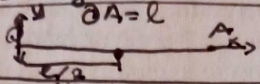
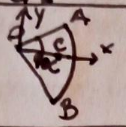
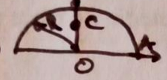
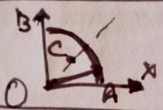
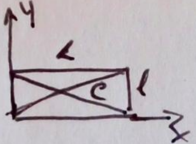
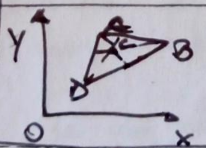
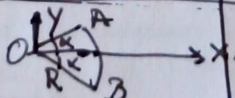
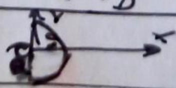
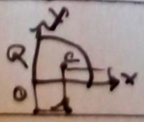
CENTRUL DE GREUTATE

Centrul de greutate este centrul sistemului de forțe paralele format din greutățile G_i ale punctelor din care se compune corpul.

Pentru a determina coordonatele centrului de greutate de corpurilor complexe se parcurg următoarele etape

- Pasul 1: Se împarte corpul complex în corpuri simple pentru care se pot determina centrele de greutate

BARE având forma	dreaptă		$OA = l$	$x_C = \frac{l}{2}$	$y_C = 0$
	arc circular		$AB = 2r\alpha$	$x_C = OC = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$	$y_C = 0$
	semicirculară		$AB = \pi R$	$x_C = 0$	$y_C = \frac{2R}{\pi}$
	sfert de cerc		$AB = \frac{\pi R}{2}$	$x_C = y_C = \frac{2R}{\pi}$	$x_C = y_C = \frac{2R}{\pi}$

PLĂCUȚE de forma:	dreptunghi		$A = l \cdot L$	$x_C = \frac{L}{2}$	$y_C = \frac{l}{2}$
	triunghi			$x_C = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$	$y_C = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$
	sector circular		$A = \alpha R$	$x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin\alpha}{\alpha}$	$y_C = 0$
	semicerc		$A = \frac{\pi R^2}{2}$	$x_C = OC = \frac{4R}{3\pi}$	$y_C = 0$
	sfert de cerc		$A = \frac{\pi R^2}{4}$	$x_C = y_C = OC = \frac{4R}{3\pi}$	$y_C = x_C = OC = \frac{4R}{3\pi}$

- Pasul 2. Se alege un sistem de coordon în raport cu care se determină coordonatele centrelor de greutate ale corpurilor simple

- Pasul 3. Se det pozițiile centrelor de greutate pentru corpurile simple și se calculează elem. geometrice ale acestora (lungimi, arii, volume)

- Pasul 4. Se completează datele calculate la pasul 3 într-un tabel de forma:

Nr. crt	G_i	x_i	y_i	z_i	$G_i \cdot x_i$	$G_i \cdot y_i$	$G_i \cdot z_i$
1							
2							
⋮							
n							
	Σ	--	--	--	Σ	Σ	Σ

unde G_i repr. lungimea/aria/volumul corpului i

Pasul 5. se det coordonatele centrului de greutate ale corpului complex aplicând formulele

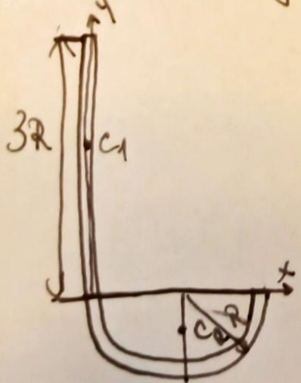
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i}$$

$$y_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{G_i \cdot y_i}{G_i}$$

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i}$$

Problema 1.

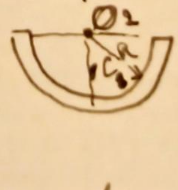
Să se det. coord. centrului de greutate a sistemului de bare din figura de mai jos cunoscând raza R



- se obs că sistemul de bare poate fi împărțit în 2 corpuri: bară liniară verticală de lungime 3R și cea curbată sub formă de semicerc de rază R

corp 1

Corp 2



Pasul 2. Se alege un sist. de axe de coordonate în raport cu care se det. coordon. centrelor de greutate

- Reprezentarea poziției centrelor de greutate pentru cele 2 corpuri este realizată în figura:

$l_1 = 3R$ Bara 1

$x_1 = 0$

$y_1 = \frac{3R}{2}$

Bara 2 B2 fiind de forma unui semicerc de rază R, va avea lungimea egală cu lungimea semicercului de rază R, adică

$$l_2 = \pi R$$

Deoarece la barele curbate nu putem calcula direct coord. c.d.g., conform teoriei vom calcula distanța de la centrul arcului de cerc la c.d.g. al barei, adică lungimea segmentului O_2C_2, astfel: $OC_2 = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$

Se obs. că măsura unghiului la centru este π rad și obț. unghiul α ca fiind $\alpha = \pi/2$ rad

$$O_2C_2 = R \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}$$

Nr.crt.	l_i	x_i	y_i	$l_i \cdot x_i$	$l_i y_i$
1 ‖	$3R$	0	$3R$	0	$\frac{9R^2}{2}$
2 ∪	πR	R	$-\frac{3R}{\pi}$	πR^2	$-2R$
	$\sum l_i$	--	--	$\sum l_i \cdot x_i$	$\sum l_i y_i$

Vom calc. următoarele sume:

$$\sum l_i = 3R + \pi R$$

$$\sum l_i x_i = 0 + \pi R^2 = \pi R^2$$

$$\sum l_i y_i = \frac{9R^2}{2} - 2R^2 = \frac{5R^2}{2}$$

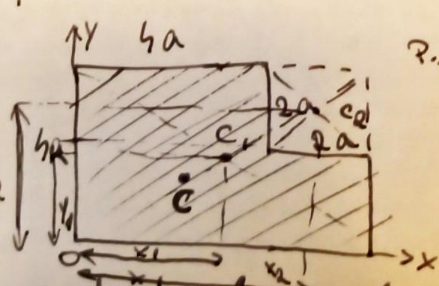
Coord. centrului

$$x_C = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i} = \frac{\pi R^2}{3R + \pi R} = \frac{\pi R}{3 + \pi} = 0,5$$

$$y_C = \frac{\sum l_i y_i}{\sum l_i} = \frac{\frac{5R^2}{2}}{3R + \pi R} = 0,41R$$

<u>Problema 2</u>

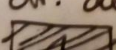
. Să se det. coord. c.d.g $C(x_C, y_C)$ a plăcii omogene din figura de mai jos, cunoscând dim. lat



P.1. Se împarte corpul complex în corpuri simple

- Placa poate fi descompusă în următoarele corpuri simple

C_1 - o placă dr. de L 6a și l de 4a



C_2 - un pătrat de l 2a, care va fi decupat din corpul 1

P2. se alege un sist de axe de coord.

P3. se det pozitiile c.d.g pt. corpuri simple

C1.

$A_1 = L \cdot l = 6a \cdot 4a = 24a^2$

$x_1 = \frac{L}{2} = \frac{6a}{2} = 3a$

$y_1 = \frac{l}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$

C2

$A_2 = l^2 = (2a)^2 = 4a^2$

$x_2 = 6a - \frac{2a}{2} = 6a - a = 5a$

$y_2 = 4a - \frac{2a}{2} = 4a - a = 3a$

P4. se compl date in tabel

Nr. crt		A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1		$24a^2$	$3a$	$2a$	$72a^3$	$48a^3$
2		$-4a^2$	$5a$	$3a$	$-20a^3$	$-12a^3$
		Σ_{A_1}	--	--	$\Sigma_{A_i x_i}$	$\Sigma_{A_i y_i}$

$\Sigma_{A_i} = 20a^2$

$\Sigma_{A_i x_i} = 53a^3$

$\Sigma_{A_i y_i} = 36a^3$

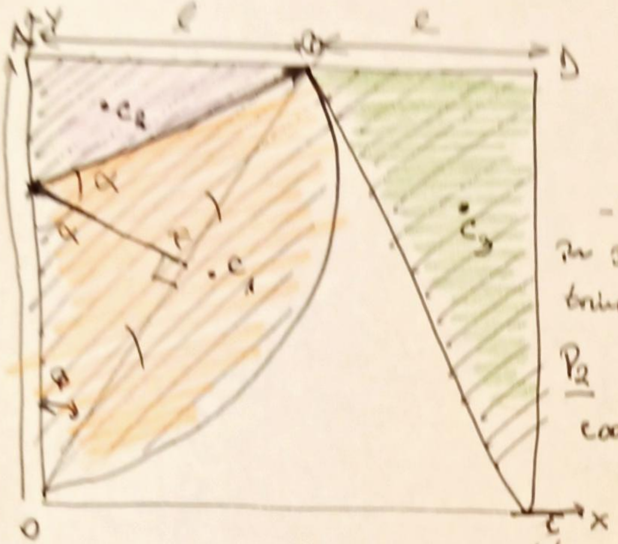
Coord. c.d.g.

