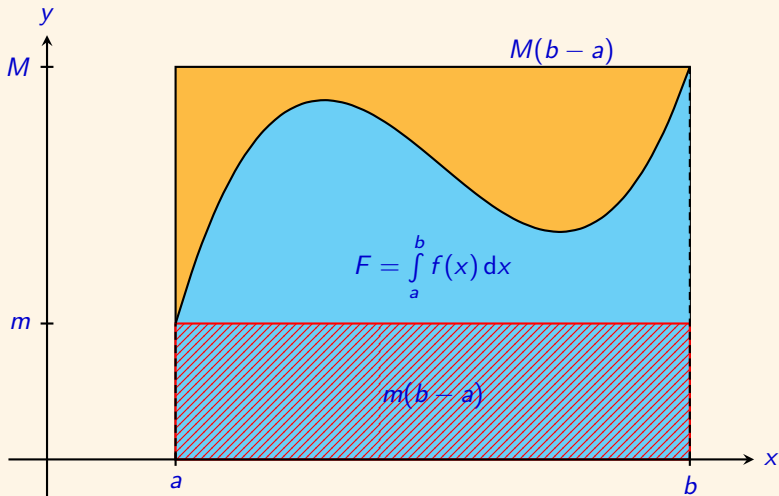
(4) Für $a < c < b$ ist

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Bemerkung

Gleichung (4) gilt sogar für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ (im Def.bereich von f).

Beobachtung



Abschätzung des Integrals

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Interpretation

Es ist
$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1}) \frac{b-a}{n}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1}).$$

Die Summe $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})$ ist genau der Mittelwert der

Funktionswerte $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{n-1})$. Daher kann das Integral

$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ als **Mittelwert der Funktion f** angesehen werden. Die obige Aussage besagt also, dass das Integralmittel zwischen dem kleinsten und größten Funktionswert liegt.

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

29. Vorlesung: Integrationsregeln 1

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Stammfunktion)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ($D \subseteq \mathbb{R}$). Eine differenzierbare Funktion $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Stammfunktion** von f , falls $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Bemerkung

Auf Intervallen sind Stammfunktionen bis auf eine Konstante eindeutig.

Definition (unbestimmtes Integral)

Die Menge aller Stammfunktionen von $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wird mit $\int f(x) dx$ bezeichnet und heißt das **unbestimmte Integral** von f .

Ist F eine Stammfunktion von f , so ist also

$$\int f(x) dx = \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

Das unbestimmte Integral schreibt man oft nur als

$$\int f(x) dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig,}$$

also ohne die Mengenklammern.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

- (1) **Existenz einer Stammfunktion:** Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die durch

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

definierte Integralfunktion eine Stammfunktion von f .

- (2) **Berechnung des bestimmten Integrals:** Ist $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F \Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Bemerkung

Der obige Satz ermöglicht es also, das bestimmte Integral einer stetigen Funktion ganz einfach durch Auswerten einer Stammfunktion zu berechnen, falls man diese kennt.

Bemerkung

Manche Stammfunktionen lassen sich nicht elementar ausdrücken (d.h. durch Polynome, e^x , \sin , \cos , usw. und Addition, Multiplikation und Verkettung dieser Funktionen). In diesem Fall geben die Integralfunktionen „neue“ Funktionen.

Beispiele

- (1) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$ ist stetig und besitzt daher eine Stammfunktion. Diese lässt sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken und führt auf ein sogenanntes **Fresnel-Integral**, dass definiert ist durch

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt.$$

Das Fresnel-Integral spielt eine Rolle in der geometrischen Optik.

- (2) Ebenso kann die Stammfunktion von e^{-x^2} nicht durch elementare Funktionen angegeben werden. Die Stammfunktion ist die **Gaußsche Fehlerfunktion** („error function“) oder **Normalverteilung**:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Sie spielt eine wichtige Rolle in der Theorie von Diffusionsprozessen und in der Statistik.

- (3) $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$ ist ebenfalls nicht durch elementare Funktionen darstellbar und definiert den **Integralsinus**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Partielle Integration

Sind $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetigen Ableitungen, so gelten

$$\int u'(x)v(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) \, dx$$

und

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = (uv)|_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

Bemerkung

Die partielle Integration (= Integration nach Teilen) entspricht der Produktregel beim Ableiten.

Einige bekannte Stammfunktionen Teil 1

| $f(x)$ | $F(x)$ | Bemerkungen |
|------------------------|------------------------|---|
| x^n | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ | $n \in \mathbb{N}$ |
| x^n | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ | $x \neq 0, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq -1$ |
| x^a | $\frac{1}{a+1}x^{a+1}$ | $x > 0, a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq -1$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln x $ | $x \neq 0$ |
| e^{ax} | $\frac{1}{a}e^{ax}$ | |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ | |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ | |
| $\frac{1}{\cos(x)^2}$ | $\tan(x)$ | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| $-\frac{1}{\sin(x)^2}$ | $\cot(x)$ | $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |

Einige bekannte Stammfunktionen Teil 2

| $f(x)$ | $F(x)$ | Bemerkungen |
|--------------------------|---|---------------------|
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin(x)$ | $ x < 1$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x)$ | |
| $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ | |
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ | |
| $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ | |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\ln \left x + \sqrt{x^2-1} \right $ | $ x > 1$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ | $x \in]1, \infty[$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ | $ x < 1$ |

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

30. Vorlesung:

Integrationsregeln 2 und Integration komplexer Funktionen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Berechnung von $\int f(g(x))g'(x) dx$

- (1) Substituiere $t = g(x)$ und $dt = g'(x) dx$ (Formal $\frac{dt}{dx} = g'(x)$ mit dx multiplizieren):

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt.$$

- (2) Berechne eine Stammfunktion von f :

$$\int f(t) dt = F(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- (3) Rücksubstitution $t = g(x)$ ergibt

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

1. Version der Substitutionsregel für das bestimmte Integral

Berechnung von $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$

(1) Substituiere $t = g(x)$ und $dt = g'(x) dx$:

$$\int_{x=a}^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{t=g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

(2) Berechne eine Stammfunktion F von f , so dass

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x))g'(x) dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = F \Big|_{g(a)}^{g(b)} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)). \end{aligned}$$

Bemerkung

Zur Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(g(x))g'(x) dx$ kann man die Grenzen direkt mit transformieren (keine Rücksubstitution).

Berechnung von $\int f(x) dx$

- (1) Substituiere $x = g(t)$ und $dx = g'(t) dt$ mit einem **umkehrbarem** g :

$$\int f(x) dx = \int f(g(t))g'(t) dt.$$

- (2) Berechne eine Stammfunktion:

$$\int f(g(t))g'(t) dt = H(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- (3) Rücksubstitution: Auflösen von $x = g(t)$ nach t , also $t = g^{-1}(x)$ (Umkehrfunktion), und einsetzen ergibt

$$\int f(x) dx = H(g^{-1}(x)) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Berechnung von $\int_a^b f(x) dx$

- (1) Substituiere $x = g(t)$ und $dx = g'(t) dt$ mit einem **umkehrbarem** g :

$$\int_{x=a}^b f(x) dx = \int_{t=g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) dt.$$

- (2) Berechne eine Stammfunktion H :

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) dt = H(g^{-1}(b)) - H(g^{-1}(a)).$$

Bemerkung

Die Substitutionsregel (= Ersetzungsregel) entspricht der Kettenregel beim Ableiten.

Definition (Integral komplexwertiger Funktionen)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und seien $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ und $v(x) = \operatorname{Im}(f(x))$ für alle $x \in [a, b]$, d.h. $f = u + iv$.

Sind u, v integrierbar, so ist

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_a^b u(x) \, dx + i \int_a^b v(x) \, dx.$$

Bemerkung

- (1) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bleibt richtig: Ist $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f (d.h. $F' = f$), so gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Weiter bleiben richtig: partielle Integration, die Substitutionsregel, sowie die Linearität, Dreiecksungleichung und das Aufteilen des Integrals an einem Zwischenpunkt, siehe (1), (3) und (4) in VL 28 (Folien 339 und 340).

- (2) Hingegen sind für komplexwertige Funktionen **nicht mehr gültig**: die Monotonie ((2) auf Folie 340, VL 28), die Integralabschätzung (Folie 342, VL 28) und der Mittelwertsatz der Integralrechnung (Folie 343, VL 28).

Analog zum Reellen

Für alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$,

$$\int e^{zx} dx = \frac{1}{z} e^{zx} + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

31. Vorlesung:

Uneigentliche Integrale und Integration rationaler Funktionen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Uneigentliches Integral: unbeschränkter Definitionsbereich)

Sei $f: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über jedem Intervall $[a, b]$ mit $b > a$. Dann heißt

$$\int_a^\infty f(x) \, dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

das **uneigentliche Integral** von f über $[a, \infty[$. Falls der Grenzwert existiert, so heißt f **uneigentlich integrierbar** auf $[a, \infty[$.

Sei $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar über jedem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$. Dann heißt

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) \, dx$$

das **uneigentliche Integral** von f über $] -\infty, b]$. Falls der Grenzwert existiert, so heißt f **uneigentlich integrierbar** auf $] -\infty, b]$.

Definition (Integral über ganz \mathbb{R})

Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so setzen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx,$$

falls beide uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren.

Bemerkung

Existiert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

für jedes $c \in \mathbb{R}$.

Definition (Uneigentliches Integral: unbeschränkte Funktion)

Sei $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[c, b]$ für alle $c \in]a, b]$. Dann heißt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \searrow a} \int_c^b f(x) dx$$

das **uneigentliche Integral** von f über $]a, b]$. Falls dieser Grenzwert existiert, so heißt f **uneigentlich integrierbar** auf $]a, b]$.

Ist $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, c]$ für jedes $c \in [a, b[$, so definiert man genauso

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(x) dx.$$

Falls dieser Grenzwert existiert, so heißt f **uneigentlich integrierbar** auf $[a, b[$.

Integration rationaler Funktionen

Ziel: Bestimmen von Stammfunktionen von rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ mit Polynomen } p \text{ und } q.$$

Erinnerung

Eine (komplexe) Polynomdivision und Partialbruchzerlegung (vgl. Vorlesung 9) liefert $\frac{p}{q}$ als Summe von Bestandteilen der Form

(1) Polynom,

(2) $\frac{A}{x - z}$ mit der Nullstelle $z \in \mathbb{C}$ des Nenners q ,

(3) $\frac{A}{(x - z)^{k+1}}$ mit $k \geq 1$, falls $z \in \mathbb{C}$ mehrfache Nullstelle des Nenners q ist.

