

5.1 Ориентация корпуса в глобальной системе координат

Для начала необходимо создать модель корпуса робота. В системе координат робота, начало которой лежит в центре корпуса, наклон корпуса можно задать с помощью матриц элементарных поворотов размерностью 3×3 , где α, φ, ψ – углы Эйлера, описывающее вращение вокруг осей x, y, z соответственно.

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$R_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R_{z,\psi} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Однако поскольку трехмерная матрица поворота не несет информации о поступательном перемещении и используемом масштабе, используют однородную матрицу преобразования размерностью 4×4

$$T = \left[\begin{array}{c|c} R_{3 \times 3} : p_{1 \times 3} \\ \hline f_{1 \times 3} : 1 \times 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{Поворот} : \text{Сдвиг} \\ \hline \text{Перспектива} : \text{Масштаб} \end{array} \right] \quad (4)$$

Таким образом матрицы преобразуются в:

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$T_\varphi = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$T_{\psi} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Предполагается, что ноги расположены в углах прямоугольной плоскости, которая определяется шириной и длиной робота. Для этого создадим 4 матрицы, представляющие систему координат и положение каждого основания ноги.

Для этого перемножим 3 матрицы оборотов вокруг осей для получения сложного вращения, однородную матрицу элементарного сдвига, в которую подставим половину длины (L) и ширины (W) робота и матрицу поворота со значением $\pm \frac{\pi}{2}$ для задания начального положения в пространстве.

Невозможно, чтобы тело лежало во всех плоскостях: относительно третьей плоскости тело робота все равно будет располагаться под углом 90 градусов, значение которого мы и задаем. Матрица сдвига задает параллельный перенос системы координат каждой ноги относительно абсолютной системы OXYZ на вектор (dx, dy, dz).

$$\begin{aligned} & T_{\alpha} \times T_{\varphi} \times T_{\psi} \times T_{\varphi} \left(\frac{\pi}{2} \right) \times T = \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) & 0 & \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) & 0 & \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \end{aligned}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm \frac{L}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pm \frac{W}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Полученная в ходе расчетов модель корпуса робота в пространстве представлена на рисунке 32.

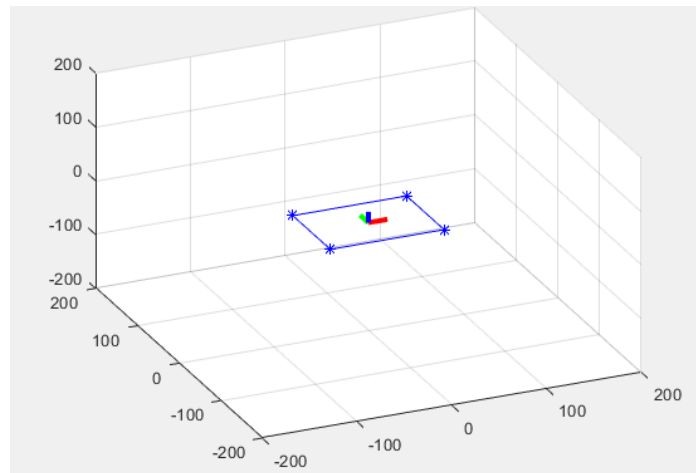


Рисунок 32 – Моделирование корпуса

5.2 Решение прямой задачи кинематики методом Денавита-Хартенберга

В данном параграфе приведено моделирование ног и решение прямой задачи кинематики. Прямая задача: нам даны углы сервоприводов $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, нужно найти координаты $x_{raw}, y_{raw}, z_{raw}$. Для успешного решения задачи необходимо присвоить системы координат каждому звену робота (рисунок 34) и с их помощью найти параметры Денавита-Хартенберга (таблица 11).

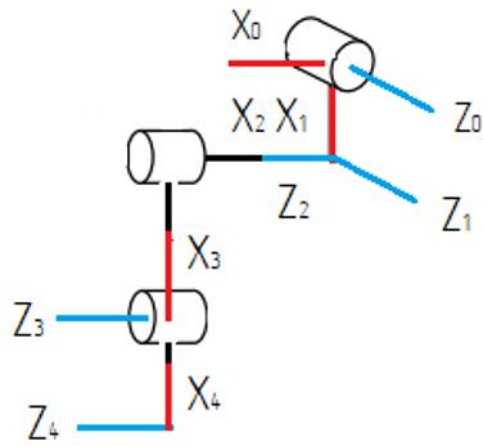


Рисунок 34 – Вычисление ДХ параметров

Таблица 1 – Параметры ДХ

	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
0-1	$-\left(\frac{\pi}{2}\right)$	L1	0	$\theta_1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)$
1-2	0	0	L2	0
2-3	0	L3	0	θ_2
3-4	0	L4	0	θ_3

Подставив все параметры Денавита-Хартенберга в формулу 13, получим 4 матрицы однородного преобразования. Итоговую матрицу, связывающую все системы координат, как и в случае с матрицами вращения, можно получить последовательным перемножением:

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & L_1 \cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & L_1 \sin\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & L_3 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & L_3 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & L_4 \cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & L_4 \sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$T_0^4 = T_0^1 \times T_1^2 \times T_2^3 \times T_3^4 \quad (18)$$

5.3 Связь прямой задачи кинематики и корпуса робота

Для того чтобы связать корпус робота и ноги нужно каждую из 4 матриц, представляющие систему координат и положение каждого основания ноги T умножить на 2 матрицы поворота вокруг осей $R_{x,\alpha}, R_{y,\varphi}$ и на матрицу T_0^4 , полученную в предыдущем параграфе. Полученная модель представлена на рисунке 35.

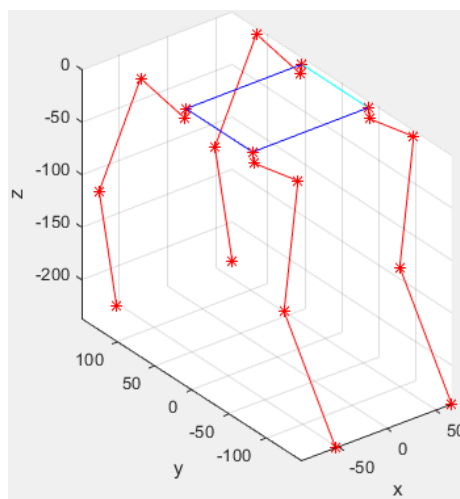


Рисунок 35 – Моделирование корпуса и ног