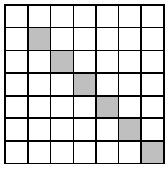
Elementární kombinatorika, rozklady, věžové polynomy, Pólyaova enumerační metoda

Určete počet permutací na množině $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ve kterých není <u>žádná sudá</u> cifra na svém místě.

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×10 umístit 5 nerozlišitelných věží tak, že právě 2 z nich se ohrožují.

Vstupné stojí 50 Kč. Před pokladnou stojí fronta 20 lidí, z nichž polovina má padesátikorunu a zbytek stokorunu. Určete pravděpodobnost toho, že pokladní bude schopen vrátit zpět, jestliže na počátku neměl v kase žádné peníze.

Určete, kolika různými způsoby lze na uvedenou šachovnici rozmístit 7 věží tak, aby se vzájemně neohrožovaly a nebyly umístěny na zakázaných políčkách.



Uvažujte pravidelný n-úhelník $(n \geq 4)$. Určete počet trojúhelníků tvořených vrcholy uvažovaného n-úhelníku, které mají vlastnost, že alespoň jedna jeho strana splývá se stranou daného n-úhelníku.

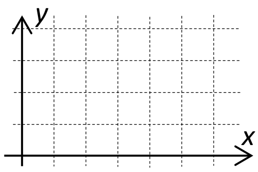
Určete, kolika způsoby lze rozdělit n^3 nerozlišitelných objektů do n rozlišitelných tříd, jestliže třída musí obsahovat méně než $n^3 - n$ objektů (může zůstat prázdná). Určete počet všech celočíselných řešení rovnice $\sum_{i=1}^{n} x_i = n^3$, kde $0 \leq x_i < n^3 - n$.

Uvažujte objekt, jehož symetrie tvoří grupu generovanou permutací $\pi = (35)(2164)$. Spočtěte: a) cycle index polynom; b) počet kolika způsoby lze uvažovaný objekt obarvit pomocí 5 barev.

Uvažujte čtvercovou síť s celočíselnými souřadnicemi, ve které se lze pohybovat pouze pomocí kroků typu A:[x,y]→[x+1,y] a B:[x,y]→[x,y+1]. Určete, kolika způsoby se lze dostat z bodu [0,0] do [14,14] tak, že poprvé překročíte diagonálu krokem z bodu [6,6] a ve zbývajícím úseku cesty se vrátíte na diagonálu až v bodě [14,14].

Nalezněte pravidelný n-úhelník (tj. určete n), u kterého je rozdíl počtu diagonál a počtu hran roven čtyřnásobku počtu hran.

Uvažujte čtvercovou síť, ve které se lze pohybovat pouze pomocí kroků typu A: [x,y]→[x+1,y] nebo B:[x,y]→[x,y+1]. Určete, kolika různými způsoby se lze dostat z bodu [0,0] do [11,11] tak, že nepřekročíte diagonálu a neprojdete žádným z bodů [5,5] nebo [8,8].



Uvažujte množinu $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Určete, kolika různými způsoby ji lze rozložit na podmnožiny.

Spočtěte, kolika různými způsoby lze rozdělit 24 nerozlišitelných předmětů mezi 3 různé ženy a 3 různé muže, jestliže musí platit: a) ženy dostanou dohromady dvakrát více předmětů než muži; b) každá osoba dostane alespoň 1 a nejvýše 6 předmětů.

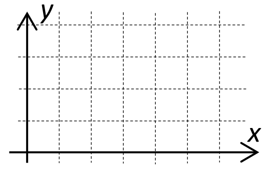
Uvažujte šachovnici 5×5, jejíž řádky jsou postupně označeny čísly 1, 3, 5, 7, 9 a sloupce čísly 2, 4, 6, 8, 10. Nyní každému políčku přiřadíme tzv. ohodnocení políčka, které definujeme jako číslo rovné součinu označení sloupce a řádku na jejichž průsečíku je dané políčko. Nyní lze každému rozmístění věží přiřadit tzv. ohodnocení rozmístění, které definujeme jako číslo rovné součinu ohodnocení políček, na nichž věže stojí. Spočtěte součet ohodnocení všech rozmístění 5 věží, kdy se věže neohrožují.

Určete, kolika různými způsoby lze obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu pomocí alespoň 3 různých barev, jestliže máte k dispozici 15 různých barev.

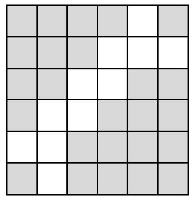
V rovině je dáno 15 různých bodů, z nichž žádné 3 neleží na přímce. Určete, kolik existuje uzavřených lomených čar o 6 vrcholech, jež jsou vybrány z daných 15 bodů.

V rovině je dáno *n* různých bodů, z nichž žádné 3 neleží na přímce. Určete, kolik existuje uzavřených lomených čar o *r* vrcholech ($3 \leq r \leq n$), jež jsou vybrány z daných *n* bodů.

Určete, kolika různými způsoby lze obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu pomocí $n \in N^+$ barev (k obarvení libovolné stěny lze použít libovolnou barvu bez ohledu na obarvení ostatních stěn).



