



TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT

Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen

BACHELOR EINDPROJECT

# Macaulay's methode met variabele stijfheden

*L.K. Boersen*

Begeleiders:

T.R. van Woudenberg MSc  
Dr.ir. P.A. Korswagen Eiguren

23-6-2025

# Voorwoord

Dit rapport is het resultaat van mijn eindproject voor de bachelor Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft. Tijdens dit project heb onderzoek gedaan naar een uitbreiding voor de methode voor Macaulay voor constructies waarbij de stijfheid varieert.

Graag wil ik mijn begeleiders Tom van Woudenberg en Paul Korswagen bedanken voor de begeleiding gedurende dit project. Regelmatige bijeenkomsten waarin de aanpak en resultaten van het project besproken werden, waarbij ik feedback en advies heb ontvangen, zijn van grote invloed geweest op het verkregen eindresultaat.

Luka Kian Boersen

23-6-2026

# Samenvatting

Macaulay's methode is een variatie op de directe integratie methode om het krachtverloop en de vervorming van een constructie te berekenen. Bij deze methode worden zogeheten singulariteitsfuncties gebruikt om de belasting op constructie met een enkele vergelijking te kunnen beschrijven. Dit heeft als gevolg dat het aantal integratieconstanten laag blijft, wat het oplossen van de constructie minder intensief maakt. Er is echter nog niet beschreven hoe deze methode toegepast kan worden op constructies met variërende stijfheden. Gebruikelijk worden delen van de constructie met verschillende stijfheidssituaties apart beschreven. Dit is echter niet in lijn met het idee van Macaulay's methode om de gehele constructie met één vergelijking te beschrijven. Daarom wordt in dit rapport onderzoek gedaan naar de volgende vraag:

"Hoe kan de methode van Macaulay toegepast worden op constructies waarbij de stijfheid varieert over de lengte?"

Vanuit de definitie van de kromming is gevonden dat een verandering in stijfheid hetzelfde effect heeft als een inverse verandering van het moment. Voor de kromming geldt  $\kappa = \frac{M}{EI}$ . Een verdubbeling van de stijfheid geeft hetzelfde effect als een halvering van het moment. Hieruit volgt een methode waarbij het effect van belastingen wordt geïntroduceerd in de krommingsvergelijking om het effect van de variërende stijfheid te simuleren. Deze belastingen zijn virtueel genoemd.

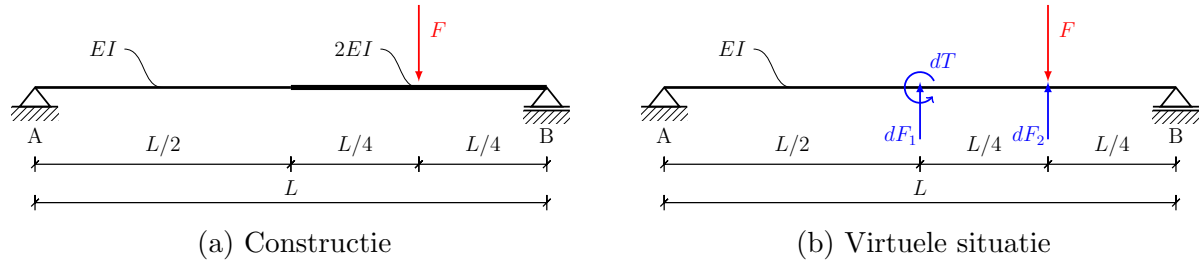
Een sprong in stijfheid kan gesimuleerd worden met een virtuele puntlast en een virtueel koppel ter plaatse van de sprong. De waarde van deze virtuele belastingen dienen respectievelijk de waarden van de dwarskracht en het moment op dit punt in de constructie te zijn, vermenigvuldigd met de gevonden sprongfactor:

$$n_{sprong} = \left(1 - \frac{EI_1}{EI_2}\right)$$

waarbij:  $EI_1$  [kNm<sup>2</sup>] = buigstijfheid van de balk voor de sprong  
 $EI_2$  [kNm<sup>2</sup>] = buigstijfheid van de balk na de sprong

Wanneer belastingen zich op een punt bevinden met een hogere x-coördinaat dan de de sprong in stijfheid, dienen ze direct op het moment van optreden gecompenseerd te worden met een virtuele belastingen van dezelfde waarde als deze belasting, vermenigvuldigd met de sprongfactor. In het geval van een q-last na de sprong, moet er ook een virtuele q-last toegepast worden om deze te compenseren.

De oplossing van een constructie waarbij de stijfheid een sprong maakt, komt er zo als volgt uit te zien:



Figuur 1: Voorbeeld 3

Waarbij:

$$dF_1 = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * A_v$$

$$dF_2 = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * F$$

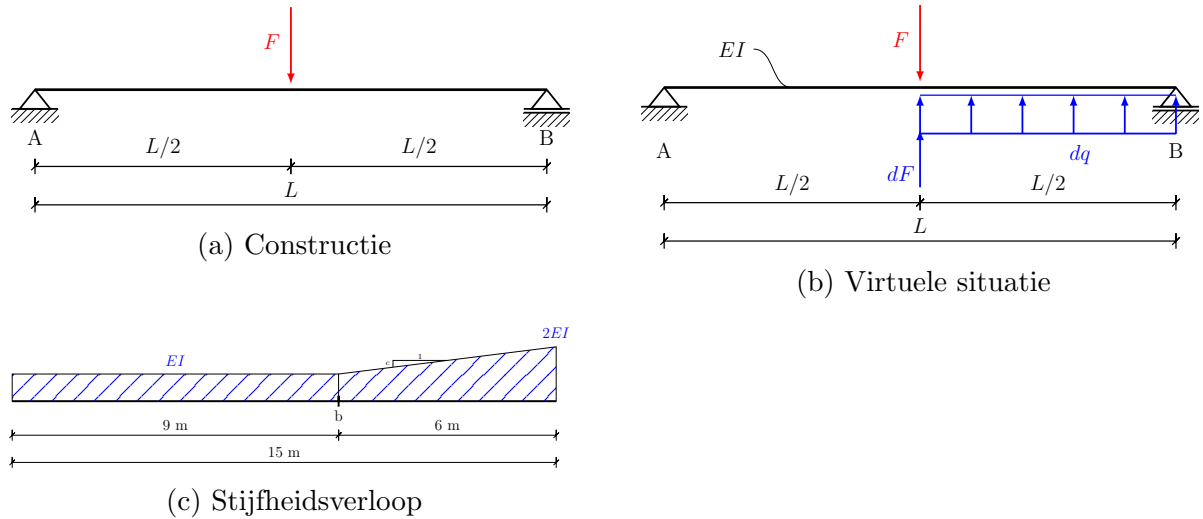
$$dT = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * A_v * \frac{L}{2}$$

Hetzelfde is mogelijk voor constructies met een lineair stijfheidsverloop dat een knik maakt. Hierbij zijn de virtuele belastingen die toegepast dienen te worden een q-last en een puntlast. De waarden hiervan zijn wederom respectievelijk het moment en de dwarskracht op het punt van de knik. Ditmaal worden deze waarden vermenigvuldigd met de knikfactor:

$$n_{knik} = \left( \frac{EI_1 * (c_2 - c_1)}{(EI_1 + c_1 * a + c_2 * (x - a)) * (c_1 * x + EI_1)} \right)$$

waarbij:  $EI_1$  [kNm<sup>2</sup>] = buigstijfheid van de balk op x=0  
 $c_1$  [kNm<sup>2</sup>/m] = helling van stijfheidsverloop voor de knik  
 $c_2$  [kNm<sup>2</sup>/m] = helling van stijfheidsverloop na de knik  
 $a$  [m] = x-coördinaat waarop de knik in stijfheid zich bevindt

De oplossing van een constructie waarbij de stijfheid van helling verandert, komt er zo als volgt uit te zien:



Figuur 2: Voorbeeld 7

Waarbij:

$$dF = \frac{1}{EI} * \frac{1}{x} * (A_v + F)$$

en

$$dq = \frac{1}{EI} * \frac{1}{x} * (A_v + F)$$

Ten slotte is deze methode ook toepasbaar op constructies die belast worden op normaalkracht. In dit geval hoeft enkel de normaalkracht virtueel aangepast te worden. In tegenstelling tot het geval voor buiging waar zowel de dwarskracht als het moment aangepast worden. Dit geval is dus relatief eenvoudiger dan dat voor buiging. In het geval van een sprong in axiale stijfheid wordt een virtuele puntlast toegepast op het punt van de sprong. In het geval van een knik in lineaire axiale stijfheid is dit een q-last vanaf het punt van de sprong.

# Inhoudsopgave

<b>1. Inleiding</b>	<b>1</b>
<b>2. Macaulay's methode</b>	<b>3</b>
1. Euler-Bernoulli	3
2. Singulariteitsfuncties	4
3. Belastingen en opleggingen	4
1. Puntlast	5
2. Verdeelde belasting	5
3. Koppel	5
4. Randvoorwaarden	6
5. Normaalkracht	6
<b>3. Buigstijfheid</b>	<b>7</b>
1. Sprongen	7
1. Algemeen	7
2. Belasting voor sprong	10
3. Belasting na sprong	11
4. Q-last	12
5. Koppel	13
6. Meerdere sprongen	13
7. Complexere situaties	14
2. Lineair verloop	16
<b>4. Axiale stijfheid</b>	<b>19</b>
<b>5. Implementatie</b>	<b>20</b>
1. Stappenplan	20
2. Uitwerking voorbeeld	22
<b>6. Discussie</b>	<b>25</b>
1. Limitaties onderzoek	25
2. Vervolgonderzoek	25
<b>7. Conclusie</b>	<b>26</b>
<b>Referenties</b>	<b>27</b>
<b>Bijlage</b>	<b>28</b>

# 1. Inleiding

De methode van Macaulay is een aangepaste versie van de directe integratie-methode om het verloop van inwendige krachten en vervormingen van een constructie te berekenen Macaulay (1919). Dit betekent dat de basis van Macaulay's methode, evenals die van de methode van directe integratie, wordt gevormd door de Euler-Bernoulli-vergelijking. De methode van Macaulay onderscheidt zich van andere methoden op basis van Euler-Bernoulli door het gebruik van singulariteitsfuncties welke het mogelijk maken om de belasting op de constructie, en zo ook iedere daaruit volgende integratie, in een enkele vergelijking te beschrijven. Hierdoor hoeft het integratieproces maar eenmalig plaats te vinden. In tegenstelling tot directe integratie, waarbij voor elk deel van de constructie met verschillende belasting of stijfheid een aparte vergelijking opgesteld dient te worden die geïntegreerd wordt. Dit betekent ook dat er, gedurende dit proces, maar vier integratieconstanten ontstaan. Hierdoor zorgt Macaulay's methode, zeker bij complexere constructies, voor minder benodigde oplosvergelijkingen en overgangsvoorwaarden, wat het oplossingsproces vereenvoudigt en versnelt.

De oorspronkelijke methode die Macaulay ontwikkeld had is enkel toepasbaar op eenvoudige eendimensionale balken met homogene doorsnede-eigenschappen. Sindsdien zijn er, onder andere in voorgaande bachelor eindwerken, uitbreidingen ontwikkeld om het aantal toepassingsmogelijkheden van Macaulay's methode te vergroten. Een onderwerp wat in deze eerdere uitbreidingen echter nog niet aan bod gekomen is, is constructies waarbij de stijfheid niet homogeen is over de gehele lengte van de constructie. Bij de huidige methode van Macaulay moet, net als bij directe integratie, een deel van de constructie met verschillende stijfheid apart beschreven worden. Dit is tegenstrijdig met het idee van Macaulay's methode dat de gehele constructie met één vergelijking beschreven kan worden.

In dit rapport wordt daarom onderzoek gedaan naar de volgende vraag:

"Hoe kan de methode van Macaulay toegepast worden op constructies waarbij de stijfheid varieert over de lengte?"

De structuur van dit rapport is als volgt: In hoofdstuk 2 wordt de oorspronkelijke methode van Macaulay beschreven, en wordt uitgelegd hoe deze toegepast wordt op een constructie. Vervolgens wordt een eerdere uitbreiding van de methode voor constructies die belast worden op normaalkracht beschreven. In hoofdstuk 3 wordt er een methode afgeleid voor constructies die belast worden op buiging waarbij de stijfheid varieert. In paragraaf 3.1 wordt dit gedaan voor sprongen in de stijfheid en in paragraaf 3.2 voor stijfheden die lineair verlopen. In hoofdstuk 4 wordt dezelfde afleiding toegepast op constructies die belast worden op normaalkracht. In hoofdstuk 5 In hoofdstuk 6 worden enkele limitaties van de afgeleide methode vermeld en worden suggesties voor vervolgonderzoek gegeven.

In hoofdstuk 7 wordt een conclusie gevormd over dit onderzoek.

In dit rapport wordt regelmatig gebruikgemaakt van voorbeelden om de theorie te illustreren. Wanneer de uitwerkingen van deze voorbeelden niet van belang zijn voor de theorie worden deze weggelaten. De volledige uitwerkingen van de voorbeelden zijn terug te vinden in de Bijlage.

Bij het schrijven van dit rapport is ervan uitgegaan dat de lezer over voorkennis beschikt van constructiemechanica, met nadruk op de methode van directe integratie aan de hand van Euler-Bernoulli. Daarnaast is het van belang om te begrijpen dat er bij deze methode op een andere wijze naar de oplossing van constructies gekeken wordt dan bij bijvoorbeeld de gebruikelijke methode aan de hand van Euler-Bernoulli. Hierbij spelen de oplegreacties bijvoorbeeld geen rol bij het oplossingsproces. Bij deze methode is iedere vergelijking die het kracht- of vervormingsverloop van de constructie beschrijft een functie van  $x$ . Hierbij is de waarde van deze functies op een bepaald punt enkele afhankelijk van de krachten die zich op punten met lagere  $x$ -coördinaten bevinden. Ongeacht of deze krachten bekend of nog onbekend zijn.



## 2. Macaulay's methode

In dit hoofdstuk wordt beschreven wat de methode van Macaulay is en hoe deze kan worden toegepast op een constructie. Daarnaast wordt in paragraaf 2.5. een eerdere uitbreiding van de methode beschreven die het mogelijk maakt deze methode toe te passen op constructies die belast worden op normaalkracht.

De methode van Macaulay is een methode om het krachtverloop en de vervorming van een constructie te berekenen die gebaseerd is op de methode aan de hand van differentiaalvergelijkingen van Euler-Bernoulli. Wat deze methode bijzonder maakt is het gebruik van singulariteitsfuncties, welke het mogelijk maken om de belastingsituatie over de gehele constructie te beschrijven met een enkele vergelijking. Hierbij hoeft de constructie niet opgedeeld te worden in delen met gelijke belastingsituaties, zoals het geval is bij de gebruikelijke methode op basis van differentiaalvergelijkingen.

In dit hoofdstuk wordt allereerst de basis van Macaulay's methode uitgelegd, waarbij ook de werking van de singulariteitsfuncties verduidelijkt wordt. Vervolgens zullen enkele uitbreidingen beschreven worden die in het verleden bedacht zijn en wordt uitgelegd hoe deze uitbreidingen toegepast kunnen worden.

