

# Skript Regelungstechnik (LaTeX-Version)

16. Januar 2026

Dieses Skript ist eine gesetzte (LaTeX-)Fassung der hochgeladenen handschriftlichen Notizen. Begriffe und Formeln wurden dabei sprachlich geglättet und fachlich konsistent formuliert (z. B. eindeutige Definitionen von Übertragungsfunktion, Frequenzgang, Kreisverstärkung und Stabilitätskriterien).

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Analoge Übertragungsglieder (ÜTG)</b>	<b>3</b>
1.1	Begriffe und Eigenschaften . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Typische Signale</b>	<b>3</b>
2.1	Aperiodische Eingangssignale . . . . .	3
2.2	Impulsfunktion (Dirac-Stoß) . . . . .	4
2.3	Antwortfunktionen eines LZI-ÜTG . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Mathematische Beschreibung im Zeitbereich</b>	<b>5</b>
3.1	Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	5
3.2	Beispiele: typische ÜTG . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Laplace-Transformation und Übertragungsfunktion</b>	<b>5</b>
4.1	Exponentialansatz und Laplace-Operator . . . . .	5
4.2	Laplace-Transformation des Dirac-Impulses . . . . .	6
4.3	Übertragungsfunktion (ÜTF) . . . . .	6
4.4	Übersicht: DGL zu ÜTF . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Beschreibung im Frequenzbereich</b>	<b>7</b>
5.1	Frequenzgang . . . . .	7
5.2	Ortskurve . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Bode-Diagramme</b>	<b>10</b>
6.1	Amplitude in Dezibel . . . . .	10
6.2	Beispiel: PT1-Glied . . . . .	10
<b>7</b>	<b>Dämpfungsphänomene und schwingungsfähige lineare ÜTG</b>	<b>11</b>
7.1	Worum geht es? . . . . .	11
7.2	Dämpfungsphänomene am Beispiel des PT2-Glieds . . . . .	11
7.2.1	Dämpfungsfälle . . . . .	13
7.2.2	Überschwingen bei der Sprungantwort . . . . .	14
7.2.3	Eigenfrequenz vs. Resonanzfrequenz . . . . .	15
<b>8</b>	<b>Blockdiagramme</b>	<b>16</b>
8.1	Grundidee und Motivation . . . . .	16
8.2	Blöcke und Übertragungsfunktionen . . . . .	16
8.3	Offener vs. geschlossener Regelkreis . . . . .	17

8.4	Regeln zur Umformung (mit Formeln und Bildern)	18
8.4.1	Regel 1: Reihenschaltung (Kaskade)	18
8.4.2	Regel 2: Parallelschaltung	18
8.4.3	Regel 3: Rückführung (Feedback)	18
8.4.4	Regel 4: Summierstelle über einen Block verschieben	19
8.4.5	Regel 5: Abzweigstelle (Messabgriff) über einen Block verschieben	19
8.4.6	Regel 6: Innere Schleifen zuerst reduzieren	19
<b>9</b>	<b>Einschleifiger Regelkreis: Standardformen</b>	<b>20</b>
9.1	Struktur und Grundgleichungen	20
9.2	Führungs- und Störübertragungsfunktion	20
9.3	Statisches Verhalten, Regelfaktor	20
9.4	P-, I- und PI-Regler (Grundideen)	21
<b>10</b>	<b>Stabilität linearer Regelkreise</b>	<b>21</b>
10.1	Charakteristische Gleichung	21
10.2	Nyquist-Idee (qualitativ)	21
10.3	Nyquist-Diagramm und Nyquist-Kriterium	22
10.4	Hurwitz-Kriterium (Polynomkriterium)	23
10.5	Beispiel: PT2-Strecke mit PI-Regler (Stabilitätsgebiet)	24
<b>11</b>	<b>Reglerstrukturen (PD, PID) und Realisierungshinweise</b>	<b>24</b>
11.1	PD- und PID-Formen	24
11.2	(Invertierender) OPV-Grundsatz	25
<b>A</b>	<b>Mini-Formelsammlung (Laplace)</b>	<b>26</b>
<b>B</b>	<b>Ausführliche Aufgaben</b>	<b>26</b>

# 1 Analoge Übertragungsglieder (ÜTG)

## 1.1 Begriffe und Eigenschaften

Ein Übertragungsglied (ÜTG) beschreibt den Zusammenhang zwischen einem Eingangssignal („Ursache“)  $x_e(t)$  und einem Ausgangssignal („Wirkung“)  $x_a(t)$ :

$$x_e(t) \longrightarrow \text{ÜTG} \longrightarrow x_a(t).$$

Im Folgenden betrachten wir in erster Linie analoge, **lineare** und **zeitinvariante** Systeme (**LZI**-Systeme). Für diese Systeme gelten besonders einfache Rechenregeln (Superposition, Faltung, Laplace- und Frequenzbereichsdarstellung).

**Linearität (Superpositionsprinzip).** Ein System ist linear, wenn für beliebige Signale  $x_1, x_2$  und Konstanten  $a, b$  gilt:

$$x_e(t) = a x_1(t) + b x_2(t) \quad \Rightarrow \quad x_a(t) = a y_1(t) + b y_2(t),$$

wobei  $y_i(t)$  die jeweilige Antwort auf  $x_i(t)$  ist.

**Zeitinvarianz.** Ein System ist zeitinvariant, wenn eine zeitliche Verschiebung des Eingangssignals eine identische Verschiebung des Ausgangssignals bewirkt (bei gleichen Anfangsbedingungen):

$$x_e^*(t) = x_e(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad x_a^*(t) = x_a(t - t_0).$$

**Beispiel (LZI).** Ein Verstärker mit  $x_a(t) = 2 x_e(t)$  ist linear und zeitinvariant. Eine Rampe  $x_e(t) = t \sigma(t)$  wird zu  $x_a(t) = 2t \sigma(t)$ .

## 2 Typische Signale

### 2.1 Aperiodische Eingangssignale

**Sprungfunktion (Einheitssprung).**

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Ein allgemeiner Sprung der Höhe  $x_{e0}$  lautet  $x_e(t) = x_{e0} \sigma(t)$ .

**Rechteckimpuls.** Ein Rechteckimpuls (Höhe  $x_{e0}$ , Dauer  $t_0$ ) lässt sich als Differenz zweier Sprünge schreiben:

$$x_e(t) = x_{e0}(\sigma(t) - \sigma(t - t_0)).$$

**Beispiel (Rechteckimpuls).** Für  $x_{e0} = 2$  und  $t_0 = 0,5$  gilt  $x_e(t) = 2(\sigma(t) - \sigma(t - 0,5))$ .

**Rampe.** Die (Einheits-)Rampe ist das Integral der Sprungfunktion:

$$r(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau = t \sigma(t).$$

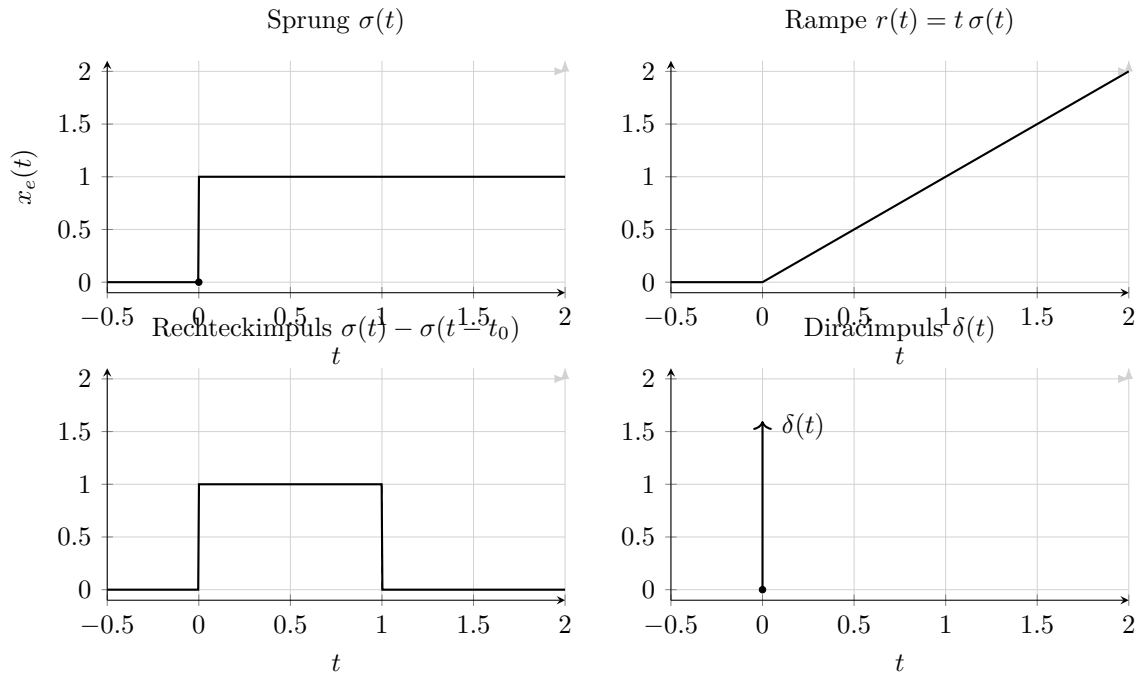


Abbildung 1: Typische Eingangssignale im Zeitbereich (normiert,  $t_0 = 1$ ) inklusive Diracimpuls.

## 2.2 Impulsfunktion (Dirac-Stoß)

Die Dirac-Impulsfunktion  $\delta(t)$  ist eine idealisierte Grenzfunktion; im strengen mathematischen Sinn ist  $\delta(t)$  keine (klassische) Funktion, sondern eine Distribution (verallgemeinerte Funktion). Sie wird als Idealisierung eines sehr kurzen Impulses mit endlichem Flächeninhalt verstanden und besitzt die Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(t) = 0 \text{ für } t \neq 0.$$

Wichtige Beziehung zur Sprungfunktion:

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) = \delta(t).$$

## 2.3 Antwortfunktionen eines LZI-ÜTG

- **Übergangsfunktion (Sprungantwort)  $h(t)$ :** Antwort auf den Einheitssprung  $x_e(t) = \sigma(t)$ , also  $x_a(t) = h(t)$ .
- **Gewichtsfunktion (Impulsantwort)  $g(t)$ :** Antwort auf den Dirac-Impuls  $x_e(t) = \delta(t)$ , also  $x_a(t) = g(t)$ .

Wegen  $\delta(t) = \frac{d}{dt} \sigma(t)$  gilt für LZI-Systeme der zentrale Zusammenhang:

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t) = \dot{h}(t).$$

(Umgekehrt:  $h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$ .)