$x_C = 2,6a$

$y_C = 1,8a$

R_3

Să se det. coord. centrului de greutate $C(x_c, y_c)$ a plăcii omogene din figura de mai jos cunoscând dimensiunile laturilor și știind că arcul de cerc este tangent la latura OB



P_1 Se împarte corpul în corpuri mai simple

- Placa poate fi descompusă în 3 părți simple: sector de cerc, triunghi, triunghi

P_2 Se alege sistemul de axe de coordonate

- Pt sect. de cerc trebuie să se det. centrul cercului din care face parte, raza și unghiul la centrul a α. Centrul cercului se găsește la intersecția cu axei Oy cu mediatoarea coardei OB

Se trasează dreapta OB, obț. triunghiul dr. OAB

$OB = (l\sqrt{3})^2 + l^2$

$\Rightarrow OB = 2l$

Pct. F se află pe mediat. coardei deci este la mijl lui OB

$OF = \frac{OB}{2} = l$

se det. ∢ format de OB cu axa y $\quad tg\,\beta = \frac{AB}{OA} = \frac{l}{l\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$

În $\Delta\, OO_2F$ se det $\quad \alpha = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \widehat{OO_1B} = \frac{2\pi}{3}$

$OO_1 = O_1B = \frac{OF}{\cos\beta} = \frac{l}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2l\sqrt{3}}{3} = R$

se obs $OB = BE = OE = 2l \Rightarrow \Delta OBE$ = echilat $\Rightarrow \widehat{OBE} = \frac{\pi}{3}$

$\widehat{OO_1B} = \widehat{O_1OB} = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \widehat{O_1BE} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow BE$ = tg în B la OB

$O_1C_1 = \frac{2l}{\pi}$

$O_1A = OA - OO_1 = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

$\underline{P_3}$

$\underline{C_1}$

$$A_1 = \frac{\pi}{3}R^2 = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2l\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4\pi l^2}{9}$$

$$x_1 = O_1C_1 \sin\frac{\pi}{3} = \frac{l\sqrt{3}}{\pi}$$

$$Y_1 = R - O_1C_1\cos\frac{\pi}{3} = l\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\pi}\right)$$

$\underline{C_2}$

$$A_2 = \frac{1}{2}\,\frac{l\sqrt{3}}{3}\,l = \frac{l^2\sqrt{3}}{6}$$

$$x_2 = \frac{l}{3}$$

$$Y_2 = \frac{8l\sqrt{3}}{9}$$

$\underline{C_3}$:

$$A_3 = \frac{l^2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(l + 2l + 2l) = \frac{5l}{3}$$

$$y_3 = \frac{1}{3}(0 + l\sqrt{3} + l\sqrt{3}) = \frac{2l\sqrt{3}}{3}$$

$\underline{P_4}$.

Nr. corp	A_i	x_i	Y_i	$A_i \cdot x_i$	$A_i y_i$
1	$\frac{4\pi l^2}{9}$	$\frac{l\sqrt{3}}{\pi}$	$l\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\pi}\right)$	$\frac{4\sqrt{3}\,l^3}{9}$	$l^3\left(\frac{8\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{4}{9}\right)$
2	$\frac{l^2\sqrt{3}}{6}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{8l\sqrt{3}}{9}$	$\frac{l^3\sqrt{3}}{18}$	$\frac{4l^3}{9}$
3	$\frac{l^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5l}{3}$	$\frac{2l\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5l^3\sqrt{3}}{6}$	l^3
$\sum$	$l^2\frac{6\sqrt{3}+4\pi}{9}$	---	---	$\frac{4l^3\sqrt{3}}{3}$	$l^3\left(1 + \frac{8\pi\sqrt{3}}{27}\right.$

$\underline{P_5}$.

$$x_C = \frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{3}+4\pi}\,l = 0{,}9l$$

$$Y_C = \frac{27 + 8\pi\sqrt{3}}{3(6\sqrt{3}+4\pi)}\,l = 1{,}02l$$