### 2.1. Euler-Bernoulli

Zoals eerder vermeld, is de methode van Macaulay gebaseerd op de methode van Euler-Bernoulli op basis van differentiaalvergelijkingen. De basis van beide methoden wordt dan ook gevormd door de Euler-Bernoulli-vergelijking:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q_z(x) \quad (2.1)$$

waarbij:

$EI$	$[\text{kNm}^2]$	=	buigstijfheid van de balk
$w$	$[\text{m}]$	=	verticale verplaatsing van de balk als functie van $x$
$q_z(x)$	$[\text{kN}]$	=	verticale belasting op de balk als functie van $x$

## 2.2. Singulariteitsfuncties

Bij de methode van Macaulay wordt de belasting  $q_z(x)$  in vergelijking (2.1) beschreven aan de hand van de eerder genoemde singulariteitsfuncties. Deze functies hebben een algemene vorm zoals is weergegeven in vergelijking (2.2).

$$\langle x - a \rangle^n \quad (2.2)$$

waarbij:  $a$  [m] = x-coördinaat waarop functie begint  
 $n$  [-] = orde van functie

De waarde van  $a$  beschrijft de x-coördinaat waarop de functie begint. Links van deze coördinaat heeft de functie een waarde van nul. Welke waarde de functie rechts van deze coördinaat aanneemt, hangt af van de orde van de vergelijking  $n$ . Een singulariteitsfunctie van orde 0 neemt de vorm aan van een zogenaamde 'Heaviside' functie, welke na de coördinaat  $a$  een constante waarde van 1 geeft. Hogere orde singulariteitsfuncties nemen een vorm aan die overeenkomt met die van een functie  $y = (x - a)^n$  met dezelfde waarden voor  $a$  en  $n$ . Deze werking is af te leiden uit de definitie voor singulariteitsfuncties van orde nul of hoger. Deze definitie is als volgt:

$$\langle x - a \rangle^n = (x - a)^n * Heaviside(x - a), \quad n \geq 0 \quad (2.3)$$

De orde van een singulariteitsfunctie kan ook negatief zijn. Zo neemt een singulariteitsfunctie van de orde -1 de vorm aan van de zogenaamde 'Dirac' functie. Deze functie neemt precies op de x-coördinaat  $a$  een waarde van oneindig aan en is verder gelijk aan 0. Functies met lagere ordes geven afgeleiden van deze Dirac functie zoals is weergegeven in vergelijking (2.4). Het nemen van de afgeleide van de nulde orde Heaviside functie geeft hetzelfde resultaat. Deze functie maakt immers een sprong op punt  $a$ , waarbij de afgeleide oneindig is. Elders is deze functie constant, waarbij de afgeleide gelijk is aan nul.

$$\langle x - a \rangle^n = \frac{d^{|n+1|}}{dx^{|n+1|}} \delta(x - a), \quad n < 0 \quad (2.4)$$

De bovenstaande definities maken het integreren van de singulariteitsfunctie eenvoudig. Hiervoor hoeft namelijk enkel de orde van de functie een stap omhoog te gaan. In het geval dat de orde groter is dan nul dient wel de gebruikelijke deling door de hogere orde plaats te vinden, zie vergelijking (2.5).

$$\int \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} \langle x - a \rangle^{n+1}, & n < 0 \\ \frac{\langle x - a \rangle^{n+1}}{n+1}, & n \geq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

## 2.3. Belastingen en opleggingen

De belastingvergelijking  $q_z(x)$  wordt opgesteld aan de hand van deze singulariteitsfuncties. Hierbij wordt iedere kracht die op de constructie werkt meegenomen. Dit betekent dat deze vergelijking ook de nog onbekende oplegreacties bevat. De oplossing aan de hand van de methode van Macaulay levert hierdoor ook de waarden van de oplegreacties op. Hiervoor is echter wel voor iedere oplegreactie een toegevoegde randvoorwaarde nodig. Deze randvoorwaarden worden in paragraaf 2.4. verder beschreven.

### 2.3.1. Puntlast

Puntlasten worden beschreven door singulariteitsfuncties van orde -1. Deze functie wordt vermenigvuldigd met de waarde van de puntlast. Op zichzelf is deze functie niet bruikbaar, aangezien een singulariteitsfunctie van orde -1 een Dirac-functie geeft welke een oneindige waarde geeft op de x-coördinaat  $a$ . Wanneer de belasting geïntegreerd wordt om de dwarskracht te verkrijgen, levert dit echter een functie van orde 0 op. Een puntlast levert op deze manier dus de gewenste sprong in dwarskracht. Voor het opstellen van de belastingvergelijking wordt aangehouden dat neerwaarts gerichte puntlasten positief zijn. Hierbij worden ook oplegreacties positief aangenomen. Een puntlast met waarde  $F$  wordt zo als volgt beschreven:

$$q_z(x) = F * \langle x - a \rangle^{-1} \quad (2.6)$$

waarbij:  $F$  [kN] = waarde van puntlast  
 $a$  [m] = x-coördinaat waarop puntlast zich bevindt

### 2.3.2. Verdeelde belasting

Een verdeelde belasting kan beschreven worden aan de hand van een stapfunctie, een singulariteitsfunctie van orde 0 vermenigvuldigd met de waarde van de q-last, waarbij de  $a$ -waarde het beginpunt van deze q-last is. Deze functie heeft echter geen eindwaarde en zal oneindig in lengterichting de waarde  $q$  hebben. Om de belasting eerder te stoppen kan nog een stapfunctie toegepast worden met dezelfde waarde waarbij de waarde van  $a$  het eindpunt van de q-last is. Hierdoor is de resulterende waarde na het eindpunt gelijk aan nul, zie vergelijking (2.7).

$$q_z(x) = q * \langle x - a_1 \rangle^0 - q * \langle x - a_2 \rangle^0 \quad (2.7)$$

waarbij:  $q$  [kN/m] = waarde van verdeelde belasting  
 $a_1$  [m] = x-coördinaat waarop verdeelde belasting begint  
 $a_2$  [m] = x-coördinaat waarop verdeelde belasting eindigt

### 2.3.3. Koppel

De notatie van koppels kan op eenzelfde manier worden afgeleid als die van puntlasten. Een koppel zorgt voor een sprong in het momentverloop. Het momentverloop is de tweede integraal van de belastingvergelijking. De nulde orde van de sprong in het momentverloop levert na twee maal afleiden een orde -2 op. Een koppel wordt zodoende als volgt beschreven:

$$q_z(x) = T * \langle x - a \rangle^{-2} \quad (2.8)$$

waarbij:  $T$  [kN/m] = waarde van koppel  
 $a$  [m] = x-coördinaat waarop koppel zich bevindt

## 2.4. Randvoorwaarden

Het oplossen van de Euler-Bernoulli-vergelijking gebeurt op gebruikelijke manier. Dit betekent dat de belastingvergelijking viermaal geïntegreerd wordt, waarbij vier integratieconstanten ontstaan. Dit betekent dat er minimaal vier randvoorwaarden nodig zijn om de oplossing te vinden. Daarnaast is er voor iedere oplegreactie, zoals in paragraaf 2.2. beschreven, nog een randvoorwaarde nodig. Dit leidt ertoe dat er, naast de gebruikelijke randvoorwaarden behorend bij oplegging, nog twee randvoorwaarden nodig zijn. Voor deze laatste twee randvoorwaarden wordt gebruikgemaakt van het feit dat de dwarskracht in de constructie op oneindig kleine afstand voor het begin of na het eind van de constructie gelijk is aan nul.

## 2.5. Normaalkracht

In eerder onderzoek heeft van der Wulp (2023) een uitbreiding voor Macaulay's methode ontwikkeld welke het mogelijk maakt om deze methode toe te passen op constructies die belast worden op normaalkracht. Hieruit is gebleken dat dezelfde methode kan worden toegepast op de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{d}{dx} \left( EA * \frac{du}{dx} \right) = q_x(x) \quad (2.9)$$

waarbij:

$EA$	[kNm <sup>2</sup> ]	=	axiale stijfheid van de balk
$u$	[m]	=	horizontale verplaatsing van de balk als functie van x
$q_x(x)$	[kN]	=	horizontale belasting op de balk als functie van x

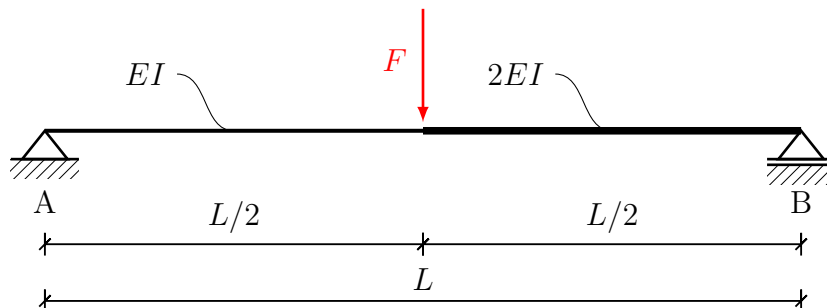
## 3. Buigstijfheid

In dit hoofdstuk afgeleid hoe de methode van Macaulay kan worden toegepast op constructies die belast worden op buiging waarbij de stijfheid varieert. In paragraaf 3.1. worden situaties beschouwd waarbij de stijfheid een sprong maakt en in paragraaf 3.2. wordt beschreven hoe er met lineair verlopende stijfheden kan worden omgegaan.

### 3.1. Sprongen

#### 3.1.1. Algemeen

Allereerst wordt een eenvoudige ligger beschouwd, welke op de helft van de lengte een sprong in stijfheid maakt:



Figuur 3.1: Voorbeeld 1

Vanuit de theorie van Euler-Bernoulli is bekend dat de stijfheid invloed heeft op de kromming met  $\kappa = \frac{M}{EI}$ . Dit heeft als gevolg dat, direct links van de sprong in stijfheid, de kromming wordt gegeven door  $\kappa = \frac{M}{EI}$ . Direct rechts van de sprong wordt de kromming echter gegeven door  $\kappa = \frac{M}{2EI}$ . Er is op dit moment geen definitie voor een singulariteitsfunctie onder een breuk. Hierdoor is het niet mogelijk om de stijfheid, door middel van een singulariteitsfunctie, plotseling te doen veranderen zoals hier het geval is. Aangezien deze stijfheid zich onder de breuk bevindt. Het effect dat de sprong in stijfheid heeft op de kromming kan echter ook worden verkregen door het moment te reduceren met een evenredige sprong.  $M * \frac{1}{2EI}$  geeft immers hetzelfde resultaat als  $\frac{M}{2} * EI$ . Het moment kan ter plaatse van de sprong in stijfheid gehalveerd worden door middel van een virtueel koppel. Dit koppel is hierbij virtueel omdat deze alleen van toepassing is op de vergelijkingen van de kromming en verdere integraties, niet op het moment en afgeleiden hiervan.

De reden hierachter is dat dit koppel het effect van de sprong in stijfheid simuleert, en dus enkel toegepast wordt nadat het moment door de stijfheid gedeeld is.

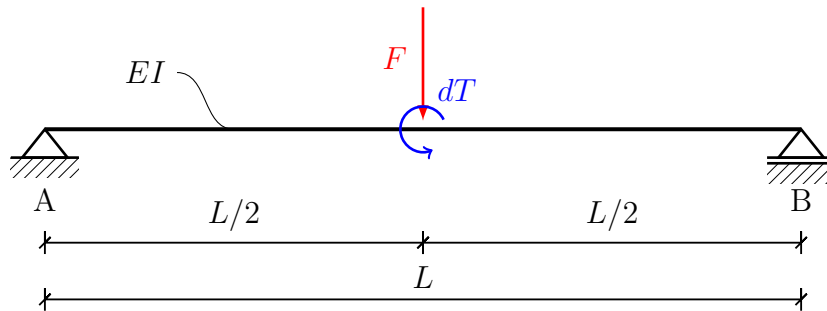
De exacte waarde van het moment hoeft in deze stap niet berekend te worden, maar kan beschreven worden met de oplegreacties als onbekenden. Macaulay's methode bepaalt de waarde van de oplegreacties op het moment dat de evenwichtsvergelijkingen worden opgelost. Dit betekent dat ook constructies die statisch onbepaald zijn, behandeld kunnen worden.

De waarde die het virtuele koppel dient te hebben, hangt af van de constructie en kan worden verkregen door de kromming na de sprong af te trekken van de kromming ervoor. Dit geeft:  $\frac{M}{EI_1} - \frac{M}{EI_2} = \frac{M}{EI_1} * \left(1 - \frac{EI_1}{EI_2}\right)$ .

Het moment wat optreedt in de doorsnede van de constructie waar de stijfheid een sprong maakt wordt vermenigvuldigd met een factor  $n = 1 - EI_1/EI_2$ . Waarbij  $EI_1$  de stijfheid voor sprong, en  $EI_2$  de stijfheid na de sprong is. Zoals gebruikelijk in de mechanica wordt een koppel linksom aangenomen als positief. Wanneer de stijfheid na de sprong groter is dan ervoor, geeft deze factor een positieve waarde. Er wordt in dit geval dus een koppel toegepast wat de kromming tegenwerkt, zoals er verwacht wordt bij een hogere stijfheid. Een lagere stijfheid levert een koppel op die de kromming versterkt. Ook dit geeft het effect wat verwacht wordt bij een lagere stijfheid.

De stijfheidssprong in de voorbeeldligger kan op deze manier gesimuleerd worden het volgende koppel:

$$dT = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * A_v * \frac{L}{2} = Av * \frac{L}{4} \quad (3.1)$$



Figuur 3.2: Voorbeeld 1 met virtueel koppel

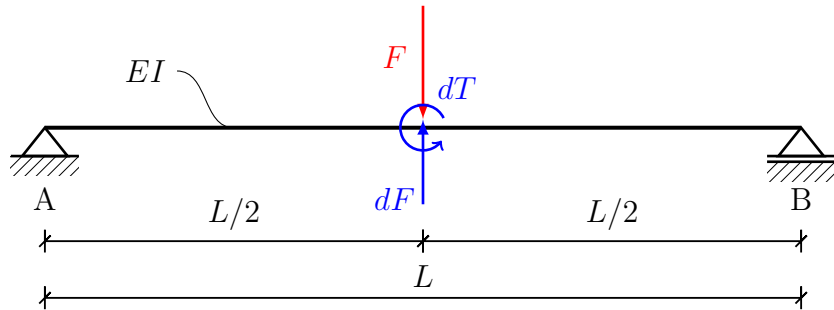
Met het toevoegen van dit koppel wordt echter nog niet het volledige effect van de stijfheidssprong gesimuleerd. Het moment, en daardoor ook de kromming, zijn in punt B niet langer gelijk aan nul. Aangezien het moment virtueel is, en het effect van de stijfheid in de krommingsvergelijking vervangt, verandert het verloop van het moment in de constructie niet. Deze moet dus nog altijd gelijk zijn aan nul aan het einde van de constructie. De oorzaak hiervan is dat de helling van het momentverloop nog dezelfde waarde heeft, terwijl het beginpunt hiervan is verplaatst ten gevolge van het virtuele koppel. Om dit te corrigeren en ervoor te zorgen dat het moment in punt B weer gelijk is aan nul, kan er

een virtuele puntlast worden toegevoegd ter plaatse van de stijfheidssprong. Een andere manier om dit te beschrijven is dat niet enkel het moment op het punt waar de stijfheid een sprong maakt verandert. Bij ieder punt na deze sprong is dit namelijk ook het geval. De helling van het krommingsverloop varieert op deze manier met eenzelfde factor als is toegepast op het virtuele koppel. In het voorbeeld uit figuur 3.1 wordt de helling van het krommingsverloop op deze manier gehalveerd. De helling van het krommingsverloop is recht evenredig met die van het momentverloop. De helling van het momentverloop wordt beschreven door de afgeleide hiervan, ofwel de dwarskracht.

Dit leidt ertoe dat het effect van de stijfheid op de helling van het krommingsverloop gesimuleerd kan worden door de dwarskracht aan te passen. In het voorbeeld uit figuur 3.1 dient zo de krommingshelling en dus ook de dwarskracht gehalveerd te worden. Deze sprong in dwarskracht kan verkregen worden door een puntlast toe te passen op de plaats van de stijfheidssprong.

De waarde van deze puntlast bevat wederom de eerder beschreven sprongfactor. Ditmaal wordt deze factor vermenigvuldigd met de dwarskracht die optreedt in de doorsnede waar de stijfheid verandert. Dit is simpelweg de som van elke kracht die zich voor de sprong bevindt. Wederom hoeft de exacte waarde van deze dwarskracht niet berekend te worden. De dwarskracht kan beschreven worden als functie van de onbekende oplegreacties. In het geval van de voorbeeldligger bevat de puntlast dus termen voor de oplegreactie  $A_v$  en de puntlast  $F$ . Dit leidt tot de volgende virtuele puntlast:

$$dF = \left(1 - \frac{EI_1}{EI_2}\right) * (A_v + F) = \frac{A_v + F}{2} \quad (3.2)$$



Figuur 3.3: Virtuele situatie voorbeeld 1

De vergelijking voor de kromming van deze ligger komt er op deze manier als volgt uit te zien:

$$\kappa = \frac{M}{EI} + \frac{1}{EI} * A_v * \frac{L}{4} * \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 + \frac{1}{EI} * \frac{A_v + F}{2} * \langle x - \frac{L}{2} \rangle^1 \quad (3.3)$$

Hierbij is M de vergelijking die voor het moment verkregen wordt vanuit de integraties van de Euler-Bernoulli-vergelijking. De andere twee termen beschrijven respectievelijk het virtuele koppel en de virtuele puntlast.