### 3 Mathematische Beschreibung im Zeitbereich

#### 3.1 Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Ein LZI-ÜTG kann im Zeitbereich häufig durch eine lineare Differentialgleichung (DGL) beschrieben werden:

$$\sum_{m=0}^n a_m \frac{d^m x_a(t)}{dt^m} = \sum_{k=0}^{\ell} b_k \frac{d^k x_e(t)}{dt^k}, \quad a_n \neq 0.$$

**Beispiel (PT1).** Ein Verzögerungsglied erster Ordnung erfüllt  $T \dot{x}_a + x_a = K x_e$ . Für einen Einheitssprung  $x_e(t) = \sigma(t)$  ergibt sich eine exponentielle Annäherung an den Endwert  $K$ .

#### 3.2 Beispiele: typische ÜTG

Name	Zeitbereich (DGL)	Bemerkung
P-Glied	$x_a = K_P x_e$	proportional
I-Glied	$\dot{x}_a = K_I x_e$	integratorisch
D-Glied	$x_a = K_D \dot{x}_e$	ideal differenzierend
PT1-Glied	$T \dot{x}_a + x_a = K x_e$	Verzögerung 1. Ordnung
PT2-Glied	$T^2 \ddot{x}_a + 2DT \dot{x}_a + x_a = K x_e$	Verzögerung 2. Ordnung
DT1-Glied	$T \dot{x}_a + x_a = K_D \dot{x}_e$	realisierbares D-Glied

### 4 Laplace-Transformation und Übertragungsfunktion

#### 4.1 Exponentialansatz und Laplace-Operator

Viele für die Regelungstechnik relevante Signale lassen sich als (komplexe) Exponentialform schreiben:

$$x(t) = \hat{X} e^{pt}, \quad p = \sigma + j\omega.$$

Für diesen Ansatz gilt:

$$\frac{d}{dt}x(t) = p x(t), \quad \frac{d^2}{dt^2}x(t) = p^2 x(t), \quad \dots$$

Die Variable  $p$  wirkt im Bildbereich als Differentialoperator. Mit dem Laplace-Operator ist die Abbildung  $\mathcal{L}\{\cdot\}$  gemeint, die ein Zeitbereichssignal  $x(t)$  in seine Laplace-Transformierte  $X(p)$  im  $p$ -Bereich ueberfuehrt. Für ein kausales Signal  $x(t)$ :

$$X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt.$$

In der Regelungstechnik wird häufig mit Null-Anfangsbedingungen gearbeitet, so dass Ableitungen einfach in Multiplikationen übergehen. Das sieht man aus der partiellen Integration:

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \dot{x}(t) e^{-pt} dt = [x(t) e^{-pt}]_{0^-}^{\infty} + p \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt = -x(0^-) + pX(p),$$

wobei der Randterm  $[x(t) e^{-pt}]_{0^-}^{\infty}$  der aus der partiellen Integration stammende Bewertungsanteil an den Integrationsgrenzen ist. Für kausale, abklingende Signale verschwindet der Anteil bei  $t \rightarrow \infty$ , weil  $x(t)$  nicht schneller wächst als  $e^{\sigma t}$  mit  $\sigma < \text{Re}\{p\}$ , und es bleibt der Anfangswertanteil  $-x(0^-)$ . Analog gilt

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = p^2 X(p) - p x(0^-) - \dot{x}(0^-).$$

Bei Null-Anfangsbedingungen folgt damit  $\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = pX(p)$  und  $\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = p^2 X(p)$ .

## 4.2 Laplace-Transformation des Dirac-Impulses

Die Dirac-Impulsfunktion wirkt in Integralen als Abtaster (Sieb-Eigenschaft):

$$\int_{0^-}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0^-).$$

Damit folgt direkt

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1.$$

Für einen verschobenen Impuls gilt entsprechend

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-pt} dt = e^{-pt_0} \quad (t_0 > 0).$$

## 4.3 Übertragungsfunktion (ÜTF)

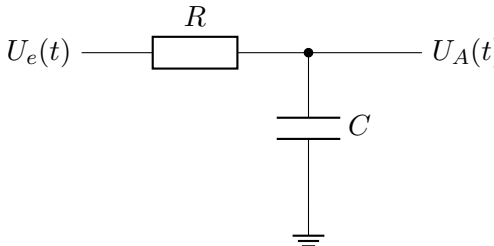
Für ein LZI-ÜTG mit Null-Anfangsbedingungen gilt im Laplace-Bereich:

$$G(p) = \frac{X_a(p)}{X_e(p)}.$$

Dabei sind  $X_a(p) = \mathcal{L}\{x_a(t)\}$  und  $X_e(p) = \mathcal{L}\{x_e(t)\}$  die Laplace-Transformationen der Zeitfunktionen. Die Übertragungsfunktion  $G(p)$  beschreibt damit die dynamische Beziehung zwischen Eingang und Ausgang im  $p$ -Bereich und ist bei Null-Anfangsbedingungen allein durch das System bestimmt. Sobald  $G(p)$  bekannt ist, folgt für jede Anregung  $X_a(p) = G(p) X_e(p)$ .

Die zugehörige Differentialgleichung stammt aus dem physikalischen Modell.

**Beispiel (PT1, RC-Tiefpass).** Ein einfacher RC-Tiefpass (Passfilter 1. Ordnung) mit Eingangsspannung  $U_e(t)$  und Ausgangsspannung  $U_A(t)$  liefert mit dem Knotenstromsatz



$$i_R = \frac{U_e(t) - U_A(t)}{R}, \quad i_C = C \dot{U}_A(t), \quad i_R = i_C$$

und damit

$$RC \dot{U}_A(t) + U_A(t) = U_e(t).$$

Identifiziert man  $x_a = U_A$ ,  $x_e = U_e$ ,  $T = RC$  und  $K = 1$ , ergibt sich die PT1-DGL

$$T \dot{x}_a + x_a = K x_e.$$

Im Laplace-Bereich folgt

$$(Tp + 1)X_a(p) = K X_e(p) \implies G(p) = \frac{K}{1 + Tp}.$$

**Beispiel (Sprunganregung am PT1).** Für  $x_e(t) = \sigma(t)$  gilt  $X_e(p) = \frac{1}{p}$  und damit

$$X_a(p) = G(p) X_e(p) = \frac{K}{p(1 + Tp)}.$$

Rücktransformation liefert die Sprungantwort  $x_a(t) = K \left(1 - e^{-t/T}\right) \sigma(t)$ . Dabei gilt beim Einheitssprung  $\sigma(t) = 1$  für  $t \geq 0$ .

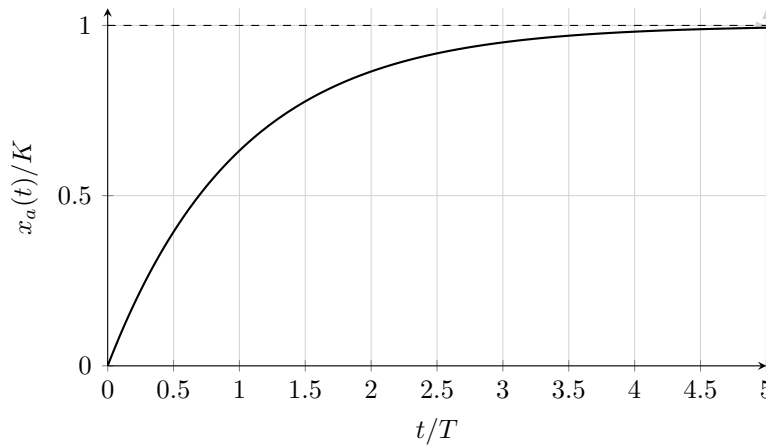


Abbildung 2: Sprungantwort eines PT1-Glieds:  $G(p) = \frac{K}{1+Tp}$ ,  $x_a(t) = K(1 - e^{-t/T})\sigma(t)$ .

**Beispiel (PT2 aus DGL).**

$$T^2 \ddot{x}_a + 2DT \dot{x}_a + x_a = K x_e \implies (T^2 p^2 + 2DTp + 1)X_a(p) = K X_e(p),$$

$$G(p) = \frac{K}{1 + 2DTp + T^2 p^2}.$$

Weitere, umfangreichere Übungsaufgaben finden sich im Anhang, siehe Abschnitt [B](#).

#### 4.4 Übersicht: DGL zu ÜTF

Name	DGL	Übertragungsfunktion $G(p)$
P-Glied	$x_a = K_P x_e$	$K_P$
D-Glied	$x_a = K_D \dot{x}_e$	$K_D p$
I-Glied	$\dot{x}_a = K_I x_e$	$\frac{K_I}{p}$
DT1-Glied	$T \dot{x}_a + x_a = K_D \dot{x}_e$	$\frac{K_D p}{1 + Tp}$
PT1-Glied	$T \dot{x}_a + x_a = K x_e$	$\frac{K}{1 + Tp}$
PT2-Glied	$T^2 \ddot{x}_a + 2DT \dot{x}_a + x_a = K x_e$	$\frac{K}{1 + 2DTp + T^2 p^2}$

## 5 Beschreibung im Frequenzbereich

### 5.1 Frequenzgang

Für sinusförmige Signale setzt man  $p = j\omega$  und erhält den Frequenzgang:

$$G(j\omega) = G(p)|_{p=j\omega}.$$

Hinweis: Die Rückrichtung gilt nicht ohne Weiteres; aus  $G(j\omega)$  folgt kein eindeutiges  $G(p)$  im Zeitbereich/Laplace-Bereich ohne zusätzliche Annahmen. Schreibweisen:

$$G(j\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega) \quad \text{oder} \quad G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}.$$

Betrag und Phase:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}(\omega)^2 + \operatorname{Im}(\omega)^2}, \quad \varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)).$$

Bei der Winkelbestimmung ist auf den Quadranten zu achten (praktisch: `atan2`).

**Rechenregel (komplexe Brüche).** Für  $G(j\omega) = \frac{Z(\omega)}{N(\omega)}$  mit  $N(\omega) \neq 0$ :

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z \bar{N}}{N \bar{N}},$$

woraus sich Re, Im bequem bestimmen lassen.

