Přednáška 9

- Bayesovská statistika
- MSE a BMSE
- Bayesovské odhady

Bayesovské statistiky

Tradiční statistika = odhadujeme sice neznámý, ale deterministický parametr

X

Bayesovská statistika = uvažujeme θ jako náhodnou veličinu, jejíž konkrétní realizaci musíme odhadnout

- Parametr θ je náhodná veličina -> má hustotu pravděpodobnosti = **prior** pdf (apriorní hustota)
    - Tu v klasických odhadech nelze využít
    - Odvozujeme aposteriorní pdf na základě Bayesovy věty
    - Odhad parametru odvozujeme z jeho aposteriorního rozdělení
    - V případě, že neexistuje MVUE (nestranný odhad s minimální variancí), může Bayesovský odhad být odhadem, jehož MSE (mean square error) je menší než u ostatních odhadů.

Bayesova věta

BAYESŮV VZOREC:

$$p(x,\theta) = p(x|\theta)p(\theta) = p(\theta|x)p(x)$$

Bayesova věta:

$$p(\theta|x) = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{\int p(x|\theta)p(\theta)d\theta}$$

Hustotu $p(\theta)$ je apriorní hustota pravděpodobnosti θ, zatímco $p(\theta|x)$ je aposteriorní hustota.

Dále platí:

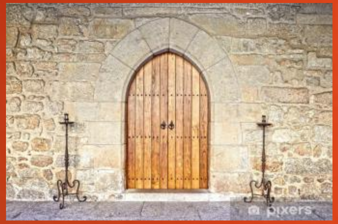
$$p(y|x) = p(y) \iff y, x \ jsou \ nezávislé.$$

¿ ¿ ¿

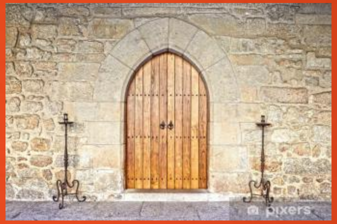
Monty Hallův problém

Monty Hallův problém: Máte 3 dveře, za jedněmi je poklad, za zbylými nic. Cílem hry je získat poklad. Vy si vyberete jedny dveře. Následně **moderátor** prozradí dveře, které jste si nevybrali, **za kterými nic není**. Vyplatí se vám změnit původní volbu na poslední zbylé dveře?

1/3



1/3



1/3

1/3

2/3

0/3

Bayesovský odhad s nejmenší kvadratickou chybou

Odhad minimalizující střední kvadratickou chybu (MSE)

$$mse(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = \int (\hat{\theta} - \theta)^2 p(x|\theta)dx$$

Bayesovský MSE odhad

$$Bmse(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = \iint (\hat{\theta} - \theta)^2 p(x,\theta)dxd\theta$$

Můžeme upravit na:

$$Bmse(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = \int \left[\int (\hat{\theta} - \theta)^2 p(\theta|x)d\theta\right] p(x)dx$$

Bayesovské odhady

1. Hledáme odhad, který minimalizuje $Bmse(\hat{\theta})$
2. Derivujeme $\int (\hat{\theta} - \theta)^2 p(\theta|x) d\theta$ podle $\hat{\theta}$ a položíme rovno nule.
3. Výsledný odhad je

$$\hat{\theta}_{BMSE} = E[\theta|x] = \int \theta p(\theta|x) d\theta \,,$$

což je rovno střední hodnotě aposteriorního rozložení.

Příklad: Uvažujme model $x[n] = A + w[n]$, kde $w[n] \sim N(0,1)$ a A je neznámý parametr, který chceme uvažovat. Pro odhad chceme využít expertní znalost, že $A \sim N(\mu_A, 1)$. Jak bude vypadat BMSE odhad parametru A?

Odhad $\hat{A}$ tradiční statistikou by byl $\hat{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$, zatímco odhad pouze z apriorní hustoty by byl $\hat{A} = E[A] = \mu_A$. Výsledný Bayesovský odhad je (odvozeno při přednášce)

$$\hat{A}_{BMSE} = \frac{N}{N+1} \hat{A} + \frac{1}{N+1} \mu_A.$$

Co to znamená?

Cvičení 9

- Simulujte Monty Hallův problém pomocí MC. Potvrzuje se teoretický výsledek?
- Dokažte, že
$$p(y|x) = p(x) \iff y, x \ jsou \ nezávislé.$$
- Dokažte Bayesovo pravidlo.
- Uvažujme model jako na přednášce s doplněnými parametry roztylu $x[n] = A + w[n]$, kde $w[n] \sim N(0, \sigma^2)$ a $A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$. Odvoďte BMSE odhad parametru A a diskutujte význam rozptylů σ^2 a σ_A^2 a vliv na tento bayesovský odhad.