Vanuit de afleiding van deze methode is bekend dat de twee termen die de virtuele belastingen beschrijven samen  $\frac{M}{EI_1} * (1 - \frac{EI_1}{EI_2})$  vormen, welke wordt toegepast vanaf het punt waar de stijfheid een sprong maakt. Wanneer deze termen in vergelijking (3.3) gecombineerd worden, wordt de volgende vergelijking verkregen:

$$\kappa = \frac{M}{EI} - \frac{M}{2EI} * \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 \quad (3.4)$$

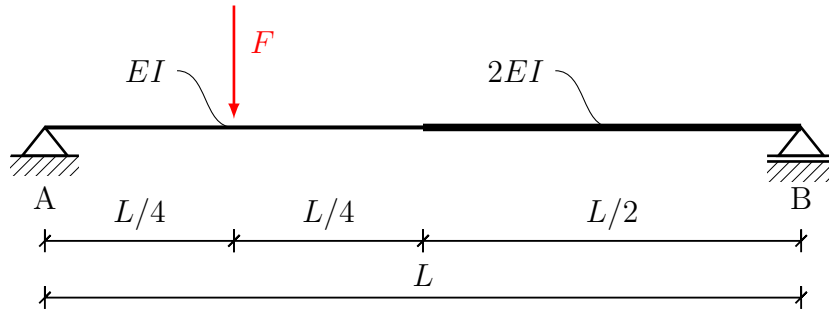
Deze gecombineerde term kan gesplitst worden op de volgende manier:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{M}{EI} - \left( \frac{M}{EI} - \frac{M}{2EI} \right) * \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 \\ &= \frac{M}{EI} - \frac{M}{EI} * \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 + \frac{M}{2EI} * \langle x - \frac{L}{2} \rangle^0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Hieruit valt te concluderen dat deze methode in feite hetzelfde is als de krommingsvergelijking met de stijfheid voor de sprong uitschakelen, terwijl de krommingsvergelijking met de verschillende stijfheid wordt ingeschakeld.

### 3.1.2. Belasting voor sprong

Wanneer de belasting op de constructie zich op een andere positie bevindt dan de stijfheidssprong, verschillen de waarden die de virtuele belastingen dienen te hebben. Bijvoorbeeld de volgende situatie:



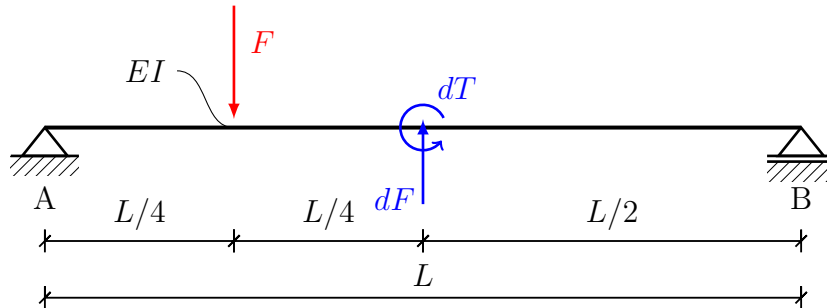
Figuur 3.4: Voorbeeld 2

Zoals eerder beschreven is de waarde van het virtuele koppel een functie van het moment dat optreedt op het punt van de stijfheidssprong. In de voorgaande situatie bevond de belasting zich op dezelfde positie als de stijfheidssprong. Hierdoor had deze in die situatie geen directe invloed op het moment en dus het virtuele koppel. De belasting had wel indirect invloed op het moment, aangezien de oplegreacties een functie zijn van de belasting. In dit voorbeeld heeft de belasting wél invloed op het moment in het punt waar de stijfheid een sprong maakt. Deze belasting zal nu dus moeten worden meegenomen in het virtuele koppel. Het virtuele koppel wordt nu als volgt beschreven:

$$dT = \left( 1 - \frac{EI}{2EI} \right) * \left( A_v * \frac{L}{2} + F * \frac{L}{4} \right) \quad (3.6)$$



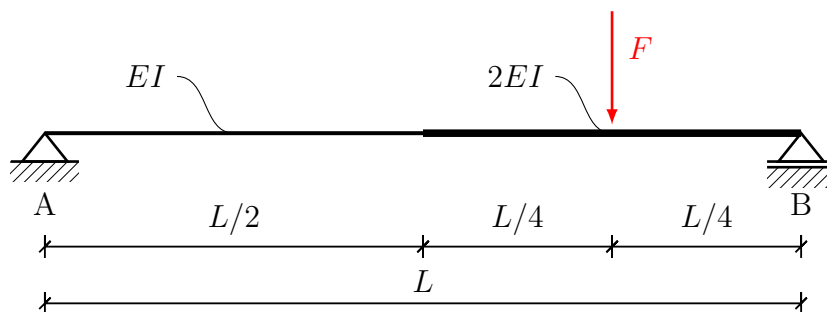
Het effect van de positie van de belasting op de helling van het stijfheidsverloop verandert niet. De waarde van het virtuele puntlast heeft daarom niet aangepast te worden. Beide virtuele belastingen worden nog altijd toegepast op het punt waar de sprong in stijfheid plaatsvindt. Zie figuur 3.5.



Figuur 3.5: Virtuele situatie voorbeeld 2

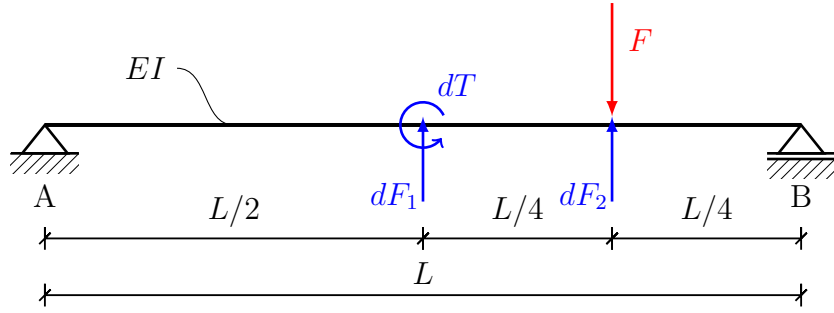
### 3.1.3. Belasting na sprong

Het is ook mogelijk dat er zich na de stijfheidssprong een belasting bevindt. Bijvoorbeeld de situatie in figuur 3.6.



Figuur 3.6: Voorbeeld 3

De belastingen die zich voor de stijfheidssprong bevinden, worden op dezelfde manier behandeld als bij voorgaande situaties. Aangezien de puntlast pas invloed heeft op de dwarskracht vanaf het punt waar deze aangrijpt, kan de correctie voor het effect van de variërende stijfheid ook pas op dit punt toegepast worden. Hiertoe hoeft alleen een virtuele puntlast toegevoegd te worden. Een belasting heeft immers alleen effect op de helling van de krommingslijn en creëert hier geen sprong in, zoals het geval is op het punt waar de stijfheid een sprong maakt. De virtuele constructie komt er zo als volgt uit te zien:



Figuur 3.7: Virtuele situatie voorbeeld 3

Waarbij:

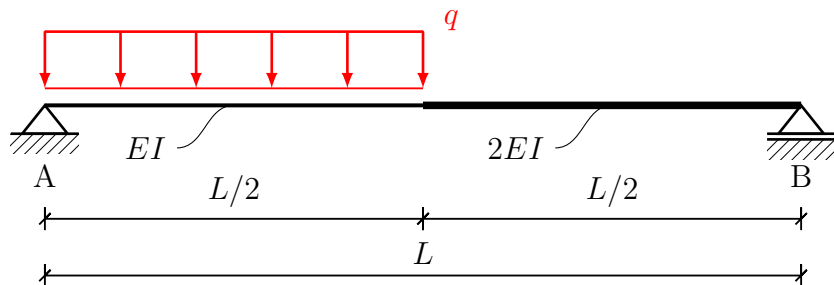
$$dF_1 = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * A_v \quad (3.7)$$

$$dF_2 = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * F \quad (3.8)$$

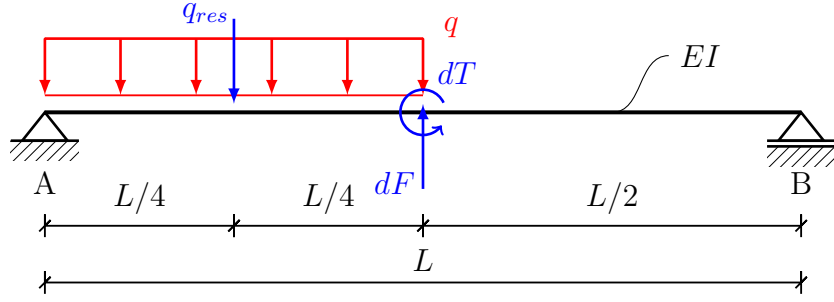
$$dT = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * A_v * \frac{L}{2} \quad (3.9)$$

### 3.1.4. Q-last

Een constructie die belast wordt door een verdeelde belasting kan op dezelfde manier behandeld worden. Aangezien de virtuele belastingen gebaseerd zijn op het moment en de dwarskracht, kan zoals gebruikelijk voor de verdeelde belasting een resulterende kracht genomen worden welke aangrijpt in het zwaartepunt van de q-last. Wanneer een q-last zich verder dan de sprong in stijfheid bevindt, moet deze net als andere belastingen na de sprong ter plekke gecompenseerd worden. Hierbij is dan ook een q-last nodig. Figuren 3.8 en 3.9 weergeven respectievelijk een voorbeeld met een verdeelde belasting en de bijbehorende virtuele constructie.



Figuur 3.8: Voorbeeld 4



Figuur 3.9: Virtuele situatie voorbeeld 4

Hierbij is

$$dT = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * \left(A_v * \frac{L}{2} + q * \frac{L}{2} * \frac{L}{4}\right) = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * \left(A_v * \frac{L}{2} + q_{res} * \frac{L}{4}\right) \quad (3.10)$$

en

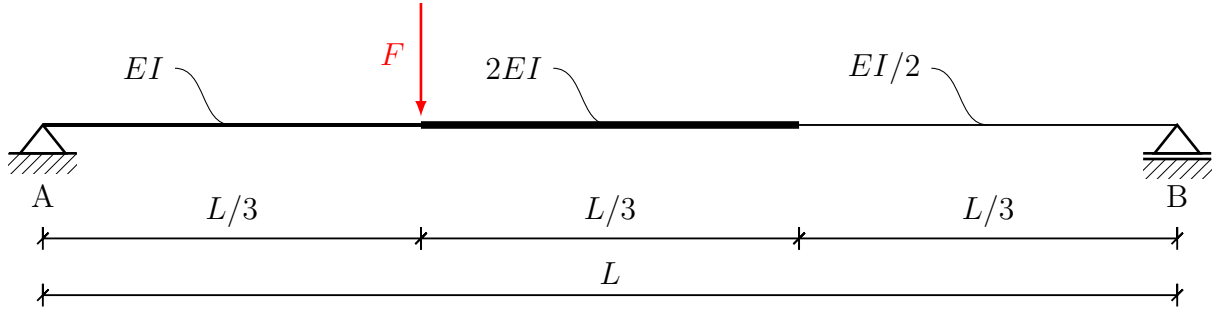
$$dF = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * \left(A_v + q * \frac{L}{2}\right) = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * (A_v + q_{res}) \quad (3.11)$$

### 3.1.5. Koppel

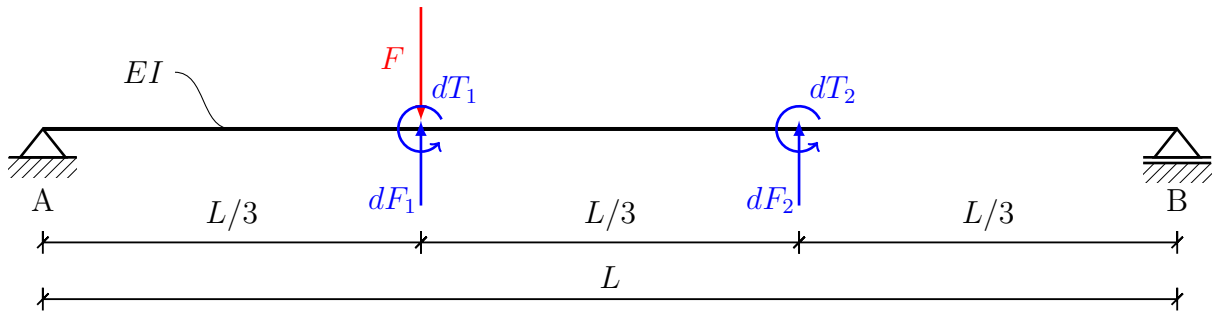
Naast puntlasten en verdeelde belastingen kunnen er ook koppels op de constructie toegepast worden. Een koppel heeft uiteraard enkel invloed op het momentverloop van de constructie en niet op de dwarskracht. De waarde van een koppelbelasting wordt dan ook enkel meegenomen in het virtuele koppel, niet in de virtuele puntlast. De positie van het koppel heeft echter nog wel invloed op de oplossing. Wanneer het koppel toegepast wordt vóór de stijfheidssprong, heeft deze invloed op het moment in de doorsnede bij de sprong en moet deze dus worden meegenomen in het virtuele koppel. Wanneer het koppel pas na de stijfheidssprong toegepast wordt, moet deze over de gehele constructie gecorrigeerd worden. Evenals bij een puntlast na de sprong in stijfheid moet er dan een virtueel koppel op dezelfde plaats toegepast worden als de koppelbelasting.

### 3.1.6. Meerdere sprongen

Vanwege de aard van deze methode kunnen de effecten van meerdere sprongen in de stijfheid tegelijk worden toegepast. Hierbij is het van belang dat eerdere virtuele belastingen niet worden meegenomen in het bepalen van de virtuele belastingen voor de volgende sprong. Daarnaast moet de sprongfactor berekend worden met de stijfheden net voor en na de sprong, niet met de eerste stijfheid. Figuren 3.10 en 3.11 weergeven respectievelijk een voorbeeld constructie waarbij de stijfheid meerdere malen varieert en de virtuele constructie die gebruikt kan worden om deze op te lossen.



Figuur 3.10: Voorbeeld 5



Figuur 3.11: Virtuele situatie voorbeeld 5

Hierbij is

$$dT_1 = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * \left(A_v * \frac{L}{3}\right) \quad (3.12)$$

$$dF_1 = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * (A_v + F) \quad (3.13)$$

$$dT_2 = \left(1 - \frac{2EI}{EI/2}\right) * \left(A_v * \frac{2L}{3} + F * \frac{L}{3}\right) \quad (3.14)$$

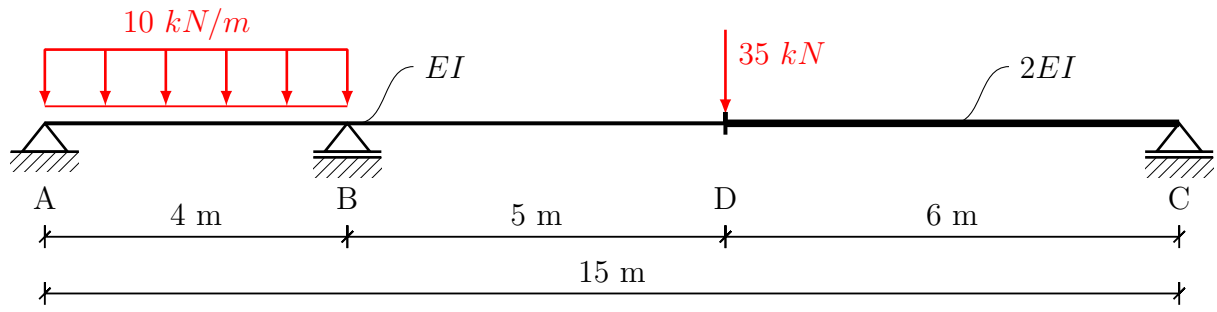
en

$$dF_2 = \left(1 - \frac{2EI}{EI/2}\right) * (A_v + F) \quad (3.15)$$

Aangezien de stijfheid afneemt na de tweede sprong levert de sprongfactor voor de tweede set virtuele belastingen een negatieve waarde, wat betekent dat ze in tegenovergestelde richting werken dan dat ze weergegeven zijn in figuur 3.11.