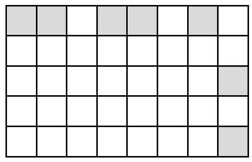
Uvažujte čtvercovou síť, ve které se lze pohybovat pomocí kroků následujících tří typů:
$A: [x, y] \rightarrow [x + 1, y], B: [x, y] \rightarrow [x, y + 1], C: [x, y] \rightarrow [x + 1, y + 1]$.
Určete, kolika různými způsoby se lze dostat z bodu [3,3] do [13,8].



Spočtěte kolika způsoby lze na danou šachovnici umístit alespoň dvě (nerozlišitelné) věže tak, že se neohrožují a stojí na bílých polích.

Určete počet celočíselných řešení diofantické rovnice $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 = 625$, kde $x_i \geq -4i$.

Uvažujte šachovnici z obrázku. Určete, kolika různými způsoby lze na tuto šachovnici rozmístit 5 nerozlišitelných věží tak, aby se vzájemně neohrožovaly, a právě jedna stála na šedém políčku.



Uvažujte množinu $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Určete, kolika různými způsoby ji lze rozložit na podmnožiny.

Určete počet celočíselných řešení soustavy $(x_1 + x_3 + x_5)^2 = 49, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 23$, kde $1 \leq x_i$.

Určete všechny možnosti, jak rozdělit 507 nerozlišitelných objektů do 13 nerozlišitelných skupin tak, aby počty prvků v jednotlivých skupinách tvořily rostoucí aritmetickou posloupnost.

Určete počet všech celočíselných řešení rovnice $\sum_{i=1}^{5} x_i = 125$, kde $2i \leq x_i < 125$.

Uvažujte šachovnici 10 × 10, která má právě 3 zakázaná políčka, přičemž každé leží v jiném řádku a jiném sloupci. Určete, kolika různými způsoby lze na tuto šachovnici rozmístit 10 nerozlišitelných věží tak, aby se vzájemně neohrožovaly a právě jedna stála na zakázaném políčku.

Spočtěte, kolika způsoby lze uspořádat různé objekty $\{a_1, \ldots, a_8\}$ tak, že právě polovina z nich zůstává na svém místě. Dále doplňte druhý řádek následující tabulky příslušnými hodnotami odpovídajícími prvnímu řádku.

C_{-10}^{5}	C_{-6}^{6}	C_{-4}^{8}	C_{-7}^{-7}	C_{8}^{-8}	$\bar{C}_{6}^{5}$	$\bar{C}_{6}^{7}$	$\bar{C}_{6}^{6}$	$\bar{A}_{3}^{4}$	$\bar{A}_{5}^{3}$	A_{5}^{4}	A_{4}^{5}

Uvažujte šachovnici 10 × 10, která má právě 3 zakázaná políčka, přičemž každé leží v jiném řádku a jiném sloupci. Určete, kolika různými způsoby lze na tuto šachovnici rozmístit maximální počet nerozlišitelných věží tak, aby se vzájemně neohrožovaly a nestály na zakázaných políčkách.

Určete počet celočíselných řešení rovnice $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = 143\ (= 11 \cdot 13)$, kde $1 \le x_i < 50;\ 0 \le y_i$.

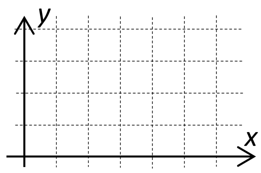
Určete nejmenší počet různých prvků n pro který platí – počet permutací na n-prvkové množině zapsaných ve tvaru součinu tří nebo čtyř disjunktních cyklů je alespoň 333.

Určete počet celočíselných řešení soustavy $x_1 + x_3 + x_5 \le 6, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 16$, kde $1 \le x_i$.

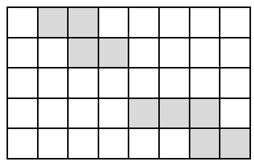
Uvažujte čtvercovou síť, ve které se lze pohybovat pomocí kroků následujících dvou typů:

$$A: [x, y] \to [x + 1, y + 1], B: [x, y] \to [x + 1, y - 1].$$

Určete, kolika různými způsoby se lze pomocí uvedených kroků dostat z bodu [0, 0] do bodu [16, 0] tak, že v žádném okamžiku cesty nebude $y < 0$.

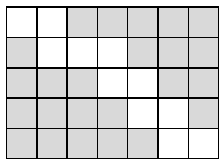


Určete, kolika různými způsoby lze na danou šachovnici rozmístit 5 věží tak, aby se neohrožovaly a nestály na zakázaných políčkách.



Určete, kolika různými způsoby lze rozložit množinu A, kde $|A| = 6$ $[|P(A)| = 64]$, na alespoň tři podmnožiny, které jsou neprázdné a po dvou disjunktní.

Sestavte věžový polynom pro zobrazenou šachovnici (zakázaná políčka jsou šedá).

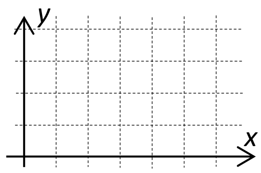


Určete, kolika různými způsoby lze rozložit šestiprvkovou množinu na alespoň tři podmnožiny, které jsou neprázdné a po dvou disjunktní.

