

# *Functional Analysis*<sup>1</sup>

–TW–

2024 年 9 月 5 日

<sup>1</sup>参考书籍：

《Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications》– Philippe G. Ciarlet

《Real Analysis – Modern Techniques and Their Applications》– Gerald B. Folland

《Functional Analysis – Introduction to Further Topics in Analysis》– Elias M. Stein

《泛函分析讲义》– 张恭庆、林源渠

# 序

天道几何，万品流形先自守；  
变分无限，孤心测度有同伦。

2024 年 9 月 5 日

长夜伴浪破晓梦，梦晓破浪伴夜长

# 目录

第一章 度量空间	1
1.1 $L^p$ 空间为赋范向量空间	1
1.1.1 范数, 度量	1
1.1.2 $L^p$ Space	2
1.1.3 Young Inequality	4
1.1.4 Hölder Inequality	5
1.1.5 Minkowski Inequality	6
1.2 Completion of a metric space	7
1.2.1 Complete metric spaces	7
1.2.2 Nowhere dense & Category Set	10
1.2.3 保距同构, 完备化空间	13
1.2.4 Completion of a metric space	14
1.3 Sequentially Compact	19
1.4 完全有界集	21
1.5 可分度量空间	24
1.6 Compact	28
1.6.1 度量空间紧集的性质	28
1.6.2 度量空间紧致的等价刻画	31
1.7 一致有界, 等度连续	33
1.7.1 紧致度量空间上的连续函数全体	33
1.7.2 一致有界, 等度连续	35
1.8 Arzelà-Ascoli 定理	36
1.9 Banach 不动点定理	39
1.9.1 Banach 不动点定理 / 压缩映射原理	39

1.9.2	Volterra 方程 . . . . .	41
附录 A	<i>Supplementary Content</i>	<b>42</b>
A.1	度量空间稠密子集的等价刻画 . . . . .	42

# 第一章 度量空间

## 1.1 $L^p$ 空间为赋范向量空间

回顾实分析中对范数、度量及  $L^p$  空间的定义.

### 1.1.1 范数, 度量

下面给出范数和度量的严格定义.

定义 1.1.1. Let  $X$  be a vector space over  $\mathbb{F}$ , a norm is a function:

$$X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (1.1)$$

$$f \longmapsto \|f\| \quad (1.2)$$

satisfying the following properties:

- (i)  $\|f\| \geq 0, \forall f \in X.$  ( $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ a.e.}$ )
- (ii)  $\|af\| = |a|\|f\|, \forall a \in \mathbb{F}, f \in X.$
- (iii)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in X.$

**注.** • (i) 中的 “ $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ a.e.}$ ” 的 “**a.e.**” 是对于  $X$  取函数空间时的条件, 在实分析的取等条件中基本为默认叙述, 在后续定义中往往省略. 在对  $\mathcal{L}^p$  空间的定义 (定义 1.1.3) 中可以看到其合理性.

- 范数实际上是对  $\mathbb{R}^n$  空间中 “与原点之间的距离” 这一概念的推广. 将函数视作向量, 则其范数即为到原点的距离, 即模长.
- 若一个线性空间  $X$  上配备了一个范数, 则称其为 **赋范向量空间 (赋范线性空间)**.

将函数视作向量，就有其到原点的距离为范数。但若是想要衡量任意两个函数之间的距离，则需要引入下面度量的概念。

定义 1.1.2. A metric on  $X$  is a map

$$\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (1.3)$$

$$(x, y) \longmapsto \rho(x, y) \quad (1.4)$$

satisfying

- (i)  $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X. \quad (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
- (ii)  $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X.$
- (iii)  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z), \forall x, y, z \in X.$

**注.** • 若  $X$  为函数空间，则 (i) 中 “ $\rho(x, y) = 0$ ” 等价条件默认为 “ $x = y \text{ a.e.}$ ”。

• 度量可看作将两个函数 (向量) 的起点均平移至原点后，其两个终点之间的距离。

## 1.1.2 $L^p$ Space

$L^p$  Space 下面给出  $L^p$  空间的定义。

定义 1.1.3. For any measure space  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ , define the  $L^p$  Space  $L^p(X)$  on  $X$  ( $1 \leq p < \infty$ )

$$L^p(X) = \left\{ f \in \mathcal{M} \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}, \quad \forall 1 \leq p < \infty \quad (1.5)$$

$$L^\infty(X) = \left\{ f \in \mathcal{M} \mid \inf \{ C \geq 0 \mid |f| \leq C \text{ a.e.} \} < \infty \right\} \quad (1.6)$$

**注.** 与  $L^1$  空间 (即可积函数构成的空间) 类似，后面我们考虑的  $L^p(X)$  空间事实上为几乎处处相等意义下的完全剩余系，即在  $L^p(X)$  空间上定义一个等价关系  $\sim$ ：

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ a.e.}$$

此时再令  $L^p(X)$  空间模去该等价关系  $\sim$ ，即

$$L^p(X) := L^p(X) / \sim$$

$L^p$  范数 在  $L^p$  空间上, 我们来定义  $L^p$  范数.

