Résolution numérique des équations non-linéaires

Méthode de dichotomie

Analyse Numérique - $3^{\text{ème}}$ année -

Exercice introductif

Soit La fonction

$$f(x) = x - \frac{1}{5}\sin(x) - \frac{1}{2}.$$

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x^* dans $[0, \pi]$.
2. Calculer $f(\frac{\pi}{2})$, puis en déduire que $x^* \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
3. De même, calculer $f(\frac{\pi}{4})$, puis en déduire que $x^* \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
4. Que constatez vous.

Correction

1. f est continue et strictement croissante sur $[0, \pi]$ avec $f(0) < 0$ et $f(\pi) > 0$, d'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), $f(x) = 0$ admet une unique solution x^* dans $[0, \pi]$.
2. Si on calcule la valeur de f en $\frac{\pi}{2}$ le point milieu de $[0, \pi]$, on constate que $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 0.7 > 0$ et puissque $f(0) < 0$, alors $x^* \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
3. De même, Si on calcule la valeur de f en $\frac{\pi}{4}$ le point milieu de $[0, \frac{\pi}{2}]$ cette fois, on constate que$f(\frac{\pi}{4}) = 0, 14 > 0$ et $f(0) < 0$ qui montre que $x^* \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
4. Il est clair qu'une répétition de ce procédé donne un encadrement de plus en plus précis de la solution cherchée et fournit une méthode dite de dichotomie consiste à construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers x^*.

Présentation et étapes de la méthode de dichotomie

"Basée sur le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), la méthode de dichotomie consiste à chercher la solution d'une manière itérative".

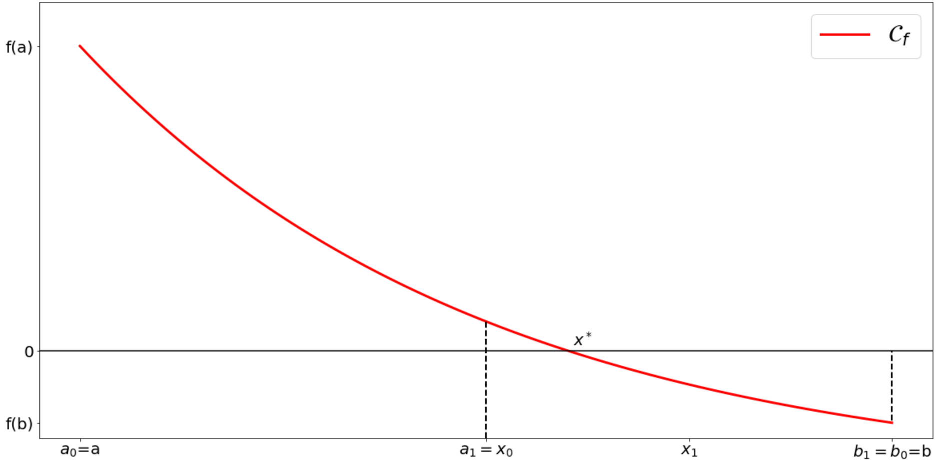
• **Etape 1:** On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ et on suppose que f admet une unique racine $x^* \in]a, b[$ telle que $f(a).f(b) < 0$.

On note par $a_0 = a, b_0 = b$ et $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ le point milieu de l'intervalle $[a_0, b_0]$.

1. Si $f(x_0) = 0$, alors $x^* = x_0$ et le problème est résolu.
2. Si $f(x_0) \neq 0$, on détermine le signe de $f(a_0).f(x_0)$.
   - Si $f(a_0).f(x_0) < 0$, alors $x^* \in]a_0, x_0[$. Dans ce cas, on considère $a_1 = a_0$ et $b_1 = x_0$.
   - Si $f(x_0).f(b_0) < 0$, alors $x^* \in]x_0, b_0[$. Dans ce cas, on considère $a_1 = x_0$ et $b_1 = b_0$.
3. On détermine x_1 le milieu du nouveau intervalle $[a_1, b_1]$ pour l'utiliser dans l'étape 2 : $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