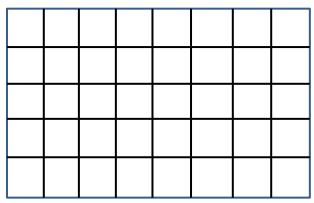
Uvažujte čtvercovou síť, ve které se lze pohybovat pomocí kroků následujících dvou typů:

$$A: [x, y] \to [x + 1, y], B: [x, y] \to [x, y + 1].$$

Určete, kolika různými způsoby se lze dostat z bodu [0,0] do [10,10] tak, že poprvé překročíte diagonálu v bodě [3,3], nebo [5,5].

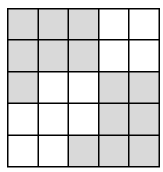


Kolik různých čtverců nebo obdélníků lze vybrat v následujícím schématu.



Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, jejichž cifry tvoří nerostoucí, nebo neklesající posloupnost.

Uvažujte šachovnici z následujícího obrázku. Určete, kolika různými způsoby lze na danou šachovnici rozmístit alespoň 2 nebo nejvýše 4 nerozlišitelné věže tak, že se neohrožují a stojí na přípustných (bílých) polích.



Definujte pojem rovinný graf (neorientovaný). Dále formulujte nutnou a postačující podmínku rovinnosti grafu (Kuratowského věta), **použité pojmy definujte!**

Uvažujte neorientovaný jednoduchý graf mající skóre $(5, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 3)$. Určete počet všech cest délky 2.

Určete počet celočíselných řešení soustavy$x_1 + x_3 + x_5 \le 6, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 16$, kde $1 \le x_i$.

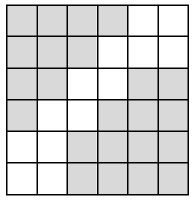
Určete součet všech šesticiferných čísel obsahujících třikrát cifru 2, dvakrát cifru 3 a jednou cifru 8.

Určete počet všech různých čtyřciferných přirozených čísel, jejichž cifry tvoří rostoucí, nebo klesající posloupnost.

Spočtěte $\sum_{n=4}^{8} \left\{ {n \atop 4} \right\}$, kde $\left\{ {n \atop k} \right\}$ označuje „Stirling subset number".

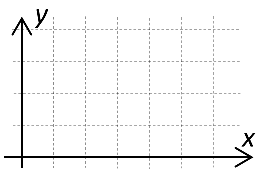
Určete kolika způsoby lze obarvit vrcholy grafu z následujícího obrázku pomocí pěti barev (tj. k obarvení kteréhokoliv vrcholu máte k dispozici libovolnou z pěti barev), jestliže uvažujete: a) 2D symetrie, b) 3D symetrie.

Určete nejmenší počet různých prvků n pro který platí – počet permutací na *n*-prvkové množině zapsaných ve tvaru součinu tří nebo čtyř disjunktních cyklů je alespoň 333.



Sestavte věžový polynom pro následující šachovnici.

Určete hodnotu $\sum_{n=2}^{10} \left\{ {n \atop 2} \right\}$, kde $\left\{ {n \atop k} \right\}$ označuje Stirlingovo číslo 2. druhu (Stirling subset number).



Uvažujte čtvercovou síť, ve které se lze pohybovat pouze pomocí kroků typu A: [x,y]→[x+1,y] nebo B:[x,y]→[x,y+1]. Určete, kolika různými způsoby se lze dostat z bodu [2,3] do [11,8], jestliže projdete bodem [5,5] nebo [8,6].

Určete počet celočíselných řešení diofantické rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, kde $-2 < x_1 \le 6;\ 3 \le x_2 < 9;\ 0 < x_3;\ 1 < x_4 < 7$.

Určete hodnotu $\sum_{i=0}^{7} \left\{ {7 \atop i} \right\}$.

Kolika různými způsoby lze na danou šachovnici rozmístit alespoň jednu věž, přičemž rozmístěné věže musí stát pouze na přípustných polích a nesmí se vzájemně ohrožovat. (přípustná pole jsou bílá)

Uvažujte **<u>šestiprvkový objekt</u>** se symetriemi popsanými grupou generovanou permutacemi $\pi = (3,1,5)(2,4,6,1)(6,3)(1,5)$. Spočtěte: a) Cycle index polynom; b) počet kolika způsoby lze uvažovaný objekt obarvit pomocí 3 barev.

Kolika způsoby lze rozdělit *m* předmětů do *r* rozlišitelných skupin (připouštíme i prázdné skupiny!), jestliže: a) předměty považujeme za rozlišitelné, b) předměty považujeme za nerozlišitelné.

Definujte pojem rovinný graf (neorientovaný). Dále formulujte nutnou a postačující podmínku rovinnosti grafu (Kuratowského věta).

Určete, kolika různými způsoby lze rozložit sedmiprvkovou množinu na nejvýše dvě nebo alespoň pět podmnožin, které jsou neprázdné a po dvou disjunktní.

