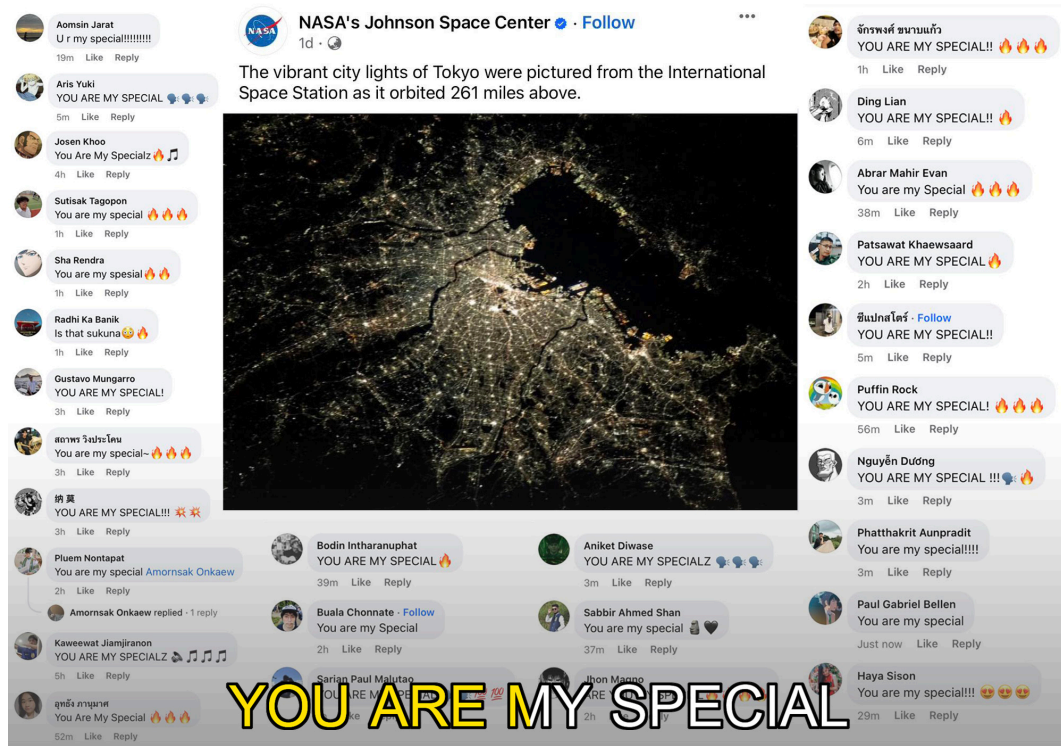


## อุบัติเหตุชิบูย่า 2 (100 คะแนน)

0.25 seconds, 32 megabytes

ได้เกิดเหตุการณ์เหนือธรรมชาติขึ้นที่ชิบูย่า ทำให้ตอนนี้ทั้งโตเกียวกลายเป็นที่ ๆ คนธรรมดาอย่างเราไม่สามารถอยู่อาศัยได้แล้ว



รูปที่ 1: ข่าวเหตุการณ์ปริศนาที่เกิดขึ้นที่โตเกียว (ภาพจากคาราโอเกะชั้นใต้ดิน)

Sona และ Loss ที่รอดมาจากสถานีรถไฟใต้ดินด้วยความช่วยเหลือจากทุก ๆ คนที่มาช่วยทำโจทย์ Crack 'n' Code Pre POSN 1 2023 (โจทย์ อุบัติการณ์ชิบูย่า (ภาค 1) <https://codeforces.com/group/m8wP8IA7/contest/477436> เนื้อเรื่องต่อกัน แต่โจทย์ไม่เกี่ยวกับ ไม่จำเป็นต้องอ่านหรือทำโจทย์ภาคแรกมาก่อน) แต่ทั้งสองก็สบายใจได้ไม่นานนัก เพราะพวกเขาต้องรับมือกับปริศนาที่ความอันตรายจะสูงขึ้นเรื่อย ๆ

