5.1 Ориентация корпуса в глобальной системе координат

Для начала необходимо создать модель корпуса робота. В системе координат робота, начало которой лежит в центре корпуса, наклон корпуса можно задать с помощью матриц элементарных поворотов размерностью 3x3, где α, φ, ψ – углы Эйлера, описывающее вращение вокруг осей x, y, z соответственно (1,2,3).

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$R_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} cos(\varphi) & 0 & sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\varphi) & 0 & cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R_{z,\psi} = \begin{bmatrix} cos(\psi) & -sin(\psi) & 0 \\ sin(\psi) & cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Однако поскольку трехмерная матрица поворота не несет информации о поступательном перемещении и используемом масштабе, используют однородную матрицу преобразования размерностью 4x4 (4,5,6,7).

$$T = \left[\frac{R_{3\times3} \,\vdots\, p_{1\times3}}{f_{1\times3} \,\vdots\, 1\times1}\right] = \left[\frac{\text{Поворот} \,\vdots\, \text{Сдвиг}}{\text{Перспектива} \,\vdots\, \text{Масштаб}}\right] \quad (4)$$

Таким образом матрицы преобразуются в:

$$T_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$T_{\varphi} = \begin{bmatrix} cos(\varphi) & 0 & sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\varphi) & 0 & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$T_{\psi} = \begin{bmatrix} cos(\psi) & -sin(\psi) & 0 & 0 \\ sin(\psi) & cos(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Предполагается, что ноги расположены в углах прямоугольной плоскости, которая определяется шириной и длиной робота. Для этого создадим 4 матрицы, представляющие систему координат и положение каждого основания ноги (8).

Для этого перемножим 3 матрицы (5,6,7) оборотов вокруг осей для получения сложного вращения, однородную матрицу элементарного сдвига, в которую подставим половину длины (L) и ширины (W) робота и матрицу поворота со значением $\pm\frac{\pi}{2}$ для задания начального положения в пространстве.

Невозможно, чтобы тело лежало во всех плоскостях: относительно третей плоскости тело робота все равно будет располагаться под углом 90 градусов, значение которого мы и задаем. Матрица сдвига задает параллельный перенос системы координат каждой ноги относительно абсолютной системы OXYZ на вектор (dx, dy, dz).

$$T_{\alpha} \times T_{\varphi} \times T_{\psi} \times T_{\varphi}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} cos(\varphi) & 0 & sin(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin(\varphi) & 0 & cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} cos(\psi) & -sin(\psi) & 0 & 0 \\ sin(\psi) & cos(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) & 0 & sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) & 0 & cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \pm\frac{L}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pm\frac{W}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Полученная в ходе расчетов модель корпуса робота в пространстве представлена на рисунке 32.

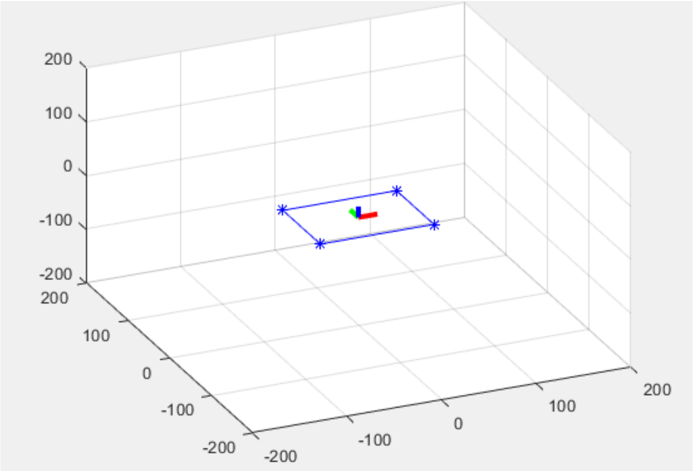

Рисунок 32 – Моделирование корпуса

5.2 Решение прямой задачи кинематики методом Денавита-Хартенберга

В данном параграфе приведено моделирование ног и решение прямой задачи кинематики. Прямая задача: нам даны углы сервоприводов θ_1, θ_2 , θ_3 , нужно найти координаты x_{paw}, y_{paw}, z_{paw}. Для успешного решения задачи необходимо присвоить системы координат каждому звену робота (рисунок 34) и с их помощью найти параметры Денавита-Хартенберга (таблица 11).