Uvažujte šachovnici 6×9, která nemá zakázaná políčka a označme symbolem r_k počet všech různých rozmístění k nerozlišitelných věží na danou šachovnici tak, že se vzájemně neohrožují. Určete všechny hodnoty k, pro které je r_k maximální.

Určete počet celočíselných řešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, kde $-2 < x_1 \le 6;\ 3 \le x_2 < 9;$ $0 < x_3;\ 1 < x_4 < 7$.

Uvažujte graf zadaný maticí incidence $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. a) Sestavte jeho matici sousednosti. b) Určete počet všech kružnic v daném grafu.

Uvažujte šachovnici 7×8, která nemá zakázaná políčka. Spočtěte, kolika různými způsoby lze na danou šachovnici rozmístit 5 nerozlišitelných věží tak, aby neplatilo, že se neohrožují.

Spočtěte, kolika způsoby lze uspořádat různé objekty $\{a_1, \dots, a_8\}$ tak, že právě polovina z nich zůstává na svém místě. Dále doplňte druhý řádek následující tabulky příslušnými hodnotami odpovídajícími prvnímu řádku.

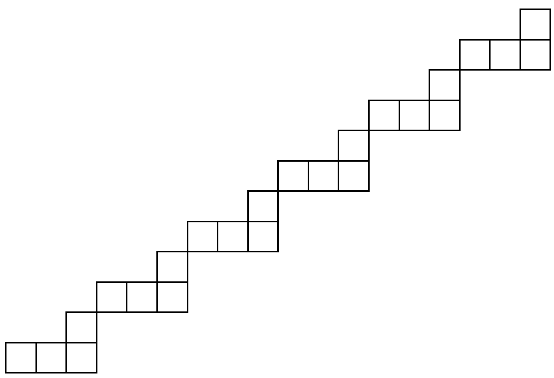
C^5_{-10}	C^6_{-6}	C^8_{-4}	C^{-7}_{-7}	C^{-8}_{8}	$\bar{C}^5_6$	$\bar{C}^7_6$	$\bar{C}^6_6$	$\bar{A}^4_3$	$\bar{A}^3_5$	A^4_5	A^5_4

Nalezněte všechna celočíselná řešení následující soustavy diofantických rovnic $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13,\ x_4 + x_5 + x_6 = 9$, kde $-2 \le x_1 < 4,\ 1 < x_2 \le 5, -3 < x_3 < 6, 3 < x_4 < 6,\ 0 \le x_5, x_6$.

Uvažujte šesti prvkový objekt, jehož symetrie tvoří grupu generovanou permutací $\pi = (134562)$. Spočtěte, kolika způsoby lze uvažovaný objekt obarvit: a) pomocí 3 barev, b) pomocí 5 barev.

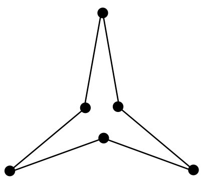
Určete maximální počet n prvků množiny A, která má vlastnost, že počet rozkladů této množiny na 2 neprázdné třídy je nejvýše roven 1 111 111.

Určete, kolika způsoby lze na danou šachovnici rozmístit 7 nerozlišitelných věží tak, aby se vzájemně neohrožovaly.



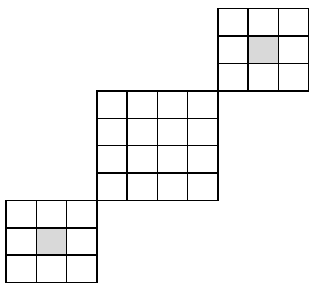
Určete, kolika způsoby lze vybrat 5 karet ze standardního souboru 52 karet tak, aby mezi vybranými byla zastoupena každá barva. Standardní soubor obsahuje 13 různých karet ve 4 barvách (♣, ♦, ♥, ♠).

Určete počet způsobů obarvení vrcholů grafu z následujícího obrázku pomocí tří barev, jestliže uvažujete: a) 2D symetrie, b) 3D symetrie.



Uvažujte permutace na n-prvkové množině, které lze zapsat pomocí právě dvou disjunktních cyklů. Určete nejmenší n takové, že uvažovaný počet permutací je roven alespoň 100 000.

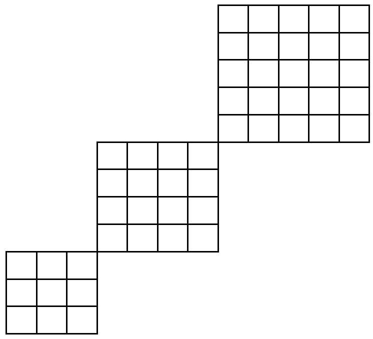
Určete, kolika způsoby lze na přípustná pole dané šachovnice rozmístit 9 nerozliši-telných věží tak, že se vzájemně neohrožují. Zakázaná políčka jsou šedá.



Uvažujte pravidelný pětiúhelník. Spočtěte, kolika různými způsoby lze obarvit jeho hrany, jestliže máte k dispozici 4 barvy a uvažujete jeho prostorové symetrie.