Stammfunktion von Partialbrüchen

(1) Mehrfache Polstellen:

Für $k \geq 1$ gilt wie im Reellen

$$\int \frac{1}{(x-z)^{k+1}} dx = -\frac{1}{k} \frac{1}{(x-z)^k} + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}.$$

(2) Einfache Polstellen:

Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist

$$\int \frac{1}{x-z} dx = \begin{cases} \ln |x-z| + c & \text{falls } b = 0, \\ \ln |x-z| + i \arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c & \text{falls } b \neq 0, \end{cases}$$

mit $c \in \mathbb{C}$.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

32. Vorlesung: Die Determinante

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Ziel

Wir ordnen jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ in geeigneter Weise eine Zahl aus \mathbb{K} zu. Diese Zuordnung werden wir Determinante nennen.

Anwendungen

Die Determinante dient der Volumenberechnung. Sie findet Anwendungen

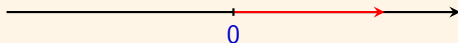
- (1) um die Invertierbarkeit einer Matrix zu charakterisieren (gleich).
- (2) bei der Herleitung und Berechnung von Eigenwerten (vgl. Vorlesung 33),
- (3) bei der mehrdimensionalen Integration („Analysis II für Ingenieurwissenschaften“)

$n = 1$

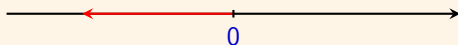
Für $A = [a_{1,1}]$ definiert man die Determinante $\det(A) := a_{1,1}$.

$|\det(A)|$ ist die Länge von $a_{1,1}$.

Das Vorzeichen von $\det(A) \neq 0$ zeigt die Richtung von $a_{1,1}$.



$\det(A) > 0$



$\det(A) < 0$

$n = 2$

Die Determinante einer 2×2 -Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

ist

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}.$$

Geometrische Deutung in \mathbb{R}^2 (der Ebene):

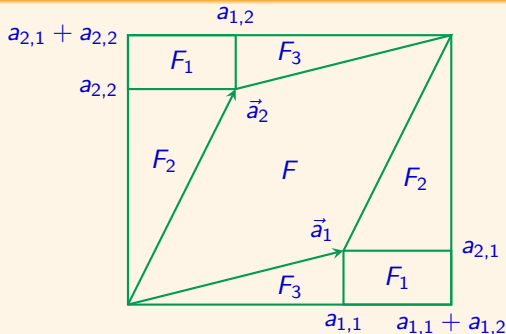
$|\det(A)|$ ist der Flächeninhalt des von den Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}$$

aufgespannten Parallelogramms.

Das Vorzeichen von $\det(A)$ zeigt die Orientierung der Vektoren.

Flächeninhalt des Parallelogramms



$$\begin{aligned}
 F &= (a_{1,1} + a_{1,2})(a_{2,1} + a_{2,2}) - 2F_1 - 2F_2 - 2F_3 \\
 &= a_{1,1}a_{2,1} + a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,1} + a_{1,2}a_{2,2} \\
 &\quad - 2a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,2}a_{2,2} - a_{1,1}a_{2,1} \\
 &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = \det(A).
 \end{aligned}$$

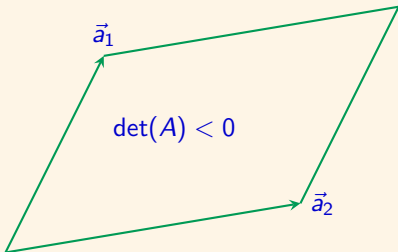
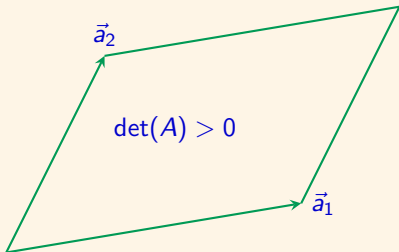
Vertauscht man \vec{a}_1 und \vec{a}_2 in der Skizze, so bleibt der Flächeninhalt des Parallelogramms gleich, eine ähnliche Rechnung liefert aber $F = a_{1,2}a_{2,1} - a_{2,2}a_{1,1} = -\det(A)$, so dass $F = |\det(A)|$.

Zusammenfassung für $n = 2$

$|\det(A)| = F$ ist der Flächeninhalt des von \vec{a}_1 und \vec{a}_2 aufgespannten Parallelogramms und das Vorzeichen der Determinante gibt an, wie die Vektoren \vec{a}_1 und \vec{a}_2 zueinander liegen.

Ist $\det(A) > 0$, so ist die Drehung von \vec{a}_1 zu \vec{a}_2 über den kleineren Winkel entgegen dem Uhrzeigersinn.

Ist $\det(A) < 0$, so ist die Drehung von \vec{a}_1 zu \vec{a}_2 über den kleineren Winkel im Uhrzeigersinn.



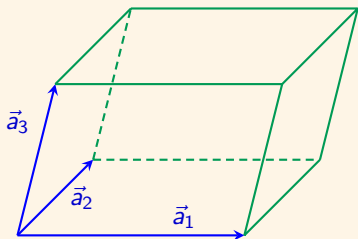
Drei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$ erzeugen ein Parallelotop (= Parallelepipiped = Spat), dessen Volumen mit dem Spatprodukt berechnet werden kann: $V = |\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)|$, wobei \cdot das Standardskalarprodukt in \mathbb{R}^3 bezeichnet und \times das Vektorprodukt,

$$\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3} \\ a_{3,2}a_{1,3} - a_{1,2}a_{3,3} \\ a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3} \end{bmatrix}.$$

Daher wird die Determinante von $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{K}^{3,3}$ formal als Spatprodukt definiert (die Ausdrücke in Klammern sind die Determinanten von 2×2 -Matrizen):

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3}) + a_{2,1}(a_{3,2}a_{1,3} - a_{1,2}a_{3,3}) \\ &\quad + a_{3,1}(a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,2}a_{1,3}) \\ &= a_{1,1} \det \left(\begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \right) - a_{2,1} \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \right) \\ &\quad + a_{3,1} \det \left(\begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Das Volumen V des von den drei Vektoren \vec{a}_1 , \vec{a}_2 und \vec{a}_3 aufgespannten Spates ist dann $|\det(A)|$ mit $A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3]$.



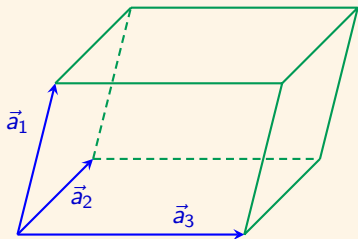
Rechte-Hand-Regel

$\vec{a}_1 \hat{=}$ Daumen

$\vec{a}_2 \hat{=}$ Zeigefinger

$\vec{a}_3 \hat{=}$ Mittelfinger

dann: $\det(A) > 0$



„Linke-Hand-Regel“

$\vec{a}_1 \hat{=}$ Daumen

$\vec{a}_2 \hat{=}$ Zeigefinger

$\vec{a}_3 \hat{=}$ Mittelfinger

dann: $\det(A) < 0$

Definition (Streichungsmatrix)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit $n > 1$. Durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht die **Streichungsmatrix**

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n-1,n-1}.$$

Definition (Determinante)

Die **Determinante** von $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist

$$\det(A) := a_{1,1}, \quad \text{falls } n = 1,$$

$$\det(A) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1}), \quad \text{falls } n > 1.$$

Beispiel

Für

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} a_{i,1} \det(A_{i,1})$$

$$= +a_{1,1} \det(A_{1,1}) - a_{2,1} \det(A_{2,1}) + a_{3,1} \det(A_{3,1}) - a_{4,1} \det(A_{4,1})$$

mit

$$A_{1,1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{2,1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{3,1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_{4,1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Beispiel (Fortsetzung)

$$\det(A)$$

$$= +(-2) \cdot \det(A_{1,1}) - 1 \cdot \det(A_{2,1}) + 0 \cdot \det(A_{3,1}) - 3 \cdot \det(A_{4,1})$$

$$= (-2) \cdot \left((-1) \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) - (-2) \cdot ((-1) \cdot 2 - 2 \cdot (-2)) \right)$$

$$+ 1 \cdot ((-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-2)) \Big)$$

$$+ (-1) \cdot \left(4 \cdot (1 \cdot 2 - 2 \cdot 1) - (-2) \cdot (2 \cdot 2 - 2 \cdot 1) \right)$$

$$+ 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \Big)$$

$$+ 0 \cdot \left(4 \cdot ((-1) \cdot 2 - 2 \cdot (-2)) - (-1) \cdot (2 \cdot 2 - 2 \cdot 1) \right)$$

$$+ 1 \cdot (2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1) \Big)$$

$$+ (-3) \cdot \left(4 \cdot ((-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-2)) - (-1) \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) \right)$$

$$+ (-2) \cdot (2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1) \Big) = -10 - 5 - 33 = -48$$

Determinante für obere und untere Dreiecksmatrizen

Für eine obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

ist $\det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$ das Produkt der Diagonaleinträge.

Für eine untere Dreiecksmatrix

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,n-1} & 0 \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n-1} & b_{n,n} \end{bmatrix}$$

ist $\det(B) = b_{1,1} \cdot b_{2,2} \cdot \dots \cdot b_{n,n}$ das Produkt der Diagonaleinträge.

Rechenregeln für die Determinante

Sei $A = [\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_n] \in \mathbb{K}^{n,n}$, $\vec{a} \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

(1) Die Determinante ist linear in jeder Spalte von A :

- $\det([\vec{a}_1 \ \dots \ \lambda \vec{a}_j \ \dots \ \vec{a}_n]) = \lambda \det([\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_j \ \dots \ \vec{a}_n])$
- $\det([\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_j + \vec{a} \ \dots \ \vec{a}_n])$
 $= \det([\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_j \ \dots \ \vec{a}_n]) + \det([\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a} \ \dots \ \vec{a}_n]).$

(2) Die Determinante ist antisymmetrisch: Vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen: Für $k \neq j$ ist

$$\det([\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_j \ \dots \ \vec{a}_k \ \dots \ \vec{a}_n]) = -\det([\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_k \ \dots \ \vec{a}_j \ \dots \ \vec{a}_n]).$$

(3) Hat A zwei gleiche Spalten, so ist $\det(A) = 0$.

