Rekurentní vztahy

Uvažujte rekurentní vztah $a_{n+2} + 4a_n = 25n$. a) Nalezněte řešení vyhovující podmínkám $a_0 = -1, a_1 = 5$. b) Spočtěte hodnoty a_{13}, a_{14}. Výsledky uvádějte vždy v reálném tvaru (tj. bez použití komplexních čísel) a vždy zcela přesné hodnoty!

Uvažujte rekurentní vztah $4a_n + 4a_{n+1} + a_{n+2} = 0$, kde $a_0 = 0, a_1 = -2$. a) Uvedený rekurentní vztah vyřešte. b) Nalezněte uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

V rekurentním vztahu $a_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n = 0$ určete konstanty B, C, jestliže víte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = K_1 + K_2 \cdot 7^n$ je obecné řešení.

Zprávy jsou přenášeny přes komunikační kanál pomocí dvou různých signálů – první signál trvá 2 µs a druhý 3 µs. Označme a_n počet všech různých zpráv trvajících právě *n* µs, které lze z daných signálů sestavit. a) Nalezněte rekurentní vztah pro a_n, včetně počátečních podmínek. b) Určete kolik existuje různých zpráv trvajících 16 µs. **Rekurentní vztah neřešte!**

Uvažujte rekurentní vztah $a_{n+2} + 2a_{n+1} + 4a_n + 8a_{n-1} = 0$, kde $a_0 = 2, a_1 = -4, a_2 = 0$. Nalezněte a) uzavřený, b) otevřený tvar obyčejné vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Vyřešte rekurentní vztah $a_{n+3} + 6a_{n+2} + 11a_{n+1} + 6a_n = 24n + 2$, kde $a_0 = 2, a_1 = -6, a_2 = 15$.

Uvažujte reálnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou rek. vztahem $a_{n+4} + 3a_{n+2} - 4a_n = 0$, kde $a_0 = 6, a_1 = 7, a_2 = -9, a_3 = -33$. a) Rekurentní vztah vyřešte. Výsledek musí obsahovat pouze reálná čísla. b) Určete hodnotu a_{14} (musí být ve tvaru celého čísla).

Určete řešení rekurentního vztahu $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 4a_n = 3n + 6$, pro které platí $a_0 = 3, a_1 = 4 + \sqrt{3}$.

Vyřešte rekurentní vztah $a_{n+3} + 4a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 24$, kde $a_0 = 6, a_1 = -9, a_2 = 35$.

Nalezněte řešení rekurentního vztahu $4a_{n+2} + a_n = 5$ vyhovující podmínkám $a_0 = 2, a_1 = 3$.

Označme $a_n,\ n \in N^+$ počet způsobů, jak vystoupat *n* schodů, jestliže používáte kroky následujících dvou typů. Typ A – postoupíte o 1 schod (tj. na bezprostředně následující), typ B – postoupíte o 2 schody. Určete rekurentní vztah a počáteční podmínky pro posloupnost a_n.

Označme a_n počet ternárních řetězců délky n, které neobsahují žádný z podřetězců 00, 11. a) Sestavte rekurentní vztah pro posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a definujte počáteční podmínky. b) Určete hodnotu a_6. Rekurentní vztah neřešte! (ternární = obsahuje symboly z abecedy $\{0,1,2\}$)

Nalezněte řešení rekurentního vztahu $2^{a_{n+2}} \cdot 2^{a_n} = 16 \cdot 4^{a_{n+1}}$, kde $a_0 = 2, a_1 = 4$. Po linearizaci zadaného rekurentního vztahu použijte metodu vytvořujících funkcí. Výsledný výraz pro a_n maximálně zjednodušte.

Označme a_n počet bitových řetězců délky n, které obsahují podřetězec 00. Určete rekurentní vztah pro posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ včetně počátečních podmínek. Rekurentní vztah neřešte!

Nalezněte řešení rekurentního vztahu $a_{n+2} \cdot a_n = e^4 \cdot a_{n+1}^2$, kde $a_0 = e, a_1 = e^2$, kde e je základ přirozeného logaritmu. Návod – rekurentní vztah nejprve linearizujte.

Nalezněte řešení rek. vztahu $a_{n+4} + 2a_{n+2} + a_n = 4n$, kde $a_0 = -3, a_1 = -2, a_2 = -3, a_3 = 6$. Řešení vyjádřete pouze pomocí reálných čísel.