Určete nejmenší počet prvků množiny, která má vlastnost, že ji lze rozložit do právě tří neprázdných tříd rozkladu alespoň 5000 různými způsoby. Výpočet řádně zadokumentujte, nestačí pouhý výsledek.

Určete, kolika způsoby lze na danou šachovnici rozmístit 11 nerozlišitelných věží tak, že se vzájemně neohrožují.



Určete počet celočíselných řešení rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, kde $-2 < x_1 \leq 6;\ 3 \leq x_2 < 9;$ $0 < x_3;\ 1 < x_4 < 7$.

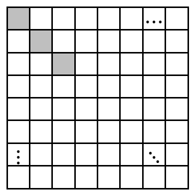
Určete, kolika způsoby lze na přípustná pole dané šachovnice rozmístit 5 věží tak, aby se žádné 2 neohrožovaly.

Vstupné stojí 50 Kč. Před pokladnou stojí fronta 20 lidí, z nichž polovina má padesátikorunu a zbytek stokorunu. Určete, kolika způsoby lze tuto frontu uspořádat tak, aby se nezastavila (tj. pokladní bude schopen vrátit zpět, jestliže na počátku neměl v kase žádné peníze).

Označme p_n , $n \in N$ počet palindromů nad abecedou $A = \{a, b, c\}$, ve kterých se všechny znaky abecedy vyskytují ve stejném počtu. Určete: a) vztah pro výpočet p_n, b) hodnotu p_{24}.
(palindrom je slovo, které se čte stejně zpředu, jako zezadu)

Označme n počet prvků množiny. Určete nejmenší n tak, že platí – počet rozkladů dané množiny na 2 neprázdné podmnožiny je alespoň desetkrát větší než počet rozkladů na $n - 1$ neprázdných podmnožin.

Určete, kolika různými způsoby lze na danou šachovnici o rozměru $n \times n$ rozmístit n nerozlišitelných věží tak, aby se vzájemně neohrožovaly a nestály na zakázaných (tj. na šedých) políčkách.



Určete počet permutací na 7 prvkové množině, které nelze zapsat ve tvaru 3 nebo 4 disjunktních cyklů.

Nalezněte počet celočíselných řešení rovnice $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3$, kde $0 < x_1 \leq 6, -8 \leq x_2 < -2$, $x_3 \leq 1, 3 < x_4, 2 \leq x_5 \leq 8$.

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×10 umístit 5 nerozlišitelných věží tak, že právě 2 z nich se ohrožují.

Určete počet celočíselných řešení rovnice $\left(\sum_{i=1}^{6} x_i\right)^7 = 2^{35}$, kde $0 \leq x_i < 2^4, i \in \{1, .., 6\}$.

Určete, kolika různými způsoby lze 4 různým osobám rozměnit částku 150 Kč pomocí mincí v hodnotách 10 Kč, 20 Kč, 50 Kč, jestliže: a) všechny osoby budou mít částku jinak rozměněnou; b) neklademe žádná omezení (tj. různé osoby mohou mít částku stejně rozměněnou).

Kolika různými způsoby lze na danou šachovnici rozmístit alespoň jednu věž, přičemž rozmístěné věže musí stát pouze na přípustných polích a nesmí se vzájemně ohrožovat. (přípustná pole jsou bílá)

Určete, kolika způsoby lze vybrat 5 karet ze standardního souboru 52 karet tak, aby mezi vybranými byla zastoupena každá barva. Standardní soubor obsahuje 13 různých karet ve 4 barvách (♣, ♦, ♥, ♠).

Uvažujte posloupnost definovanou vztahy $a_{2n} = a_{2n+1} = n + 1$, kde $n \in N$. Nalezněte uzavřený tvar její vytvořující funkce.

Určete, kolika způsoby lze rozdělit 20 nerozlišitelných objektů do 6 rozlišitelných skupin očíslovaných 1,…,6, jestliže sudé skupiny mohou zůstat prázdné, ale současně musí obsahovat méně prvků než odpovídá jejich číslu skupiny a zároveň liché skupiny obsahují více než $\frac{n+1}{2}$ objektů, kde n je číslo skupiny.

Nejprve definujte symbol „velké O“, tj. definujte, co znamená zápis $f(n) \in O\big(g(n)\big)$. Dále určete časovou složitost $f(n)$ algoritmu typu „divide and conquer“, který převádí řešení úlohu o velikosti n na 3 podúlohy o velikosti $\lfloor {}^{n}/_{3} \rfloor$, přičemž rozdělení na podúlohy a sestavení řešení původní úlohy z řešení podúloh vyžaduje konstantní počet kroků.

Uvažujte šestiprvkový objekt se symetriemi popsanými grupou generovanou permutacemi $\pi = (3,1,4,2)$, $\rho = (3,4)$. Spočtěte: a) Cycle index polynom; b) počet kolika způsoby lze uvažovaný objekt obarvit pomocí 3 barev.

Kolika způsoby lze rozdělit *m* předmětů do *r* rozlišitelných skupin (připouštíme i prázdné skupiny!), jestliže: a) předměty považujeme za rozlišitelné, b) předměty považujeme za nerozlišitelné.