(4) Addition einer Spalte zu einer anderen Spalte ändert die Determinante nicht: Für $k \neq j$ ist

$$\det([\vec{a}_1 \ \dots \ (\vec{a}_j + \lambda \vec{a}_k) \ \dots \ \vec{a}_n]) = \det([\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_j \ \dots \ \vec{a}_n]).$$

(5) $\det(A) = \det(A^T)$.

Wegen (5) gelten alle Aussagen auch für die Zeilen der Matrix.

Laplacescher Entwicklungssatz

Für $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gilt die Laplace-Entwicklung nach der j -ten Spalte:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

sowie die Laplace-Entwicklung nach der i -ten Zeile:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

Vorzeichenmuster bei der Entwicklung bildet ein „Schachbrett“:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ + & - & + & - & + & \dots \\ - & + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Determinantenmultiplikationssatz

Für quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Bemerkung

Achtung: Es gibt keinen Determinantenadditionssatz!

Im Allgemeinen ist

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B).$$

Beispiel: Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist

$$\det(A + B) = \det(I_2) = 1 \neq 0 = \det(A) + \det(B).$$

Folgerungen aus dem Determinantenmultiplikationssatz

Für quadratische $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ gilt

- (1) $\det(AB) = \det(BA)$, selbst wenn $AB \neq BA$.
- (2) $\det(A^k) = (\det(A))^k$ für $k \in \mathbb{N}$.
- (3) $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$, falls A invertierbar ist.
- (4) $\det(C^{-1}AC) = \det(A)$ für alle invertierbaren $C \in \mathbb{K}^{n,n}$.
- (5) Für eine Blockdreiecksmatrix mit quadratischen B und D gilt

$$\det \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(B) \det(D).$$

Die Matrix C muss dabei nicht quadratisch sein.

Charakterisierung invertierbarer Matrizen

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Dann sind äquivalent:

- (1) A ist invertierbar,
- (2) $\det(A) \neq 0$,
- (3) $\text{Rang}(A) = n$,
- (4) $A\vec{x} = \vec{0}$ ist eindeutig lösbar (durch $\vec{x} = \vec{0}$),
- (5) die Spalten von A sind linear unabhängig,
- (6) die Zeilen von A sind linear unabhängig.

Betrachte das LGS

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 9 \\ -2x_1 + 2x_2 & = & -4 \\ x_1 - 3x_2 & = & 2 \end{array}$$

Frage: Hat das LGS eine eindeutige Lösung ?

Für

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

gilt:

$$\det(A) = 2 \cdot \det \left(\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right) = 2 \cdot ((-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 2) = 8 \neq 0$$

wobei wir nach der 3. Spalte entwickelt haben.

Antwort: Da $\det(A) \neq 0$, ist A invertierbar und somit das LGS mit $x = A^{-1}b$ eindeutig lösbar (vgl. Folie 383)

Durch Negation aller Aussagen auf Folie 383 erhalten wir die Charakterisierung für nicht-invertierbare Matrizen

Für $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ sind äquivalent:

- (1) A ist nicht invertierbar,
- (2) $\det(A) = 0$,
- (3) $\text{Rang}(A) < n$,
- (4) es existiert $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ und $A\vec{x} = \vec{0}$,
- (5) die Spalten von A sind linear abhängig,
- (6) die Zeilen von A sind linear abhängig.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

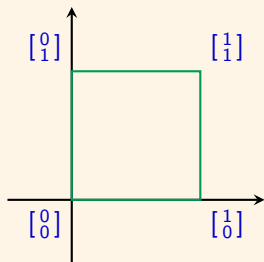
Wintersemester 2025/2026

33. Vorlesung: Eigenwerte und Eigenvektoren

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Motivation 1

Multiplikation mit $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ergibt

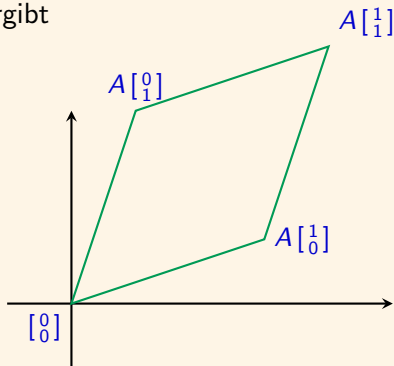
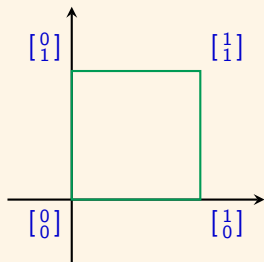


Geometrisch:

- Streckung um den Faktor 2 in x -Richtung, da $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
- y -Richtung bleibt alles wie es ist, da $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Motivation 2

Multiplikation mit $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ergibt

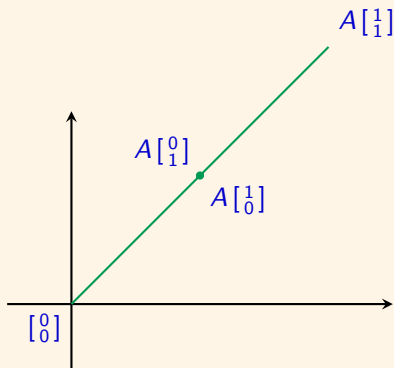
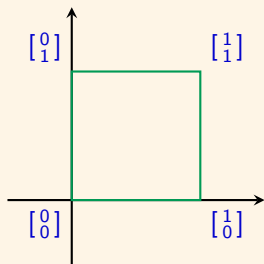


Geometrisch:

- Richtung des Vektors $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ wird um 2 gestreckt, da $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
- Richtung des Vektors $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ wird um 1 gestreckt (bleibt also gleich), da $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Motivation 3

Multiplikation mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ergibt

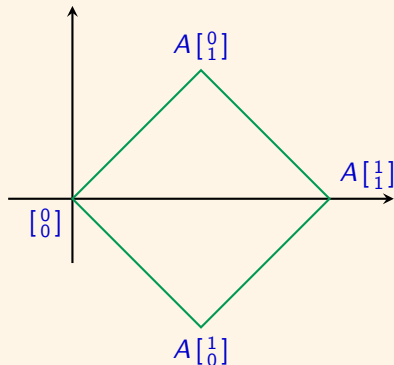
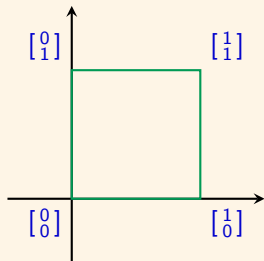


Geometrisch: Das Quadrat wurde plattgedrückt!

- Streckung mit 2 in Richtung des Vektors $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, da $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Streckung mit 0 in Richtung des Vektors $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(A)$

Motivation 4

Multiplikation mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ergibt



Geometrisch: Multiplikation mit A führt eine Drehstreckung des Quadrats aus. Hier ist nicht ersichtlich, ob A Vektoren in eine Richtung streckt.

Definition (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine quadratische Matrix. Gilt

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{K} \text{ und } \vec{v} \in \mathbb{K}^n, \vec{v} \neq \vec{0}, \quad (*)$$

so heißt

- (1) λ ein **Eigenwert** von A mit zugehörigem Eigenvektor \vec{v} ,
- (2) \vec{v} ein **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ .

Die Gleichung $(*)$ wird auch **Eigenwertgleichung** genannt.

Bemerkung

- (1) Geometrisch bewirkt die Multiplikation eines Eigenvektors mit A eine Streckung um den Faktor λ .
- (2) Eigenwerte (Abkürzung: EW) können 0 sein.
- (3) Eigenvektoren (Abkürzung: EV) können **nie** $\vec{0}$ sein, denn sonst wäre $A \cdot \vec{0} = \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$.

Definition (Eigenraum und geometrische Vielfachheit)

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$.

- (1) Der **Eigenraum** von A zum Eigenwert λ ist

$$V_\lambda = V_\lambda(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\}.$$

- (2) Die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts λ ist die Dimension des Eigenraums: $g(\lambda) = g(\lambda, A) = \dim(V_\lambda(A))$.

Bemerkung

- (1) Es ist $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ genau dann, wenn $(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$. Daher ist

$$V_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\} = \text{Kern}(A - \lambda I).$$

Insbesondere ist V_λ ein Teilraum des \mathbb{K}^n .

- (2) Die Elemente $\vec{v} \neq \vec{0}$ von V_λ sind genau die Eigenvektoren:

$$V_\lambda = \{\text{Eigenvektoren zum Eigenwert } \lambda\} \cup \{\vec{0}\}.$$

- (3) Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ ist die Dimension des Eigenraums, also die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren zu λ .

Definition (Charakteristisches Polynom, algebraische Vielfachheit)

(1) Das **charakteristische Polynom** von $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist

$$p_A(z) := \det(A - zI_n).$$

(2) Die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts λ von $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ ist die Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom. Bezeichnung: $a(\lambda) = a(\lambda, A)$.

Bestimmung der Eigenwerte

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Nullstellen von p_A mit

$$p_A(z) = (-1)^n (z - \lambda_1)^{a(\lambda_1)} (z - \lambda_2)^{a(\lambda_2)} \dots (z - \lambda_r)^{a(\lambda_r)}.$$

Dann gilt:

(1) A hat die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (keine weiteren).

(2) Die Summe der algebraischen Vielfachheiten ist n , d.h.,

$$a(\lambda_1) + \dots + a(\lambda_r) = n.$$

(3) A hat höchstens n verschiedene Eigenwerte (falls $r = n$).

Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gegeben, so berechnen wir die Eigenwerte und Eigenvektoren wie folgt:

- (1) Berechne das charakteristische Polynom $p_A(z) = \det(A - zI_n)$.
- (2) Berechne die Nullstellen von p_A , dies sind die Eigenwerte von A .
- (3) Berechne für jeden Eigenwert die Lösung des homogenen LGS $(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$. Die Lösungen $\vec{v} \neq \vec{0}$ sind die Eigenvektoren zum Eigenwert λ .

Weitere Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

(1) Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine obere oder untere Dreiecksmatrix, so sind die Eigenwerte von A genau die Diagonaleinträge.