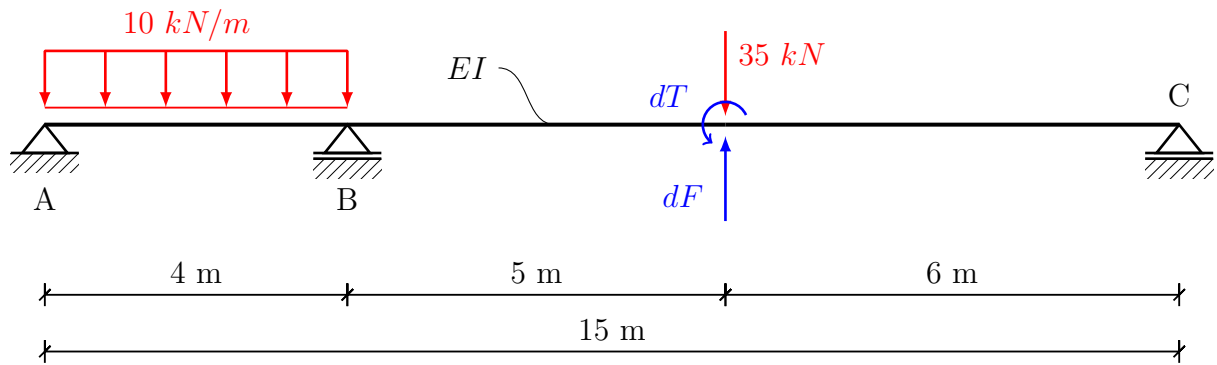
### 3.1.7. Complexere situaties

Tot slot is het ook mogelijk om alle aspecten die in deze paragraaf beschreven zijn te combineren. Zo kan deze methode op veel verschillende en complexere constructies toegepast worden. Een voorbeeld van een dergelijke constructie is weergegeven in figuur 3.12.



Figuur 3.12: Voorbeeld 6

Figuur 3.13 laat de virtuele constructie zien die gebruikt kan worden om dit voorbeeld op te lossen.



Figuur 3.13: Virtuele situatie voorbeeld 6

Waarbij

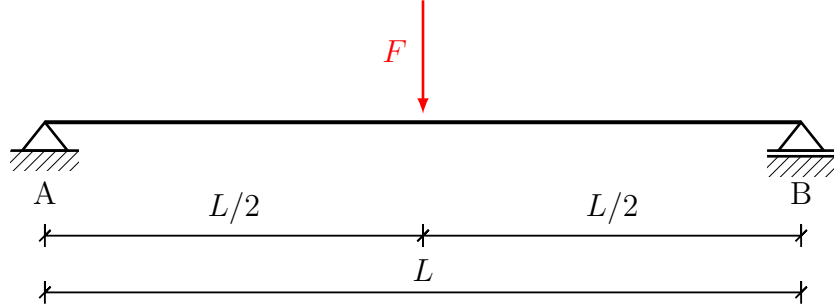
$$dT = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * (A_v * 9 + B_v * 5 + 10 * 4 * 7) \quad (3.16)$$

en

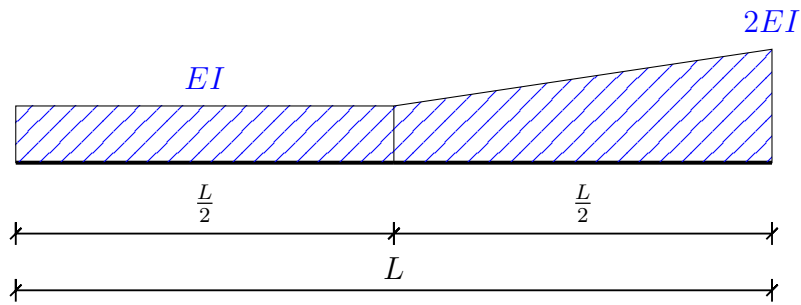
$$dF = \left(1 - \frac{EI}{2EI}\right) * (A_v + B_v + 10 * 4 + 35) \quad (3.17)$$

### 3.2. Lineair verloop

Wederom wordt de in figuur 3.14 weergegeven eenvoudige ligger beschouwd. Ditmaal maakt de stijfheid van de ligger op de helft van de lengte een knik, waardoor deze lineair oploopt naar een stijfheid van  $2EI$  aan het eind van de ligger, zie figuur 3.15.



Figuur 3.14: Voorbeeld 7



Figuur 3.15: lineair stijfheidsverloop

Deze situatie kan op dezelfde manier worden aangepakt als een sprong in de stijfheid. Net links van de knik wordt de kromming van de ligger gegeven door  $\kappa = \frac{M}{EI}$ . Net rechts van deze knik is dat  $\kappa = \frac{M}{EI + \frac{EI}{L/2} * x}$ . Om het effect van de knik te verkrijgen worden deze twee functies van elkaar afgetrokken. Hiervoor wordt een algemene situatie gebruikt waarbij de stijfheid zowel voor als na de knik lineair is.

$$\frac{M}{EI_1 + c_1 * x} - \frac{M}{EI_2 + c_2 * (x - a)} = \frac{M}{EI_1 + c_1 * x} - \frac{M}{EI_1 + c_1 * a + c_2 * (x - a)} \quad (3.18)$$

Op  $x = 0$  is de stijfheid gelijk aan  $EI_1$ . Deze varieert daarna met een helling  $c_1$  tot de knik op  $x = a$ . Na de knik verloopt de stijfheid met een helling  $c_2$ . Het beginpunt van het tweede gedeelte  $EI_2$  kan verkregen worden door  $x = a$  in te vullen in de vergelijking voor het eerste gedeelte, dus  $EI_1 + c * a$ . Uitwerken van deze vergelijking en uitdelen van  $M/EI_1$  leidt tot de volgende knikfactor:

$$n_{knik} = \frac{EI_1 * (c_2 - c_1) * (x - a)}{(EI_1 + c_1 * a + c_2 * (x - a)) * (c_1 * x + EI_1)} \quad (3.19)$$

Wanneer de stijfheid constant is voor de knik, zoals het geval is bij het voorbeeld in figuur 3.15, is  $c_1$  gelijk aan nul en versimpelt de knikfactor tot:

$$n_{knik} = \frac{c_2 * (x - a)}{EI_1 + c_2 * (x - a)} \quad (3.20)$$

Deze knikfactor heeft een bijkomend effect op de virtuele belastingen. Om dit effect te kunnen zien is de definitie achter de singulariteitsfuncties van belang. Zoals in paragraaf 2.2. uitgelegd, zijn singulariteitsfuncties als volgt gedefinieerd:

$$\langle x - a \rangle^n = (x - a)^n * Heaviside(x - a) \quad (3.21)$$

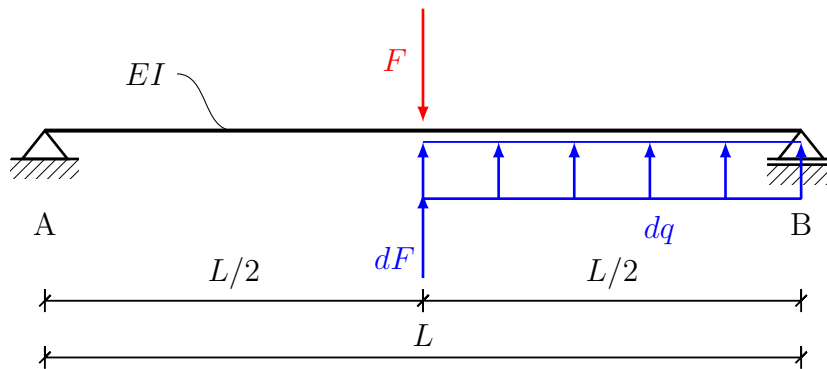
De knikfactor bevat dezelfde  $(x - a)$  term die in de definitie van de singulariteitsfunctie terug te vinden is. Wanneer het virtuele koppel opgesteld wordt, en de knikfactor vermenigvuldigd wordt met de bijbehorende singulariteitsfunctie gebeurt daardoor het volgende:

$$\begin{aligned} & \frac{EI_1 * (c_2 - c_1) * (x - a)}{(EI_1 + c_1 * a + c_2 * (x - a)) * (c_1 * x + EI_1)} * \langle x - a \rangle^1 \\ &= \frac{EI_1 * (c_2 - c_1) * (x - a)}{(EI_1 + c_1 * a + c_2 * (x - a)) * (c_1 * x + EI_1)} * (x - a)^1 * Heaviside(x - a) \\ &= \frac{EI_1 * (c_2 - c_1)}{(EI_1 + c_1 * a + c_2 * (x - a)) * (c_1 * x + EI_1)} * (x - a)^2 * Heaviside(x - a) \\ &= \frac{EI_1 * (c_2 - c_1)}{(EI_1 + c_1 * a + c_2 * (x - a)) * (c_1 * x + EI_1)} * \langle x - a \rangle^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

De orde van de singulariteitsfuncties is toegenomen. Hierdoor is het virtuele koppel een virtuele puntlast geworden. Hetzelfde geldt voor de virtuele puntlast, welke hierdoor in een virtuele q-last verandert. Ook is hierdoor de knikfactor veranderd, aangezien de  $(x - a)$  term in de teller eruit verwijderd is bij deze omschrijving. De nieuwe knikfactor is dus als volgt:

$$n_{knik} = \frac{EI_1 * (c_2 - c_1)}{(EI_1 + c_1 * a + c_2 * (x - a)) * (c_1 * x + EI_1)} \quad (3.23)$$

De ligter in figuur 3.14 kan op deze manier opgelost worden aan de hand van de volgende virtuele constructie:



Figuur 3.16: Virtuele situatie voorbeeld 7

Waarbij:

$$dF = \frac{1}{EI} * \frac{1}{x} * (A_v + F) \quad (3.24)$$

en

$$dq = \frac{1}{EI} * \frac{1}{x} * (A_v + F) \quad (3.25)$$



## 4. Axiale stijfheid

In dit hoofdstuk wordt beschreven hoe de in hoofdstuk 3. afgeleide methode toegepast kan worden op constructies die op normaalkracht worden belast.

Zoals vermeld in paragraaf 2.5. heeft van der Wulp (2023) gevonden dat Macaulay's methode toegepast kan worden op constructies die belast worden op normaalkracht aan de hand van de volgende vergelijking:

$$\frac{d}{dx} \left( EA * \frac{du}{dx} \right) = q_x(x) \quad (4.1)$$

Waar in het geval van buiging, het moment gedeeld wordt door de buigstijfheid om de kromming te verkrijgen, wordt in dit geval de normaalkracht gedeeld door de axiale stijfheid om de rek te verkrijgen, zie vergelijking (4.2).

$$\epsilon = \frac{N}{EA} \quad (4.2)$$

Wanneer dezelfde stappen genomen worden als bij het geval van buiging, wordt een vergelijkbaar resultaat gevonden. Het effect van variabele axiale stijfheid kan gesimuleerd door een belasting die de normaalkracht aanpast. Dit proces kan voor een sprong of knik in stijfheid worden beschreven aan de hand van respectievelijk vergelijking (4.3) en (4.4).

$$\epsilon = \frac{N}{EA_1} - \frac{N}{EA_1} * \left( 1 - \frac{EA_1}{EA_2} \right) \quad (4.3)$$

$$\epsilon = \frac{N}{EA_1} - \frac{N}{EA_1} * \frac{EA_1 * (c_2 - c_1) * (x - a)}{(EA_1 + c_1 * a + c_2 * (x - a)) * (c_1 * x + EA_1)} \quad (4.4)$$

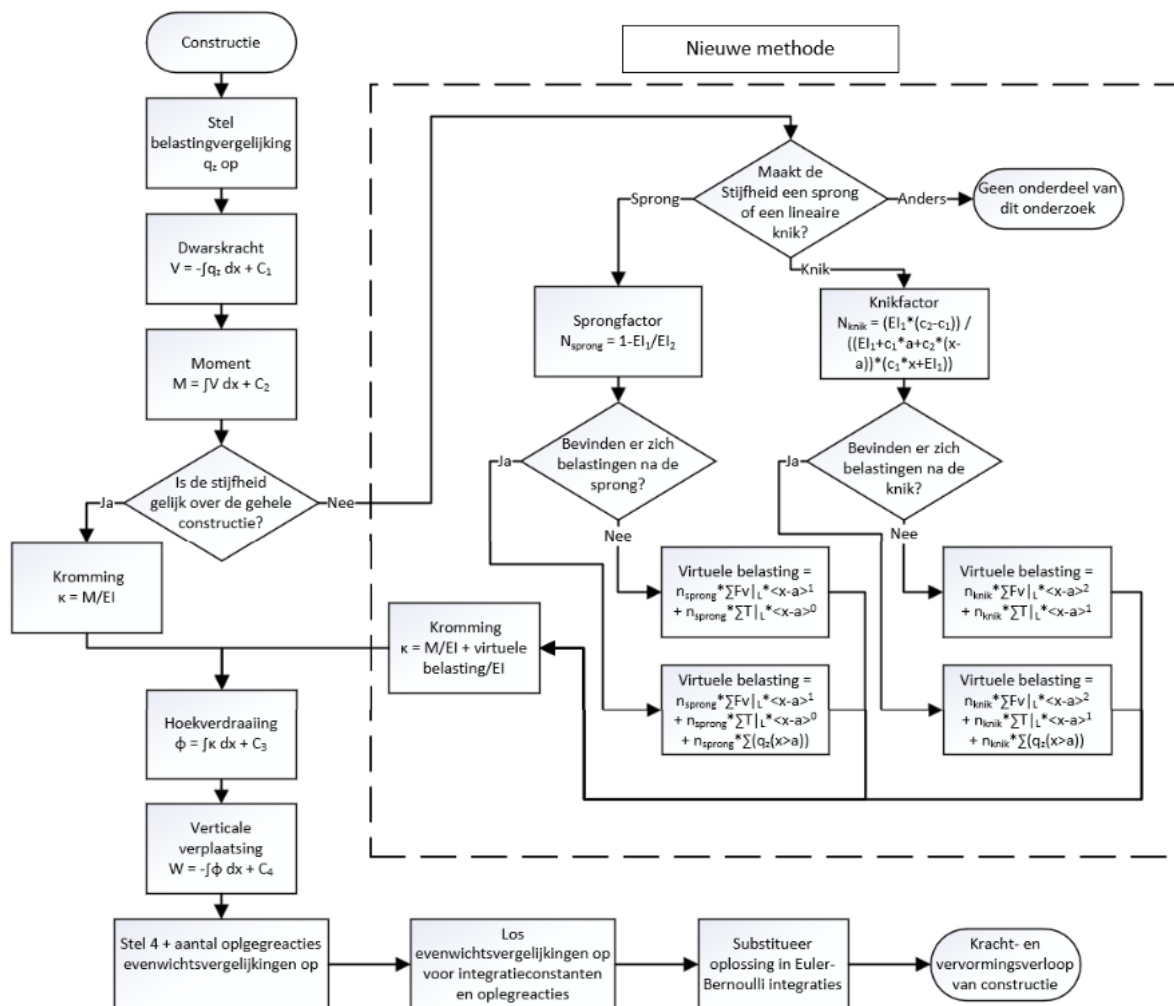
Het aantal virtuele belastingen dat voor een constructie die belast wordt op normaalkracht toegepast dient te worden is relatief lager vergeleken met een constructie die belast wordt op buiging. De kromming van een constructie is immers afhankelijk van zowel dwarskracht en moment, waardoor deze beiden aangepast dienen te worden door middel van virtuele belastingen. De axiale vervorming van een constructie is enkele afhankelijk van normaalkracht. Hierbij hoeven dus enkel punt- of q-lasten toegepast te worden in axiale richting.

## 5. Implementatie

In dit hoofdstuk wordt allereerst een stappenplan beschreven om de in dit rapport afgeleide methode toe te passen aan de hand van een stroomdiagram. Vervolgens wordt, aan de hand van het eerder gegeven voorbeeld 6, beschreven hoe het oplossen van constructies aan de hand van deze methode in zijn werk gaat.

### 5.1. Stappenplan

De stappen die genomen moeten worden om de methode die in dit rapport is afgeleid toe te passen, kunnen beschreven worden aan de hand van het stroomdiagram in figuur 5.1.



Figuur 5.1: Stroomdiagram methode

Ieder stap die zich binnen de stippellijn bevindt, behoort tot de nieuwe methode. Logischerwijs begint deze uitbreiding pas op het moment dat de stijfheid van de constructie een rol begint te spelen. Daarnaast worden, nadat het effect van de stijfheid gemodelleerd is, de gebruikelijke stappen van Macaulay's methode weer genomen.

De stappen die bij de nieuwe methode horen, zijn als volgt:

**Stap 1:**

Bepaal of de stijfheid een sprong of een lineaire knik maakt, en bereken de corresponderende factor.

**Stap 2:**

Bepaal of er zich belastingen bevinden op een punt met hogere x-coördinaat dan het punt waar de sprong of knik plaatsvindt. Dit bepaalt of er meer termen toegevoegd moeten worden aan de virtuele belasting.

