# Přednáška 5.

- Vektorová náhodná veličina
- Vícerozměrné Normální rozdělení
- Kovariance, kovarianční matice
- Věta o transformaci
- Odhady vektorových parametrů
- CRLB

# Vektorová náhodná veličina

Vektorová náhodná veličina $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$

Sdružená distribuční funkce

$$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = P([X_1 \le x_1] \cap \dots \cap [X_n \le x_n])$$

Sdružená hustota pravděpodobnosti

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

Vztah mezi distribuční funkcí a hustotou

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n$$

# Vícerozměrné normální rozdělení

Sdružená hustota pravděpodobnosti náhodné vektorové veličiny $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)^T$ mající Normální rozdělení

$$f_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}(\det(\Sigma))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

Kde $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)^T = E[(X_1, X_2, \dots, X_N)^T]$ a $\Sigma = E[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^T]$

Pro vektor dimenze 2 je pak hustota

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

Kde $\Sigma = \begin{pmatrix} E[(X-\mu_x)^2] & E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right] \\ E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right] & E\left[\left(Y-\mu_y\right)^2\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$

# Kovariance, kovarianční matice

Vektor střední hodnoty

$$\boldsymbol{\mu} = E[\boldsymbol{X}]$$

Kovarianční maticí nazýváme matici

$$\boldsymbol{cov}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\Sigma} = E[(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})^T] = E[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^T] - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T$$

Pozn.: kovarianční matice je zobecněním rozptylu pro vektorové náhodné veličiny

Kovariance mezi náhodnými veličinami X a Y

$$cov(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

# Transformace hustoty

Uvažujme náhodnou vektorovou veličinu $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_N)^{\boldsymbol{T}}$ , a z ní vytvořme náhodnou veličinu $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)^{\boldsymbol{T}}$ jako $\boldsymbol{Y} = h(\boldsymbol{X})$.

Nechť $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_N)$ je spojitá náhodná veličina, $h : R^N \to R^N$ ryze monotónní funkce na množině $\mathbf{X}(\Omega)$ a $h^{-1}$ je diferencovatelná a splňuje podmínku

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial y_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_N^{-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_N^{-1}}{\partial y_N} \end{bmatrix} \neq 0$$

Potom náhodná veličina $\boldsymbol{Y} = h(\boldsymbol{X})$ má hustotu pravděpodobnosti

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = f_X\left(h_1^{-1}(\boldsymbol{y}), \dots, h_N^{-1}(\boldsymbol{y})\right) |J|$$

Příklad: $X, Y \sim N(0,1)$ a jsou nezávislé. Jaká je hustota pravděpodobnosti vektoru $(X - Y, X + Y)$?

Příklad: $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_N)^{\boldsymbol{T}}$ je vektorová náhodná veličina a $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX}$, kde $\boldsymbol{A}$ je regulární matice. Jaká je hustota pravděpodobnosti $\boldsymbol{Y}$?

# Odhad (vektorových) parametrů

Odhadovaný parametr $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_d \end{pmatrix}$

Např. $\theta = \binom{\mu}{\sigma^2}$, tedy parametry Normálního rozdělení, nebo odhad kovarianční matice, lineární regrese

Už jsme viděli, že nestranný odhad $\sigma^2$ se liší v případech, kdy (ne)známe skutečnou hodnotu parametru $\mu$.

a) Známe $\mu$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

b) Neznáme $\mu$ a nahradíme ho výběrovým průměrem:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

# Rao-Cramérova dolní mez

- Fisherova informace je pro případ odhadu vektoru parametrů reprezentovaná **Fisherovou Informační Maticí (FIM) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})$.**
- Pro $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})$ platí

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})_{i,j} = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})}{\partial \theta_i}\right)\left(\frac{\partial \ln f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})}{\partial \theta_j}\right)\right] = -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln f(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})\right]$$

- Nechť $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ je nestranný odhad parametru $\boldsymbol{\theta}$ tj. $\mathrm{E}\left[\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right] = \boldsymbol{\theta}$. Platí, že

$$cov\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) \geq \boldsymbol{F}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{\theta}),$$

což znamená, že matice $cov\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) - \boldsymbol{F}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{\theta})$ je pozitivně semidefinitní.

Příklad: Nechť $\boldsymbol{a}$ je vektor stejných rozměrů jako $\boldsymbol{\theta}$. Uvažujme skalární odhad $\hat{a} = \boldsymbol{a}^T\widehat{\boldsymbol{\theta}}$, což je nestranný odhad $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\theta}$. Pak platí

$$var(\hat{a}) = cov\left(\boldsymbol{a}^T\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \boldsymbol{a}^T cov\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}\right)\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{F}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{a}.$$

Když například $\boldsymbol{a} = (1{,}0{,}\ldots)^T$, pak $\hat{a} = \boldsymbol{a}^T\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1}}$, a CRLB říká, že $var\left(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1}}\right) \geq \boldsymbol{F}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{\theta})_{\mathbf{11}}$.

# Rao-Cramérova dolní mez pro gaussovská pozorování

- Nechť $\boldsymbol{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta}))$, kde $\boldsymbol{\theta}$ jsou parametry modelu a tedy $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})$ a $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta})$ popisují (obecně nelineární) závislost střední hodnoty a kovarianční matice pozorování na těchto parametrech.
- Pro FIM $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})$ platí

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})_{i,j} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}\right]^T \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} + \frac{1}{2} \mathrm{tr}\left[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right]$$

# Cvičení 5

1. Spočítejte Rao-Cramérovu dolní mez pro odhad rozptylu Normálního rozdělení, jestliže střední hodnotu známe.
2. Generujte i.i.d. veličiny z Normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2$. Odhadněte rozptyl $\sigma^2$. Proveďte MC simulaci, abyste odhadli rozptyl odhadu $\sigma^2$ a porovnejte s příslušnou CRLB.
3. Řešte úlohy 3.4, 3.9 a 3.11 v knize SMK