(2) Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt

$$1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda),$$

d.h. die geometrische Vielfachheit ist immer kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

(3) Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ zu den verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, so sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ linear unabhängig.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

34. Vorlesung: Diagonalisierbarkeit

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ eine quadratische Matrix und sei

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{K} \text{ und } \vec{v} \in \mathbb{K}^n, \vec{v} \neq \vec{0}.$$

- (1) λ ist ein **Eigenwert** von A mit zugehörigem Eigenvektor \vec{v} .
- (2) \vec{v} ist ein **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ .

- (3) Der **Eigenraum** von A zum Eigenwert λ ist

$$V_\lambda = V_\lambda(A) = \{\vec{v} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\} = \text{Kern}(A - \lambda I_n).$$

- (4) Die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts λ ist die Dimension des Eigenraums:

$$g(\lambda) = g(\lambda, A) = \dim(V_\lambda(A)).$$

- (5) Das **charakteristische Polynom** von A ist

$p_A(z) := \det(A - zI_n)$. Die Nullstellen von p_A sind die Eigenwerte von A .

- (6) Die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts λ von A ist die Vielfachheit der Nullstelle λ im charakteristischen Polynom.
Bezeichnung: $a(\lambda) = a(\lambda, A)$.

- (7) Es gilt immer $1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda)$

Definition (Diagonalisierbarkeit)

Die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n,n}$ gibt, so dass

$$S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (*)$$

eine Diagonalmatrix ist. Die Matrix D nennt man eine **Diagonalisierung** von A .

Die Diagonalelemente von D sind dann die Eigenwerte von A und die Spalten von S sind die zugehörigen Eigenvektoren.

Bemerkung

- (1) Wir können die Gleichung $(*)$ auch schreiben als $A = SDS^{-1}$.
- (2) Beachten Sie: S ist die Basiswechselmatrix von der Basis $B = \{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n\}$ (Spalten von S) in die Standardbasis B_0 , also $S = \text{id}_{B, B_0}$. Dann ist $D = A_{B, B}$ (vgl. Mitschrift).

Wann lässt sich eine Matrix diagonalisieren?

Für $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ sind äquivalent:

- (1) A ist diagonalisierbar.
- (2) Es gibt eine Basis von \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren von A .
- (3) Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren und $a(\lambda) = g(\lambda)$ für jeden Eigenwert von A .

Hinweis zu (3): “Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren” bedeutet, dass es genügend Eigenwerte gibt (klappt immer in \mathbb{C}) und “ $a(\lambda) = g(\lambda)$ ” bedeutet, dass es genügend Eigenvektoren für eine Basis gibt.

Bemerkung

- (1) Bilden die Spalten von S eine Basis aus Eigenvektoren von A , so ist $S^{-1}AS$ diagonal.
- (2) Ist $S^{-1}AS = D$ diagonal, so sind die Spalten von S Eigenvektoren von A und auf der Diagonalen von D stehen die Eigenwerte von A (vgl. Mitschrift).

Berechnung einer Diagonalisierung: Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ gegeben.

- (a) Berechne das charakteristische Polynom p_A .
- (b) Bestimme die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ von p_A (Eigenwerte von A) mit algebraischen Vielfachheiten. (Gibt es keine n Nullstellen, so ist A nicht diagonalisierbar.)
- (c) Bestimme für $j = 1, \dots, k$ die Eigenräume
$$V_{\lambda_j} = \text{Kern}(A - \lambda_j I_n) = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n \mid (A - \lambda_j I_n)\vec{x} = \vec{0}\}$$
und bestimme jeweils eine Basis \mathcal{B}_j und die geometrische Vielfachheit $g(\lambda_j)$.
- (d) Gilt $g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$ für alle $j = 1, \dots, k$? (Wenn nicht, ist A nicht diagonalisierbar.)
- (e) $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ ist eine Basis aus Eigenvektoren, die als die Spalten von S genommen werden können. Schreibe $S = [\vec{s}_1 \ \dots \ \vec{s}_n] \in \mathbb{K}^{n,n}$. Dann ist $S^{-1}AS = D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, wobei μ_j der Eigenwert zum Eigenvektor \vec{s}_j ist (j -te Spalte von S).

Erinnerung Vorlesung 33

Ist $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt

$$1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda),$$

d.h. die geometrische Vielfachheit ist immer kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.

Folgerung

Hat $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ genau n verschiedene Eigenwerte (d.h. $a(\lambda_i) = 1$ für jeden Eigenwert λ_i von A), so ist A diagonalisierbar.

Frage 1

Sei $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ mit den Eigenwerten $1, -2$ und 3 .
Ist A diagonalisierbar?

Frage 2

Sei $B \in \mathbb{R}^{4,4}$ mit den Eigenwerten $1, -2, 1$ und 3 .
Ist B diagonalisierbar?

Frage 3

Sei $C \in \mathbb{R}^{4,4}$ mit den Eigenwerten $1, -2, 4$ und 3 .
Ist C diagonalisierbar?

Voraussetzung

Im Folgenden (Folien 403–406) sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ diagonalisierbar mit $S^{-1}AS = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonal, also $A = SDS^{-1}$.

Potenzen von A :

$$A^2 = AA = SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^2S^{-1},$$

$$A^3 = AA^2 = SDS^{-1}SD^2S^{-1} = SD^3S^{-1},$$

und allgemein (Induktion!)

$$A^k = SD^kS^{-1} = S \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Vorteil: Für A^k brauchen wir k Matrixmultiplikationen, mit der Diagonalisierung nur zwei.

Polynome von Matrizen:

Ist $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m$ ein Polynom, so ist

$$\begin{aligned}
 p(A) &= a_0I_n + a_1A + \dots + a_mA^m \\
 &= a_0SI_nS^{-1} + a_1SDS^{-1} + \dots + a_mSD^mS^{-1} \\
 &= Sp(D)S^{-1} = S \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{bmatrix} S^{-1},
 \end{aligned}$$

d.h. wir brauchen nur die $p(\lambda_j)$ berechnen, sowie zwei Matrizenmultiplikationen.

Funktionen von Matrizen:

Wir schreiben

$$f(A) := S \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} S^{-1},$$

falls die Funktion an den Eigenwerten definiert ist.

Das wird insbesondere für $f(x) = e^x$ wichtig beim Lösen von Differentialgleichungen in Vorlesung 43.

Rekursionen auflösen:

Für die Fibonacci-Folge $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 2$) können wir schreiben

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}, \quad n \geq 2, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dann folgt

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

so dass wir a_n direkt berechnen können (ohne alle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} vorher zu berechnen). Hier ist mit $z_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $z_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} z_+ & z_- \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_+ & 0 \\ 0 & z_- \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -z_- \\ -1 & z_+ \end{bmatrix}$$

also

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(z_+^n - z_-^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

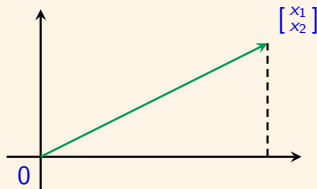
35. Vorlesung:

Vektorräume mit Skalarprodukt 1

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

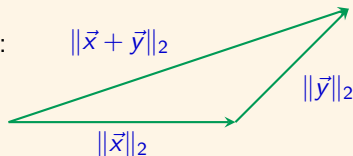
Länge von Vektoren und Abstand zwischen zwei Vektoren

In \mathbb{R}^2 ist die „übliche“ Länge eines Vektors $\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.



Die Länge hat die folgenden Eigenschaften:

- Längen sind immer positiv (bzw. nichtnegativ).
- Bei Streckung des Vektors um λ wird die Länge mit $|\lambda|$ multipliziert.
- Dreiecksungleichung:



Jetzt: Verallgemeinerung des Begriffs der Länge

Definition (Norm)

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

(1) **Positive Definitheit:**

Für alle $v \in V$ ist $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0$ nur für $v = 0$.

(2) **Homogenität:**

Für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

(3) **Dreiecksungleichung:**

Für alle $v, w \in V$ gilt $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Bemerkung

Der Absolutbetrag auf $V = \mathbb{R}$ oder $V = \mathbb{C}$ ist auch eine Norm.

Definition (Skalarprodukt, euklidischer/unitärer Vektorraum)

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} . Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt ein **Skalarprodukt** auf V falls für alle $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

(1) **Linearität im ersten Argument:**

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle,$$

(2) **Symmetrie:** $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

(3) **Positive Definitheit:** $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ so heißt ein Vektorraum V mit Skalarprodukt ein **euklidischer Vektorraum**, ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ so nennt man V einen **unitären Vektorraum**.

Bemerkung

- (1) Für das zweite Argument eines Skalarprodukts gilt:

$$\begin{aligned}\langle v, u + w \rangle &= \overline{\langle u + w, v \rangle} = \overline{\langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle} \\ &= \overline{\langle u, v \rangle} + \overline{\langle w, v \rangle} = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle\end{aligned}$$

und

$$\langle v, \lambda w \rangle = \overline{\langle \lambda w, v \rangle} = \overline{\lambda \langle w, v \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle w, v \rangle} = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle.$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist $\overline{\lambda} = \lambda$ und das Skalarprodukt ist auch linear im zweiten Argument.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist das Skalarprodukt nicht linear im zweiten Argument, da Skalare komplex konjugiert aus dem zweiten Argument „herausgezogen“ werden.

Man sagt, das Skalarprodukt ist **semilinear** oder **antilinear** im zweiten Argument.

- (2) In einem **reellen** Vektorraum mit Skalarprodukt ist $\langle w, v \rangle \in \mathbb{R}$, so dass man das komplex Konjugieren bei der Symmetrie weglassen kann: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$.

Induzierte Norm

Ist V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so ist

$$\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle},$$

eine Norm auf V . Diese heißt **vom Skalarprodukt induzierte Norm** (= zum Skalarprodukt zugehörige Norm).

Definition (Orthogonale und orthonormale Vektoren)

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die Vektoren $v_1, \dots, v_k \in V$ heißen

(1) **orthogonal** (=senkrecht), falls $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$,

(2) **orthonormal**, falls

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j, \end{cases} \quad \begin{array}{l} (\leftarrow \text{normiert}) \\ (\leftarrow \text{orthogonal}) \end{array}$$

d.h. wenn sie orthogonal und normiert (d.h. Norm (Länge) 1 haben, d.h. $\|v_i\| = \sqrt{\langle v_i, v_i \rangle} = 1$ für jedes $i = 1, 2, \dots, k$) sind.