**Stap 3:**

Bepaal de virtuele belastingen. Wanneer er zich geen belastingen voorbij de knik of sprong bevinden, geldt het volgende:

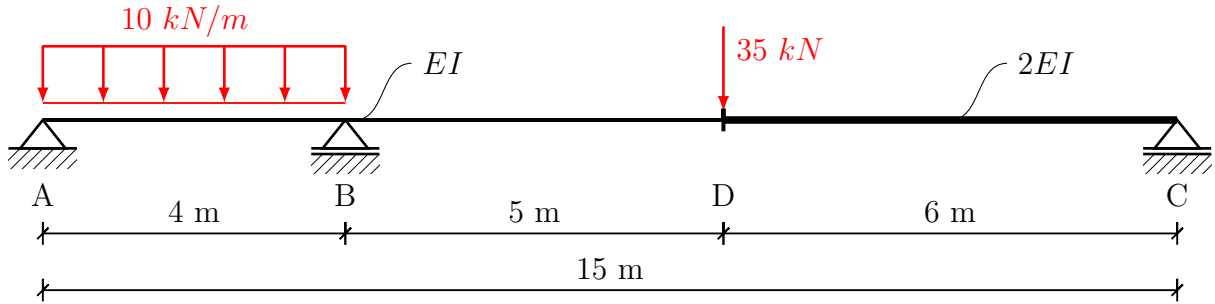
De eerste virtuele belasting heeft als waarde de dwarskracht in het punt van de sprong of knik, ofwel de som van alle belastingen die zich op een punt met lagere x-coördinaat dan die van de sprong bevinden. Deze virtuele belasting is een puntlast in het geval van een sprong en een q-last in het geval van een knik. Dit correspondeert met een singulariteitsfunctie van respectievelijk orde 1 of 2. De tweede virtuele belasting heeft als waarde het moment in het punt van de sprong, ofwel de som van dezelfde belastingen vermenigvuldigd met de afstand tussen deze belasting en de sprong. Deze worden beide vermenigvuldigd met de eerder berekende factor. Deze virtuele belasting is een koppel in het geval van een sprong en een puntlast in het geval van een knik. Dit correspondeert met een singulariteitsfunctie van respectievelijk orde 0 of 1.

Wanneer er zich wel een belasting bevindt voorbij de sprong of knik, wordt er aan de virtuele belasting een term toegevoegd met dezelfde orde, waarde en locatie als de bijbehorende belasting. Deze term wordt wederom vermenigvuldigd met de eerder berekende sprong- of knikfactor.

Nadat de krommingsvergelijking met virtuele termen is opgesteld, kunnen de gebruikelijke stappen van Macaulay's methode hervat worden.

## 5.2. Uitwerking voorbeeld

De constructie van voorbeeld 6 wordt wederom getoond in figuur 5.2.



Figuur 5.2: Voorbeeld 6

Allereerst wordt de belasting op de constructie beschreven aan de hand van singulariteitsfuncties. Hierbij hebben de functies die de puntlast en de drie oplegreacties beschreven allen orde -1. De functies voor de q-last hebben orde 0. Er zijn twee functies benodigd om de q-last te beschreven. Deze functies hebben beide de waarde q maar zijn tegengesteld en beschrijven zo respectievelijk het begin- en eindpunt van de q-last. Het resultaat is de volgende belastingvergelijking:

$$q_z = A_v * \langle x \rangle^{-1} + B_v * \langle x-4 \rangle^{-1} + C_v * \langle x-15 \rangle^{-1} + 10 * \langle x \rangle^0 - 10 * \langle x-4 \rangle^0 + 35 * \langle x-9 \rangle^{-1} \quad (5.1)$$

Integratie van deze belastingvergelijking en vermenigvuldiging met -1 geeft de vergelijking die dwarskracht in de constructie beschrijft.

$$V = -A_v * \langle x \rangle^0 - B_v * \langle x-4 \rangle^0 - C_v * \langle x-15 \rangle^0 - 10 * \langle x \rangle^1 + 10 * \langle x-4 \rangle^1 - 35 * \langle x-9 \rangle^0 + C_1 \quad (5.2)$$

Wederom integreren levert de vergelijking voor het moment op.

$$M = -A_v * \langle x \rangle^1 - B_v * \langle x-4 \rangle^1 - C_v * \langle x-15 \rangle^1 - 10 * \langle x \rangle^2 + 10 * \langle x-4 \rangle^2 - 35 * \langle x-9 \rangle^1 + C_1 * x + C_2 \quad (5.3)$$

Wanneer de vergelijking voor het moment door de buigstijfheid gedeeld wordt, wordt de kromming  $\kappa$  van de constructie verkregen. Aangezien de stijfheid op  $x = 9$  verdubbeld, moet de nieuwe methode toegepast worden.

De stijfheid van de constructie is gelijk aan EI voor de sprong en 2EI na de sprong. Invullen van deze waarden in de formule voor de sprongfactor geeft:

$$n_{sprong} = 1 - \frac{EI_1}{EI_2} = 1 - \frac{EI}{2EI} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (5.4)$$

De virtuele belastingen moeten dus vermenigvuldigd worden met een factor  $\frac{1}{2}$ .

Voor de waarde van het virtuele koppel wordt het moment om punt D genomen. Dit geeft:

$$\sum T|_D = A_v * 9 + B_v * 5 + 10 * 4 * 7 = A_v * 9 + B_v * 5 + 280 \quad (5.5)$$

De singulariteitsfunctie die een koppel beschrijft, heeft in de belastingvergelijking orde -2. De kromming is, net als het moment, de tweede integratie van de belasting. De orde van de singulariteitsfunctie die het virtuele koppel beschrijft, is dus gelijk aan 0.

Aan de krommingsvergelijking wordt dus de volgende term toegevoegd voor het virtuele koppel:

$$\frac{1}{EI} * \frac{1}{2} * (A_v * 9 + B_v * 5 + 280) * \langle x - 9 \rangle^0 \quad (5.6)$$

Voor de waarde van de virtuele puntlast wordt de som van verticale krachten links van het punt D genomen. In realiteit wordt een punt beschouwd dat zich een oneindig kleine afstand rechts van punt D bevindt. Hierdoor wordt ook de puntlast die zich op punt D bevindt meegenomen. Dit geeft:

$$\sum F_v = A_v + B_v + 10 * 4 + 35 = A_v + B_v + 75 \quad (5.7)$$

De singulariteitsfunctie die een koppel beschrijft, heeft in de belastingvergelijking orde -1. Wederom is de orde van deze functie in de krommingsvergelijking hoger met een waarde van 2. Dit geeft een orde van 1.

Aan de krommingsvergelijking wordt dus de volgende term toegevoegd voor de virtuele puntlast:

$$\frac{1}{EI} * \frac{1}{2} * (A_v + B_v + 75) * \langle x - 9 \rangle^1 \quad (5.8)$$

Nadat beide termen zijn toegevoegd, ziet de krommingsvergelijking er als volgt uit:

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{-A_v * \langle x \rangle^1 - B_v * \langle x - 4 \rangle^1 - C_v * \langle x - 15 \rangle^1 - 10 * \langle x \rangle^2 + 10 * \langle x - 4 \rangle^2 - 35 * \langle x - 9 \rangle^1 + C_1 * x + C_2}{EI} \\ & + \frac{(A_v * 9 + B_v * 5 + 280) * \langle x - 9 \rangle^0}{2EI} + \frac{(A_v + B_v + 75) * \langle x - 9 \rangle^1}{2EI} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Integratie van de krommingsvergelijking geeft de hoekverdraaiing.

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{-\frac{A_v * \langle x \rangle^2}{2} - \frac{B_v * \langle x - 4 \rangle^2}{2} - \frac{C_v * \langle x - 15 \rangle^2}{2} - \frac{10 * \langle x \rangle^3}{3} + \frac{10 * \langle x - 4 \rangle^3}{3} - \frac{35 * \langle x - 9 \rangle^2}{2} + \frac{C_1 * x^2}{2} + C_2 * x}{EI} \\ & + \frac{(A_v * 9 + B_v * 5 + 280) * \langle x - 9 \rangle^1}{2EI} + \frac{(A_v + B_v + 75) * \langle x - 9 \rangle^2}{4EI} + C_3 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Na een laatste integratie van de hoekverdraaiing en vermenigvuldiging met -1 wordt de verticale verplaatsing verkregen:

$$\begin{aligned} w = & -\frac{-\frac{A_v * \langle x \rangle^3}{6} - \frac{B_v * \langle x - 4 \rangle^3}{6} - \frac{C_v * \langle x - 15 \rangle^3}{6} - \frac{10 * \langle x \rangle^4}{12} + \frac{10 * \langle x - 4 \rangle^4}{12} - \frac{35 * \langle x - 9 \rangle^3}{6} + \frac{C_1 * x^3}{6} + \frac{C_2 * x^2}{2}}{EI} \\ & + \frac{(A_v * 9 + B_v * 5 + 280) * \langle x - 9 \rangle^2}{4EI} + \frac{(A_v + B_v + 75) * \langle x - 9 \rangle^3}{12EI} - C_3 * x + C_4 \end{aligned}$$

(5.11)

Om de onbekenden in deze integraties op te lossen, worden, zoals gebruikelijk, randvoorwaarden gebruikt. Zoals vermeld in het stroomdiagram is het aantal randvoorwaarden dat nodig is gelijk aan 4 plus het aantal oplegreacties. In dit geval zijn dat er dus 7.

Op  $x=0$  moeten de verticale verplaatsing en het moment gelijk zijn aan nul. Wanneer  $x=0$  wordt ingevuld in deze vergelijkingen blijven respectievelijk enkel de integratieconstanten  $C_4$  en  $C_2$  over. Deze twee constanten hebben dus de waarde 0. Deze constanten kunnen in volgende randvoorwaarden dus ook weggelaten worden.

Ook in het andere uiteinde van de constructie, op  $x=15$ , zijn de verticale verplaatsing en het moment gelijk aan nul. Het invullen van  $x=15$  in deze vergelijkingen, en ze gelijkstellen aan nul, geeft het volgende:

$$w = 0 : \quad -\frac{-\frac{1125*A_v}{2} - \frac{1331*B_v}{6} + \frac{1125*C_1}{2} - \frac{48760}{3}}{EI} - \frac{9 * (9 * A_v + 5 * B_v + 280)}{EI} - \frac{18 * (A_v + B_v + 75)}{EI} - 15 * C_3 = 0 \quad (5.12)$$

$$M = 0 : \quad -15 * A_v - 11 * B_v + 15 * C_1 - 730 = 0 \quad (5.13)$$

Bij de derde oplegging, op  $x=4$ , moet de verticale verplaatsing ook gelijk zijn aan nul. Het invullen van  $x=4$  in de vergelijking voor de verplaatsing en deze gelijkstellen aan nul geeft:

$$-\frac{-\frac{32*A_v}{3} + \frac{32*C_1}{3} - \frac{320}{3}}{EI} - 4 * C_3 = 0 \quad (5.14)$$

De laatste twee randvoorwaarden worden zoals gebruikelijk bij Macaulay's methode gevonden door de dwarskracht op oneindig kleine afstand voor en na het begin en eind van de constructie gelijk te stellen aan nul. Deze oneindig kleine afstand betekent dat, voor het begin van de constructie, geen enkele belasting mee wordt genomen. Hierbij blijft dus enkel de integratieconstante  $C_1$  over, welke zodoende gelijk moet zijn aan nul. Voor het eind van de constructie betekent dit juist dat iedere belasting wordt meegenomen. Aangezien  $C_1$  een waarde van 0 heeft, kan deze term weggelaten worden uit deze vergelijking. Dit leidt als het ware tot het verticale krachterevenwicht van de constructie. Ofwel:

$$-A_v - B_v - C_v - 75 = 0 \quad (5.15)$$

De waarden van de overige integratieconstanten en de oplegreacties kunnen gevonden worden door dit stelsel van vergelijkingen op te lossen. De oplossing van deze constructie wordt zo gegeven door de volgende waarden:

$$A_v = -\frac{47605}{6828}, \quad B_v = -\frac{129405}{2276}, \quad C_v = -\frac{19070}{1707}, \quad (5.16)$$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{41350}{51210000} \quad \text{en} \quad C_4 = 0$$

## 6. Discussie

Hoewel de methode die in dit rapport ontwikkeld is mogelijkheden biedt voor het oplossen van constructies met variërende stijfheid aan de hand van de methode van Macaulay, is het niet met zekerheid te zeggen dat dit de beste oplossing is voor dit specifieke probleem. In dit hoofdstuk worden enkele limitaties van de afgeleide methode en suggesties voor mogelijk vervolgonderzoek beschreven.

### 6.1. Limitaties onderzoek

In dit onderzoek zijn enkel situaties beschouwd waarbij het stijfheidsverloop een sprong of een knik maakt. De verwachting is dat de manier waarop de methode voor deze twee situaties is afgeleid herhaald kan worden voor meer situaties, bijvoorbeeld kwadratische stijfheden. Er is echter wel te zien dat de knikfactor die gevonden is voor lineaire stijfheden al een stuk gecompliceerder is dan de sprongfactor voor constante stijfheden. Hieruit valt op te maken dat de te berekenen factoren voor nog hogere ordes alleen maar gecompliceerder zullen worden.

Aan het eind van subparagraaf 3.1.1. is beschreven hoe de afgeleide methode feitelijk hetzelfde effect heeft als verschillende krommingsvergelijkingen voor iedere stijfheidssituatie, die door middel van singulariteitsfuncties afgewisseld worden. De vraag kan gesteld worden in welke mate het van toegevoegde waarde is om de methode verder af te leiden tot het punt waar de stijfheidsvariatie beschreven wordt aan de hand van virtuele belastingen. Het is goed mogelijk dat de methode waarbij de krommingsvergelijking aan de hand van singulariteitsfuncties aan en uit wordt gezet voor verschillende stijfheden, zeker voor gecompliceerdere stijfheidssituaties, een eenvoudiger aanpak biedt.

### 6.2. Vervolgonderzoek

Zoals eerder vermeld, is in dit rapport de focus gelegd op constructies met relatief eenvoudige stijfheidssituaties. Het zou interessant kunnen zijn om te onderzoeken hoe er omgegaan kan worden met complexere stijfheidsvergelijkingen. Bijvoorbeeld een geval waarbij de stijfheid beschreven wordt door een sinusfunctie. Daarnaast zijn in dit onderzoek enkel 1-Dimensionale constructies beschouwd die gevormd worden door een enkele doorlopende balk. In de toekomst zou er onderzoek gedaan kunnen worden naar de toepassing van deze methode op 2-Dimensionale constructies waarbij er splitsingen plaatsvinden.

## 7. Conclusie

In dit rapport is onderzoek gedaan naar de volgende vraag:

”Hoe kan de methode van Macaulay toegepast worden op constructies waarbij de stijfheid varieert over de lengte?”

Hierbij is eerst gekeken naar constructies die belast worden op buiging, waarbij de stijfheid een sprong maakt. Er is gebleken dat het effect van deze stijfheidssprong kan worden nagebootst door het moment in de krommingsvergelijking aan te passen. Hierbij wordt gebruikgemaakt van de directe inverse relatie tussen moment en stijfheid in de definitie van de kromming. Vervolgens is bevonden dat deze verandering in moment kan worden beschreven alsof er een puntlast en koppel op de constructie worden toegepast. Deze belastingen zijn virtueel genoemd omdat ze niet in de krachtvergelijkingen, maar wel in de krommingsvergelijkingen van toepassing zijn. Deze aanpak is voor verschillende belasting- en stijfheidssituaties herhaald, wat de mogelijkheid biedt om deze methode ook op andere mogelijke constructies toe te passen.

Vervolgens is gebleken dat dezelfde aanpak een methode voor een knik in lineair verlopende stijfheid oplevert. Hierbij is bevonden dat deze knik beschreven kan worden met een virtuele  $q$ -last in plaats van het virtuele koppel.

Ten slotte is gevonden dat dezelfde methode toegepast kan worden op constructies die belast worden op normaalkracht. Hierbij hoeven relatief minder virtuele belastingen toegepast te worden, aangezien de vervorming in deze constructies enkel afhangt van normaalkracht, terwijl bij buiging zowel dwarskracht als moment een rol spelen.

Hieruit kan de conclusie getrokken worden dat de in dit rapport beschreven methode een goede manier biedt om constructie met variërende stijfheid met Macaulay's methode op te lossen. Ook ziet het ernaar uit dat deze methode toepasbaar is op arbitraire stijfheidssituaties. Alhoewel het de vraag is of de methode met virtuele belasting hier de beste oplossing voor is.



