Vytvořující funkce

Funkce $f(x)$ je vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Nalezněte vytvořující funkci $g(x)$ posloupnosti $\{(2n+3)a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Uvažujte posloupnost $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde $a_k = k^2 \cdot C_n^k$ a n je pevně dané kladné přirozené číslo. a) Určete uzavřený tvar vytvořující funkce uvažované posloupnosti. b) Určete hodnotu součtu $\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Uvažujte rozvinutý tvar výrazu $\left(2x^2y - 3z\sqrt{x} - 5xyz + z^2y\right)^5$. Určete všechny členy obsahující výraz x^6.

Určete koeficient (**ve tvaru zlomku, nikoliv desetinného čísla**) u nejmenší mocniny x větší než 3 v rozvoji $\sqrt[3]{1-3\sqrt{x}}$.

Uvažujte rozvinutý tvar vytvořující funkce $f(x) = \sqrt[4]{256+192x^2}$. Určete koeficient u členů: a) x^7, b) x^8. **V obou případech zapište výsledek ve tvaru redukovaného zlomku!**

Označme c_n počet, kolika různými způsoby lze obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu pomocí nejvýše dvou různých barev, jestliže máte k dispozici n různých barev. Nalezněte uzavřený tvar obyčejné vytvořující funkce posloupnosti $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Uvažujte posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mající vytvořující funkcí $f(x) = \frac{3-8x}{(3x-2)(1-5x)}$. Určete a_n.

Nalezněte uzavřený tvar obyčejné vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definované rekurentním vztahem $a_{n+2} + 2a_{n+1} + 4a_n + 8a_{n-1} = 0$, kde $a_2 = 2a_1, a_1 = 2a_0, a_0 = 1$. (Rekurentní vztah není třeba řešit!)

Uvažujme graf $G_n = (V_n, H_n), n \in N$, kde $V_n = (\{u_1, u_2, u_3\} \cup V) \wedge (|V| = n) \wedge (V \cap \{u_1, u_2, u_3\}) = \emptyset$ a $H_n = \{\{u_i, v\} | i = 1,2,3 \ \wedge \ v \in V\}$. Určete uzavřený tvar obyčejné vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = \sum_{v \in V_n} d(v)$.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná obyčejnou vytvořující funkcí $f(x) = {}^{(4-x)}\!\big/_{(x-2)^2}$. Určete hodnotu členu a_{14} zapsanou ve tvaru redukovaného zlomku.

Nalezněte uzavřený tvar obyčejné vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot (n-k)$.

Označme $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost, kde p_n je počet kružnic maximální délky v grafu $G_n = (V_n, H_n), n \in N$ definovaném maticí sousednosti $A_n = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n+3}$, kde $a_{ij} = \begin{cases} 0 & (1 \leq i,j \leq 3) \vee (i,j \geq 4) \\ 1 & \text{jinde} \end{cases}$.
Určete: a) $\sum_{v \in V_n} d(v)$, b) otevřený tvar vytvořující funkce posloupnosti $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Uvažujte rozvinutý tvar vytvořující funkce $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$. Určete koeficient u členu: a) x^6, b) x^7.

Označme T_n strom mající n vrcholů a t_n počet všech cest, které v T_n existují. Označme dále $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$. Nalezněte: a) otevřený tvar $f(x)$, b) uzavřený tvar $f(x)$.

Uvažujte rozvinutý tvar vytvořující funkce $f(x) = \frac{2-\sqrt{4+6x^2}}{2x}$ a určete koeficienty u členů obsahujících: a) x^8, b) x^9.

Nalezněte uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definované diferenční rovnicí
$\Delta^{(2)} a_{\boldsymbol{n}} + \Delta a_{\boldsymbol{n+1}} = 1$, kde $a_0 = 2;\ a_1 = 3$.
Výsledek zapište ve tvaru podílu dvou polynomů nejnižších stupňů! (diferenční rovnici není nutné řešit)

Určete koeficient u členu x^8 v rozvinutém tvaru obyčejné vytvořující funkce $\sqrt[3]{8+6x^2}$. Výsledek zapište ve tvaru redukovaného zlomku!

Uvažujte rekurentní vztah $4a_n + 4a_{n+1} + a_{n+2} = 0$, kde $a_0 = 0, a_1 = -2$. a) Uvedený rekurentní vztah vyřešte.
b) Nalezněte uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Uvažujte reálnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mající vytvořující funkcí $f(x) = \cos(2x)$. Určete:
a) hodnoty členů a_0, a_1, a_2, a_3 ; b) a_n.

Označme $k_n, n \in N$ počet všech kružnic v úplném bipartitním grafu $K_{3,n+3}$, které mají délku 6. Označme $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$. Nalezněte: a) otevřený tvar $f(x)$, b) uzavřený tvar $f(x)$.

Nalezněte uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definované diferenční rovnicí
$\Delta^{(2)} a_{\boldsymbol{n}} + \Delta a_{\boldsymbol{n+1}} = 1$, kde $a_0 = 2;\ a_1 = 3$.
Výsledek zapište ve tvaru podílu dvou polynomů nejnižších stupňů! (diferenční rovnici není nutné řešit)

Uvažujte rozvinutý tvar výrazu $\left(2x^2y - 3z\sqrt{x} + z^2y\right)^5$. Určete všechny členy, které obsahují výraz x^4.