Sona และ Loss ได้เดินทางอย่างระมัดระวังจนได้พบกับท่าน M-W และ Hibiki ซึ่งเมื่อคืนก่อน ทั้งสองท่านนี้ได้ไปตบตู้ชักผ้ากับ CEO(?) ของ Crack 'n' Code จนถึงเที่ยงคืนทำให้อนตึก และพอตื่นมาก็พบว่าโตเกียวกลายเป็นเมืองร้างไปแล้ว

ทั้งสี่คนได้เดินทางเพื่อออกนอกโตเกียว แต่ดันโชคร้ายเจอกับวิญญาณคำสาป แต่อาจจะไม่โชคร้ายซะทีเดียว วิญญาณคำสาปตอนนี้ มีชื่อว่า ออปเพนไฮเมอร์สไตล์ เกิดจากความรู้สึกของนักศึกษาที่ติด F หรือ W เพราะ Quantum Physics ในวิชา Gen Phys II แถมยังโดนเพื่อนลากไปดูหนัง Oppenheimer แล้วไม่เข้าใจอะไรเลย

ออปเพนไฮเมอร์สไตล์ ได้มอบข้อเสนอให้กับพวกเขาทั้งสี่ ว่าหากแก้ปริศนาได้ก็จะสามารถหนีออกจากโตเกียวไปได้โดยปริศนาที่ว่าก็คือ มีทางอยู่ทั้งหมด 4 ทาง ได้แก่  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  และ  $|11\rangle$  โดยทางออกที่ถูกต้อง เริ่มต้นจะเป็นทางออกแรก หรือ  $|\psi\rangle = |00\rangle$

โดยออปเพนไฮเมอร์สไตล์ จะทำ Operation ต่าง ๆ เข้าไปทำให้ทางออกที่ถูกต้องเปลี่ยนไปเรื่อย ๆ

ยกตัวอย่างเช่น การใส่ Pauli-X Gate เข้าไปใน Qubit แรก

$$|00\rangle \xrightarrow{X \otimes I} |10\rangle$$

ซึ่งทำให้ทางออกที่ถูกต้องตอนนี้กลายเป็นทางออกที่ 3 ( $|\psi\rangle = |10\rangle$ )

Operation ดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูป Matrix ได้ดังนี้

$$X \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(X \otimes I)|00\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ออปเพนไฮเมอร์สได้กล่าวว่า จะมีทั้งหมด  $N$  operation กับ state ของทางออกที่ถูกต้อง โดยแต่ละ Operation จะมี  $U_1$  และ  $U_2$  เป็น Quantum Gate ที่กระทำกับ Qubit ที่หนึ่งและสองตามลำดับ โดย  $U$  จะเป็น Matrix ขนาด  $2 \times 2$  ที่  $UU^\dagger = I$  หรือ  $U^{-1} = U^\dagger$  คุณไม่จำเป็นต้องเข้าใจว่ามันคืออะไร รับประกันว่าข้อมูลนำเข้าของโจทย์ข้อนี้ จะเป็นไปตามนี้เสมอ

การคำนวณ  $(U_1 \otimes U_2)|\psi\rangle$  สามารถทำได้ดังนี้

**ขั้นตอนที่ 1** การหา  $U_1 \otimes U_2$  (Tensor Product) กำหนดให้

$$U_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

แล้ว

$$U_1 \otimes U_2 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} & a_2 \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \\ a_3 \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} & a_4 \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_2b_1 & a_2b_2 \\ a_1b_3 & a_1b_4 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_4b_1 & a_4b_2 \\ a_3b_3 & a_3b_4 & a_4b_3 & a_4b_4 \end{pmatrix}$$

**ขั้นตอนที่ 2** ค่าของ  $|\psi\rangle$  โดยถ้า

$$|\psi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$$

แล้ว

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

**ขั้นตอนที่ 3** นำเมทริกซ์ที่ได้จากสองขั้นตอนมาคูณกัน ผลลัพธ์จะเป็นเมทริกซ์ขนาด  $4 \times 1$  ซึ่งเป็น State ถัดไป โดยคุณสามารถหาวิธีการคูณเมทริกซ์ได้จาก Google หรือจะถาม ChatGPT ก็ได้ คุณจะต้องนำ State มาคำนวณไปเรื่อย ๆ จนได้ State สุดท้ายหลังจาก  $N$  Operation แล้วคุณก็จะได้คำตอบว่าทางออกที่ถูกคือทางไหน