# Bibliografie

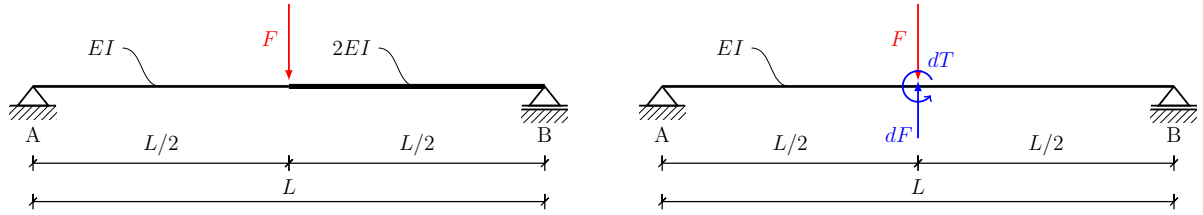
- lBoersen. (2025). *Macaulay's methode met variabele stijfheden*. <https://github.com/lBoersen/Methode-van-Macaulay-met-variabele-stijfheden>. GitHub.
- Macaulay, W. H. (1919). A note on the deflection of beams. *Messenger of mathematics*, 48, 129–130.
- van der Wulp, J. (2023, Juni). *De methode van Macaulay voor tweedimensionale constructies*. TU Delft Education Repository. <http://resolver.tudelft.nl/uuid:96ec934a-4520-465f-8079-01b9fad73360>

# Bijlage: Uitwerking van voorbeelden

In deze bijlage worden de in dit rapport gegeven voorbeelden uitgewerkt. Hierbij is gebruik gemaakt van de volgende waarden:  $EI = 10000 \text{ kNm}^2$ ,  $L = 10 \text{ m}$ ,  $F = 35 \text{ kN}$  en  $q = 10 \text{ kN/m}$ .

De python code voor het oplossen van deze voorbeelden en het plotten van de grafieken is te vinden op GitHub (lBoersen, 2025).

## Voorbeeld 1



$$\begin{aligned}
 q_z &= A_v \langle x \rangle^{-1} + B_v \langle x - 10 \rangle^{-1} + 35 \langle x - 5 \rangle^{-1} \\
 V &= -A_v \langle x \rangle^0 - B_v \langle x - 10 \rangle^0 + C_1 - 35 \langle x - 5 \rangle^0 \\
 M &= -A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - 35 \langle x - 5 \rangle^1 \\
 \kappa &= \frac{5A_v \langle x - 5 \rangle^0}{2EI} + \frac{(A_v + 35) \langle x - 5 \rangle^1}{2EI} + \frac{-A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - 35 \langle x - 5 \rangle^1}{EI} \\
 \phi &= \frac{5A_v \langle x - 5 \rangle^1}{2EI} + C_3 + \frac{(A_v + 35) \langle x - 5 \rangle^2}{4EI} + \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^2}{2} - \frac{B_v \langle x - 10 \rangle^2}{2} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x - \frac{35 \langle x - 5 \rangle^2}{2}}{EI} \\
 w &= -\frac{5A_v \langle x - 5 \rangle^2}{4EI} - C_3 x + C_4 - \frac{(A_v + 35) \langle x - 5 \rangle^3}{12EI} - \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^3}{6} - \frac{B_v \langle x - 10 \rangle^3}{6} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} - \frac{35 \langle x - 5 \rangle^3}{6}}{EI}
 \end{aligned}$$

$x = 0 :$

$$w = 0 : C_4 = 0$$

$$M = 0 : C_2 = 0$$

$x = 10 :$

$$w = 0 : -\frac{125A_v}{4EI} - 10C_3 + C_4 - \frac{125(A_v + 35)}{12EI} - \frac{-\frac{500A_v}{3} + \frac{500C_1}{3} + 50C_2 - \frac{4375}{6}}{EI} = 0$$

$$M = 0 : -10A_v + 10C_1 + C_2 - 175 = 0$$

$x = -\frac{1}{\infty} :$

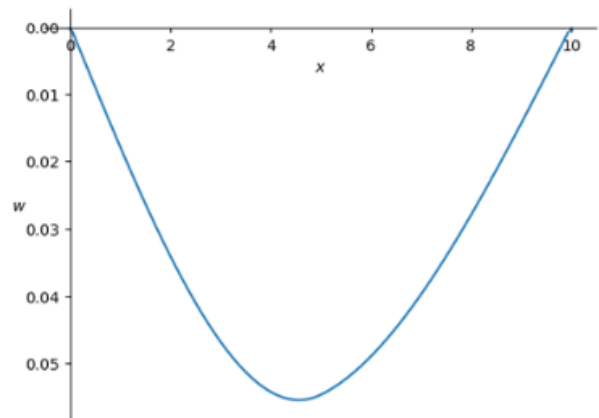
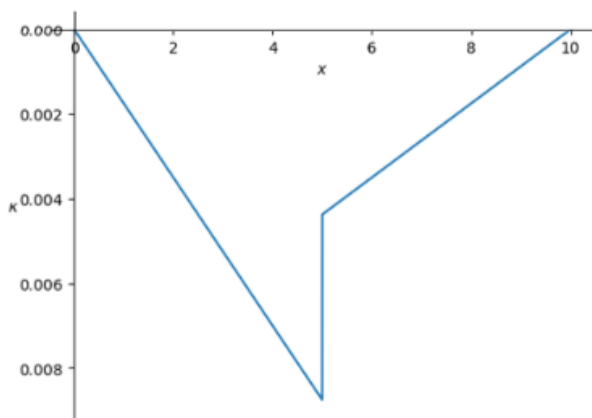
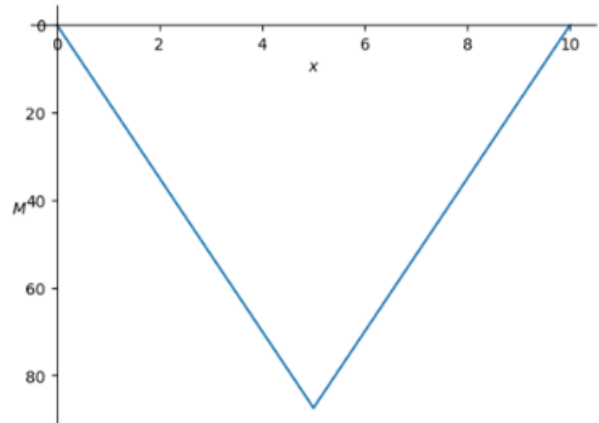
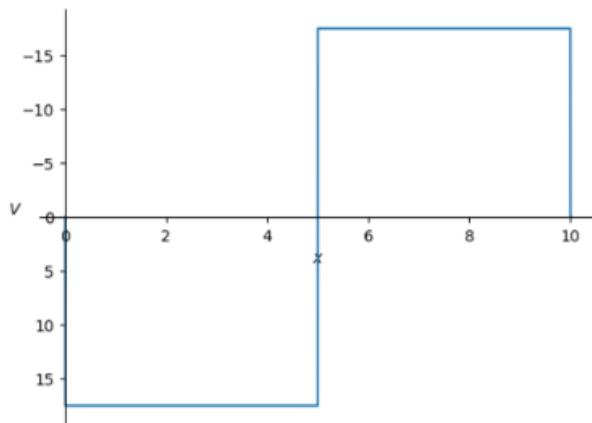
$$V = 0 : C_1 = 0$$

$x = 10 + \frac{1}{\infty} :$

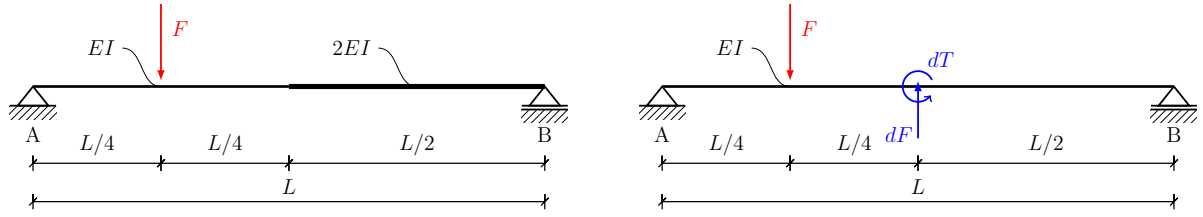
$$V = 0 : -A_v - B_v + C_1 - 35 = 0$$

**Solution:**

$$A_v = -\frac{35}{2}, \quad B_v = -\frac{35}{2}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{4375}{24EI}, \quad C_4 = 0$$



## Voorbeeld 2



$$\begin{aligned}
 q_z &= A_v \langle x \rangle^{-1} + B_v \langle x - 10 \rangle^{-1} + 35 \langle x - 2.5 \rangle^{-1} \\
 V &= -A_v \langle x \rangle^0 - B_v \langle x - 10 \rangle^0 + C_1 - 35 \langle x - 2.5 \rangle^0 \\
 M &= -A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - 35 \langle x - 2.5 \rangle^1 \\
 \kappa &= \frac{(A_v + 35) \langle x - 5 \rangle^1}{2EI} + \frac{(5A_v + 87.5) \langle x - 5 \rangle^0}{2EI} + \frac{-A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - 35 \langle x - 2.5 \rangle^1}{EI} \\
 \phi &= C_3 + \frac{(A_v + 35) \langle x - 5 \rangle^2}{4EI} + \frac{(5A_v + 87.5) \langle x - 5 \rangle^1}{2EI} + \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^2}{2} - \frac{B_v \langle x - 10 \rangle^2}{2} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x - \frac{35 \langle x - 2.5 \rangle^2}{2}}{EI} \\
 w &= -C_3 x + C_4 - \frac{(A_v + 35) \langle x - 5 \rangle^3}{12EI} - \frac{(5A_v + 87.5) \langle x - 5 \rangle^2}{4EI} \\
 &\quad - \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^3}{6} - \frac{B_v \langle x - 10 \rangle^3}{6} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} - \frac{35 \langle x - 2.5 \rangle^3}{6}}{EI}
 \end{aligned}$$

$x = 0$  :

$$w = 0 : \quad C_4 = 0$$

$$M = 0 : \quad C_2 = 0$$

$x = 10$  :

$$w = 0 : \quad -10C_3 + C_4 - \frac{125(A_v + 35)}{12EI} - \frac{25 \cdot (5A_v + 87.5)}{4EI} - \frac{-\frac{500A_v}{3} + \frac{500C_1}{3} + 50C_2 - 2460.9375}{EI} = 0$$

$$M = 0 : \quad -10A_v + 10C_1 + C_2 - 262.5 = 0$$

$x = -\frac{1}{\infty}$  :

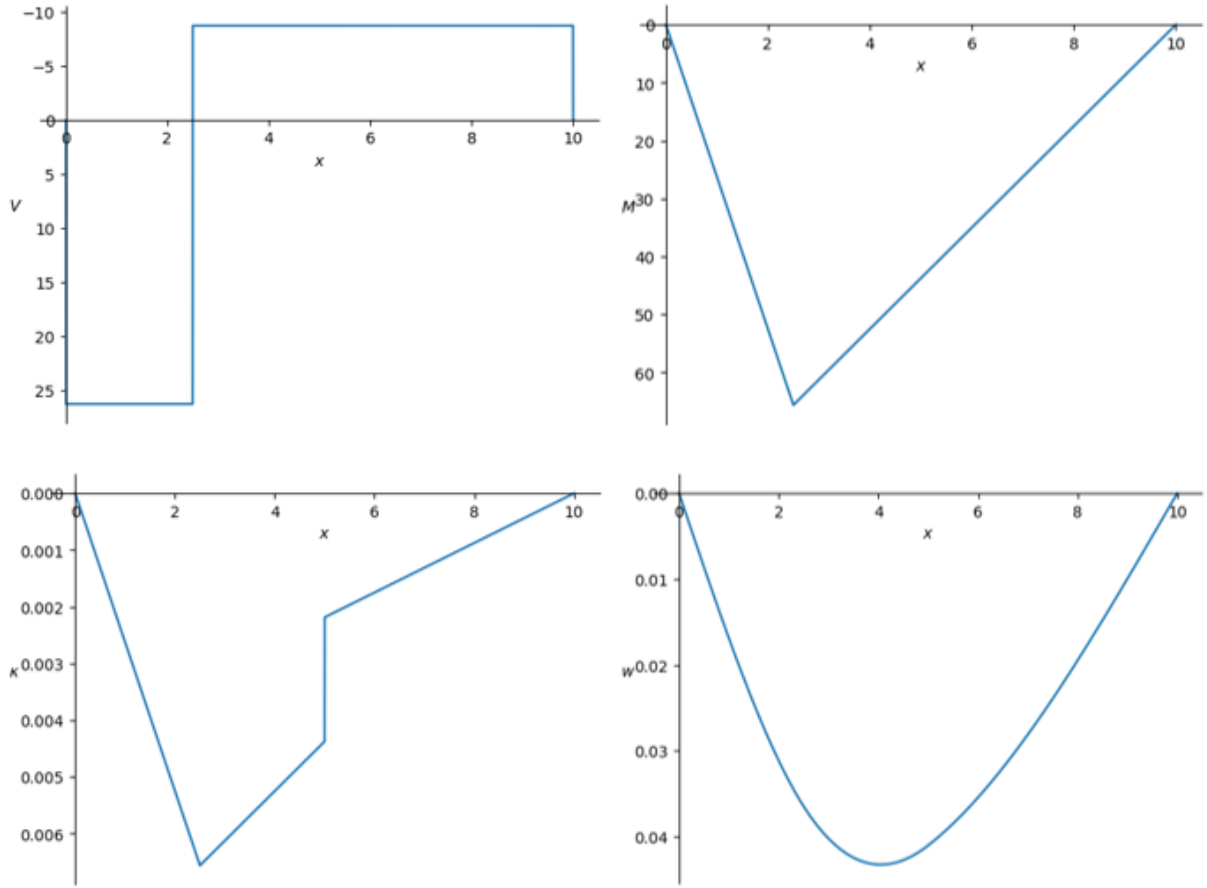
$$V = 0 : \quad C_1 = 0$$

$x = 10 + \frac{1}{\infty}$  :

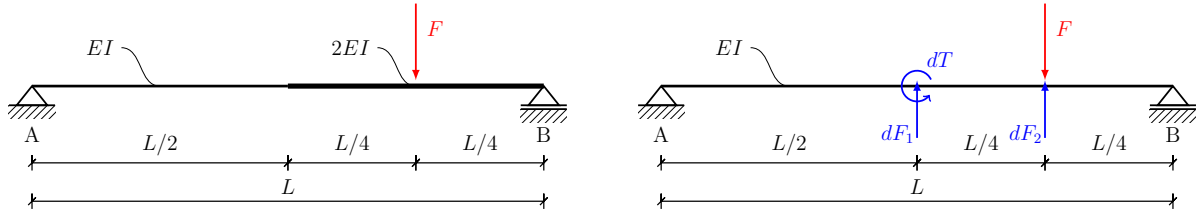
$$V = 0 : \quad -A_v - B_v + C_1 - 35 = 0$$

**Solution:**

$$A_v = -26.25, \quad B_v = -8.75, \quad C_1 = 0.0, \quad C_2 = 0.0, \quad C_3 = -\frac{173.177083333333}{EI}, \quad C_4 = 0.0$$



### Voorbeeld 3



$$\begin{aligned}
 q_z &= A_v \langle x \rangle^{-1} + B_v \langle x - 10 \rangle^{-1} + 35 \langle x - 7.5 \rangle^{-1} \\
 V &= -A_v \langle x \rangle^0 - B_v \langle x - 10 \rangle^0 + C_1 - 35 \langle x - 7.5 \rangle^0 \\
 M &= -A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - 35 \langle x - 7.5 \rangle^1 \\
 \kappa &= \frac{5A_v \langle x - 5 \rangle^0}{2EI} + \frac{A_v \langle x - 5 \rangle^1}{2EI} + \frac{-A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - 35 \langle x - 7.5 \rangle^1}{EI} + \frac{35 \langle x - 7.5 \rangle^1}{2EI} \\
 \phi &= \frac{5A_v \langle x - 5 \rangle^1}{2EI} + \frac{A_v \langle x - 5 \rangle^2}{4EI} + C_3 + \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^2}{2} - \frac{B_v \langle x - 10 \rangle^2}{2} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x - \frac{35 \langle x - 7.5 \rangle^2}{2}}{EI} + \frac{35 \langle x - 7.5 \rangle^2}{4EI} \\
 w &= -\frac{5A_v \langle x - 5 \rangle^2}{4EI} - \frac{A_v \langle x - 5 \rangle^3}{12EI} - C_3 x + C_4 - \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^3}{6} - \frac{B_v \langle x - 10 \rangle^3}{6} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} - \frac{35 \langle x - 7.5 \rangle^3}{6}}{EI} \\
 &\quad - \frac{35 \langle x - 7.5 \rangle^3}{12EI}
 \end{aligned}$$