Illustration graphique de l'étape 1

- On pose $a_1 = x_0$, $b_1 = b_0$ et $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

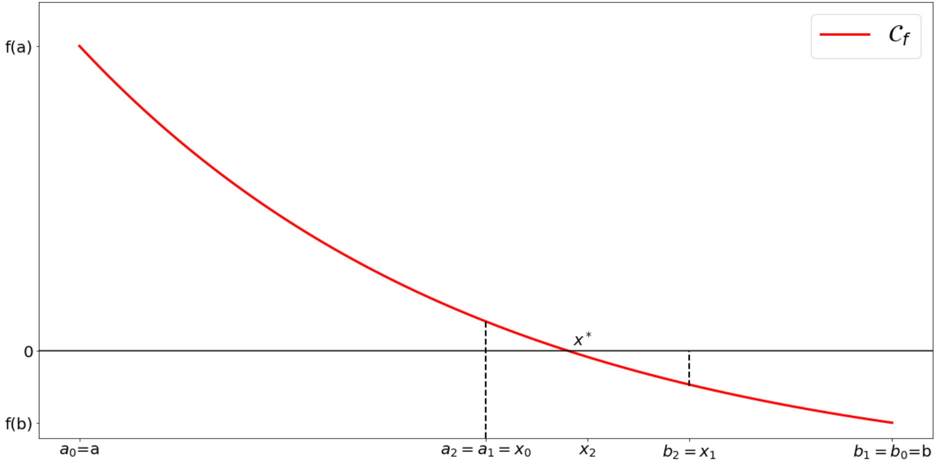


- **Etape 2:** On procède de la même manière sur $[a_1, b_1]$.

1. Si $f(x_1) = 0$, alors $x^* = x_1$ et le problème est résolu.
2. Si $f(x_1) \neq 0$, on détermine le signe de $f(a_1).f(x_1)$.
   - Si $f(a_1).f(x_1) < 0$, alors $x^* \in]a_1, x_1[$. Dans ce cas, on considère $a_2 = a_1$ et $b_2 = x_1$.
   - Si $f(x_1).f(b_1) < 0$, alors $x^* \in]x_1, b_1[$. Dans ce cas, on considère $a_2 = x_1$ et $b_2 = b_1$.
3. On détermine x_2 le milieu du nouveau intervalle $[a_2, b_2]$ pour l'utiliser dans l'étape 3 : $x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.

Illustration graphique de l'étape 2

- On pose $a_2 = a_1$, $b_2 = x_1$ et $x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.



• **Etape n:**

De manière itérative, on construit trois suites $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, et $(x_n)_{n\geq 0}$, telles que $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.

En effet, à une étape n donnée :

1. Si $f(x_n) = 0$, alors $x^* = x_n$ et le problème est résolu.
2. Si $f(x_n) \neq 0$, on détermine le signe de $f(a_n).f(x_n)$.
   - Si $f(a_n).f(x_n) < 0$, alors $x^* \in]a_n, x_n[$. Dans ce cas, on considère $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$.
   - Si $f(x_n).f(b_n) < 0$, alors $x^* \in]x_n, b_n[$. Dans ce cas, on considère $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
3. On détermine x_{n+1} le milieu du nouveau intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ pour l'utiliser dans l'étape $n+1$: $x_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$.

Étude de convergence de la méthode de dichotomie:

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$, vérifiant $f(a).f(b) < 0$ et $x^* \in]a, b[$ l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite générée par l'algorithme de dichotomie, **alors** on a:

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*.
2. On a l'estimation suivante:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

L'estimation $|x^* - x_n| \leq \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$, mentionnée ci- dessus, nous permet de justifier que la méthode de dichotomie est convergente puisque

$$\lim_{n \to +\infty} |x^* - x_n| = 0, \; \boldsymbol{car} \;\; 0 < \frac{1}{2} < 1$$

Test d'arrêt

En pratique, on ne peut pas faire un nombre infini d'itérations alors on utilise un critère d'arrêt en donnant une valeur de précision (ou de tolérance) ε.