**Beispiel (PT1,  $K = 1$ ).** Mit  $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$  folgt

$$G(j\omega) = \frac{1 - j\omega T}{1 + (\omega T)^2}, \quad \text{Re}(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega T)^2}, \quad \text{Im}(\omega) = \frac{-\omega T}{1 + (\omega T)^2}.$$

## 5.2 Ortskurve

Die Ortskurve ist der geometrische Ort aller Werte von  $G(j\omega)$  in der komplexen Ebene, wenn  $\omega$  von 0 bis  $\infty$  läuft. Man konstruiert sie, indem  $\omega$  als Parameter durchlaufen wird und die Punkte  $(\text{Re}(\omega), \text{Im}(\omega))$  eingezeichnet werden; für Systeme mit reellen Koeffizienten ergibt sich die vollständige Kurve durch Spiegelung an der reellen Achse. Kernaussage (Prüfungsstoff): Der Verlauf macht Betrag und Phase im Frequenzbereich sichtbar und bildet die Grundlage für Nyquist-Betrachtungen (Stabilität, Reserven). Die zugehörigen Nyquist-Ortskurven der gezeichneten Standardglieder (Normierung  $K = 1$ ,  $T = 1$ ) sind in Tabelle 1 zusammengefasst; daneben steht die allgemeine Form. Die gezeichneten PTn entsprechen kaskadierten PT1 mit gleichen Zeitkonstanten.

Glied	Gezeichnet ( $K = 1$ , $T = 1$ )	Allgemein
P	$G(j\omega) = 1$	$G(j\omega) = K$
I	$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$	$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega}$
D	$G(j\omega) = j\omega$	$G(j\omega) = K_D j\omega$
PI	$G(j\omega) = 1 + \frac{1}{j\omega}$	$G(j\omega) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I j\omega}\right)$
PD	$G(j\omega) = 1 + j\omega$	$G(j\omega) = K_P (1 + T_D j\omega)$
PT1	$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$	$G(j\omega) = \frac{K}{1 + T j\omega}$
PT2	$G(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)^2}$	$G(j\omega) = \frac{K}{1 + 2D T j\omega + (T j\omega)^2}$
PT3	$G(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)^3}$	–
PT4	$G(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)^4}$	–
PT7	$G(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)^7}$	–

Tabelle 1: Nyquist-Ortskurven der gezeichneten Standardglieder und allgemeine Formen.

Für kaskadierte PTN-Glieder mit unterschiedlichen Zeitkonstanten gilt allgemein

$$G(j\omega) = \frac{K}{\prod_{i=1}^n (1 + T_i j\omega)}.$$

Die gezeichnete PT2-Kurve entspricht dem Sonderfall  $D = 1$  (kritische Dämpfung) bei  $T = 1$ .



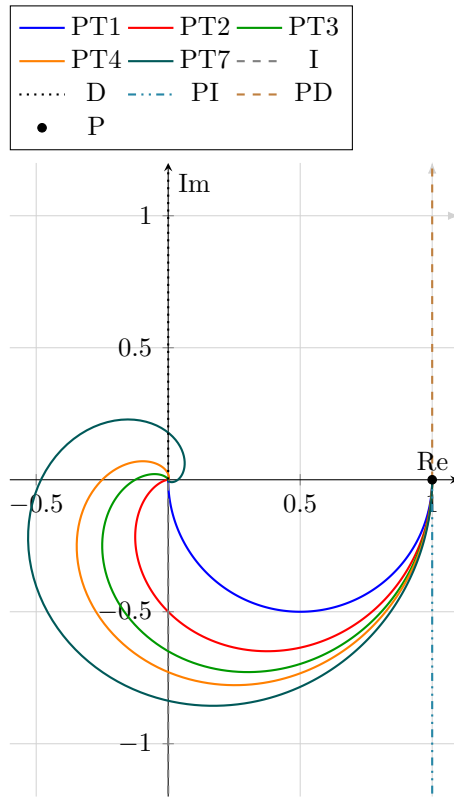


Abbildung 3: Nyquist-Ortskurven der Standardglieder (Ausschnitt,  $K = 1$ ,  $T = 1$ ; PT1–PT4, PT7, PI und PD). Gezeigt ist  $\omega > 0$ ; die vollständige Kurve ergibt sich durch Spiegelung an der reellen Achse. Das I- und D-Glied verlaufen entlang der imaginären Achse.

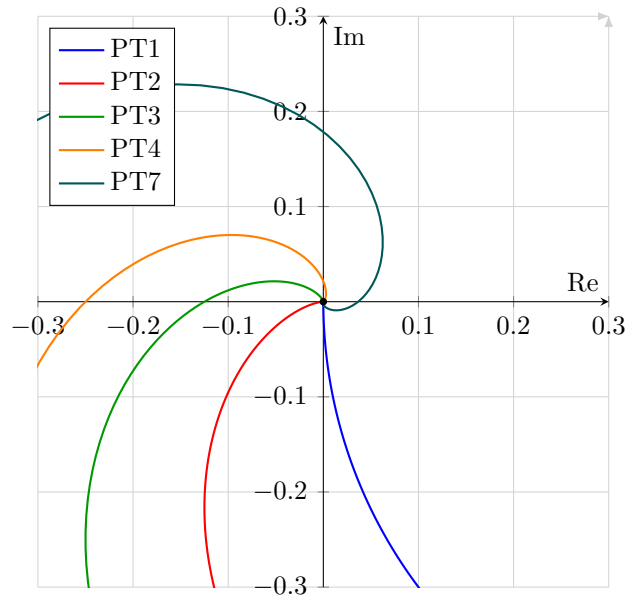


Abbildung 4: Zoom um den Ursprung: Nyquist-Ortskurven der PT-Glieder ( $K = 1$ ,  $T = 1$ ; PT1–PT4 und PT7). Mit wachsendem  $n$  verläuft die Kurve näher um  $(0,0)$  und durchläuft dabei mehrere Quadranten (nur  $\omega > 0$ , Spiegelung an der reellen Achse ergibt die vollständige Kurve).

## 6 Bode-Diagramme

### 6.1 Amplitude in Dezibel

$$L(\omega) = 20 \log_{10}(|G(j\omega)|) \text{ dB.}$$

Wichtiger Vorteil:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) G_2(j\omega) \Rightarrow L(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega).$$

Analog addieren sich Phasen:

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega).$$

### 6.2 Beispiel: PT1-Glied

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}.$$

Damit:

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega T).$$

Asymptotisch:

- $\omega \ll 1/T$ :  $|G| \approx K$  (0 dB-Steigung),  $\varphi \approx 0^\circ$ .
- $\omega \gg 1/T$ :  $|G| \approx \frac{K}{\omega T}$  (Steigung  $-20 \text{ dB/dec}$ ),  $\varphi \approx -90^\circ$ .

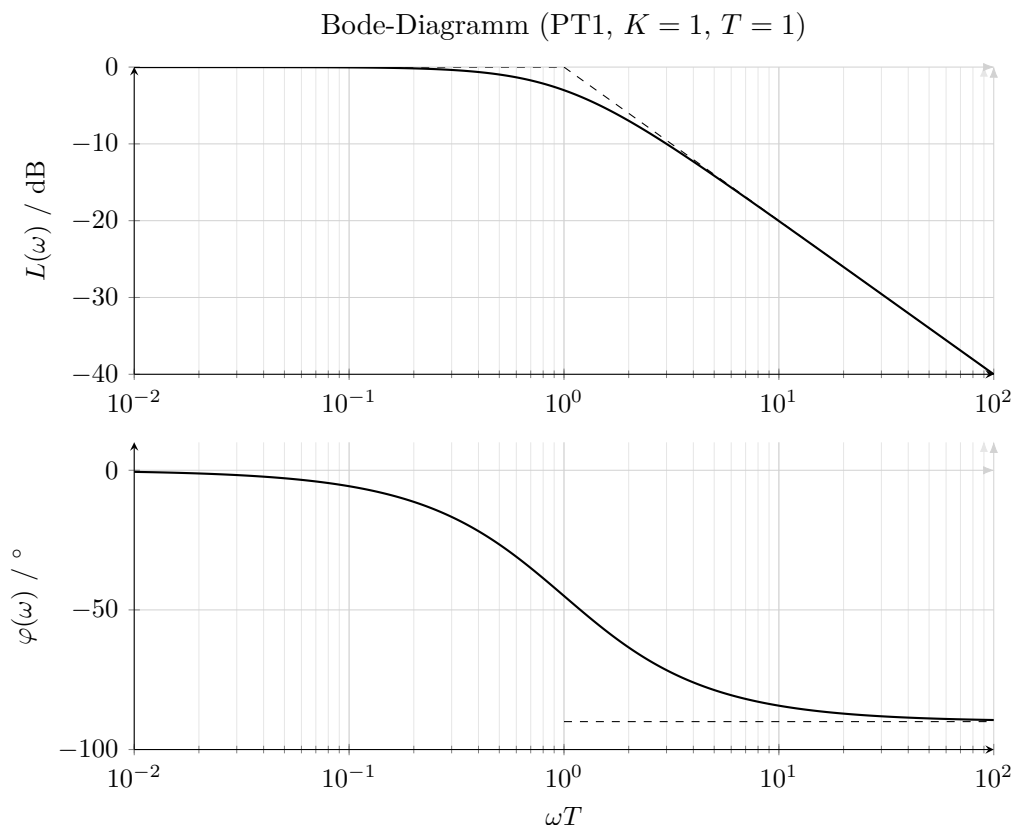


Abbildung 5: Bode-Diagramm des PT1-Glieds. Die gestrichelten Linien zeigen die asymptotischen Näherungen (0 dB bzw.  $-20 \text{ dB/dec}$ , Phase gegen  $-90^\circ$ ).

**Beispiel (Verstärkung).** Wird  $K$  von 1 auf 10 erhöht, verschiebt sich der Amplitudengang um 20 dB nach oben; die Phasenlage bleibt unverändert.

## 7 Dämpfungsphänomene und schwingungsfähige lineare ÜTG

### 7.1 Worum geht es?

In vielen technischen Systemen (Regelkreise, Filter, mechanische Strukturen, elektrische Netzwerke) tritt nach einer plötzlichen Änderung des Eingangssignals (z. B. Sprung) eine dynamische Antwort auf. Dabei beobachtet man häufig:

- **Schwingen/Oszillationen:** Das Ausgangssignal zeigt periodische Anteile.
- **Überschwingen (Overshoot):** Der Ausgang überschreitet kurzzeitig den späteren Endwert.
- **Eigenfrequenzen:** Frequenzen, bei denen das System ohne äußere Anregung (frei) schwingt bzw. besonders stark auf Anregungen reagiert.

Wichtig: Ein *PT1-System* (z. B. einfacher RC-Tiefpass) besitzt nur einen Pol und zeigt typischerweise *kein* Überschwingen. Überschwingen ist ein Kennzeichen von Systemen *mindestens zweiter Ordnung* (z. B. RLC-Netzwerke, PT2, viele Regelkreise).

### 7.2 Dämpfungsphänomene am Beispiel des PT2-Glieds

$$G(p) = \frac{K}{1 + 2DTp + T^2p^2}.$$

Eine häufige, normierte Schreibweise ist

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}. \quad (1)$$

- $D$  ... Dämpfungsmaß (entspricht  $\zeta$ ).
- $T$  ... Zeitkonstante (in dieser Normierung entspricht  $\omega_0 = \frac{1}{T}$  der ungedämpften Eigenkreisfrequenz).