Uvažujte posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ definované soustavou rekurentních vztahů $a_{n+1} = -2a_n - 4b_n,\ b_{n+1} = 4a_n + 6b_n$, kde $a_0 = 1, b_0 = -2$. Nalezněte uzavřené tvary vytvořujících funkcí těchto posloupností.

Označte h_n počet hran úplného grafu K_n o n vrcholech (dodefinujeme $h_0 = 0$). Nalezněte uzavřený tvar obyčejné vytvořující funkce $f(x)$ posloupnosti $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Označme $k_n, n \in N$ počet všech kružnic v úplném bipartitním grafu $K_{3,n+3}$, které mají délku 4. Označme $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$. Nalezněte: a) otevřený tvar $f(x)$, b) uzavřený tvar $f(x)$.

Určete koeficient u členu y^{13} v rozvoji $\left(1 - \sqrt{1 + 5y^3}\right) / y^2$.

Uvažujte posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou obyč. vytvořující funkcí $f(x) = \frac{2}{x^3+6x^2+11x+6}$. Určete a_n.

Uvažujte obyčejnou vytvořující funkci $f(x) = \frac{18-6x}{4x^2-12x+9}$. Určete příslušnou posloupnost.

Nalezněte uzavřený tvar obyčejné vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = (n-2)(n+2)$. Výsledný výraz uveďte ve tvaru z jednou zlomkovou čarou, kde čitatel i jmenovatel budou polynomy v rozvinutém tvaru.

Nalezněte uzavřený tvar obyčejné vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = (2n-3)(2n+3)$. Výsledný výraz uveďte ve tvaru z jednou zlomkovou čarou, kde čitatel i jmenovatel budou polynomy v rozvinutém tvaru.

Určete koeficient (**<u>ve tvaru zlomku, nikoliv desetinného čísla</u>**) u členu obsahujícího x^{12} v rozvoji $\sqrt[3]{1+3x^2}$.

Uvažujte posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou rekurentním vztahem $4a_n + 4a_{n+1} + a_{n+2} = 0$, kde $a_0 = 0, a_1 = -2$. Nalezněte uzavřený tvar obyčejné vytvořující funkce uvažované posloupnosti.

Uvažujte posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou rekurentním vztahem $4a_n + 4a_{n+1} + a_{n+2} = 0$, kde $a_0 = 0, a_1 = -2$. Nalezněte uzavřený tvar obyčejné vytvořující funkce uvažované posloupnosti.

Určete koeficient (**<u>ve tvaru zlomku, nikoliv desetinného čísla!</u>**) u členu obsahujícího x^5 v rozvoji $\sqrt[3]{8-3x}$.

Nalezněte uzavřený tvar obyčejné vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = (-2)^n / (n+1)$.

<u>Metodou vytvořujících funkcí</u> vyřešte diferenční rovnici $\Delta^{(2)} a_n + 2\Delta a_n = a_n$, kde $a_0 = 2, a_1 = 0$. Řešení pomocí charakteristické rovnice nebude akceptováno, tj. bude hodnoceno 0 body.

Nalezněte uzavřený tvar obyčejné vytvořující funkce posloupnosti$(-1)^n n^2$.

Uvažujte obyčejnou vytvořující funkci $f(x) = \frac{3-6x}{1-6x+9x^2}$. Určete příslušnou posloupnost.

Uvažujte obyčejnou vytvořující funkci $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x^2-2x+1}$. Určete příslušnou posloupnost.

Označme $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a symbolem $h(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{n^2 a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Vyjádřete funkci $h(x)$ pomocí funkce $f(x)$.

Uvažujte funkci $f(x) = (1-3x)^{13}$. a) Určete posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mající obyčejnou vytvořující funkci $f(x)$. b) Určete posloupnost $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ mající exponenciální vytvořující funkci $f(x)$.

Nalezněte řešení rekurentního vztahu $2^{a_{n+2}} \cdot 2^{a_n} = 16 \cdot 4^{a_{n+1}}$, kde $a_0 = 2, a_1 = 4$. Po linearizaci zadaného rekurentního vztahu použijte **metodu vytvořujících funkcí (jiný postup nebude akceptován). Výsledný výraz pro a_n maximálně zjednodušte**.

Uvažujte výraz $\left[\left(2\sqrt{x} - y^2\right)^4 - \left(2\sqrt{x} - y^2\right)^3\right]^3$. a) Určete koeficient u členu $x^3 y^{10}$ v rozvoji daného výrazu. b) Určete součet všech koeficientu v rozvoji daného výrazu.

Určete uzavřený tvar **exponenciální** vytvořující funkce pro: a) variace bez opakování, b) posloupnost variací n-té třídy s opakováním ze dvou druhů prvků.

Nalezněte uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_{2n} = 0, a_{2n+1} = {}^{1}/_{(2n+1)}, n \in N$.