Ce critère d'arrêt consiste à choisir à priori une tolérance ε et à arrêter le procédé lorsque

$$|b_n - a_n| \leq \varepsilon.$$

Pour atteindre ce critère, il suffit d'avoir n qui vérifie:

$$n \geq \log_2 \left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right).$$

En effet, en arrêtant le procédé, la longueur de l'intervalle $[a_n, b_n]$, $|b_n - a_n| = \dfrac{b-a}{2^n}$.

Or $|b_n - a_n| \leq \varepsilon \Rightarrow \dfrac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$ et on peut calculer à l'avance le nombre minimal d'itérations $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ assurant la précision ε.

On a

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{b-a}{\varepsilon} \leq 2^n$$

$$\Leftrightarrow n \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right).$$

Ici $\log_2$ est la fonction logarithme de base 2 définie par

$$\log_2(x) = \frac{\log(x)}{\log(2)}.$$

Exercice

Soit $f(x) = x^3 - 3x - 1, \quad I = [-1, 1].$

1. Montrer que f admet un unique $x^* \in]-1, 1[$ tel que $f(x^*) = 0$.
2. Trouver le nombre minimal d'itérations pour estimer x^* à une tolérance $\varepsilon = 10^{-6}$?

Correction

- f est continue et dérivable sur et dérivable sur $[-1, 1]$. Ainsi, on a $f'(x) = 3x^2 - 3 \leq 0$ sur $[-1, 1]$.
  f est continue et décroissante sur $[-1, 1]$, de plus $f(-1).f(1) < 0$ alors d'après le TVI $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-1, 1[$.
- On a

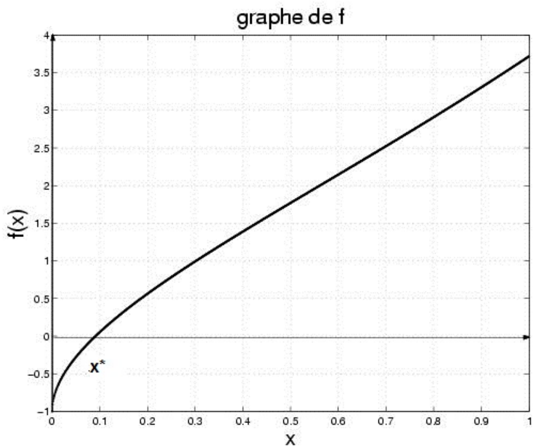
$$\Leftrightarrow n \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right).$$

Pour $\varepsilon = 10^{-6}$, On trouve $n \geq \log_2\left(\frac{2}{10^{-6}}\right) \quad \Rightarrow n \geq 20.93..$
Le nombre minimal d'itérations pour estimer x^* à une tolérance $\varepsilon = 10^{-6}$ est 21.

Exercice asynchrone

Soit $f(x) = e^x + 3\sqrt{x} - 2, \quad I = [0, 1]$.

1. D'après la représentation graphique ci-dessous, montrer que f admet un unique $x^* \in]0, 1[$ tel que $f(x^*) = 0$.
2. Trouver le nombre minimal d'itérations pour estimer x^* à une tolérance $\varepsilon = 10^{-10}$?



Algorithme de la méthode.

- Choisir un intervalle $[a_0, b_0]$ tel que $f(a_0).f(b_0) < 0$.
- Initialiser ϵ et le nombre d'itérations maximal N_{max} que l'on se fixe.
- $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.
- $n = 0$
- tant que $(f(x_n) \neq 0 \ \& \ |b_n - a_n| > \epsilon \ \& \ n < N_{max})$ faire
  - si $f(a_n).f(x_n) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = x_n$.
  - sinon $a_{n+1} = x_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
  - $x_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$.
  - $n = n + 1$.
- fin
- $x^* \approx x_n$.