**คำใบ้เพิ่มเติม 1**  $|\psi_1\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$

**คำใบ้เพิ่มเติม 2**  $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$

## ข้อมูลนำเข้า

ข้อมูลนำเข้ามีทั้งหมด  $4N + 1$  บรรทัด

บรรทัดแรกประกอบด้วยจำนวนเต็ม  $N$  แทนจำนวน Operation ทั้งหมด

บรรทัดที่  $4i - 2$  ถึง  $4i - 1$  จะแสดง Matrix ของ  $U_1$  (ดูตัวอย่าง)

บรรทัดที่  $4i$  ถึง  $4i + 1$  จะแสดง Matrix ของ  $U_2$

## ข้อมูลส่งออก

ตอบจำนวนหนึ่งตัว (1 หรือ 2 หรือ 3 หรือ 4) แทนทางออกที่ถูกต้อง อาจมีมากกว่าหนึ่งทางออกที่ค่าความน่าจะเป็นเท่ากัน หรือใกล้เคียงกันมาก ( $\leq 10^{-3}$ ) ให้ตอบอันใดก็ได้

**หมายเหตุ** ค่าความน่าจะเป็นคือ กำลังสองของค่าสัมบูรณ์ ( $|x|^2$ )

## ขอบเขต

- $N \leq 10$
- $U_1$  และ  $U_2$  เป็นเมทริกซ์ขนาด  $2 \times 2$  ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนจริง ( $\mathbb{R}$ ) และเป็น Valid Quantum Gate ( $UU^\dagger = I$ )

**หมายเหตุ**  $U$  ในชุดทดสอบ อาจ  $UU^\dagger \neq I$  เนื่องจากความคลาดเคลื่อนของ Floating Number

## การให้คะแนน

ชุดทดสอบจะมี 4 ชุด และจะได้คะแนนในแต่ละชุด ก็ต่อเมื่อตอบถูกทุกชุดทดสอบในชุดนั้น ๆ เท่านั้น (คุณต้องพาท่านเทพทั้งสี่ออกจากโตเกียวให้ได้ในทุกชุดทดสอบของปัญหาย่อย)

ชุดที่ 1 (12 คะแนน)  $N = 1$ ,  $U_2 = I$  และ  $U_1 \in \{X, Z, I\}$

ชุดที่ 2 (25 คะแนน)  $U \in \{X, Z, I\}$

ชุดที่ 3 (28 คะแนน)  $U_2 = I$

ชุดที่ 4 (35 คะแนน) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

โดยที่

- $X$  คือ Pauli-X Gate  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $Z$  คือ Pauli-Z Gate  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $I$  คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

## ตัวอย่างข้อมูลนำเข้าและข้อมูลส่งออก

ข้อมูลนำเข้า	ข้อมูลส่งออก
1 0 1 1 0 1 0 0 1	3
1 0.7071067812 0.7071067812 0.7071067812 -0.7071067812 1 0 0 1	1
1 0.7071067812 0.7071067812 0.7071067812 -0.7071067812 1 0 0 1	3
2 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 -1 0 1 1 0	4

## คำอธิบาย

ตัวอย่างแรก คือ  $X \otimes I$  ตามที่ได้อธิบายไว้ในโจทย์ (State เริ่มต้นเป็น  $|00\rangle$  หรือ  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  เสมอ)

ตัวอย่างที่ 2 และ 3 คือ  $H \otimes I$  (โดย  $H$  คือ Hadamard Gate หรือ  $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ) ซึ่งผลลัพธ์คือ  $\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$  โดยจะตอบทางออกที่ 1 หรือ 3 ก็ได้ เพราะทั้งสองทางออกมีความน่าจะเป็นเท่ากันที่  $\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 4 มีทั้งหมด 2 Operation ได้แก่  $X \otimes I$  และ  $Z \otimes X$  ได้ดังนี้

$$|00\rangle \xrightarrow{X \otimes I} |10\rangle \xrightarrow{Z \otimes X} -|11\rangle = |11\rangle$$

คำตอบที่ถูกต้องคือทางออกที่ 4 ( $|11\rangle$ )