Určete počet celočíselných řešení diofantické rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, kde $-2 < x_1 \leq 6;\ 3 \leq x_2 < 9;\ 0 < x_3;\ 1 < x_4 < 7$.

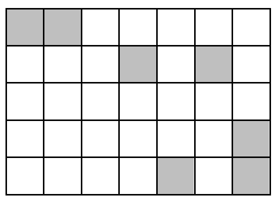
Určete, kolika různými způsoby lze rozsadit 9 osob k 5 kulatým nerozlišitelným stolům (tj. není podstatné, u kterého stolu osoba sedí, ale pouze s kým u stolu sedí), jestliže u každého stolu sedí alespoň jedna osoba. Úlohu řešte pro případy: a) Dvě rozsazení považujeme za různá, jestliže alespoň u jednoho stolu má alespoň jedna osoba různé sousedy. b) Dvě rozsazení považujeme za různá, jestliže alespoň u jednoho stolu spolu sedí různé osoby (tj. nepřihlížíme k rozsazení osob u stolu).
(Soused = osoba sedící u stejného stolu bezprostředně napravo, resp. nalevo.)

Uvažujte pravidelný pětiúhelník. Určete kolika různými způsoby lze obarvit jeho hrany, pomocí 5 barev, jestliže uvažujeme: a) 2D symetrie, b) 3D symetrie.

Spočtěte, kolika různými způsoby lze rozdělit 24 nerozlišitelných předmětů mezi 3 různé ženy a 3 různé muže, jestliže musí platit: a) ženy dostanou dohromady dvakrát více předmětů než muži; b) každá osoba dostane alespoň 1 a nejvýše 6 předmětů.

Uvažujte objekt, jehož symetrie tvoří grupu generovanou permutací $\pi = (1,7,4,6,3,5)$. Spočtěte: a) Cycle index polynom; b) počet kolika způsoby lze uvažovaný objekt obarvit pomocí 3 barev nebo 6 barev.

Určete kolika různými způsoby lze na danou šachovnici rozmístit maximální možný počet věží tak, že se neohrožují a nestojí na zakázaných (šedých) polích.

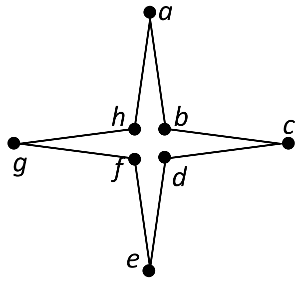


Kolika způsoby lze rozdělit *n* předmětů do *s* rozlišitelných skupin (připouštíme i prázdné skupiny!), jestliže: a) předměty považujeme za rozlišitelné, b) předměty považujeme za nerozlišitelné.

Určete kolik existuje permutací na 7 prvkové množině, která nelze zapsat ve tvaru 3 nebo 4 disjunktních cyklů.

Uvažujte čtvercovou sít nekonečnou ve všech směrech, ve které se lze pohybovat pomocí následujících čtyř typů kroků S:[x,y]→[x,y+1]; J:[x,y]→[x,y-1]; V:[x,y]→[x+1,y]; Z:[x,y]→[x-1,y]. Určete, kolika různými způsoby se lze pomocí 12 kroků dostat z bodu [0,0] do [3,5]. Žádná další omezení na cesty neklademe.

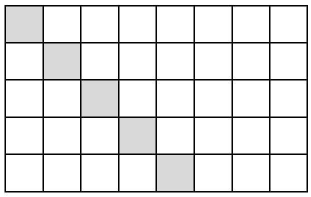
V rovině je dáno *n* různých bodů, z nichž žádné 3 neleží na přímce. Určete, kolik existuje uzavřených lomených čar o *r* vrcholech (3 ≤ *r* ≤ *n*), jež jsou vybrány z daných *n* bodů.



Určete kolika způsoby lze obarvit vrcholy grafu z následujícího obrázku pomocí pěti barev (tj. k obarvení kteréhokoliv vrcholu máte k dispozici libovolnou z pěti barev), jestliže uvažujete: a) 2D symetrie, b) 3D symetrie.

Uvažujte šachovnici 5×5, jejíž řádky jsou postupně označeny čísly 1, 3, 5, 7, 9 a sloupce čísly 2, 4, 6, 8, 10. Nyní každému políčku přiřadíme tzv. ohodnocení políčka, které definujeme jako číslo rovné součinu označení sloupce a řádku na jejichž průsečíku je dané políčko. Nyní lze každému rozmístění věží přiřadit tzv. ohodnocení rozmístění, které definujeme jako číslo rovné součinu ohodnocení políček, na nichž věže stojí. Spočtěte součet ohodnocení všech rozmístění 5 věží, kdy se věže neohrožují.

Spočtěte kolika způsoby lze na danou šachovnici rozmístit 5 tak, aby nestály na zakázaných polích (šedá pole) a vzájemně se neohrožovaly.