$x = 0 :$

$$w = 0 : \quad C_4 = 0$$

$$M = 0 : \quad C_2 = 0$$

$x = 10 :$

$$w = 0 : \quad -\frac{125A_v}{3EI} - 10C_3 + C_4 - \frac{-\frac{500A_v}{3} + \frac{500C_1}{3} + 50C_2 - 91.145833333333}{EI} - \frac{45.5729166666667}{EI} = 0$$

$$M = 0 : \quad -10A_v + 10C_1 + C_2 - 87.5 = 0$$

$x = -\frac{1}{\infty} :$

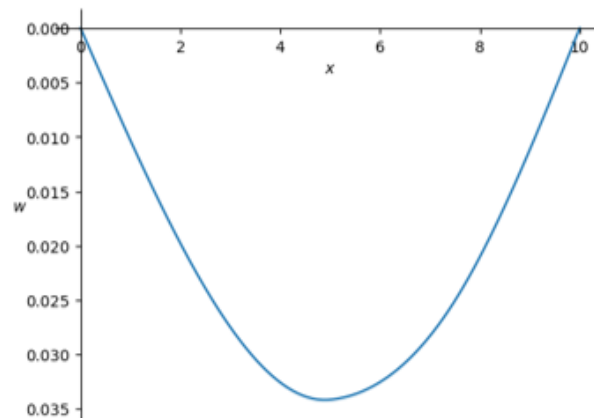
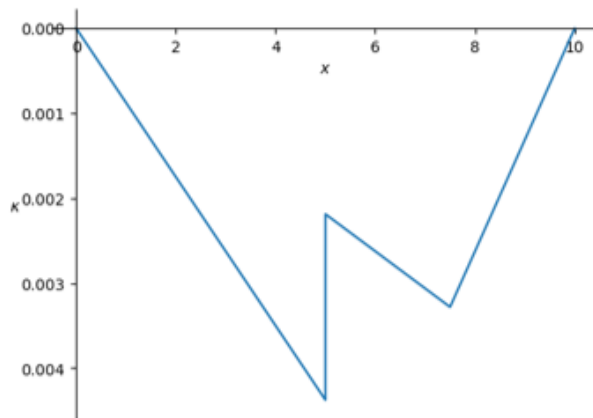
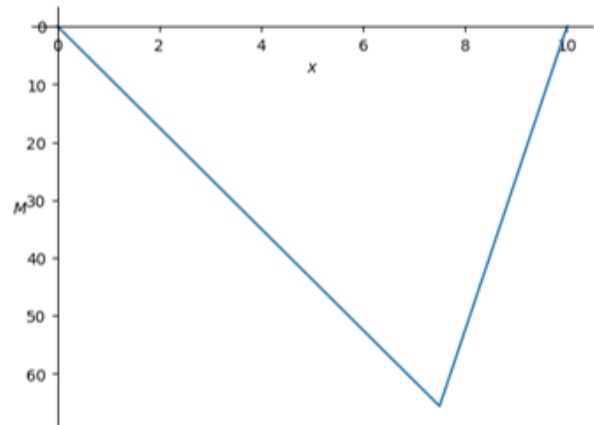
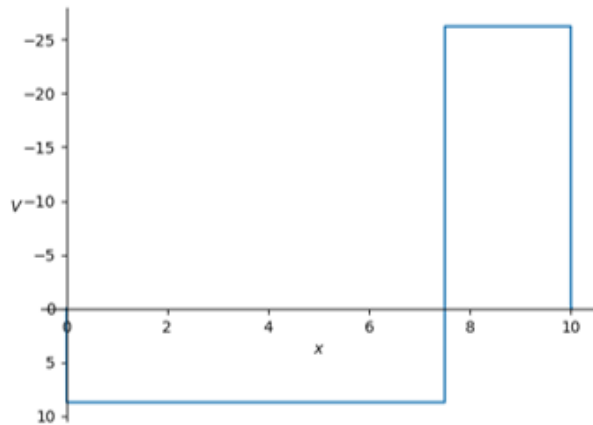
$$V = 0 : \quad C_1 = 0$$

$x = 10 + \frac{1}{\infty} :$

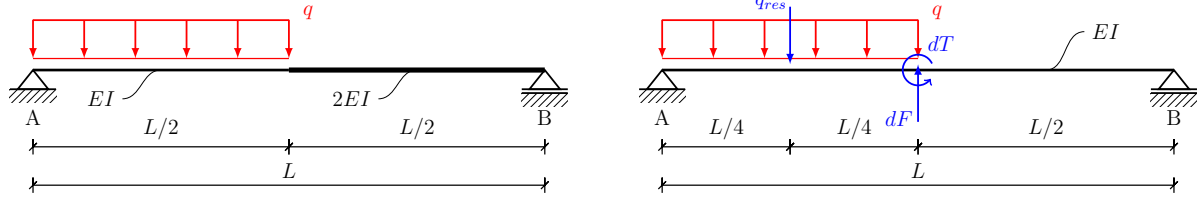
$$V = 0 : \quad -A_v - B_v + C_1 - 35 = 0$$

**Solution:**

$$A_v = -8.75, \quad B_v = -26.25, \quad C_1 = 0.0, \quad C_2 = 0.0, \quad C_3 = -\frac{104.817708333333}{EI}, \quad C_4 = 0.0$$



## Voorbeeld 4



$$\begin{aligned}
 q_z &= A_v \langle x \rangle^{-1} + B_v \langle x - 10 \rangle^{-1} + 10 \langle x \rangle^0 - 10 \langle x - 5 \rangle^0 \\
 V &= -A_v \langle x \rangle^0 - B_v \langle x - 10 \rangle^0 + C_1 - 10 \langle x \rangle^1 + 10 \langle x - 5 \rangle^1 \\
 M &= -A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - 5 \langle x \rangle^2 + 5 \langle x - 5 \rangle^2 \\
 \kappa &= \frac{(A_v + 50) \langle x - 5 \rangle^1}{2EI} + \frac{(5A_v + 125.0) \langle x - 5 \rangle^0}{2EI} \\
 &\quad + \frac{-A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - 5 \langle x \rangle^2 + 5 \langle x - 5 \rangle^2}{EI} \\
 \phi &= C_3 + \frac{(A_v + 50) \langle x - 5 \rangle^2}{4EI} + \frac{(5A_v + 125.0) \langle x - 5 \rangle^1}{2EI} \\
 &\quad + \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^2}{2} - \frac{B_v \langle x - 10 \rangle^2}{2} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x - \frac{5 \langle x \rangle^3}{3} + \frac{5 \langle x - 5 \rangle^3}{3}}{EI} \\
 w &= -C_3 x + C_4 - \frac{(A_v + 50) \langle x - 5 \rangle^3}{12EI} - \frac{(5A_v + 125.0) \langle x - 5 \rangle^2}{4EI} \\
 &\quad - \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^3}{6} - \frac{B_v \langle x - 10 \rangle^3}{6} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} - \frac{5 \langle x \rangle^4}{12} + \frac{5 \langle x - 5 \rangle^4}{12}}{EI}
 \end{aligned}$$

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$  :

$$w = 0 : \quad C_4 = 0$$

$$M = 0 : \quad C_2 = 0$$

$\mathbf{x} = \mathbf{10}$  :

$$w = 0 : \quad -10C_3 + C_4 - \frac{125(A_v + 50)}{12EI} - \frac{25 \cdot (5A_v + 125.0)}{4EI} - \frac{-\frac{500A_v}{3} + \frac{500C_1}{3} + 50C_2 - \frac{15625}{4}}{EI} = 0$$

$$M = 0 : \quad -10A_v + 10C_1 + C_2 - 375 = 0$$

$\mathbf{x} = -\frac{1}{\infty}$  :

$$V = 0 : \quad C_1 = 0$$

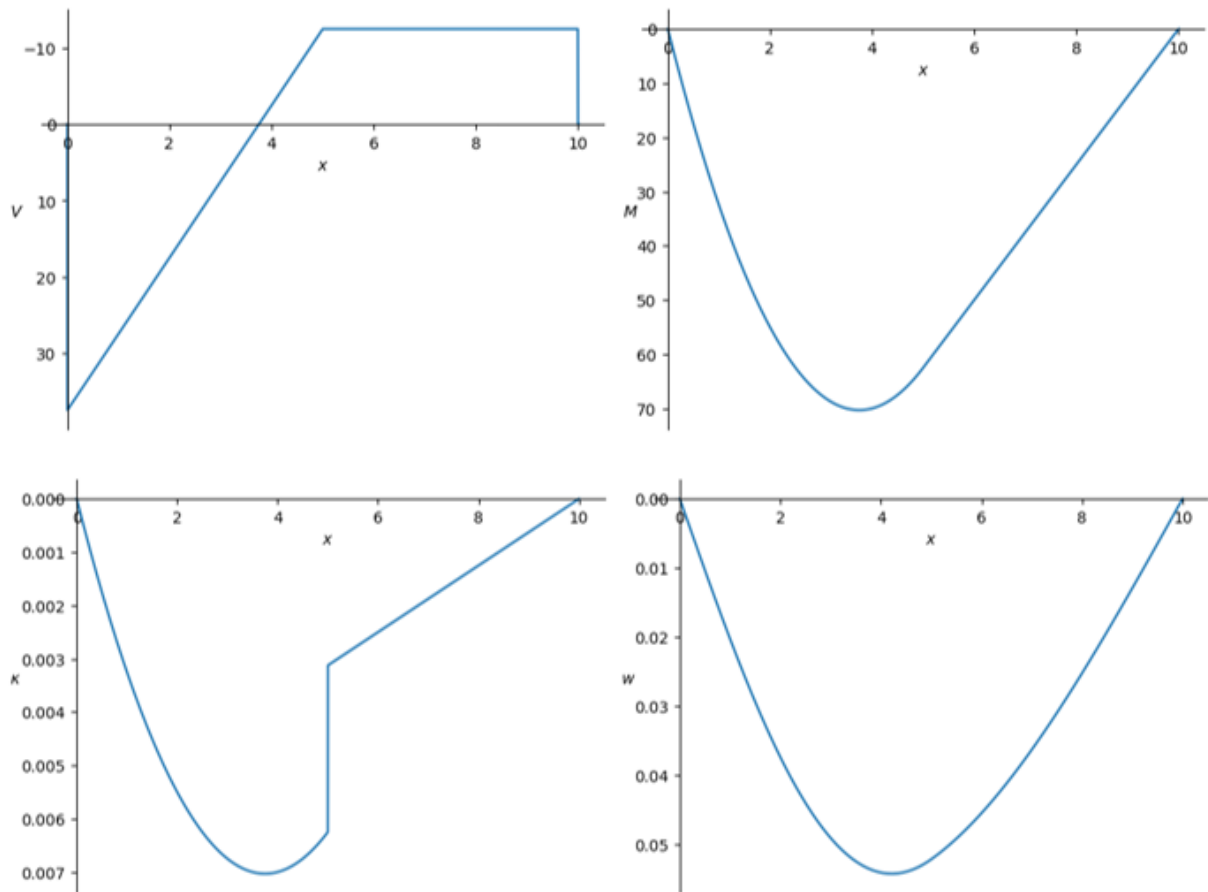
$\mathbf{x} = \mathbf{10} + \frac{1}{\infty}$  :

$$V = 0 : \quad -A_v - B_v + C_1 - 50 = 0$$

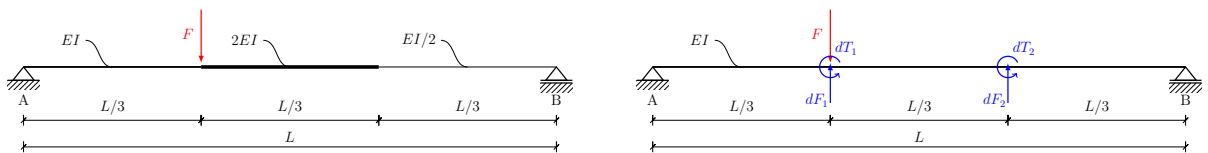
**Solution:**

$$A_v = -37.5, \quad B_v = -12.5, \quad C_1 = 0.0, \quad C_2 = 0.0, \quad C_3 = -\frac{208.333333333333}{EI},$$

$$C_4 = 0.0$$



## Voorbeeld 5





$$\begin{aligned}
q_z &= A_v \langle x \rangle^{-1} + B_v \langle x - 10 \rangle^{-1} + 35 \langle x - 3.333333333333333 \rangle^{-1} \\
V &= -A_v \langle x \rangle^0 - B_v \langle x - 10 \rangle^0 + C_1 - 35 \langle x - 3.333333333333333 \rangle^0 \\
M &= -A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - 35 \langle x - 3.333333333333333 \rangle^1 \\
\kappa &= \frac{10A_v \left( -\frac{EI}{EI_2} + 1 \right) \langle x - 3.333333333333333 \rangle^0}{3EI} + \frac{(A_v + 35) \left( -\frac{EI_2}{EI_3} + 1 \right) \langle x - 6.666666666666667 \rangle^1}{EI_2} \\
&\quad + \frac{\left( \frac{20A_v}{3} + 116.6666666666667 \right) \left( -\frac{EI_2}{EI_3} + 1 \right) \langle x - 6.666666666666667 \rangle^0}{EI_2} \\
&\quad + \frac{(A_v + 35) \left( -\frac{EI}{EI_2} + 1 \right) \langle x - 3.333333333333333 \rangle^1}{EI} \\
&\quad + \frac{-A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - 35 \langle x - 3.333333333333333 \rangle^1}{EI} \\
\phi &= \frac{10A_v \left( -\frac{EI}{EI_2} + 1 \right) \langle x - 3.333333333333333 \rangle^1}{3EI} + C_3 + \frac{(A_v + 35) \left( -\frac{EI_2}{EI_3} + 1 \right) \langle x - 6.666666666666667 \rangle^2}{2EI_2} \\
&\quad + \frac{\left( \frac{20A_v}{3} + 116.6666666666667 \right) \left( -\frac{EI_2}{EI_3} + 1 \right) \langle x - 6.666666666666667 \rangle^1}{EI_2} \\
&\quad + \frac{(A_v + 35) \left( -\frac{EI}{EI_2} + 1 \right) \langle x - 3.333333333333333 \rangle^2}{2EI} \\
&\quad + \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^2}{2} - \frac{B_v \langle x - 10 \rangle^2}{2} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x - \frac{35 \langle x - 3.333333333333333 \rangle^2}{2}}{EI} \\
w &= -\frac{5A_v \left( -\frac{EI}{EI_2} + 1 \right) \langle x - 3.333333333333333 \rangle^2}{3EI} - C_3 x + C_4 \\
&\quad - \frac{(A_v + 35) \left( -\frac{EI_2}{EI_3} + 1 \right) \langle x - 6.666666666666667 \rangle^3}{6EI_2} \\
&\quad - \frac{\left( \frac{20A_v}{3} + 116.6666666666667 \right) \left( -\frac{EI_2}{EI_3} + 1 \right) \langle x - 6.666666666666667 \rangle^2}{2EI_2} \\
&\quad - \frac{(A_v + 35) \left( -\frac{EI}{EI_2} + 1 \right) \langle x - 3.333333333333333 \rangle^3}{6EI} \\
&\quad - \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^3}{6} - \frac{B_v \langle x - 10 \rangle^3}{6} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} - \frac{35 \langle x - 3.333333333333333 \rangle^3}{6}}{EI}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} :$$

$$w = 0 : \quad C_4 = 0$$

$$M = 0 : \quad C_2 = 0$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{10} :$$

$$\begin{aligned} w = 0 : \quad & -\frac{74.0740740740741A_v \left(-\frac{EI}{EI_2} + 1\right)}{EI} - 10C_3 + C_4 - \frac{6.17283950617284(A_v + 35) \left(-\frac{EI_2}{EI_3} + 1\right)}{EI_2} \\ & - \frac{5.55555555555555 \cdot \left(\frac{20A_v}{3} + 116.666666666667\right) \left(-\frac{EI_2}{EI_3} + 1\right)}{EI_2} \\ & - \frac{49.3827160493827(A_v + 35) \left(-\frac{EI}{EI_2} + 1\right)}{EI} - \frac{-\frac{500A_v}{3} + \frac{500C_1}{3} + 50C_2 - 1728.39506172839}{EI} = 0 \\ M = 0 : \quad & -10A_v + 10C_1 + C_2 - 233.333333333333 = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{1}}{\infty} :$$

