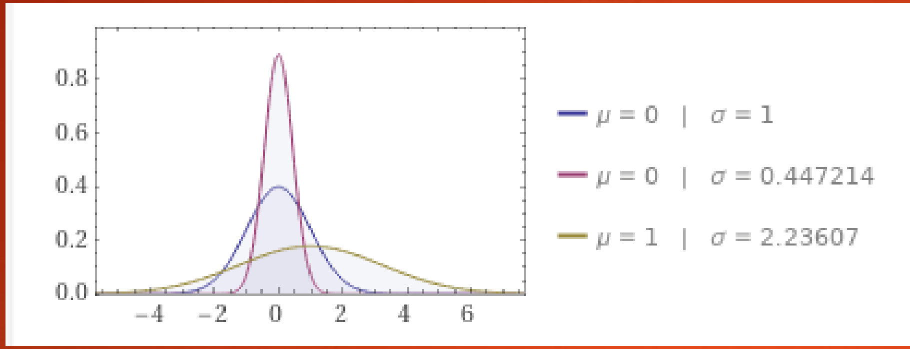
# Přednáška 4.

- Věrohodnostní funkce
- Rao-Cramérova dolní mez (Cramér-Rao Lower Bound)

# Věrohodnost: Rozptyl odhadu




PDF jako funkci neznámého parametru nazýváme **věrohodnostní funkce** (likelihood function):

$$p(\theta|\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{N} p(\theta|x_i)$$

- Čím větší „sharpness“ křivky, tím lépe půjde odhadnout.

1. Často se využívá místo věrohodnostní funkce její logaritmus, tzv. **log-likelihood function** (označmě symbolem $\mathcal{L}$).
2. Derivace $\mathcal{L} \rightarrow$ používá se pro nalezení maxima. Pro uvažované hustoty pravděpodobnosti předpokládáme, že splňují podmínku „regularity“, tedy

$$E\left[\frac{\partial \ln p(\theta|x)}{\partial \theta}\right] = 0, for\ all\ \theta$$

3. Druhá derivace $\mathcal{L} \rightarrow$ používá se pro popis tvaru křivky (konvexní / konkávní)
   Jaký průběh má pdf? Jaké znaménko má její derivace?

# Skalární Rao-Cramérova dolní mez

Předpokládejme, že hustota pravděpodobnosti $p(\theta|\boldsymbol{x})$ splňuje podmínku regularity. Potom rozptyl libovolného nestranného odhadu splňuje

$$var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{-E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\theta|x)}{\partial \theta^2}\right]}$$ , kde derivaci vyčíslíme ve skutečné hodnotě parametru $\theta$.

- Tuto mez nazýváme Rao-Cramérova dolní mez (Cramér-Rao Lower Bound = CRLB).
- Výraz $\mathcal{I}(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\theta|x)}{\partial \theta^2}\right]$ nazýváme Fisherova informace (FI).
- Nestranný odhad, který dosahuje CRLB je **nejlepší nestranný odhad** (někdy také *eficientní*).
- Pro FI platí: $\mathcal{I}(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\theta|x)}{\partial \theta^2}\right] = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(\theta|x)\right)^2\right]$

# Skalární Rao-Cramérova dolní mez

Další vlastnosti CRLB

- Pokud lze vyjádřit $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta|x) = I(\theta)(g(x) - \theta)$, kde $I(\theta)$ a $g(x)$ jsou libovolné funkce (ovšem závislé jenom na argumentu, který je zapsaný, popř. na hyperparametrech), pak $\hat{\theta} = g(x)$ je nestranný odhad dosahující CRLB.
- Máme-li i.i.d. model dat a tedy $p(\theta|\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{N} p(\theta|x_i)$, pak Fisherova informace celého pozorování $x_1 \dots x_N$ je rovna $N$-násobku Fisherovy informace jednoho (kteréhokoliv) pozorování. CRLB má potom nutně tvar násobku $\frac{1}{N}$.

# Cvičení 4

1. Ukažte vztah $\mathcal{I}(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\theta|x)}{\partial\theta^2}\right] = E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(\theta|x)\right)^2\right]$.
2. Chceme odhadnout úroveň stejnosměrného proudu z nepřesných měření $X_1, X_2, \dots, X_n$ , tzn. při modelu $X_i = A + w_i$, $w_i \sim N(0,1)$. Spočítejte CRLB odhadu parametru $A$. Který z odhadů je lepší?
   - $\hat{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ a nebo
   - $\hat{A} = \frac{1}{n+2}\left(2X_1 + \sum_{i=2}^{n-1} X_i + 2X_n\right)$ ?
3. Stejný příklad jako 2 pokud $w_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2$ známe.
4. $X_i = Ar^i + w_i$, kde $r > 0$ (známé) a $w_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2$ známe. Spočtěte CRLB a analyzujte pro různé hodnoty $r$.