Bemerkung

Zwei Vektoren u, v sind also genau dann orthogonal, wenn $\langle u, v \rangle = 0$.

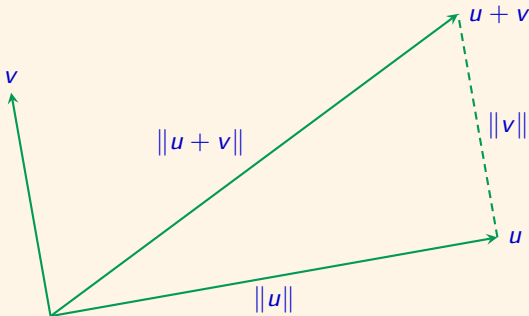
Satz des Pythagoras

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\| \cdot \|$. Sind $u, v \in V$ orthogonal, so gilt

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Allgemeiner gilt: Sind $v_1, \dots, v_k \in V$ orthogonal, so gilt

$$\|v_1 + \dots + v_k\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_k\|^2.$$



Definition (Orthonormalbasis)

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Eine Basis $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ von V heißt **Orthonormalbasis** (kurz: ONB), falls die Vektoren orthonormal sind, d.h. falls

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Eigenschaften von Orthonormalbasen

- (i) Orthonormale Vektoren sind linear unabhängig.
- (ii) Sind u_1, \dots, u_n orthonormal und ist $n = \dim(V)$, so ist $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine ONB von V (folgt sofort aus (i)).
- (iii) Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und einer Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$. Dann gilt für jeden Vektor $v \in V$

$$v = \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j,$$

Definition (Orthogonale Matrix)

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ heißt **orthogonal**, falls $Q^T Q = I_n$.

Bemerkung

Schreibe $Q = [q_1 \ \dots \ q_n]$ mit den Spalten $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$.
Dann gilt

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} [q_1 \ \dots \ q_n] = \begin{bmatrix} q_1^T q_1 & \dots & q_1^T q_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^T q_1 & \dots & q_n^T q_n \end{bmatrix}$$

also

$$Q^T Q = I_n \quad \Leftrightarrow \quad q_i^T q_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Dies zeigt: Q ist orthogonal genau dann, wenn die Spalten von Q eine Orthonormalbasis (bzgl. des Standardskalarprodukts) von \mathbb{R}^n sind.

Beispiel

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \text{ ist eine orthogonale Matrix, denn:}$$

$$\begin{aligned} Q^T Q &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}_{=\frac{1}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hinweis: Die Spalten von Q bilden eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 .

Eigenschaften orthogonaler Matrizen

Sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal. Dann gilt:

- (1) $\det(Q) = \pm 1$.
- (2) Q ist invertierbar und $Q^{-1} = Q^T$. Insbesondere gilt auch $QQ^T = I_n$.
- (3) Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\langle Q\vec{x}, Q\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ (Standardskalarprodukt).
- (4) Für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Q\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\|_2$.

Die letzten beiden Eigenschaften bedeuten, dass die Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix sowohl Winkel als auch die euklidische Länge erhält.

Definition (Unitäre Matrix)

Eine Matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ heißt **unitär**, falls $U^H U = I_n$.

U ist unitär genau dann, wenn die Spalten von U eine Orthonormalbasis (bzgl. des Standardskalarprodukts) von \mathbb{C}^n sind.

Eigenschaften unitärer Matrizen

Sei $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ unitär. Dann gilt:

- (1) $|\det(U)| = 1$, d.h. $\det(U) = e^{i\varphi}$ für $\varphi \in \mathbb{R}$.
- (2) U ist invertierbar und $U^{-1} = U^H$. Insbesondere gilt auch $UU^H = I_n$.
- (3) Für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ gilt $\langle U\vec{x}, U\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ (Standardskalarprodukt).
- (4) Für alle $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt $\|U\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\|_2$.
- (5) Die Eigenwerte von U liegen auf dem Einheitskreis: $|\lambda| = 1$.

Beispiel

$U = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$ ist eine unitäre Matrix, denn:

$$U^H U$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot (1-i) \cdot (1+i) & (1-i)^2 + (1+i)^2 \\ (1+i)^2 + (1-i)^2 & 2 \cdot (1+i) \cdot (1-i) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot (1-i^2) & 1-2i+(-i)^2+1+2i+i^2 \\ 1+2i+i^2+1-2i+(-i)^2 & 2 \cdot (1-i^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

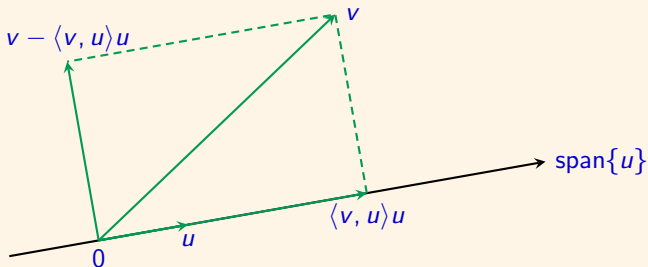
36. Vorlesung: Vektorräume mit Skalarprodukt 2

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Kürzeste Abstände und orthogonale Projektion ($k = 1$)

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $U = \text{span}\{u\}$ mit $\|u\| = 1$. Für $v \in V$ ist $v^* = \langle v, u \rangle u$ die orthogonale Projektion von v auf U . Dann ist v^* der Punkt aus U mit kleinstem Abstand zu v . Der Abstand von v zu U ist dann genau

$$\|v - \langle v, u \rangle u\| = \sqrt{\|v\|^2 - |\langle v, u \rangle|^2}.$$



Kürzeste Abstände und orthogonale Projektion ($k > 1$)

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und sei

$U = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ mit einer Orthonormalbasis u_1, \dots, u_k von U . Für $v \in V$ ist

$$v^* = \sum_{j=1}^k \langle v, u_j \rangle u_j$$

die orthogonale Projektion von v auf U .

Dann ist v^* der Punkt aus U mit kleinstem Abstand zu v .

Der Abstand von v zu U ist dann genau

$$\left\| v - \sum_{j=1}^k \langle v, u_j \rangle u_j \right\| = \sqrt{\|v\|^2 - \|v^*\|^2} = \sqrt{\|v\|^2 - \sum_{j=1}^k |\langle v, u_j \rangle|^2}.$$

Das Gram-Schmidt-Verfahren

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\| \cdot \|$. Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V .

(1) Normiere b_1 : $u_1 := \frac{1}{\|b_1\|} b_1$.

(2) Für $k = 2, \dots, n$:

(a) Orthogonalisiere b_k : Entferne den Anteil von b_k in die bereits gefundenen Richtungen u_1, \dots, u_{k-1} :

$$\hat{u}_k = b_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_k, u_j \rangle u_j$$

Dann ist $\langle \hat{u}_k, u_\ell \rangle = 0$ für $\ell = 1, 2, \dots, k-1$.

(b) Normiere \hat{u}_k :

$$u_k = \frac{1}{\|\hat{u}_k\|} \hat{u}_k.$$

Dann ist $\{u_1, \dots, u_n\}$ eine ONB von V mit der Eigenschaft, dass

$$\text{span}\{u_1, \dots, u_k\} = \text{span}\{b_1, \dots, b_k\} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n.$$

QR-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $m \geq n$. Dann ist

$$A = QR$$

mit einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m,m}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m,n}$, also

$$R = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ist $A \in \mathbb{C}^{m,n}$ mit $m \geq n$, so ist

$$A = QR$$

mit einer unitären Matrix $Q \in \mathbb{C}^{m,m}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{C}^{m,n}$.

Berechnung der QR-Zerlegung für invertierbares $A \in \mathbb{K}^{n,n}$

- (1) Wende das Gram-Schmidt-Verfahren (mit dem Standardskalarprodukt) auf die Spalten b_1, \dots, b_n von A an, um die ONB u_1, \dots, u_n zu erhalten.
- (2) Setze $Q := [u_1 \ \dots \ u_n]$. Dann ist Q orthogonal (bzw. unitär).
(Probe: $Q^T Q = I_n$ bzw. $Q^H Q = I_n$.)
- (3) Berechnung von $R = [r_{i,j}]$:
Zwei Möglichkeiten:

- berechne
$$r_{i,j} = \begin{cases} \langle b_j, u_i \rangle & \text{für } i \leq j \\ 0 & \text{für } i > j \end{cases}$$

(wird bei Gram-Schmidt mit berechnet) oder
- berechne $R = Q^T A$ (bzw. $R = Q^H A$).

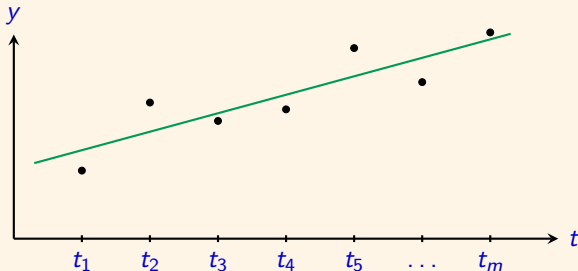
Dann ist R eine obere Dreiecksmatrix.

Dann ist $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A .

Anwendung: Methode der kleinsten Quadrate (engl. least squares)

Gegeben: Messwerte: (t_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$

Gesucht: Gerade $y(t) = a_1 t + a_2$ die diese Punkte „am Besten“ repräsentiert



Gesucht sind also Koeffizienten a_1, a_2 so dass

$$a_1 t_i + a_2 - y_i = \begin{bmatrix} t_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - y_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

möglichst klein wird (in der 2-Norm).

Lösung des kleinsten-Quadrate-Problems

Gegeben: Messwerte (t_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, m$, setze:

$$A = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

- (1) Berechne die QR-Zerlegung $A = QR$ mit $R = \begin{bmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{bmatrix}$.
- (2) Erhalte $\tilde{R} = \begin{bmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \end{bmatrix} y$ (hier: q_1^T, q_2^T sind die ersten beiden Zeilen von Q^T).
- (3) Löse das LGS $\tilde{R} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = b_1$.

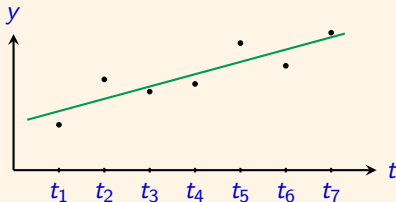
Dann ist $y(t) = a_1 t + a_2$ die Gerade durch die Messwerte, deren Abweichung den kleinsten Fehler hat (in der 2-Norm).