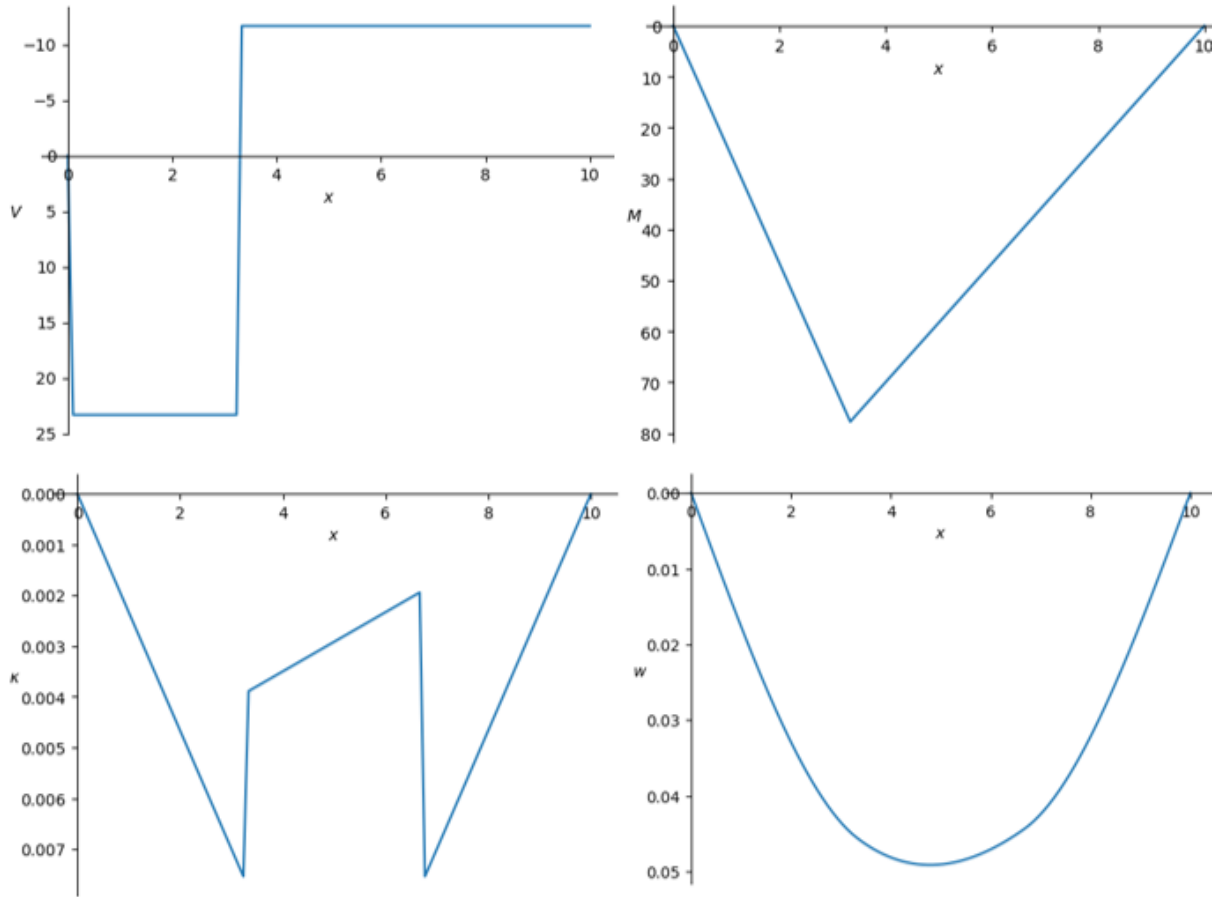
$$V = 0 : \quad C_1 = 0$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{10} + \frac{\mathbf{1}}{\infty} :$$

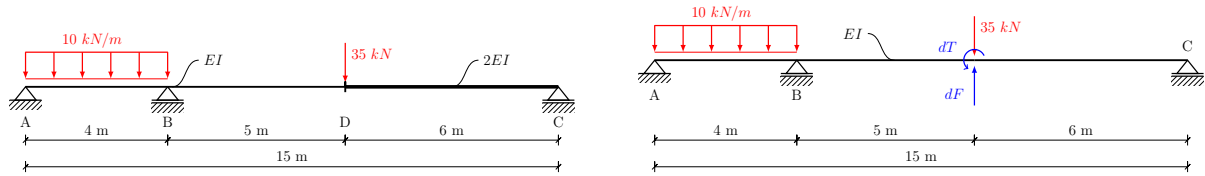
$$V = 0 : \quad -A_v - B_v + C_1 - 35 = 0$$

**Solution:**

$$\begin{aligned} A_v &= -23.3333333333333, \quad B_v = -11.6666666666667, \quad C_1 = 0.0, \quad C_2 = 0.0, \\ C_3 &= \frac{0.00411522633744856(-3500.0EIEI_2 - 24500.0EIEI_3 - 24500.0EI_2EI_3)}{EIEI_2EI_3}, \\ C_4 &= 0.0 \end{aligned}$$



## Voorbeeld 6



$$\begin{aligned}
 q_z &= A_v \langle x \rangle^{-1} + B_v \langle x-4 \rangle^{-1} + C_v \langle x-15 \rangle^{-1} + 10 \langle x \rangle^0 - 10 \langle x-4 \rangle^0 + 35 \langle x-9 \rangle^{-1} \\
 V &= -A_v \langle x \rangle^0 - B_v \langle x-4 \rangle^0 + C_1 - C_v \langle x-15 \rangle^0 - 10 \langle x \rangle^1 + 10 \langle x-4 \rangle^1 - 35 \langle x-9 \rangle^0 \\
 M &= -A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x-4 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - C_v \langle x-15 \rangle^1 - 5 \langle x \rangle^2 + 5 \langle x-4 \rangle^2 - 35 \langle x-9 \rangle^1 \\
 \kappa &= \frac{(A_v + B_v + 75) \langle x-9 \rangle^1}{2EI} + \frac{(9A_v + 5B_v + 280) \langle x-9 \rangle^0}{2EI} \\
 &\quad + \frac{-A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x-4 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - C_v \langle x-15 \rangle^1 - 5 \langle x \rangle^2 + 5 \langle x-4 \rangle^2 - 35 \langle x-9 \rangle^1}{EI} \\
 \phi &= C_3 + \frac{(A_v + B_v + 75) \langle x-9 \rangle^2}{4EI} + \frac{(9A_v + 5B_v + 280) \langle x-9 \rangle^1}{2EI} \\
 &\quad + \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^2}{2} - \frac{B_v \langle x-4 \rangle^2}{2} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x - \frac{C_v \langle x-15 \rangle^2}{2} - \frac{5 \langle x \rangle^3}{3} + \frac{5 \langle x-4 \rangle^3}{3} - \frac{35 \langle x-9 \rangle^2}{2}}{EI} \\
 w &= -C_3 x + C_4 - \frac{(A_v + B_v + 75) \langle x-9 \rangle^3}{12EI} - \frac{(9A_v + 5B_v + 280) \langle x-9 \rangle^2}{4EI} \\
 &\quad - \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^3}{6} - \frac{B_v \langle x-4 \rangle^3}{6} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} - \frac{C_v \langle x-15 \rangle^3}{6} - \frac{5 \langle x \rangle^4}{12} + \frac{5 \langle x-4 \rangle^4}{12} - \frac{35 \langle x-9 \rangle^3}{6}}{EI}
 \end{aligned}$$

$x = 0 :$

$$w = 0 : \quad C_4 = 0$$

$$M = 0 : \quad C_2 = 0$$

$x = 4 :$

$$w = 0 : \quad -4C_3 + C_4 - \frac{-\frac{32A_v}{3} + \frac{32C_1}{3} + 8C_2 - \frac{320}{3}}{EI} = 0$$

$x = 15 :$

$$w = 0 : \quad -15C_3 + C_4 - \frac{18(A_v + B_v + 75)}{EI} - \frac{9 \cdot (9A_v + 5B_v + 280)}{EI} - \frac{-\frac{1125A_v}{2} - \frac{1331B_v}{6} + \frac{1125C_1}{2} + \frac{225C_2}{2} - \frac{48760}{3}}{EI} = 0$$

$$M = 0 : \quad -15A_v - 11B_v + 15C_1 + C_2 - 730 = 0$$

$x = -\frac{1}{\infty} :$

$$V = 0 : \quad C_1 = 0$$

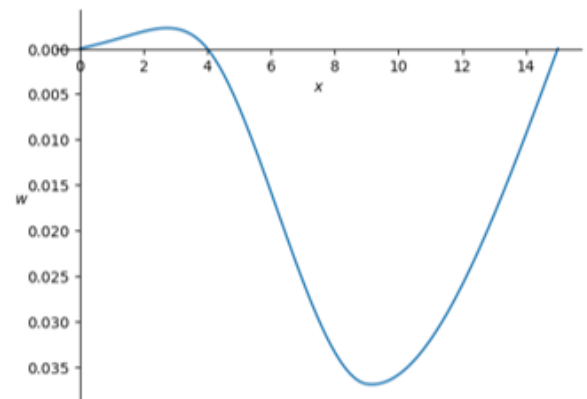
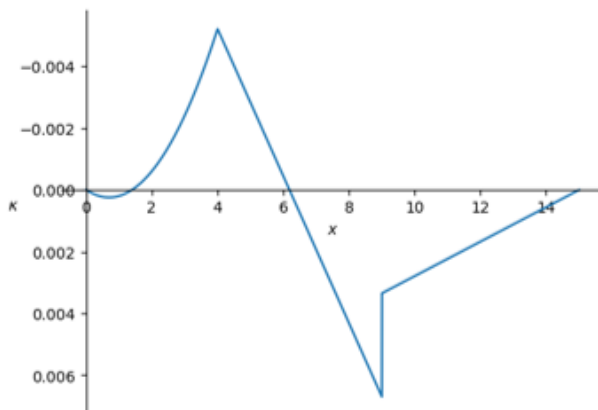
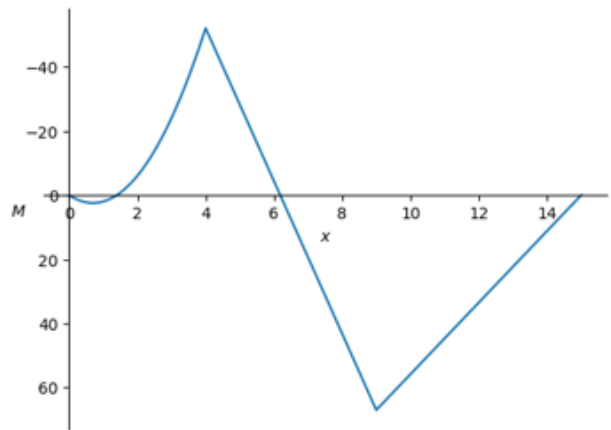
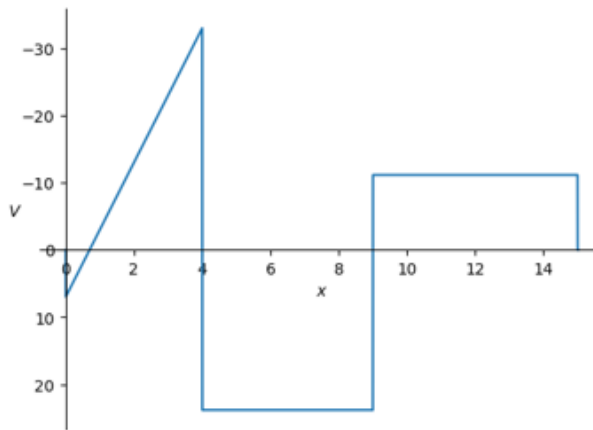
$x = 15 + \frac{1}{\infty} :$

$$V = 0 : \quad -A_v - B_v + C_1 - C_v - 75 = 0$$

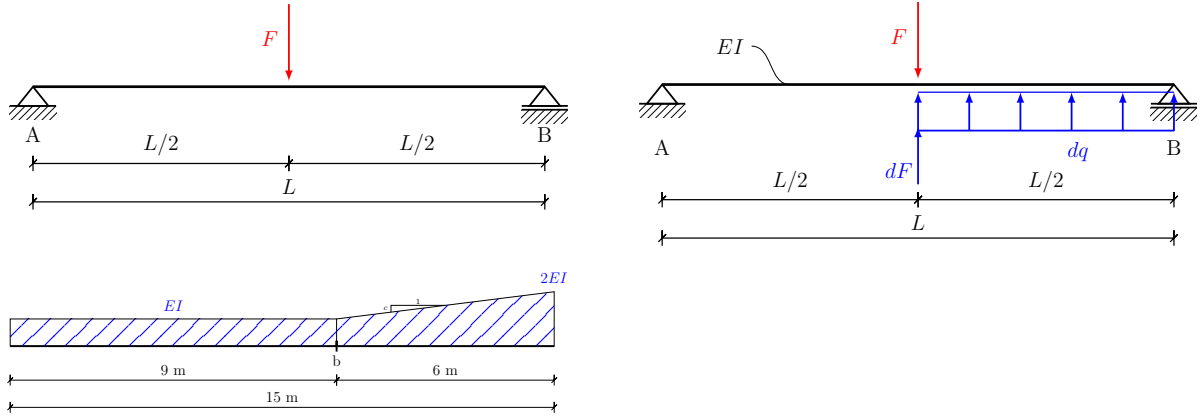
**Solution:**

$$A_v = -\frac{47605}{6828}, \quad B_v = -\frac{129405}{2276}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{41350}{5121EI}, \quad C_4 = 0,$$

$$C_v = -\frac{19070}{1707}$$



## Voorbeeld 7



$$\begin{aligned}
 q_z &= A_v \langle x \rangle^{-1} + B_v \langle x - 10 \rangle^{-1} + 35 \langle x - 5.0 \rangle^{-1} \\
 V &= -A_v \langle x \rangle^0 - B_v \langle x - 10 \rangle^0 + C_1 - 35 \langle x - 5.0 \rangle^0 \\
 M &= -A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - 35 \langle x - 5.0 \rangle^1 \\
 \kappa &= \frac{5A_v \left(1 - \frac{5}{x}\right) \langle x - 5 \rangle^0}{EI} + \frac{\left(1 - \frac{5}{x}\right) (A_v + 35) \langle x - 5 \rangle^1}{EI} \\
 &\quad + \frac{-A_v \langle x \rangle^1 - B_v \langle x - 10 \rangle^1 + C_1 x + C_2 - 35 \langle x - 5.0 \rangle^1}{EI} \\
 \phi &= \frac{5A_v (x - 5 \log(x) - 5 + 5 \log(5)) \langle x - 5 \rangle^0}{EI} + C_3 \\
 &\quad + \frac{(A_v + 35) \left(\frac{x^2}{2} - 10x + 25 \log(x) - 25 \log(5) + \frac{75}{2}\right) \langle x - 5 \rangle^0}{EI} \\
 &\quad + \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^2}{2} - \frac{B_v \langle x - 10 \rangle^2}{2} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x - \frac{35 \langle x - 5.0 \rangle^2}{2}}{EI} \\
 w &= -\frac{5A_v \left(\frac{x^2}{2} - 5x \log(x) + 5x \log(5) - \frac{25}{2}\right) \langle x - 5 \rangle^0}{EI} - C_3 x + C_4 \\
 &\quad - \frac{(A_v + 35) \left(\frac{x^3}{6} - 5x^2 + 25x \log(x) - 25x \log(5) + \frac{25x}{2} + \frac{125}{3}\right) \langle x - 5 \rangle^0}{EI} \\
 &\quad - \frac{-\frac{A_v \langle x \rangle^3}{6} - \frac{B_v \langle x - 10 \rangle^3}{6} + \frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} - \frac{35 \langle x - 5.0 \rangle^3}{6}}{EI}
 \end{aligned}$$

$x = 0 :$

$$w = 0 : \quad C_4 = 0$$

$$M = 0 : \quad C_2 = 0$$

$x = 10 :$

$$w = 0 : \quad -\frac{5A_v \left( -50 \log(10) + \frac{75}{2} + 50 \log(5) \right)}{EI} - 10C_3 + C_4$$

$$- \frac{(A_v + 35) \left( -250 \log(5) - \frac{500}{3} + 250 \log(10) \right)}{EI}$$

$$- \frac{-\frac{500A_v}{3} + \frac{500C_1}{3} + 50C_2 - 729.166666666667}{EI} = 0$$

$$M = 0 : \quad -10A_v + 10C_1 + C_2 - 175.0 = 0$$

$x = -\frac{1}{\infty} :$

$$V = 0 : \quad C_1 = 0$$

$x = 15 + \frac{1}{\infty} :$

$$V = 0 : \quad -A_v - B_v + C_1 - 35 = 0$$

**Solution:**

$$A_v = -17.5, \quad B_v = -17.5, \quad C_1 = 0.0, \quad C_2 = 0.0, \quad C_3 = -\frac{205.462116323286}{EI}, \quad C_4 = 0.0$$