**Gütefaktor.** Häufig wird die Dämpfung über den **Gütefaktor** beschrieben:

$$Q = \frac{1}{2D} = \frac{1}{2\zeta}.$$

Großes  $Q$  bedeutet geringe Dämpfung  $\Rightarrow$  ausgeprägtere Resonanzspitze und tendenziell mehr Überschwingen; kleines  $Q$  steht für starke Dämpfung und rasches Abklingen.

**Kurze Herleitung der Normform.** Ausgehend von  $G(p) = \frac{K}{1 + 2DTp + T^2p^2}$  wird der Nenner durch  $T^2$  normiert:

$$G(s) = \frac{K}{1 + 2DTs + T^2s^2} = \frac{\frac{K}{T^2}}{s^2 + \frac{2D}{T}s + \frac{1}{T^2}}.$$

Durch Gleichsetzen der Nennerkoeffizienten mit der Standardform  $s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2$  folgt

$$\omega_0 = \frac{1}{T}, \quad \zeta = D, \quad \frac{K}{T^2} = K\omega_0^2.$$

Setzt man  $K = 1$  (normierte statische Verstärkung), ergibt sich direkt (1).

**Sprungantwort des Standard-PT2.** Für den Einheitssprung gilt  $X_e(s) = 1/s$ . Damit

$$Y(s) = G(s)X_e(s) = \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2)}.$$

Schreibe den Zaehler als Differenz:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0^2}{s(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2)} &= \frac{(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2) - (s^2 + 2D\omega_0 s)}{s(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s^2 + 2D\omega_0 s}{s(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2D\omega_0}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Quadratische Ergaenzung im Nenner (Schritt fuer Schritt):

$$\begin{aligned} s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2 &= (s^2 + 2D\omega_0 s + D^2\omega_0^2) + \omega_0^2 - D^2\omega_0^2 \\ &= (s + D\omega_0)^2 + (1 - D^2)\omega_0^2. \end{aligned}$$

Zaehler in zwei Teile zerlegen:

$$s + 2D\omega_0 = (s + D\omega_0) + D\omega_0.$$

Definiere nun  $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$ , also  $(1 - D^2)\omega_0^2 = \omega_d^2$ . Damit:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + D\omega_0}{(s + D\omega_0)^2 + \omega_d^2} - \frac{D\omega_0}{(s + D\omega_0)^2 + \omega_d^2}.$$

Ruecktransformation mit den bekannten Paaren (Herleitungen der Ruecktransformationen sind nicht Teil dieses Skripts):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1, \quad (\text{L1})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_d^2}\right\} = e^{-at} \cos(\omega_d t), \quad (\text{L2})$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_d}{(s + a)^2 + \omega_d^2}\right\} = e^{-at} \sin(\omega_d t). \quad (\text{L3})$$

Im letzten Ausdruck stehen zwei Bruchterme mit Quadratterm im Nenner. Der Zaehler  $s + D\omega_0$  passt direkt zum Cosinus-Paar in (L2). Fuer den zweiten Bruchterm braucht man das Sinus-Paar in (L3), dort steht  $\omega_d$  im Zaehler. Wir nutzen dabei die Linearitaet der Ruecktransformation:

$$\mathcal{L}^{-1}\{c F(s)\} = c \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Daher wird der Bruchterm als Konstante mal Standardform geschrieben:

$$\frac{D\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_d^2} = \frac{D\omega_0}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s + a)^2 + \omega_d^2}.$$

Herleitungen zu bekannten Fourier-Transformationspaaren finden sich z. B. in [Fourier-Transformationspaaren](#). Setze  $a = D\omega_0$ . Mit (L3) folgt:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{D\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_d^2}\right\} = \frac{D\omega_0}{\omega_d} e^{-at} \sin(\omega_d t).$$

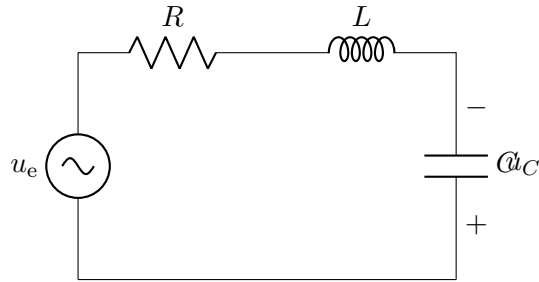
Da  $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$  gilt, folgt

$$\frac{D\omega_0}{\omega_d} = \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}}.$$

Damit ergibt sich

$$x_a(t) = 1 - e^{-D\omega_0 t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \sin(\omega_d t) \right), \quad \omega_d = \omega_0\sqrt{1 - D^2}. \quad (2)$$

## Rechenweg für einen elektrischen Schwingkreis.



**Abbildung 6:** Reihenschwingkreis als PT2-Tiefpass ( $u_C$  als Ausgang). Die Parameter  $R$ ,  $L$ ,  $C$  werden mit  $T = \sqrt{LC}$  und  $D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  in die Normform eingesetzt.

Betrachte einen Reihenschwingkreis aus  $R$ ,  $L$ ,  $C$  (Ausgangsspannung am Kondensator, Tiefpass-PT2). Mit  $Z_R = R$ ,  $Z_L = sL$ ,  $Z_C = \frac{1}{sC}$  liefert die Spannungsteilung

$$G(s) = \frac{U_C(s)}{U_E(s)} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{LC s^2 + RC s + 1}.$$

Vergleiche den Nenner mit  $1 + 2DTs + T^2s^2$ :

$$T^2 = LC, \quad 2DT = RC \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{LC}, \quad D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Damit

$$\omega_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{2D} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{R}.$$

Analog verfährt man bei mechanischen Schwingkreisen (Masse–Feder–Dämpfer), indem die Koeffizienten der Bewegungsgleichung mit der PT2-Normform abgeglichen werden.

Die Polstellen von (1) sind

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

### 7.2.1 Dämpfungsfälle

- $D < 0$  (*negative Dämpfung*): Energiezufuhr statt Verlust, Schwingungen wachsen an (instabil).
- $0 < D < 1$  (*unterdämpft*): komplex konjugierte Pole, schwingende Sprungantwort mit Überschwingen.
- $D = 1$  (*kritisch gedämpft*): Doppelpol, schnell ohne Überschwingen (Grenzfall).
- $D > 1$  (*überdämpft*): zwei reelle Pole, monotone Sprungantwort ohne Überschwingen.

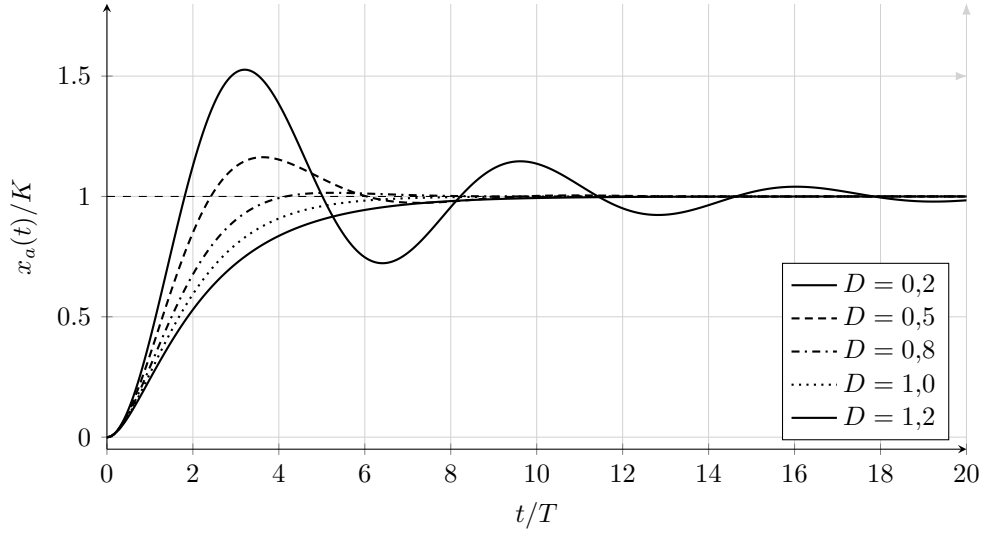


Abbildung 7: Sprungantwort eines normierten PT2-Glieds ( $T = 1$ ,  $K = 1$ ) für unterschiedliche Dämpfungsmaße  $D$ . Unterdämpfung ( $D < 1$ ) führt zu Überschwingen und Schwingungen; bei  $D \geq 1$  verschwindet das Überschwingen.

**Zeitpunkt des ersten Maximums.** Aus der Sprungantwort (vgl. (2)) folgt nach Ableitung

$$\dot{x}_a(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-D^2}} e^{-D\omega_0 t} \sin(\omega_d t).$$

Damit gilt  $\dot{x}_a(t) = 0$  für  $t = k\pi/\omega_d$ ; der erste positive Extremwert liegt bei  $k = 1$ . Die Zeit bis zum ersten Peak (peak time) ist somit

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-D^2}}. \quad (3)$$

**Einschwingzeit (Faustregel).** Die Schwingungsamplitude folgt der Hülle  $e^{-D\omega_0 t}$ . Als 2%-Einschwingzeit wird häufig die Faustregel verwendet:

$$t_s \approx \frac{4}{D\omega_0} = \frac{4T}{D}. \quad (4)$$

(Die Näherung ist am besten im mittleren Dämpfungsbereich und dient der schnellen Abschätzung.)

### 7.2.2 Überschwingen bei der Sprungantwort

Betrachte einen Einheitssprung  $u(t) = 1 \cdot \mathbf{1}(t)$  am Eingang eines stabilen Systems der Form (1). Für  $0 < D < 1$  zeigt die Sprungantwort typischerweise ein Maximum oberhalb des Endwerts.

Die Sprungantwort lautet (2).

**Überschwingmaß** (relative peak overshoot)  $M_p$ :

$$M_p = \frac{x_{a,\max} - \lim_{t \rightarrow \infty} x_a(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} x_a(t)}.$$

Oft wird es in Prozent angegeben:  $M_p[\%] = 100 \cdot M_p$ .