Beispiel

Der Plot am Anfang des Abschnitts illustriert die Datenpunkte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.8 \\ 1.9 \\ 3 \\ 2.5 \\ 3.2 \end{bmatrix}.$$

Für diese berechnet man $a_1 = 0.2714$ und $a_2 = 1.0286$ (auf 4 Nachkommastellen gerundet), was die eingezeichnete Gerade ergibt:



Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

37. Vorlesung: Reelle Fourieranalysis

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Bisher:

Differenzierbare Funktionen lassen sich lokal gut durch (Taylor-)Polynome approximieren:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Jetzt:

Periodische Funktionen werden global durch Sinus- und Cosinusfunktionen approximiert, also durch periodische Funktionen (Fourierapproximation). Die Fourierapproximation ist das mathematische Werkzeug für die Frequenzanalyse von periodischen Schwingungen.

Bemerkung

Die Taylorapproximation ist bei periodischen Funktionen ungeeignet, da Polynome nicht periodisch sind.

Definition (periodische Funktion)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **periodisch mit der Periode** $T > 0$ oder kurz **T -periodisch**, wenn $f(t + T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Bemerkung

Eine Periode muss nicht die kleinste Zahl mit der Eigenschaft $f(t + T) = f(t)$ für alle t sein.

Ist T eine Periode von f , so sind auch $2T$, $3T$, $4T$, ... Perioden der Funktion, zum Beispiel ist

$$f(t + 2T) = f((t + T) + T) = f(t + T) = f(t).$$

Definition (Trigonometrische Polynome)

Funktionen der Form

$$c_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

heißen **trigonometrische Polynome** vom Grad n oder von der Ordnung n .

Ziel

Wir wollen trigonometrische Polynome zur Approximation von periodischen Funktionen verwenden.

Orthogonalitätsrelationen

Sei $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann gilt für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$:

$$(1) \quad \frac{2}{T} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt = \begin{cases} 2 & \text{falls } k = \ell = 0, \\ 1 & \text{falls } k = \ell > 0, \\ 0 & \text{falls } k \neq \ell, \end{cases}$$

$$(2) \quad \frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) \sin(\ell\omega t) dt = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = \ell > 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$(3) \quad \frac{2}{T} \int_0^T \sin(k\omega t) \cos(\ell\omega t) dt = 0.$$

Definition (Fourierkoeffizienten und Fourierpolynom)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) eine stückweise monotone Funktion (dann ist f integrierbar, vgl. VL 28) der Periode $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Für $k \in \mathbb{N}$ heißen

$$a_k = \langle f, \cos(k\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt,$$

$$b_k = \langle f, \sin(k\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt,$$

die **reellen Fourierkoeffizienten** von f und

$$\varphi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

heißt das **n -te Fourierpolynom** oder das **Fourierpolynom der Ordnung n** von f .

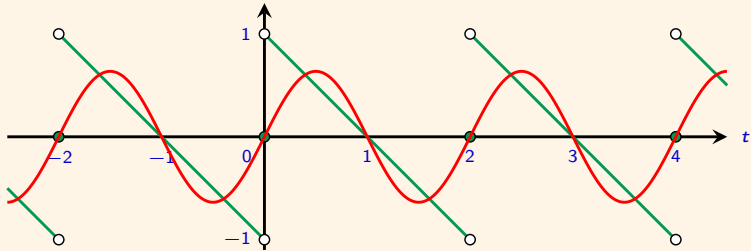
Bemerkung

- (1) Die Fourierkoeffizienten sind genau wie die Koeffizienten eines Vektors bezüglich einer ONB definiert.
- (2) Der konstante Term ist $a_0/2$ und nicht a_0 , da $\langle \cos(0\omega t), \cos(0\omega t) \rangle = 2$ und nicht 1 ist (vgl. Mitschrift), was hier ausgeglichen wird.
- (3) Es ist immer $b_0 = 0$, da $\sin(0\omega t) = 0$ ist.
- (4) Für die Fourierkoeffizienten von φ_n gilt (siehe Mitschrift)

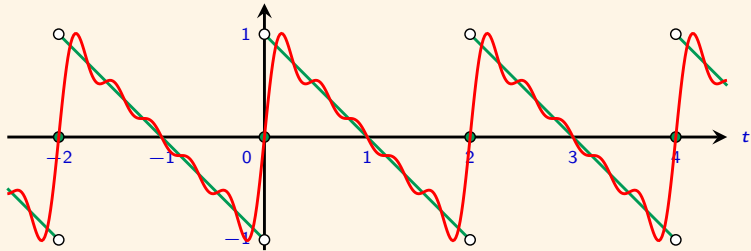
$$\frac{2}{T} \int_0^T \varphi_n(t) \cos(k\omega t) dt = a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt,$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \varphi_n(t) \sin(k\omega t) dt = b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

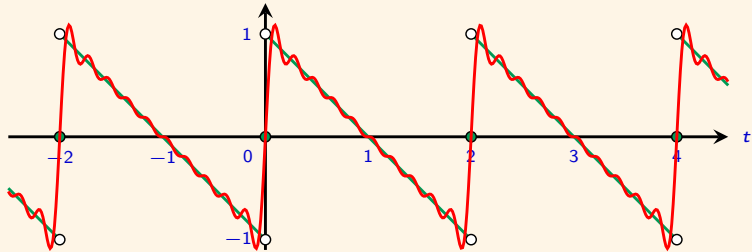
Sägezahnkurve (grün) und das 1. Fourierpolynom (rot)



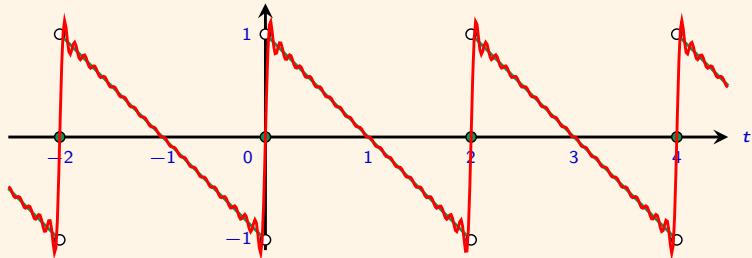
Sägezahnkurve (grün) und das 5. Fourierpolynom (rot)



Sägezahnkurve (grün) und das 10. Fourierpolynom (rot)



Sägezahnkurve (grün) und das 20. Fourierpolynom (rot)



Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

38. Vorlesung:

Approximation im quadratischen Mittel

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Wiederholung: Fourierkoeffizienten und Fourierpolynom)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) eine stückweise monotone Funktion der Periode $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Für $k \in \mathbb{N}$ heißen

$$a_k = \langle f, \cos(k\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt,$$

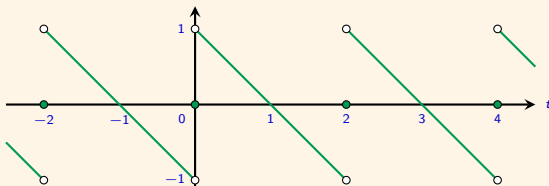
$$b_k = \langle f, \sin(k\omega t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt,$$

die **reellen Fourierkoeffizienten** von f und

$$\varphi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

heißt das **n -te Fourierpolynom** oder das **Fourierpolynom der Ordnung n** von f . φ_n ist die Orthogonalprojektion von f auf den Raum der trigonometrischen Polynome.

Wiederholung: Sägezahnkurve



Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist 2-periodisch (d.h. $T = 2$) mit

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{für } 0 < t < 2, \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Es ist

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0 \quad \text{für } k \geq 1, \quad b_k = \frac{2}{k\pi} \quad \text{für } k \geq 1.$$

Dann ist das n -te Fourierpolynom φ_n von f

$$\varphi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi t).$$

Ziele: Aussagen über die Approximationsgenauigkeit von Fourierpolynomen φ_n von einer periodischen Funktion f

- (1) Für festes n ist das Fourierpolynom dasjenige trigonometrische Polynom, das f am Besten in der L^2 -Norm approximiert.
- (2) Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert $\|f - \varphi_n\|_{L^2}$ in der L^2 -Norm (dem quadratischen Mittel) gegen Null.
- (3) Die Fourierpolynome konvergieren nicht nur im quadratischen Mittel gegen f , sondern wir können sogar genaue Aussagen über die Funktionswerte in jedem Punkt treffen.

Zuerst

Aussagen, die die Berechnung der Fourierkoeffizienten im Falle von geraden oder ungeraden Funktionen vereinfachen.

Wiederholung: Gerade und ungerade Funktionen (VL 5)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- (1) **gerade**, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- (2) **ungerade**, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Gerade Funktionen sind spiegelsymmetrisch zur y -Achse.

Ungerade Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beobachtungen

- (1) Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ ist
 - (a) $\cos(k\omega t)$ eine gerade Funktion.
 - (b) $\sin(k\omega t)$ eine ungerade Funktion.
- (2) Seien $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade Funktion und $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion. Dann gilt:
 - (a) Ist f gerade, so ist $f \cdot g$ gerade und $f \cdot u$ ungerade.
 - (b) Ist f ungerade, so ist $f \cdot g$ ungerade und $f \cdot u$ gerade.

Beobachtungen

(3) Sei g eine gerade und u eine ungerade Funktion. Dann gilt

$$(a) \int_{-a}^a u(t) dt = 0,$$

$$(b) \int_{-a}^a g(t) dt = 2 \int_0^a g(t) dt.$$

(4) Ist f T -periodisch, so können wir statt über $[0, T]$ über ein beliebiges anderes Intervall der Länge T integrieren d.h. für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt.$$

Speziell für $a = -\frac{T}{2}$ ist

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt.$$

Fourierkoeffizienten für ungerade/gerade Funktionen

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine T -periodische Funktion und $\omega = \frac{2\pi}{T} > 0$.