Uvažujte výraz $\left[(2a)^2 - \sqrt{b} + 3c^3 - {}^{d}/_{2}\right]^{12}$. Určete koeficient u členu: a) $a^4 b^2 c^9 d^3$; b) $a^4 b c^9 d^4$. Výsledné koeficienty uvádějte v redukovaném tvaru!

Uvažujte posloupnost definovanou vztahy $a_{2n} = a_{2n+1} = n+1$, kde $n \in N$. Nalezněte uzavřený tvar její vytvořující funkce.

Určete koeficient u členu x^8 v rozvinutém tvaru vytvořující funkce $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+x}}{x}$.

Uvažujte reálnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mající vytvořující funkcí $f(x) = \sin(3x) + \cos(3x)$. Určete explicitní výraz pro a_n.

Určete uzavřený tvar vytvořující funkce $f(x)$ posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = (n+1)(-2)^n$.

Uvažujte obyčejnou vytvořující funkci $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$. Určete koeficient u členu obsahujícího x^{15}

Uvažujte **exponenciální** vytvořující funkci $f(x) = e^{2x}$. a) Určete posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou touto vytvořující funkcí. b) Určete posloupnost $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou exponenciální vytvořující funkcí $\frac{df}{dx}$.

Určete posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou vytvořující funkcí $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{6x^3-19x^2+19x-6}$. Určete a_n.

Uvažujte reálnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mající vytvořující funkcí $f(x) = 5 \cdot \sin(\pi + 3x)$. Určete:
a) hodnoty členů $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$; b) a_n. **Výsledky vyjádřete ve tvaru zlomků v redukovaném tvaru!**

Uvažujte posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanou vytvořující funkcí $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+2x+1}$. Nalezněte rozvinutý tvar vytvořující funkce a určete výraz pro a_n.

Určete koeficient u x^5 v rozvoji $(1+x^2)^5 \cdot \sqrt[3]{1-3x}$. Výsledek zapište ve tvaru redukovaného zlomku (každý jiný tvar je hodnocen maximálně 1 bodem).

Nalezněte uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{1+(-1)^{n+1}}{2n}, & n \in N^+ \end{cases}$.

(Doporučení – nejprve vypište několik členů posloupnosti.)

Určete uzavřené tvary $f(x), g(x)$ vytvořujících funkcí posloupností $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ definované soustavou rekurentních vztahů $a_n = 2b_{n-1} + a_{n-2}, b_n = a_{n-1} + b_{n-2}$, kde $a_0 = 1, a_1 = 0, b_0 = 0, b_1 = 1$. **Soustavu neřešte, rozvinutý tvar uvedených vytvořujících funkcí nehledejte!**

Označme $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde $a_k = \sum_{i=0}^{k} i^2$. Nalezněte: a) uzavřený tvar $f(x)$, b) rozvinutý tvar $f(x)$. Oba výsledky zapište ve tvaru jednoho zlomku v redukovaném tvaru, nikoliv ve tvaru součtu!

Nalezněte uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnosti$(-1)^n n^2$.

Nalezněte uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnosti $\left\{\frac{2^n}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Nalezněte uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, kde $a_k = 2^k C_n^k, n \in N^+$. Dále spočtěte hodnotu $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k$

Nalezněte posloupnost definovanou vytvořující funkcí $f(x) = \frac{32+20x}{4-x^2}$.

Uvažujte rozvoj výrazu $(2x^3 - 3xy^2 + z^2)^8$. Určete koeficienty u členů obsahujících x^{11}.

Uvažujte vytvořující funkci $f(x) = \frac{1-\sqrt{1+2x}}{x}$ posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Vypočtěte a_{10}. **<u>Výslednou hodnotu vyjádřete ve tvaru redukovaného zlomku, nikoliv pomocí desetinného čísla!</u>**

Určete uzavřený tvar vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = \sum_{i=0}^{n} i \cdot 2^{n-i}$.

Nerozlišitelné objekty mají být rozděleny do 5 rozlišitelných skupin, přičemž požadujeme, aby v každé skupině byly alespoň 2 objekty. Sestavte pro tuto úlohu uzavřený tvar vytvořující funkce.

Vypište všechny členy obsahující x^{14} obsažené v rozvoji výrazu $(3x + 2y)^4(3z - 5x^3 + y)^7$.

Určete koeficient u členu x^5 v rozvinutém tvaru vytvořující funkce $f(x) = \frac{x^3-2x}{\sqrt{9-4x^2}}$.

Určete koeficient u členu obsahujícího x^{11} v rozvoji $\left(2x^3 - \sqrt{3}xy^2 + 5z^2\right)^6$.

Označme $f(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = \sum_{i=0}^{n} i$. Nalezněte její uzavřený tvar.

Určete uzavřený tvar vytvořující funkce $f(x)$ posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = n^2(-2)^n$.

Uvažujte reálnou posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mající vytvořující funkcí $f(x) = e^{-3x+2}$. Určete:
a) hodnoty členů a_0, a_1, a_2 ; b) a_n.

Určete koeficient (**<u>ve tvaru zlomku, nikoliv desetinného čísla</u>**) u členu obsahujícího x^5 v rozvoji $\sqrt{1+3x}$.