Uvažujte čtvercovou sít nekonečnou ve všech směrech, ve které se lze pohybovat pomocí následujících čtyř typů kroků S:[x,y]→[x,y+1]; J:[x,y]→[x,y-1]; V:[x,y]→[x+1,y]; Z:[x,y]→[x-1,y]. Určete, kolika různými způsoby se lze pomocí 12 kroků dostat z bodu [0,0] do [3,5]. Žádná další omezení na cesty neklademe.

Určete součet všech čtyřciferných čísel dělitelných 3, která obsahují cifry pouze z množiny $\{1,2,3,4,5,6\}$. Cifry se mohou opakovat.

Uvažujte (m, n) − šachovnici (skládá se z *m* horizontál/řádků a *n* vertikál/sloupců) a tzv. $(2,1)$ −koně, což je figura, která se může v jednom tahu přemístit o 2 pole v horizontálním směru (tj. buď o 2 pole na východ, nebo o 2 pole na západ) a současně o 1 pole ve vertikálním směru (tj. buď o 1 pole na sever, nebo o 1 pole na jih). Spočtěte, kolika způsoby lze na danou šachovnici umístit bílého a černého koně tak, aby se vzájemně neohrožovaly.

Určete počet celočíselných řešení rovnice$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = 77(= 7 \cdot 11)$, kde $1 \le x_i \le 10;\ 0 \le y_i$.

Uvažujte objekt, jehož symetrie tvoří grupu generovanou permutací $\pi = (35)(2164)$. Spočtěte: a) Cycle index polynom; b) počet kolika způsoby lze uvažovaný objekt obarvit pomocí 3 barev nebo 5 barev.

Sestavte věžový polynom pro následující šachovnici

Nalezněte počet celočíselných řešení diofantické rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13$, kde

$$2 < x_1 \le 7, -1 \le x_2 < 6, -3 < x_3, 0 < x_4 \le 6, -1 < x_5$$

Určete kolik existuje různých permutací na šesti prvkové množině, které lze zapsat ve tvaru součinu nejvýše tří disjunktních cyklů.

Určete počet celočíselných řešení diofantické rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, kde $-2 < x_1 \leq 6;\ 3 \leq x_2 < 9;$ $0 < x_3;\ 1 < x_4 < 7$.

Nalezněte pravidelný *n*-úhelník (tj. určete *n*), u kterého je rozdíl počtu diagonál a počtu hran roven čtyřnásobku počtu hran.

Určete všechny možnosti, jak rozdělit 96 nerozlišitelných objektů do 6 nerozlišitelných a neprázdných skupin tak, aby počty prvků v jednotlivých skupinách tvořily aritmetickou posloupnost.

Uvažujte objekt, jehož symetrie tvoří grupu generovanou permutací $\pi = (134562)$. Spočtěte, kolika způsoby lze uvažovaný objekt obarvit: a) pomocí 3 barev, b) pomocí 5 barev.

Uvažujte pravidelný patnáctiúhelník. Určete počet trojúhelníků tvořených vrcholy uvažovaného patnácti-úhelníku, které mají vlastnost, že jeho strany nesplývají se stranami uvažovaného patnáctiúhelníku.

Vstupné do kina stojí 100 Kč. Před pokladnou stojí fronta 12 lidí – 6 z nich má stokorunu a šest dvousetkorunu. Určete, kolika způsoby lze tuto frontu uspořádat tak, aby se nezastavila, tj. pokladní je schopen vrátit zpět, jestliže na počátku neměl v kase žádné peníze.

Uvažujte pravidelný *n*-úhelník. Určete počet trojúhelníků tvořených vrcholy uvažovaného *n*-úhelníku, které mají vlastnost, že jeho strany nesplývají se stranami uvažovaného *n*-úhelníku. **<u>Svůj závěr řádně argumentačně podpořte, tj. nestačí uvést vzorec!</u>**

Uvažujte algoritmus pro generování kombinací $C_n^k, k = 0,1, \dots, n$. a) Pro $k = 4, n = 6$ vygenerujte osmou, jedenáctou a třináctou kombinaci. b) Pro $k = 7, n = 15$ vygenerujte 6 po sobě jdoucích kombinací následu-jících kombinaci $\{3,4,6,10,12,14,15\}$.

Nerozlišitelné objekty mají být rozděleny do 5 rozlišitelných skupin, přičemž požadujeme, aby v každé skupině byly alespoň 2 objekty. Sestavte pro tuto úlohu uzavřený tvar vytvořující funkce.

Uvažujte objekt, jehož symetrie tvoří grupu generovanou permutací $\pi = (135)(264)$. Spočtěte, kolika způsoby lze uvažovaný objekt obarvit pomocí právě dvou barev, z nichž každou použijete v polovině případů.

Uvažujte neorientovaný graf $G_n = (V_n, H_n)$, $n \in N^+$, kde $V_n = \{a, u_1, u_2, \dots, u_n, b\}$ zadaný maticí sousednosti $M_{G_n} = \left(m_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n+2}$ tvaru $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Určete počet koster t_n grafu G_n.