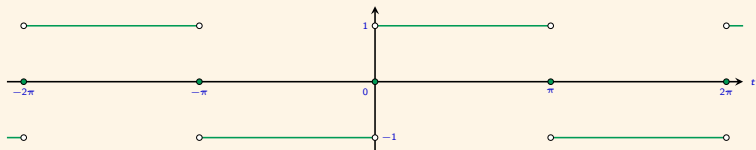
(1) Ist f ungerade, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

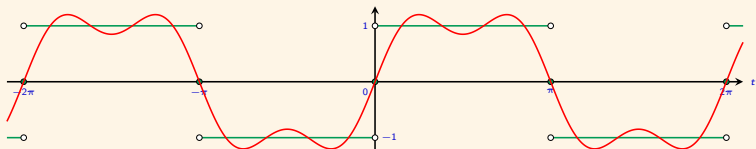
(2) Ist f eine gerade Funktion, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad \text{und} \quad b_k = 0.$$

Rechteckspannung



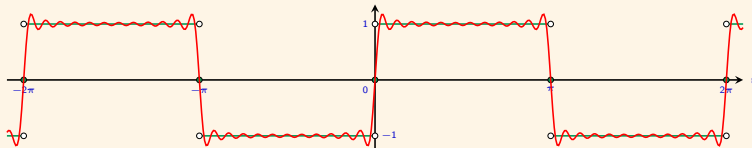
Rechteckspannung (grün) und das 3. Fourierpolynom (rot)



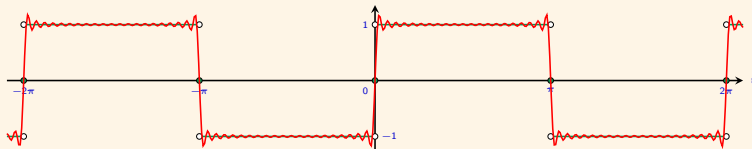
Rechteckspannung (grün) und das 11. Fourierpolynom (rot)



Rechteckspannung (grün) und das 21. Fourierpolynom (rot)



Rechteckspannung (grün) und das 41. Fourierpolynom (rot)



Gibbssches Phänomen

Der „Überschuss“ an den Sprungstellen (Überschwingungen) ist ein nach Gibbs benanntes typisches Phänomen bei der Approximation von Sprungfunktionen durch Fourierpolynome. Er beträgt knapp 9% des Sprungs.

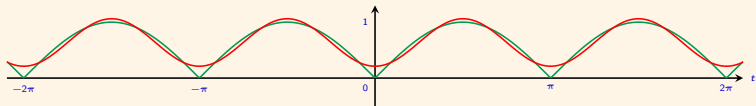
Gleichgerichteter Sinus:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = |\sin(t)|$ ist π -periodisch und gerade

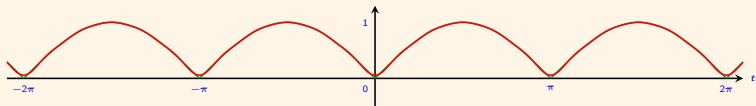
Dann gilt $b_k = 0$ (da f gerade) und $a_k = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4k^2}$, also

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^n \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4k^2} \cos(2kt)$$

Gleichgerichteter Sinus (grün) und das 1. Fourierpolynom (rot)



Gleichgerichteter Sinus (grün) und das 5. Fourierpolynom (rot)



Approximation im quadratischen Mittel

Sei f eine stückweise monotone Funktion mit Periode $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$ und den Fourierkoeffizienten a_k, b_k . Unter allen trigonometrischen Polynomen der Ordnung n liefert das n -te Fourierpolynom von f

$$\varphi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

die beste Approximation im quadratischen Mittel. Für dieses ist der „quadratische Fehler“ $\|f - \varphi_n\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \|\varphi_n\|_{L^2}^2$, also

$$\frac{2}{T} \int_0^T (f(t) - \varphi_n(t))^2 dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

Dieser Fehler konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen 0, d.h. $f(t)$ kann im quadratischen Mittel beliebig gut durch Fourierpolynome approximiert werden.

Definition (Fourierreihe)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine T -periodische Funktion mit den Fourierkoeffizienten a_k und b_k und sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann heißt

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \\ & := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \right) \end{aligned}$$

die **Fourierreihe** von f .

Bemerkung

- (1) Die Fourierreihe von f entspricht der ONB-Entwicklung (siehe VL 35, $v = \sum_{j=1}^n \langle v, u_j \rangle u_j$), nur mit **unendlich** vielen Termen.
- (2) Die Fourierpolynome entsprechen der Bestapproximation durch trigonometrische Polynome (VL 36, orthogonale Projektion), d.h. φ_n ist die orthogonale Projektion von f auf den Teilraum der trigonometrischen Polynome.
- (3) Die Approximation im quadratischen Mittel auf Folie 449 besagt, dass die Fourierreihe im quadratischen Mittel gegen f konvergiert. Der Approximationsfehler

$$\|f - \varphi_n\|_{L^2} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T (f(t) - \varphi_n(t))^2 dt}$$

konvergiert gegen 0 für $n \rightarrow \infty$.

Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei T -periodisch und stückweise monoton und es sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann gilt:

- (1) An allen Stetigkeitsstellen t von f konvergiert die Fourierreihe von f gegen $f(t)$.
- (2) An allen Unstetigkeitsstellen existieren wegen der stückweisen Monotonie der links- und rechtsseitige Grenzwert

$$f(t-) = \lim_{\tau \nearrow t} f(\tau) \quad \text{und} \quad f(t+) = \lim_{\tau \searrow t} f(\tau)$$

von f und die Fourierreihe konvergiert gegen den Mittelwert

$$\frac{f(t-) + f(t+)}{2}.$$

Man hat also **für alle** t :

$$\frac{f(t-) + f(t+)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)).$$

Parsevalsche Gleichung und Besselsche Ungleichung (Folgerung aus der Approximation im quadratischen Mittel auf Folie 449)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $T = \frac{2\pi}{\omega}$ -periodisch und stückweise monoton mit Fourierkoeffizienten a_k und b_k . Dann gilt die

Parsevalsche Gleichung

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Durch Abschneiden der Summe erhält man die **Besselsche Ungleichung**

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)^2 dt \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = \|\varphi_n\|_{L^2}^2.$$

Bemerkung

Mit der Parsevalschen Gleichung lassen sich unter anderem Grenzwerte von Folgen von Summen (Reihen) berechnen.

Integration

Konvergente Fourierreihen darf man gliedweise integrieren, d.h. man kann wie bei einer endlichen Summe jeden Summand einzeln integrieren:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \right) dt \\ &= \int_a^b \frac{a_0}{2} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) dt. \end{aligned}$$

Differentiation

Man darf Fourierreihen im Allgemeinen **nicht** gliedweise differenzieren.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

39. Vorlesung: Komplexe Fourieranalysis

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (komplexe trigonometrische Polynome)

Sei $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Die komplexwertigen Funktionen der Form

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

heißen komplexe **trigonometrische Polynome** vom Grad n oder von der Ordnung n . Diese sind T -periodisch.

Definition (komplexe Fourierkoeffizienten und Fourierpolynome)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) eine stückweise monotone Funktion der Periode $T > 0$ und es sei $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Die **komplexen Fourierkoeffizienten** von f sind

$$c_k = \left\langle f, e^{ik\omega t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

und

$$\phi_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega t}$$

ist das n -te **komplexe Fourierpolynom** von f .

Bemerkung

- (1) Die Formeln sind einfacher als die für das reelle Fourierpolynom:

Der Faktor vor dem Integral ist $\frac{1}{T}$ statt $\frac{2}{T}$ und die Sonderrolle von a_0 ist verschwunden.

- (2) Analog zum reellen Fall ist das komplexe Fourierpolynom vom Grad n dasjenige komplexe trigonometrische Polynom vom Grad n , das f am Besten im quadratischen Mittel approximiert (jetzt mit dem komplexen Skalarprodukt), also in der Norm

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}.$$

- (3) Ist f reellwertig, so sind die Fourierkoeffizienten a_k und b_k reell und es gilt

$$\overline{c_{-k}} = c_k,$$

was die Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten vereinfachen kann.

Umrechnungsformeln zwischen reellen und komplexen Fourierkoeffizienten

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$) eine T -periodische Funktion und $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

(1) Sind die reellen Fourierkoeffizienten a_k, b_k gegeben, so sind

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad k \geq 1,$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k \geq 1.$$

(2) Sind die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k, k \in \mathbb{Z}$, gegeben, so gilt

$$a_0 = 2c_0,$$

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad k \geq 1,$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \geq 1.$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

40. Vorlesung: Reihen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Reihe)

- (1) Aus einer gegebenen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bilden wir eine neue Folge von Summen $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nennen wir eine **unendliche Reihe** und schreiben auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Die a_k heißen **Glieder** der Reihe, die Summe s_n heißt die n -te **Partialsumme** der Reihe.

- (2) Die Reihe **konvergiert** (bzw. **divergiert**), falls die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (bzw. divergiert).
- (3) Existiert der Grenzwert $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, so heißt s der **Wert** (oder

die **Summe**) der Reihe und wir schreiben dafür $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Bemerkung

Die Bezeichnung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hat zwei Bedeutungen:

(1) Alleinstehend bezeichnet $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(2) In einer Gleichung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$ bezeichnet $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ den

Grenzwert $s = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$.

Bemerkung

Statt \mathbb{N} betrachtet man auch andere Summationsbereiche, zum

Beispiel $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ in $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ oder auch \mathbb{Z} .

Beobachtung

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ und es gilt

$$\text{für } m > 0: \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_{m-1} + \sum_{k=m}^{\infty} a_k,$$

$$\text{für } m < 0: \quad \sum_{k=m}^{\infty} a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Fazit: Die ersten Summanden spielen keine Rolle für die Konvergenz der Reihe, wohl aber für den Wert der Reihe.

Rechenregeln für konvergente Reihen

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $c \in \mathbb{R}$, so konvergieren auch $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} ca_k$ und es gilt

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Bemerkung

Die obigen Rechenregeln folgen unmittelbar aus den Grenzwertsätzen für Folgen (vgl. Vorlesung 18).

Notwendiges Kriterium

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Bemerkung

Wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ ist (oder die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gar nicht konvergiert), dann konvergiert auch die Reihe nicht. Das notwendige Kriterium ist also ein Test, ob die Reihe divergiert.

Achtung!

Die Umkehrung des notwendigen Kriteriums ist im Allgemeinen falsch.