Für das Standard-PT2 gilt (bei Einheitssprung,  $0 < D < 1$ ):

$$M_p = \exp\left(-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}\right). \quad (5)$$

Herleitung (kurz): Mit (2) und  $t_p = \pi/\omega_d$  (siehe (3)) folgt

$$x_a(t_p) = 1 - e^{-D\omega_0 t_p} \cos(\pi) = 1 + e^{-D\omega_0 t_p},$$

und somit

$$M_p = \frac{x_a(t_p) - 1}{1} = e^{-D\omega_0 t_p} = \exp\left(-D\omega_0 \cdot \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-D^2}}\right) = \exp\left(-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}\right).$$

Umgekehrt:

$$\ln(M_p) = -\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}} \Rightarrow \ln^2(M_p) = \frac{D^2\pi^2}{1-D^2} \Rightarrow D^2 = \frac{\ln^2(M_p)}{\pi^2 + \ln^2(M_p)}.$$

$$D = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}}.$$

**Logarithmisches Daempfungskreiment.** Für eine unterdämpfte PT2-Sprungantwort bezeichnen  $x_k$  und  $x_{k+1}$  zwei aufeinanderfolgende Maxima,  $x_\infty$  den Endwert. Dann ist das logarithmische Daempfungskreiment

$$\Lambda = \ln\left(\frac{x_k - x_\infty}{x_{k+1} - x_\infty}\right) = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}.$$

Zusammenhang zum Überswingmaß: Für den normierten Endwert  $x_\infty = 1$  gilt

$$M_p = \exp\left(-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}\right) = \exp\left(-\frac{\Lambda}{2}\right), \quad \Lambda = 2 \ln\left(\frac{1}{M_p}\right).$$

Warum logarithmisch? Die Hüllkurve der Schwingungsamplitude fällt exponentiell, d. h. die Verhältnisse aufeinanderfolgender Maxima sind konstant. Der Logarithmus macht diese multiplikative Abnahme additiv und unabhängig von der Anfangsamplitude. Vorteil:  $D$  lässt sich direkt aus zwei (oder mehreren gemittelten) Peaks robust bestimmen.

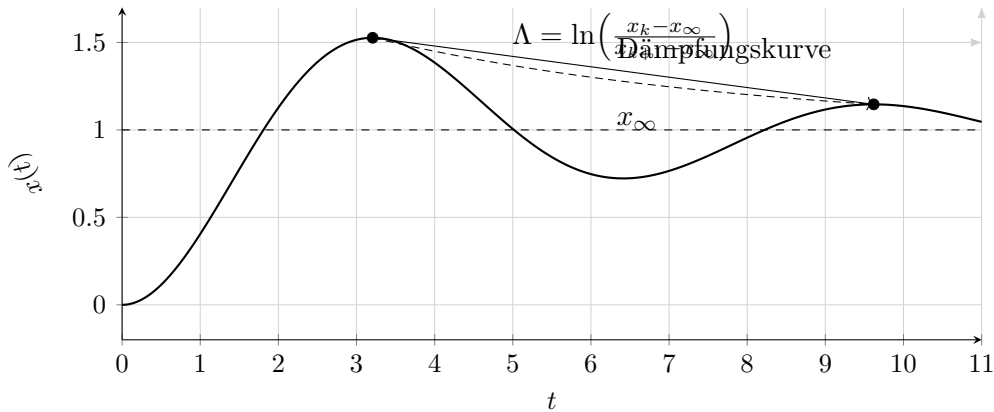


Abbildung 8: Unterdämpfte PT2-Sprungantwort: Das logarithmische Daempfungskreiment  $\Lambda$  ergibt sich aus zwei aufeinanderfolgenden Maxima der Abweichung von  $x_\infty$ .

**Beispiel (Überschwingen).** Für  $D = 0,5$  ergibt sich  $M_p = \exp\left(-\frac{0,5\pi}{\sqrt{1-0,25}}\right) \approx 0,16$ , also etwa 16 % Überspringen.

### 7.2.3 Eigenfrequenz vs. Resonanzfrequenz

Die **Eigenfrequenz** beschreibt das freie Schwingverhalten (durch die Pole bestimmt). Die **Resonanzfrequenz** beschreibt dagegen die Frequenz, bei der die *erzwungene* Antwort (z. B. Sinusanregung) maximal wird.

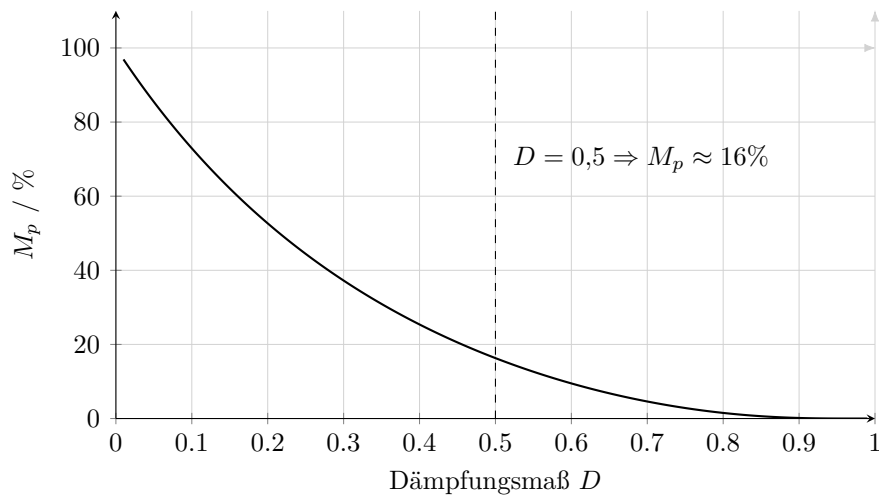


Abbildung 9: Relatives Überschwingen  $M_p = \exp\left(-\frac{D\pi}{\sqrt{1-D^2}}\right)$  (unterdämpfter Fall  $0 < D < 1$ ). Mit wachsender Dämpfung sinkt das Überschwingen stark.

Für das System (1) zeigt die Betragsfrequenzgangkurve  $|G(j\omega)|$  nur dann eine ausgeprägte Resonanzspitze, wenn die Dämpfung klein genug ist (typisch  $D < 1/\sqrt{2}$ ). Dann gilt näherungsweise:

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2} \quad (D < 1/\sqrt{2}). \quad (6)$$

Man sieht:  $\omega_r$  liegt dann *unter*  $\omega_0$ . Kleine Dämpfung erzeugt eine Resonanzspitze im Betragsfrequenzgang in der Nähe von  $\omega \approx \omega_0$ . Diese Resonanzüberhöhung korreliert häufig mit starkem Überschwingen im Zeitbereich.

## 8 Blockdiagramme

### 8.1 Grundidee und Motivation

Blockdiagramme beschreiben den Signalfluss in Regelkreisen: Blöcke stehen für Teilsysteme (Strecke, Regler, Sensor), Pfeile für Signale. Sie sind damit mehr als ein Werkzeug zum Umformen — sie sind der “Schaltplan” der Regelstrecke und zeigen sofort, wo Sollwerte, Stellgrößen und Störungen einwirken und wie ein Regler darauf reagieren kann.

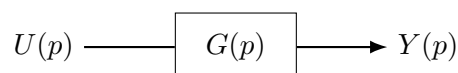
Typische Aufgaben, für die Blockdiagramme genutzt werden:

- Struktur und Signalrichtungen eines Regelkreises dokumentieren und diskutieren,
- aus verknüpften Blöcken eine Gesamtübertragungsfunktion herleiten (Verstärkung, Stabilität, Genauigkeit),
- beurteilen, wie Rückführung Störungen dämpft oder das Folgeverhalten verbessert.

Damit bilden Blockdiagramme die Brücke zwischen physikalischem System, mathematischem Modell und Reglerentwurf.

### 8.2 Blöcke und Übertragungsfunktionen

Jeder Block steht für eine Übertragungsfunktion  $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$  zwischen Eingang  $u(t)$  und Ausgang  $y(t)$ . Entlang eines Signalwegs werden die Übertragungsfunktionen multipliziert, parallele Wege addieren sich — genau so, wie es die algebraischen Gleichungen im Laplace-Bereich vorgeben.





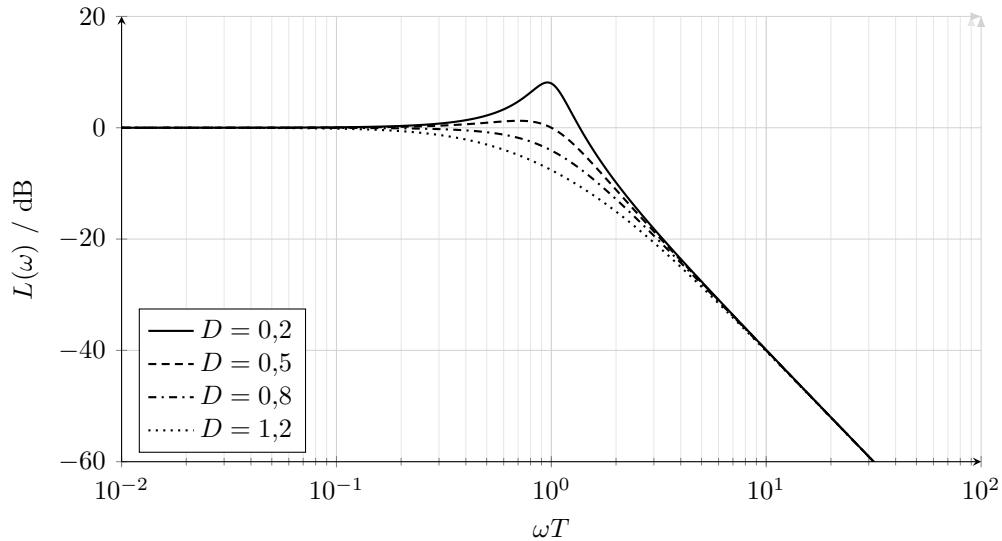


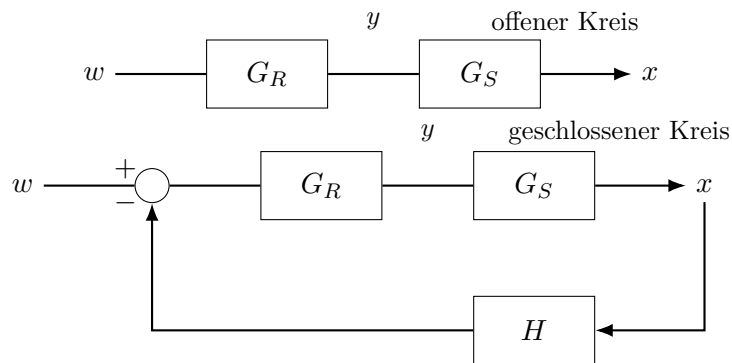
Abbildung 10: Betragsfrequenzgang eines normierten PT2-Glieds ( $T = 1$ ,  $K = 1$ ). Kleine Dämpfung erzeugt eine Resonanzüberhöhung (Peak im Betrag), die im Zeitbereich typischerweise mit starkem Überspringen korreliert.

$$Y(p) = G(p) U(p)$$

Die grafische Darstellung codiert also direkt die Gleichungen: jeder Summierknoten entspricht einer Addition/Subtraktion, jeder Abzweig einer Signalweitergabe, jeder Block einer Multiplikation mit seiner Übertragungsfunktion.