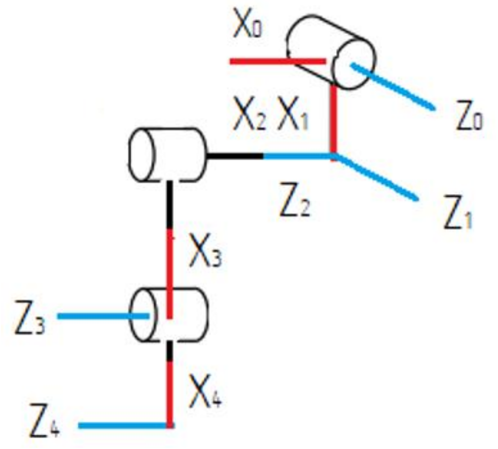

Рисунок 34 – Вычисление ДХ параметров

Таблица 1 – Параметры ДХ

	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
0-1	$-\left(\frac{\pi}{2}\right)$	L1	0	$\theta_1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)$
1-2	0	0	L2	0
2-3	0	L3	0	θ_2
3-4	0	L4	0	θ_3

Подставив все параметры Денавита-Хартенберга в формулу 13, получим 4 матрицы однородного преобразования (14.15.16.17). Итоговую матрицу, связывающую все системы координат, как и в случае с матрицами вращения, можно получить последовательным перемножением (18):

$$T_i = \begin{bmatrix} cos(\theta_i) & -sin(\theta_i)cos(\alpha_i) & sin(\theta_i)sin(\alpha_i) & a_i cos(\theta_i) \\ sin(\theta_i) & cos(\theta_i)cos(\alpha_i) & -cos(\theta_i)sin(\alpha_i) & a_i sin(\theta_i) \\ 0 & sin(\alpha_i) & cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & sin\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & L_1 cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -cos\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & L_1 sin\left(\theta_1 + \frac{\pi}{2}\right) \\ 1 & sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$T_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$T_2^3 = \begin{bmatrix} cos(\theta_2) & -sin(\theta_2) & 0 & L_3cos(\theta_2) \\ sin(\theta_2) & cos(\theta_2) & 0 & L_3sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$T_3^4 = \begin{bmatrix} cos(\theta_3) & -sin(\theta_3) & 0 & L_4cos(\theta_3) \\ sin(\theta_3) & cos(\theta_3) & 0 & L_4sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$T_0^4 = T_0^1 \times T_1^2 \times T_2^3 \times T_3^4 \tag{18}$$

5.3 Связь прямой задачи кинематики и корпуса робота

Для того чтобы связать корпус робота и ноги нужно каждую из 4 матриц, представляющие систему координат и положение каждого основания ноги T *(8)* умножить на 2 матрицы поворота вокруг осей $R_{x,\alpha}, R_{y,\varphi}$ и на матрицу T_0^4, полученную в предыдущем параграфе (18). Полученная модель представлена на рисунке 35.

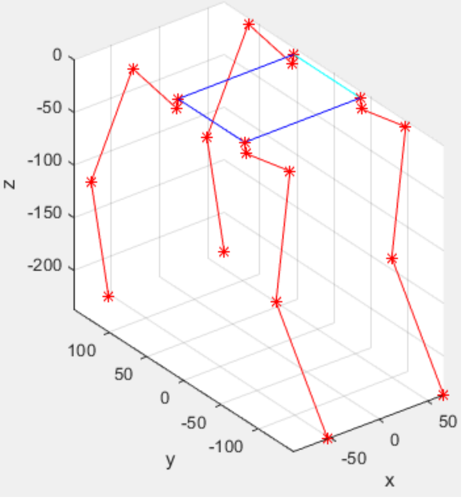

Рисунок 35 – Моделирование корпуса и ног