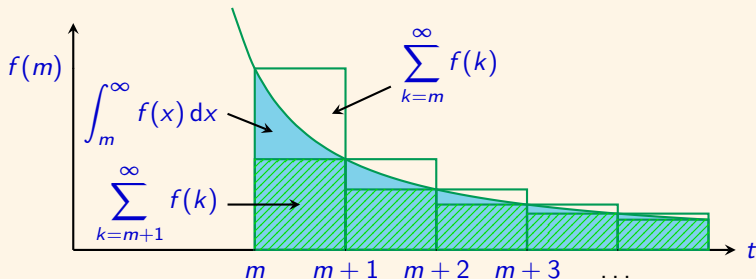
Integralvergleichskriterium

Sei $f: [m, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, eine monoton fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [m, \infty[$. Dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert} \iff \int_m^{\infty} f(x) dx \text{ existiert.}$$

Dann gelten die Abschätzungen

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f(k) \leq \int_m^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=m}^{\infty} f(k).$$

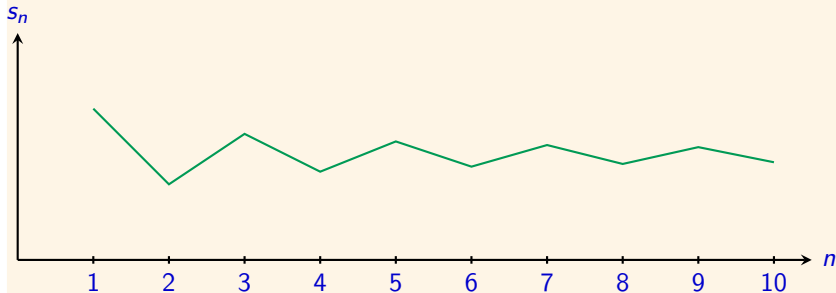


Leibnizkriterium

Ist die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ streng monoton fallend und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, so

konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Die Idee ist, dass die Partialsummen mit abnehmender Amplitude „oszillieren“, da aufeinander folgende Glieder der Reihe verschiedene Vorzeichen haben und das nächste Glied a_{k+1} kleineren Betrag als das vorangehende Glied a_k hat:



Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

41. Vorlesung: Absolut konvergente Reihen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (absolute Konvergenz)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Vorteil: Mit absolut konvergenten Reihen kann man meist so rechnen wie mit endlichen Summen.

Bemerkung

Konvergiert eine Reihe absolut, so konvergiert sie auch im gewöhnlichen Sinne, d.h.,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent.}$$

Aber: Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Cauchy-Produkt von Reihen

Sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ beide absolut konvergent, so ist auch ihr Produkt (Bezeichnung: **Cauchy-Produkt**) absolut konvergent:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k,$$

wobei $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$.

Bemerkung

Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, aber nicht absolut

konvergieren, so muss $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ nicht notwendigerweise konvergieren.

Majorantenkriterium

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei konvergent und es gelte $|a_k| \leq b_k$ für alle

$k \in \mathbb{N}$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Es genügt auch, wenn $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq k_0$ ab einem Startwert $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt.

Minorantenkriterium

Gilt $0 \leq b_k \leq a_k$ und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ bestimmt divergent, so

ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bestimmt divergent.

Quotientenkriterium

Gegeben sei die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Falls der Grenzwert $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ existiert, so gilt:

- Ist $r < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.
- Ist $r > 1$, so divergiert die Reihe.
- Ist $r = 1$, so ist alles möglich und das Kriterium trifft keine Aussage.

Bemerkung

Der Nachteil beim Majorantenkriterium ist, dass man schon eine konvergente Majorante haben muss. Das Quotientenkriterium benutzt nur die zu untersuchende Reihe und ist deshalb meistens die **erste Wahl**, wenn man eine Reihe auf Konvergenz untersuchen will. Erst wenn das Quotientenkriterium keine Auskunft über die Konvergenz gibt, versucht man andere Kriterien.

Komplexe Reihen

Für Reihen mit komplexen Gliedern definiert man die Konvergenz und absolute Konvergenz genauso wie für Reihen mit reellen Gliedern.

Für komplexe Reihen gilt ebenfalls:

- Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz der Reihe
- das notwendige Kriterium
- das Majorantenkriterium
- das Minorantenkriterium
- Quotientenkriterium

Das Leibnizkriterium und das Integralvergleichskriterium gelten **nicht** für komplexe Reihen.

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

42. Vorlesung: Potenzreihen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Definition (Potenzreihe)

Seien $z, z_0, a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Eine **Potenzreihe** ist eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Die a_k heißen die **Koeffizienten** der Potenzreihe und z_0 heißt der **Entwicklungspunkt** der Potenzreihe.

Konvergenz von Potenzreihen

Seien $z_0, a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $R \in [0, \infty \cup \{\infty\}]$ mit:

(1) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$;

(2) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$.

R heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Existiert

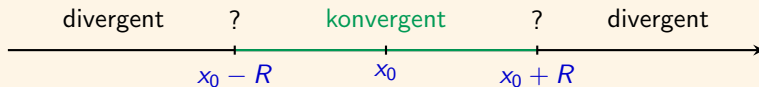
$$A := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

so gilt

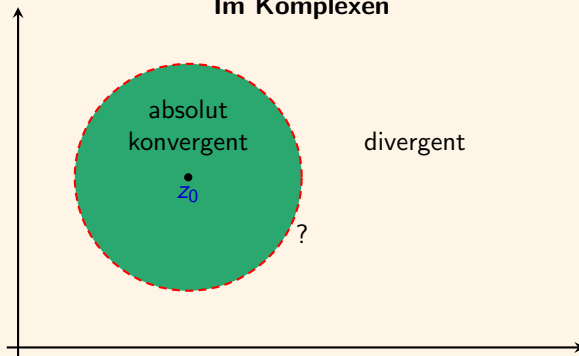
$$R = \begin{cases} \frac{1}{A} & \text{falls } A \neq 0, \\ \infty & \text{falls } A = 0. \end{cases}$$

Das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Kreises muss man bei jeder speziellen Reihe in jedem Punkt einzeln untersuchen (also für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| = R$).

Im Reellen



Im Komplexen



Differentiation von Potenzreihen

Die reelle Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

habe den Konvergenzradius $R > 0$. Sie konvergiert also auf dem Intervall $]x_0 - R, x_0 + R[$ und definiert dort eine Funktion $f(x)$. Diese Funktion ist differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}.$$

Der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe ist wieder R .

Fazit: Potenzreihen darf man gliedweise differenzieren. Der Konvergenzradius bleibt gleich. Ebenso darf man Potenzreihen gliedweise integrieren.

Zusammenhang zwischen Potenz- und Taylorreihen

Ist f durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 gegeben, also durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

so ist die Taylorreihe von f in x_0 genau wieder die Potenzreihe von f , d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften

Wintersemester 2025/2026

43. Vorlesung: Lineare Differentialgleichungen

Zuletzt aktualisiert: 15. Oktober 2025, 08:47:37

Was ist eine Differentialgleichung?

Differentialgleichungen (DGL) sind Gleichungen, deren Lösung eine Funktion ist. In der Gleichung können sowohl die gesuchte Funktion als auch die Ableitungen der Funktion auftreten.

Wir betrachten heute die folgenden zwei Beispiele ($a \in \mathbb{K}$):

$$y' = ay \quad \text{und} \quad y'' = -ay.$$

Die **Ordnung** einer Differentialgleichung ist die höchste auftretende Ableitung, z. B.

$$\begin{aligned} y' = ay & \text{ hat die Ordnung } 1 \text{ (wegen } y') \\ y'' = -ay & \text{ hat die Ordnung } 2 \text{ (wegen } y'') \end{aligned} \quad (*)$$

Wir sprechen von einer **linearen Differentialgleichung**, wenn nur Linearkombinationen der Funktion y und ihrer Ableitungen vorkommen.

DGL in (*): Beide sind linear, aber $y' = y^2$ ist keine lineare DGL.

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Jede Lösung der DGL $y' = ay$ mit $a \in \mathbb{K}$ ist von der Form

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}, \quad y(t) = ce^{at}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{K}$.

Insbesondere ist die Lösungsmenge der DGL $y' = ay$ ein eindimensionaler Teilraum der differenzierbaren Funktionen und $\{e^{at}\}$ ist eine Basis dieses Teilraums.

Definition (Anfangswertproblem)

Erfüllt die Funktion y die Differentialgleichung $y' = ay$ und hat die Funktion zu einem Zeitpunkt t_0 einen bekannten Wert y_0 , d.h. gilt auch $y(t_0) = y_0$, so spricht man von einem **Anfangswertproblem**.

t_0 – **Anfangszeitpunkt**

y_0 – **Anfangswert der Funktion**

Anfangswertproblem 1. Ordnung

Das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

mit $a \in \mathbb{K}$ hat die eindeutige Lösung

$$y(t) = e^{a(t-t_0)}y_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung

Sei $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

(1) Das lineare Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

hat die allgemeine Lösung

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{c}$$

mit $\vec{c} \in \mathbb{K}^n$. Insbesondere ist die Lösungsmenge ein n -dimensionaler Vektorraum.

(2) Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \vec{y}' = A\vec{y} \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \in \mathbb{K}^n \end{cases}$$

hat die eindeutige Lösung

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{y}_0.$$

Bemerkung

Auch wenn A nicht diagonalisierbar ist, ist jede Lösung von

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

von der Form

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{c}.$$

In diesem Fall lässt sich e^{tA} nicht durch Diagonalisieren von A berechnen, man kann aber die Reihe

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

verwenden.

Lineare skalare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Betrachte

$$x'' + \omega^2 x = 0 \quad (**)$$

wobei $\omega > 0$ gegeben und $x = x(t)$ die gesuchte Funktion ist.

Welche Funktionen lösen die DGL?

Beobachtung: $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ sind Lösungen von (**).

Da die DGL linear ist, sind auch alle Linearkombinationen von $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ Lösungen, d.h. alle Funktionen

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

Gibt es weitere Lösungen?

Vorgehen

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{bmatrix}.$$

Dann ist

$$\vec{y}'(t) = \begin{bmatrix} x''(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = A\vec{y}(t),$$

d.h. \vec{y} erfüllt ein lineares DGL-System erster Ordnung, dessen Lösung wir kennen und ausrechnen können (Folie 484):

$$\vec{y}(t) = e^{tA} \vec{c}.$$

Insbesondere ist der Lösungsraum zweidimensional. Da die Lösungen $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ für $\omega > 0$ linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis des Lösungsraum und alle Lösungen von $x'' + \omega^2 x = 0$ haben die Gestalt

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

mit Konstanten c_1, c_2 .