### 8.3 Offener vs. geschlossener Regelkreis

Ein *offener* Kreis besitzt keine Rückführung; die Regelgröße  $x$  beeinflusst den Eingang nicht. Ein *geschlossener* Kreis führt das Ausgangssignal (oft nach Messung  $H(p)$ ) zurück, vergleicht es mit dem Sollwert  $w$  und erzeugt daraus die Stellgröße  $y$  für die Strecke.



Vom offenen zum geschlossenen Kreis gelangt man also durch Hinzufügen der Summierstelle (Sollwertvergleich), eines Messpfads  $H(p)$  und der Rückführleitung. Die geschlossene Übertragungsfunktion wird damit zu

$$T(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G_R(p)G_S(p)}{1 + G_R(p)G_S(p)H(p)},$$

während der offene Weg lediglich  $G_R(p)G_S(p)$  bildet. Gerade in der Regelungstechnik ist die Wahl und Umformung des Blockdiagramms zentral, um Störunterdrückung, Dynamik und Stabilität zu beurteilen und Reglerparameter gezielt anzupassen.

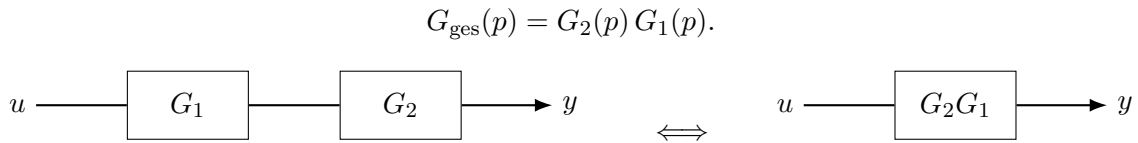
## 8.4 Regeln zur Umformung (mit Formeln und Bildern)

**Voraussetzungen:** Die Umformregeln gelten für *lineare zeitinvariante* (LZI) Systeme. Im Folgenden sind alle Signale im Laplace-Bereich angegeben (z. B.  $X(p)$ ); für die Umformung selbst genügt die Darstellung mit Übertragungsfunktionen.

**Konvention:** In vielen Skripten ist die *negative Rückführung* der Standardfall (Minuszeichen am Summierglied). Bei positiver Rückführung ändert sich das Vorzeichen im Nenner (siehe Regel 3).

### 8.4.1 Regel 1: Reihenschaltung (Kaskade)

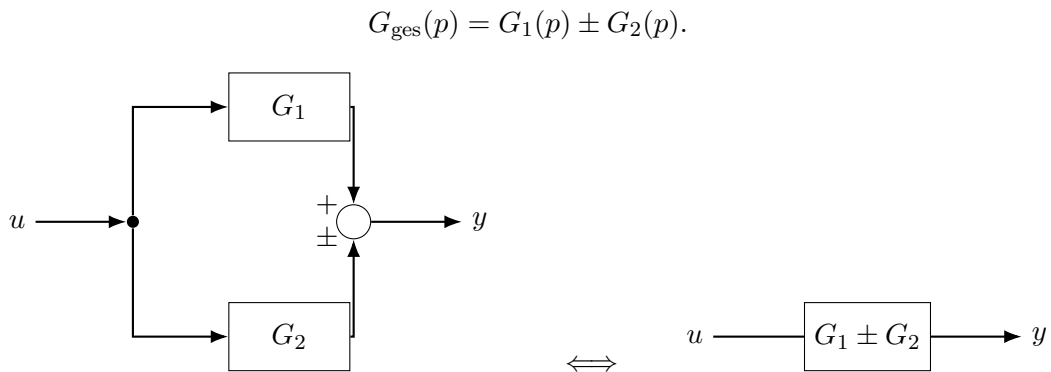
Zwei hintereinander geschaltete Blöcke lassen sich zu einem Block zusammenfassen:



**Hinweis:** In einer reinen SISO-Kaskade darf man die Reihenfolge vertauschen ( $G_2 G_1 = G_1 G_2$ ). *Nicht* vertauschen, wenn zwischen den Blöcken Abzweige oder Summierstellen liegen.

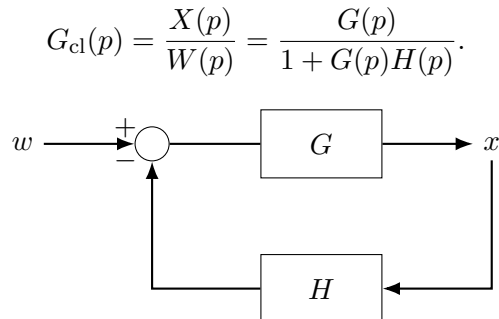
### 8.4.2 Regel 2: Parallelschaltung

Parallele Wege mit gleicher Ein- und Ausgangsgröße addieren (oder subtrahieren) sich:



### 8.4.3 Regel 3: Rückführung (Feedback)

**Negative Rückführung (Standardfall):**



**Positive Rückführung:**

$$G_{\text{cl}}(p) = \frac{G(p)}{1 - G(p)H(p)}.$$

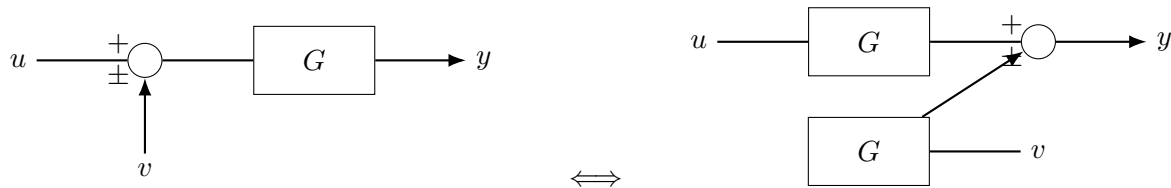
**Kurzbeispiel (Ersatzblock).** Gegeben sei eine Kaskade  $G_1(p)G_2(p)$  mit Einheitsrückführung  $H(p) = 1$ . Dann lautet die geschlossene Übertragungsfunktion

$$G_{cl}(p) = \frac{G_1(p)G_2(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)}.$$

#### 8.4.4 Regel 4: Summierstelle über einen Block verschieben

Diese Regel ist eine häufige Fehlerquelle: **Beim Verschieben muss das Signal an jedem Knoten identisch bleiben.**

**(a) Summierstelle  $\rightarrow$  nach  $G$  verschieben:** Aus  $y = G(u \pm v)$  folgt  $y = Gu \pm Gv$ . Wird die Summierung *hinter*  $G$  platziert, muss der zweite Zweig ebenfalls mit  $G$  gewichtet werden.

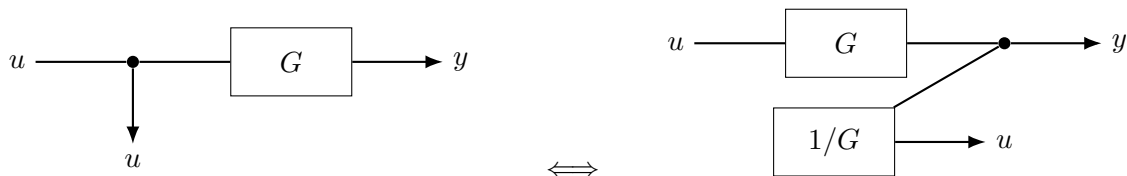


**(b) Summierstelle  $\leftarrow$  vor  $G$  verschieben:** Umgekehrt gilt: Aus  $y = Gu \pm v$  wird  $y = G(u \pm v/G)$ . Beim Verschieben *vor*  $G$  muss der Zweig, der  $G$  zuvor *nicht* durchlief, mit  $1/G$  skaliert werden.

#### 8.4.5 Regel 5: Abzweigstelle (Messabgriff) über einen Block verschieben

Auch hier gilt: das abgegriffene Signal muss gleich bleiben.

**(a) Abzweig  $\rightarrow$  nach  $G$  verschieben:** Wird hinter  $G$  abgegriffen, ist das Signal um  $G$  größer; daher muss im Abzweig ein Faktor  $1/G$  eingefügt werden, um das ursprüngliche Signal beizubehalten.



**(b) Abzweig  $\leftarrow$  vor  $G$  verschieben:** Analog: Beim Verschieben eines Abgriffs *vor*  $G$  wird im Abzweig ein Faktor  $G$  benötigt.

#### 8.4.6 Regel 6: Innere Schleifen zuerst reduzieren

Bei verschachtelten Rückführungen ist es oft am einfachsten,

- zunächst *innere* Feedback-Schleifen mit Regel 3 zu einem Ersatzblock zusammenzufassen,
- danach Serien- und Parallelblöcke (Regeln 1–2) zu reduzieren,
- und zuletzt äußere Schleifen zu schließen.

**Praxis-Tipp:** Zeichne bei jeder Umformung kurz die *Signalgleichungen* an den Knoten (z.B.  $y = Gu$ ,  $e = w - x$ ). Wenn die Gleichungen identisch bleiben, ist die Umformung korrekt.

## 9 Einschleifiger Regelkreis: Standardformen

### 9.1 Struktur und Grundgleichungen

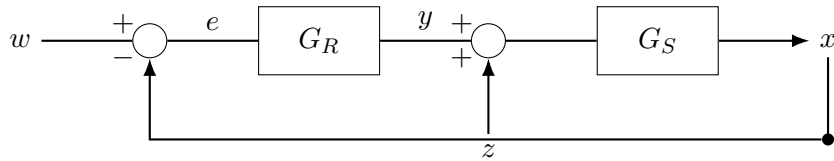
Wir betrachten die Standardstruktur mit Führungsgröße  $w$ , Regelabweichung  $e$ , Stellgröße  $y$ , Störgröße  $z$  (am Streckeneingang) und Regelgröße  $x$ :

$$e = w - x, \quad y = G_R(p) e, \quad x = G_S(p) (y + z).$$

Die Kreisverstärkung (aufgeschnittener Kreis) ist

$$G_0(p) = G_R(p) G_S(p).$$

Die Grafik fasst diese Standardstruktur zusammen (Einheitsmessung, Störung  $z$  vor der Strecke):



Dabei erzeugt der Regler  $G_R$  aus der Regelabweichung  $e$  die Stellgröße  $y$ , die Strecke  $G_S$  setzt  $y$  (plus Störung  $z$ ) in die Regelgröße  $x$  um, und die Rückführung sorgt dafür, dass  $e$  im Idealfall klein wird.

