přednáška 12

- Kalmanův filtr

Model signálu

Opět lineární model

$$x[n] = s[n] + w[n]$$

Kde $s[n]$ je signál, který chceme odhadovat a $w[n]$ je WGN s rozptylem σ_n^2.

MVU odhad je $\hat{s}[n] = x[n]$, ale $var(\hat{s}[n]) = \sigma^2$.

Pokud nad $x[n]$ uvažujeme jako nad realizací náhodného procesu, pak dává smysl uvažovat korelaci mezi vzorky, která může být zachycena např. pomocí Gaussova-Markovova procesu první řádu

$$s[n] = as[n-1] + u[n]$$

Kde $n \geq 0$, u$[n]$ je WGN s rozptylem σ_u^2, a $s[-1] \sim N(\mu_s, \sigma_s^2)$.

Poznámka: signál začíná v $n = 0$, tedy nemůže být slabě stacionární.

Vlastnosti Gauss-MarkovOVA procesu

Model signálu:

$$s[n] = as[n-1] + u[n]$$

Kde $n \geq 0$, u$[n]$ je WGN s rozptylem σ_u^2, a $s[-1] \sim N(\mu_s, \sigma_s^2)$.

Platí:

$$s[n] = a^{n+1}s[-1] + \sum_{k=0}^{n} a^k u[n-k]$$

A

$$E\big[s[n]\big] = a^{n+1}\mu_s$$

$$var\big[s[n]\big] = a^{2n+2}\sigma_s^2 + \sigma_u^2 \sum_{k=0}^{n} a^{2k}$$

Pro $n \rightarrow \infty$ pak dostaneme

$$E\big[s[n]\big] \rightarrow 0$$

$$var\big[s[n]\big] \rightarrow \frac{\sigma_u^2}{1-a^2}$$

Kalmanův filtr: definice problému

Model signálu:

$$s[n] = as[n-1] + u[n]$$

Model dat:

$$x[n] = s[n] + w[n]$$

Kritérium optimality: BMSE

$$E\left[(s[n] - \hat{s}[n|n])^2\right]$$

- MMSE

$$\hat{s}[n|n] = E\big[s[n]|x[0], \dots, x[n]\big]$$

- Lineární odhad

$$\hat{s}[n|n] = \mathbf{C}_{\boldsymbol{\theta}x}\mathbf{C}_{xx}^{-1}\boldsymbol{x}$$

Kalmanův filtr: použití

Predikce:

$$\hat{s}[n|n-1] = a\hat{s}[n-1|n-1]$$

Minimum prediction MSE:

$$M[n|n-1] = a^2 M[n-1|n-1] + \sigma_u^2$$

Kalman Gain:

$$K[n] = \frac{M[n|n-1]}{\sigma_n^2 + M[n|n-1]}$$

Correction:

$$\hat{s}[n|n] = \hat{s}[n|n-1] + K[n](x[n] - \hat{s}[n|n-1])$$

Minimum MSE:

$$M[n|n] = (1 - K[n])M[n|n-1]$$

Kalmanův filtr: vlastnosti

- Rozšíření MMSE na odhady časově proměnných parametrů
- Není potřeba inverze matic
- Vlastní „metrika kvality“, může být spočítána offline (i dříve než máme data) -> $M[n|n]$ nezávisí na datech
- Data nemusí být slabě stacionární, ale pro $n \to \infty$ bude platit $\sigma_n^2 = \sigma^2$ (budou stacionární) a Kalmanův filtr a Wienerův filtr budou stejné

cvičení 12

Mějme model signálu daný jako Gauss-Markov process

$$s[n] = as[n-1] + u[n]$$

kde $a = 0{,}5$, $s[-1] \sim N(0{,}1)$ a $\sigma_u^2 = 2$. Signál pozorujeme v šumu, tedy

$$x[n] = s[n] + w[n]$$

Kde $w[n] \sim N(0, \sigma_n^2)$ pro $\sigma_n^2 = (1/2)^n$.

Spočtěte predikci, její korekci a příslušné MSE pro n=0. Na simulaci ukažte, jak se vyvíjí MSE v čase (s rostoucím n).

Proveďte rekonstrukci signálu s .

cvičení 12

- 1) *pokuswiener.m*: (syntetický příklad)
Jak sestavit filtr pro vyhlazení původního signálu, abychom se zbavili šumu?
Můžete využít také funkci miso_firwiener.m

- 2) *noisyvoice.mat*: (data na příklad odečítání akustického echa)
Pomocí LMS najděte filtr, který filtrováním signálu **noise** dává signál co nejvíce "podobný" signálu **x** a takový ho od signálu **x** odečtěte.

- 3) *foetalECG.mat*: (data na příklad extrakce fetálního EKG)
V souboru foetalECG.mat je záznam EKG těhotné ženy. Signály 2 až 6 jsou z abdominální oblasti, zatímco signály 7 až 9 jsou z oblasti hrudní. Pomocí LMS najděte filtr, kterým z vybraného EKG kanálu z abdominální oblasti odečtete vybraný signál z oblasti hrudní. Výsledkem by měl být záznam fetálního EKG bez zarušení, které způsobuje silný signál EKG matky.

Modelování jednorozměrného signálu/DAT pomocí náhodných veličin

- Obecně: náhodný digitální signál je posloupnost náhodný veličin
- i.i.d. posloupnost
- Jakou roli hrají parametry v pdf
- Co je to odhad?
- Příklady z knihy: Jak modelovat
  - Nepřesné měření stejnosměrného napětí
  - Odraz radarového pulzu od letadla
  - Signál dopadající na lineární soustavu senzorů (sonar)

materiály

- https://people.fjfi.cvut.cz/hobzatom/mast/mast.pdf