Uvažujte posloupnost definovanou vztahy $a_{2n} = a_{2n+1} = n + 1$, kde $n \in N$. Nalezněte uzavřený tvar její vytvořující funkce.

Nalezněte řešení rek. vztahu $a_{n+3} + a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$, kde $a_0 = 2, a_1 = -2\ a_2 = 0$.

Vyřešte rekurentní vztah $a_{n+4} + 2a_{n+2} + a_n = 0$, kde $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2$. Následně spočtěte hodnotu a_{16}. Ve výsledcích používejte vždy reálná čísla.

Nalezněte řešení rek. vztahu $a_{n+3} + 3a_{n+2} - 4a_n = 0$ vyhovující podmínkám $a_0 = -1, a_1 = 6, a_2 = -2$.

Nalezněte řešení rekurentního vztahu $a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2$ vyhovující podmínkám $a_0 = 4, a_1 = {}^1/_2$.
(Návod – rekurentní vztah nejprve linearizujte.)

Označme $a_n, n \in N$ počet slov délky *n* nad ternární abecedou $A = \{0,1,2\}$, které neobsahují podřetězec 00 (tj. neobsahují dvě po sobě jdoucí nuly). Sestavte a vyřešte rekurentní vztah pro posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Vyřešte rekurentní vztah $a_{n+3} - 8a_n = 0$, kde $a_0 = a_1 = 3, a_2 = -6$. Dále určete hodnotu Δa_{14}.

Nalezněte řešení rekurentního vztahu $2a_{n+2} + 4a_{n+1} + 8a_n = 0$, kde $a_0 = 2, a_1 = 1$. Určete hodnoty a_{18}, a_{19}.

================================ diferenční rovnice ================================

Uvažujte diferenční rovnici $\Delta^{(2)} a_n + 2\Delta a_n = a_n$. a) Nalezněte řešení vyhovující podmínce $a_1 = 5\sqrt{2}$. b) Určete a_{10}.

Nalezněte reálnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, pro kterou platí – součet 2. diference v bodě n a 1. diference v bodě $n+1$ je roven $2n+3$, navíc $a_0 = 6, a_1 = 3$.

Nalezněte uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definované diferenční rovnicí
$\Delta^{(2)}\boldsymbol{a_n} + \Delta\boldsymbol{a_{n+1}} = 1$, kde $a_0 = 2;\ a_1 = 3$.
Výsledek zapište ve tvaru podílu dvou polynomů nejnižších stupňů! (diferenční rovnici není nutné řešit)

Nalezněte posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, pro kterou platí: součet její druhé diference v bodě $n+1$ a dvojnásobku druhé diference v bodě n je roven 12 a platí $a_0 = -1;\ a_1 = 6;\ a_2 = -1$.

<u>Metodou vytvořujících funkcí</u> vyřešte diferenční rovnici $\Delta^{(2)}\boldsymbol{a_n} + 2\Delta\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{a_n}$, kde $\boldsymbol{a_0 = 2, a_1 = 0}$. Řešení pomocí charakteristické rovnice nebude akceptováno, tj. bude hodnoceno 0 body.

Nalezněte posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, která vyhovuje diferenční rovnici $2\Delta^{(2)}a_{n+1} + 2\Delta a_{n+1} - \Delta a_n = 0$ s počátečními podmínkami $a_0 = 4, a_1 = 2 - 2\sqrt{2}, a_2 = 3$.

Nalezněte řešení diferenční rovnice $\Delta^{(2)}a_n + a_n = n + 1$ vyhovující podmínkám $a_0 = 2, a_1 = 1$. Dále určete ve tvaru redukovaného zlomku zcela exaktně hodnotu a_{23}.

================================ soustavy rek. vztahů ================================

Vyřešte soustavu rekurentních vztahů $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, $b_{n+1} = 3a_n$, kde $a_0 = 1, b_0 = 2a_0$.

Vyřešte soustavu rekurentních vztahů $a_{n+1} = 2a_n - b_n + 2$, $b_{n+1} = -a_n + 2b_n - 1$, kde $a_0 = 0, b_0 = 1$.

Uvažujte posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ definované soustavou rekurentních vztahů $a_{n+1} = -2a_n - 4b_n$, $b_{n+1} = 4a_n + 6b_n$, kde $a_0 = 1, b_0 = -2$. Nalezněte uzavřené tvary vytvořujících funkcí těchto posloupností.

Určete posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, pro které platí $\Delta a_n + 2 = 2b_n$, $\Delta b_n = a_n$, s počátečními podmínkami $b_0 = b_1 = 3$.