### 9.2 Führungs- und Störübertragungsfunktion

**Führungsübertragung** ( $z = 0$ ).

$$G_w(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{G_0(p)}{1 + G_0(p)}.$$

**Störübertragung** ( $w = 0$ ).

$$G_z(p) = \frac{X(p)}{Z(p)} = \frac{G_S(p)}{1 + G_0(p)}.$$

### 9.3 Statisches Verhalten, Regelfaktor

Das statische Verhalten ergibt sich aus  $p \rightarrow 0$  (sofern Grenzwerte existieren):

$$V_0 := G_0(0) \quad (\text{statische Kreisverstärkung}).$$

Der Regelfaktor (Unterdrückung von Störungen bzw. Abweichungen im statischen Fall) lautet

$$R = \frac{1}{1 + V_0}.$$

Damit gilt: große Kreisverstärkung  $V_0 \gg 1 \Rightarrow$  kleines  $R$  (gute Unterdrückung).

**Beispiel (Regelfaktor).** Sei  $G_R(p) = K_{PR}$  und  $G_S(p) = \frac{K_S}{1 + Tp}$ . Dann ist  $V_0 = K_{PR}K_S$  und damit

$$R = \frac{1}{1 + K_{PR}K_S}.$$

## 9.4 P-, I- und PI-Regler (Grundideen)

Regler	Übertragungsfunktion $G_R(p)$	typische Wirkung
P	$K_{PR}$	schnell, aber i. A. bleibende Abweichung
I	$\frac{K_{IR}}{p}$	keine bleibende Abweichung, aber höhere Ordnung/Schwingneigung
PI	$K_{PR} \left(1 + \frac{1}{T_N p}\right)$	kombiniert Vorteile von P und I

Parameterbezug beim PI-Regler:

$$K_{IR} = \frac{K_{PR}}{T_N}.$$

## 10 Stabilität linearer Regelkreise

### 10.1 Charakteristische Gleichung

Ein LZI-System ist (asymptotisch) stabil, wenn alle Pole strikt in der linken Halbebene liegen ( $\text{Re}(p_i) < 0$ ). Für den einschleifigen Regelkreis folgt die charakteristische Gleichung aus dem Nenner:

$$1 + G_0(p) = 0.$$

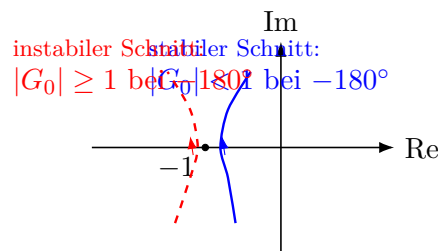
### 10.2 Nyquist-Idee (qualitativ)

Für sinusförmige Anregung sind im eingeschwungenen Zustand alle Signale sinusförmig (mit anderer Amplitude und Phasenlage). Mit  $\omega_k$  bezeichnen wir eine beliebige abgetastete Frequenz. Wird bei einer Frequenz  $\omega_k$  eine Phasendrehung von  $\varphi(\omega_k) = -180^\circ$  erreicht, wirkt die Rückkopplung wie positive Rückkopplung. Dann entscheidet der Betrag:

$$|G_0(j\omega_k)| \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{Schwingungen klingen ab (stabil),} \\ = 1 & \Rightarrow \text{Grenzstabilität (Dauerschwingung),} \\ > 1 & \Rightarrow \text{Schwingungen wachsen an (instabil).} \end{cases}$$

Für Systeme ohne Pole in der rechten Halbebene kann man in vielen Anwendungen die vereinfachte Schnittbedingung nutzen: An Frequenzen mit  $\text{Im}(G_0(j\omega)) = 0$  muss  $\text{Re}(G_0(j\omega)) > -1$  gelten.

**Warum die Bedingung  $\text{Re}(G_0(j\omega)) > -1$ ?** Auf der reellen Achse ( $\text{Im} = 0$ ) hat  $G_0(j\omega)$  die Phasenlage  $\varphi = 0^\circ$  oder  $-180^\circ$ . Erreicht die Kurve dort  $\text{Re} \leq -1$ , dann liegt der kritische Punkt  $-1 + j0$  auf oder links des aktuellen Kurvenpunktes. Das entspricht Betrag  $|G_0| \geq 1$  bei  $\varphi = -180^\circ$  und damit genau der Grenze (bzw. dem Übertritt) von stabil zu instabil:  $1 + G_0(j\omega) = 0$  ist erfüllt (der Punkt  $-1 + j0$  wird getroffen), oder  $-1$  wird umschlungen. Liegt der Realteil dagegen größer als  $-1$ , befindet sich die Ortskurve auf der "stabilen" Seite des kritischen Punkts, d. h. bei  $-180^\circ$  ist der Betrag kleiner als 1 und der Nyquist-Test bleibt erfüllt.



Die blaue Kurve schneidet die reelle Achse rechts von  $-1$  ( $|G_0| < 1$  bei  $-180^\circ$ ) und umschlingt  $-1$  nicht: der geschlossene Kreis bleibt stabil. Die rote, gestrichelte Kurve kreuzt links von  $-1$  ( $|G_0| \geq 1$  bei  $-180^\circ$ ); damit wird  $-1$  getroffen oder umschlungen und mindestens ein geschlossener Pol wandert in die rechte Halbebene (Instabilität).

### 10.3 Nyquist-Diagramm und Nyquist-Kriterium

**Nyquist-Diagramm (Nyquist-Ortskurve).** Für die Kreisverstärkung (aufgeschnittener Regelkreis)

$$G_0(p) = G_R(p) G_S(p)$$

heißt *Nyquist-Diagramm* die Ortskurve der komplexen Werte  $G_0(j\omega)$  in der Re-Im-Ebene, wenn  $\omega$  von 0 bis  $\infty$  läuft. Für Systeme mit reellen Koeffizienten ergibt sich die vollständige Nyquist-Kurve durch Spiegelung an der reellen Achse.

**Stabilitätsfrage über  $1 + G_0(p) = 0$ .** Für den einschleifigen Regelkreis mit Einheitsrückführung ist die charakteristische Gleichung

$$1 + G_0(p) = 0.$$

Die Nullstellen von  $1 + G_0(p)$  sind die Pole des geschlossenen Kreises (Stabilität  $\Leftrightarrow$  alle Pole in der linken Halbebene).

**Nyquist-Kriterium (Vorzeichenkonvention).** Sei  $P$  die Anzahl der Pole von  $G_0(p)$  in der rechten Halbebene und  $Z$  die Anzahl der Nullstellen von  $1 + G_0(p)$  in der rechten Halbebene (instabile geschlossene Pole). Weiter sei  $N$  die Anzahl der *Uhrzeigersinn*-Umschlingungen des Punktes  $-1 + j0$  durch die vollständige Nyquist-Kurve von  $G_0(j\omega)$ . Dann gilt

$$N = Z - P \quad \Leftrightarrow \quad Z = N + P.$$

Damit folgt unmittelbar:

$$\text{geschlossener Kreis stabil} \Leftrightarrow Z = 0 \Leftrightarrow N = -P.$$

Insbesondere: Ist der aufgeschnittene Kreis bereits stabil ( $P = 0$ ), dann ist der geschlossene Kreis genau dann stabil, wenn die Nyquist-Kurve  $-1$  *nicht* im Uhrzeigersinn umschlingt ( $N = 0$ ). Ein formaler Beweis des Nyquist-Kriteriums (über die Argument Principle) wird hier nicht geführt; wir nutzen das Ergebnis als praktisches Stabilitätswerkzeug.

**Beispiel.** Abbildung 11 zeigt  $G_0(p) = \frac{K}{(1+p)(1+0,2p)(1+0,05p)}$ . Bei  $K \approx 31,5$  verläuft die Ortskurve durch  $-1$  (Grenzstabilität); für größeres  $K$  entstehen instabile Pole im geschlossenen Kreis.

- $K = 20$  (durchgezogene Linie): Ortskurve bleibt rechts von  $-1$  und umschlingt  $-1$  nicht ( $N = 0, P = 0 \Rightarrow Z = 0$ )  $\Rightarrow$  stabil.
- $K \approx 31,5$  (gestrichelt): Ortskurve läuft durch  $-1 \Rightarrow$  Grenzfall, der geschlossene Kreis besitzt Pole auf der imaginären Achse (Dauerschwingung).
- $K = 40$  (punktiert): Ortskurve umschlingt  $-1$  im Uhrzeigersinn einmal ( $N = 1, P = 0 \Rightarrow Z = 1$ )  $\Rightarrow$  ein instabiler Pol im geschlossenen Kreis.

**Praktische Größen: Verstärkungs- und Phasenreserve.** Aus dem Nyquist- bzw. Bode-Diagramm lassen sich Stabilitätsreserven ablesen:

- **Durchtrittsfrequenz**  $\omega_c$ :  $|G_0(j\omega_c)| = 1$ . **Phasenreserve**  $\varphi_m = 180^\circ + \arg(G_0(j\omega_c))$ .
- **Phasendurchtritt**  $\omega_\pi$ :  $\arg(G_0(j\omega_\pi)) = -180^\circ$  (falls vorhanden). **Verstärkungsreserve**  $G_m = 1/|G_0(j\omega_\pi)|$  (in dB:  $20 \log_{10} G_m$ ).

Große Reserven bedeuten typischerweise: Die Nyquist-Kurve bleibt deutlich vom kritischen Punkt  $-1$  entfernt.