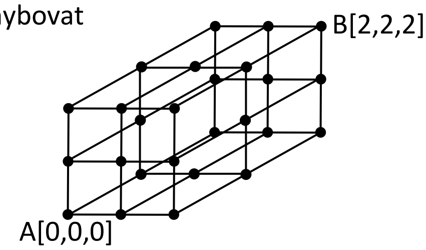
Uvažujte trojboký hranol, jehož všechny hrany mají stejnou délku. Určete, kolika různými způsoby lze obarvit jeho vrcholy, jestliže: a) máte k dispozici 5 různých barev (které používáte bez omezení), b) použijete pouze bílou nebo černou barvu a bílou použijete alespoň 3-krát.

Nalezněte všechna celočíselná řešení následující soustavy diofantických rovnic $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$, $x_4 + x_5 + x_6 = 9$, kde $-2 \leq x_1 < 4,\ 1 < x_2 \leq 5, -3 < x_3 < 6, 3 < x_4 < 6,\ 0 \leq x_5, x_6$.

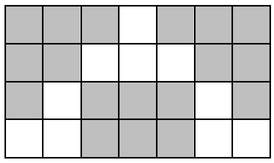
Určete, kolika různými způsoby lze rozložit sedmi prvkovou množinu na dvě nebo tři podmnožiny, které jsou neprázdné a po dvou disjunktní.

Uvažujte graf znázorněný na následujícím obrázku, ve kterém se můžete pohybovat pouze pomocí kroků následujících typů:

α_x: $[x, y, z] \rightarrow [x + 1, y, z]$,
α_y: $[x, y, z] \rightarrow [x, y + 1, z]$,
α_z: $[x, y, z] \rightarrow [x, y, z + 1]$.
Určete, kolik existuje různých cest z bodu A: $[0,0,0]$ do B: $[2,2,2]$.



Sestavte věžový polynom pro šachovnici z následujícího obrázku. (Zakázaná políčka jsou šedá.)



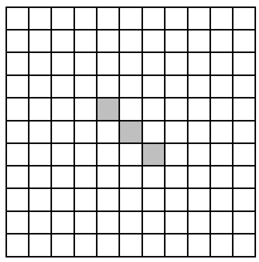
Nakreslete grafy následujících funkcí: a) $\left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor$, b) $2\{x\} - 1$. Každý z grafů nakreslete do samostatného obrázku o dostatečné velikosti a s dostatečně velkým měřítkem i rozsahem hodnot *x*. Řádně označte „krajní“ body nespojitosti (kam patří).

Určete počet permutací na množině $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ve kterých není žádná sudá cifra na svém místě.

Určete kolik existuje různých permutací na sedmi prvkové množině, které lze zapsat ve tvaru součinu tří disjunktních cyklů.

Uvažujte úplný bipartitní graf $K_{m,n}$, kde $m, n \in N^+$. Určete jaké délky kružnic lze v daném grafu nalézt a které délky nikoliv. **Své tvrzení řádně podložte argumenty.**

Určete, kolika různými způsoby lze na danou šachovnici (rozměr 11 × 11) rozmístit 11 nerozlišitelných věží tak, aby se vzájemně neohrožovaly a nestály na zakázaných (tj. na šedých) políčkách.

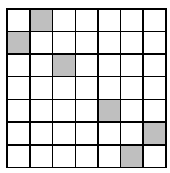


Nechť $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{10}$, kde $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & (i \leq 5 \ \wedge j \leq 5) \vee (i > 5 \ \wedge j > 5) \\ 1 & jinde \end{cases}$ je matice sousednosti grafu. Určete počet všech cest maximální délky.

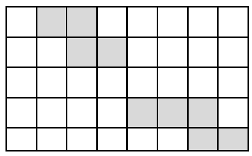
Nalezněte všechna řešení rovnice $x^4 = \sum_{i=0}^{20} C_{20}^{i} \cdot 3^{i-20}$.

Určete počet všech kružnic v grafu: a) $K_{3,10}$ b) $K_{3,n}$, kde $n \geq 3$.

Určete, kolika různými způsoby lze na uvedenou šachovnici rozmístit 7 věží tak, aby se vzájemně neohrožovaly a nebyly umístěny na zakázaných políčkách.



Určete, kolika různými způsoby lze na danou šachovnici rozmístit 5 věží tak, aby se neohrožovaly a nestály na zakázaných políčkách.



Určete počet celočíselných řešení diofantické rovnice $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, kde $-2 < x_1 \leq 6$; $3 \leq x_2 < 9$; $0 < x_3$; $1 < x_4 < 7$.

Kolika různými způsoby lze z urny obsahující 6 koulí bílých, 10 červených a 7 zelených náhodně vybrat 8 koulí tak, že mezi vytaženými je alespoň 5 koulí zelených. Koule téže barvy považujeme za nerozlišitelné.

Určete, kolika různými způsoby lze rozložit šestiprvkovou množinu na alespoň tři podmnožiny, které jsou neprázdné a po dvou disjunktní.

Slovo $\left(a_{i_1} \dots a_{i_k}\right)$ nad abecedou $\{a, b, c, d\}$ nazveme palindromem, jestliže $\forall(1 \leq j \leq k)\ a_{i_j} = a_{i_{k-j+1}}$. Určete počet palindromů délky: a) $k = 7$, b) $k = 10$.