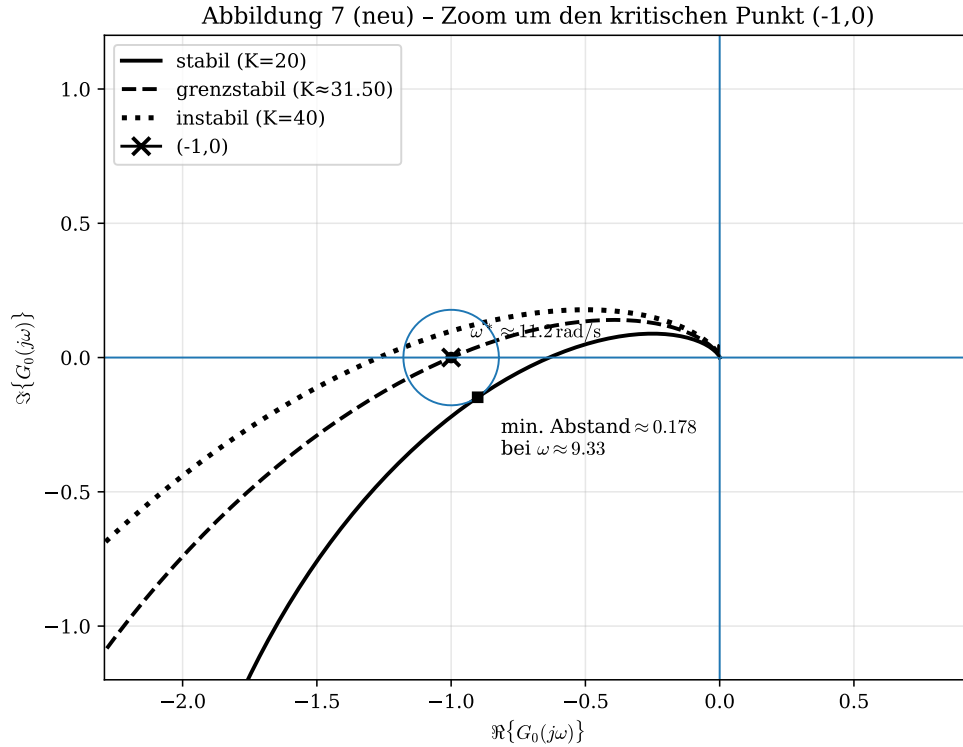


Abbildung 11: Nyquist-Ortskurven (Zoom um  $(-1, 0)$ ) der Kreisverstärkung  $G_0(p) = \frac{K}{(1+p)(1+0,2p)(1+0,05p)}$  (nur  $\omega > 0$ ; vollständige Kurve durch Spiegelung). Stabil:  $K = 20$  bleibt rechts und berührt  $(-1, 0)$  nicht. Grenzstabil:  $K \approx 31,50$  trifft  $(-1, 0)$ . Instabil:  $K = 40$  umschlingt  $(-1, 0)$  im Uhrzeigersinn.

## 10.4 Hurwitz-Kriterium (Polynomkriterium)

Bringt man die charakteristische Gleichung in die Polynomform

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n = 0,$$

dann ist eine notwendige Bedingung für Stabilität  $a_i > 0$  für alle  $i$ . Das Hurwitz-Kriterium liefert eine notwendige und hinreichende Bedingung: Alle Hurwitz-Determinanten müssen positiv sein.

**Hurwitz-Matrix (Schema).**

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Die Hurwitz-Determinanten  $H_k$  sind die Determinanten der linken oberen  $k \times k$ -Untermatrix, z. B.:

$$H_1 = |a_1| = a_1, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Im Allgemeinen gilt:  $H_k$  ist die Determinante der  $k \times k$ -Untermatrix in der linken oberen Ecke von  $H$ . Stabilität  $\Leftrightarrow H_k > 0$  für alle  $k = 1, \dots, n$ .

### Praktische Kurzform ( $n = 3$ ).

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0 \quad \text{und} \quad a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Diese Kurzform ist genau die Auswertung von  $H_1 > 0$ ,  $H_2 > 0$  und  $H_3 > 0$  für ein Polynom 3. Ordnung: Positive Koeffizienten stellen  $H_1$  sicher,  $a_1 a_2 > a_0 a_3$  entspricht  $H_2 > 0$ , und bei drei Polynomen genügen damit alle Bedingungen des Hurwitz-Kriteriums.

**Beispiel ( $n = 2$ ).** Für  $p^2 + 2p + 5 = 0$  gilt  $a_2 = 1$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_0 = 5$ . Alle Koeffizienten sind positiv, daher ist das System stabil.

## 10.5 Beispiel: PT2-Strecke mit PI-Regler (Stabilitätsgebiet)

Sei

$$G_S(p) = \frac{K_S}{1 + 2DTp + T^2p^2}, \quad G_R(p) = K_{PR} + \frac{K_{IR}}{p}.$$

Dann ist

$$G_0(p) = G_R(p)G_S(p) = \left(K_{PR} + \frac{K_{IR}}{p}\right) \frac{K_S}{1 + 2DTp + T^2p^2}.$$

Charakteristische Gleichung:

$$1 + G_0(p) = 0 \Leftrightarrow p(1 + 2DTp + T^2p^2) + K_S K_{PR} p + K_S K_{IR} = 0.$$

Damit ergibt sich das Stabilitätspolynom 3. Ordnung:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

mit

$$a_3 = T^2, \quad a_2 = 2DT, \quad a_1 = 1 + K_S K_{PR}, \quad a_0 = K_S K_{IR}.$$

Hurwitz ( $n = 3$ ) liefert:

$$K_{IR} > 0, \quad 1 + K_S K_{PR} > 0 \Leftrightarrow K_{PR} > -\frac{1}{K_S},$$

$$(1 + K_S K_{PR}) 2DT > (K_S K_{IR}) T^2 \Leftrightarrow K_{IR} < \frac{2D}{K_S T} (1 + K_S K_{PR}).$$

Diese Ungleichungen sind exakt die Bedingungen  $H_1 > 0$ ,  $H_2 > 0$ ,  $H_3 > 0$  des Hurwitz-Kriteriums für das Polynom 3. Ordnung:  $H_1 > 0$  fordert  $a_1 > 0$  ( $\Rightarrow K_{PR} > -1/K_S$ ),  $a_0 > 0$  liefert  $K_{IR} > 0$ , und  $H_2 > 0$  ergibt die Schranke  $K_{IR} < \frac{2D}{K_S T} (1 + K_S K_{PR})$ . Damit lässt sich das Stabilitätsgebiet im  $(K_{PR}, K_{IR})$ -Diagramm grafisch darstellen.

**Beispielhafte Parameterwahl.** Für  $K_S = 1$ ,  $D = 0,5$ ,  $T = 1$  wird daraus:

$$K_{IR} > 0, \quad K_{PR} > -1, \quad K_{IR} < 1 + K_{PR}.$$

Damit ist das Stabilitätsgebiet ein einfaches Dreieck (Abbildung 12).

## 11 Reglerstrukturen (PD, PID) und Realisierungshinweise

### 11.1 PD- und PID-Formen

**PD-Regler.**

$$G_R(p) = K_{PR} + K_{DR}p = K_{PR}(1 + T_V p), \quad T_V = \frac{K_{DR}}{K_{PR}}.$$



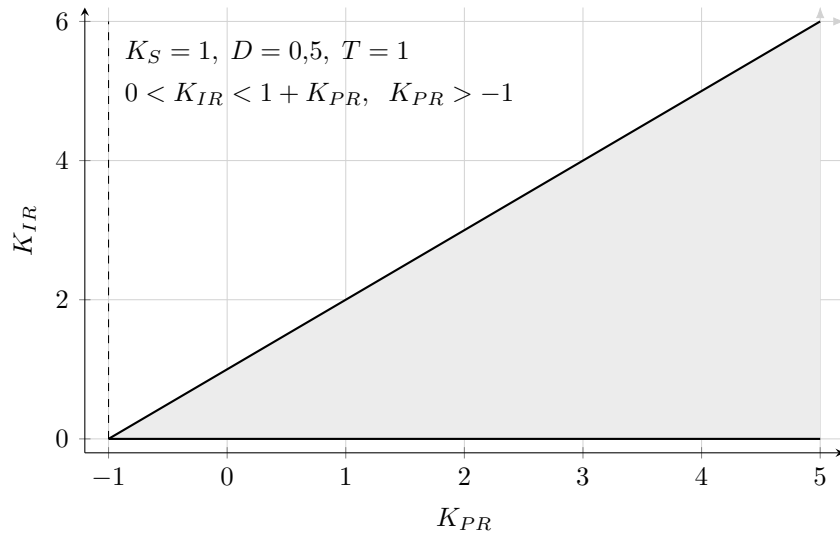


Abbildung 12: Beispielhaftes Stabilitätsgebiet für eine PT2-Strecke mit PI-Regler (Parameterwahl  $K_S = 1$ ,  $D = 0,5$ ,  $T = 1$ ). Das schattierte Gebiet erfüllt die Hurwitz-Bedingungen  $H_1, H_2, H_3$  aus Abschnitt 11.4.

**Realisierbarer PD (mit Realisierungspol).** Ein idealer Differenzierer verstärkt hohe Frequenzen unbegrenzt; daher wird häufig ein Pol eingeführt, z. B.

$$G_R(p) = K_{PR} \left( 1 + \frac{T_V p}{1 + T_N p} \right),$$

wobei  $T_N$  die Zeitkonstante des Realisierungspols ist.

**PID-Regler (ideal).**

$$G_R(p) = K_{PR} + \frac{K_{IR}}{p} + K_{DR} p = K_{PR} \left( 1 + \frac{1}{T_N p} + T_V p \right), \quad T_N = \frac{K_{PR}}{K_{IR}}.$$

## 11.2 (Invertierender) OPV-Grundsatz

Für einen idealen invertierenden Operationsverstärker gilt im Laplace-Bereich:

$$\frac{U_a(p)}{U_e(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}.$$

Durch geeignete Wahl von  $Z_1, Z_2$  (Widerstände/Kondensatoren) lassen sich P-, I-, D- und DT1-Verhalten realisieren.

Funktion	$Z_1(p)$	$Z_2(p)$	$G(p) = -Z_2/Z_1$
P	$R_1$	$R_0$	$-\frac{R_0}{R_1}$
I	$R_1$	$\frac{1}{C_0 p}$	$-\frac{1}{R_1 C_0 p}$
D	$\frac{1}{C_1 p}$	$R_0$	$-R_0 C_1 p$
DT1	$R_1 + \frac{1}{C_1 p}$	$R_0$	$-\frac{R_0 C_1 p}{1 + R_1 C_1 p}$

**Beispiel (I-Glied).** Mit  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  und  $C_0 = 1 \text{ }\mu\text{F}$  ergibt sich  $G(p) = -\frac{1}{R_1 C_0 p} = -\frac{1}{0,01 p}$ .

## A Mini-Formelsammlung (Laplace)

Zeitfunktion $x(t)$ (für $t \geq 0$ )	$X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$
$\sigma(t)$	$\frac{1}{p}$
$\delta(t)$	$1$
$t \sigma(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$e^{-at}$ ( $a > 0$ )	$\frac{1}{p+a}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

## B Ausführliche Aufgaben

1. **Übertragungsfunktion.** Gegeben ist  $T\dot{x}_a + x_a = K x_e + K_D \dot{x}_e$  mit Null-Anfangsbedingungen. Bestimmen Sie  $G(p)$  und die Sprungantwort für  $x_e(t) = \sigma(t)$ .
2. **Bode-Abschätzung.** Für  $G(p) = \frac{10}{(1 + 0,5p)(1 + 2p)}$  skizzieren Sie die asymptotischen Betragsgeraden und geben Sie die Eckfrequenzen an.
3. **Regelkreis.** Für  $G_R(p) = K_{PR} \left(1 + \frac{1}{T_N p}\right)$  und  $G_S(p) = \frac{K_S}{1 + T p}$  bestimmen Sie  $G_0(p)$ ,  $G_w(p)$  und den statischen Regelfaktor  $R$ .