定义 1.1.4. Measure space  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ . For any function  $f \in L^p(X)$ , define the  $L^p$  norm of  $f$

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall 1 \leq p < \infty \quad (1.7)$$

$$\|f\|_\infty = \inf \{C \geq 0 \mid |f| \leq C \text{ a.e.}\} \quad (1.8)$$

注. • 不难得到  $L^\infty$  范数的等价定义为

$$\|f\|_\infty = \sup \{C \geq 0 \mid \mu(|f| > C) > 0\} \quad (1.9)$$

- 为了说明上述定义是 well-defined, 我们需要验证其满足范数的三条公理 (Def 1.1.1). 其中前面两条 (正定性、绝对齐性) 是显然的, 而对于三角不等式, 我们需要用到后续证明的 **Minkowski Inequality** (Thm 1.1.4).

事实上, 在证明了 **Minkowski Inequality** (Thm 1.1.4) 后, 我们还可得到  $L^p(X)$  为线性空间, 从而证明  $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$  为赋范向量空间. 下面我们的证明思路如下:

**Young Inequality  $\Rightarrow$  Hölder Inequality  $\Rightarrow$  Minkowski Inequality**

### 1.1.3 Young Inequality

为了证明 **Hölder** 不等式, 先来给出 **Young** 不等式, 可视作一条均值不等式的加权推广.

**定理 1.1.1. Young Inequality.**

Suppose  $p, q > 0$  and  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Then for  $\forall a, b \geq 0$ , s. t.

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad (1.10)$$

**注.** Young 不等式可视作一条均值不等式 (几何平均数  $\leq$  平方平均数) 的加权推广, 即

$$\sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

**证明.** (利用指数函数的凸性及 **Jensen Inequality**).

It's trivial when  $a = 0$  or  $b = 0$ . 不妨设  $a, b \neq 0$ , 即  $a, b > 0$ .

Since  $f(x) = e^x$  is convex,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , then by **Jensen Inequality**,

$$e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1.11)$$

Let  $x = \log a^p, y = \log b^q, \forall a, b > 0$ , then

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b > 0 \quad (1.12)$$

□

下面给出一条推论, 将用于 **Hölder Inequality** 的证明中.

**推论 1.1.2.** Suppose  $p, q > 0$  and  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Then for  $\forall f \in L^p, g \in L^q$ , s. t.

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p} \int |f|^p + \frac{1}{q} \int |g|^q \quad (1.13)$$

**证明.** By **Young Inequality** (Thm 1.1.1), 逐点均有

$$|fg|(x) \leq \frac{1}{p}|f|^p(x) + \frac{1}{q}|g|^q(x), \quad \forall x \in X \quad (1.14)$$

积分, 得

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p} \int |f|^p + \frac{1}{q} \int |g|^q \quad (1.15)$$

□



### 1.1.4 Hölder Inequality

下面给出二元情形下的 **Hölder** 不等式.

**定理 1.1.3. Hölder Inequality.**

Suppose  $1 < p, q < \infty$  and  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Then  $\forall f \in L^p, g \in L^q$ , s. t.  $fg \in L^1$  and

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (1.16)$$

**证明.** It's trivial when  $\|f\|_p = 0$  or  $\|g\|_q = 0$ . 不妨设  $\|f\|_p, \|g\|_q \neq 0$ .

不妨设  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ . (Otherwise we can let  $\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}$  and  $\tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$ )

Then by **Young Inequality (Cor 1.1.2)**,

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \leq \frac{1}{p} \int |f|^p + \frac{1}{q} \int |g|^q \quad (1.17)$$

$$= \frac{1}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|g\|_q^q \quad (1.18)$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (1.19)$$

$$= 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (1.20)$$

□

### 1.1.5 Minkowski Inequality

下面给出 **Minkowski 不等式** 的内容, 它说明了我们所定义的  $L^p$  范数  $\|\cdot\|_p$  (Def 1.1.4) 的合理性, 并且可以推出  $L^p$  空间为线性空间, 从而得到  $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$  为赋范向量空间.

#### 定理 1.1.4. Minkowski Inequality.

Suppose  $1 \leq p < \infty$ . Then for  $\forall f, g \in L^p$ , s. t.

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (1.21)$$

证明.  $\forall f, g \in L^p$ , we have

$$\|f + g\|_p^p = \int |f + g|^p = \int |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \quad (1.22)$$

$$\leq \int |f| \cdot |f + g|^{p-1} + \int |g| \cdot |f + g|^{p-1} \quad (1.23)$$

By **Hölder Inequality** (Thm 1.1.3),

$$\int |f| \cdot |f + g|^{p-1} = \||f| \cdot |f + g|^{p-1}\|_1 \leq \left( \int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int |f + g|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.24)$$

where  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Thus  $q = \frac{p}{p-1}$ ,  $(p-1)q = p$ , we have

$$\int |f| \cdot |f + g|^{p-1} \leq \left( \int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int |f + g|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f\|_p \cdot \|f + g\|_p^{p-1} \quad (1.25)$$

Similarly, we get

$$\int |g| \cdot |f + g|^{p-1} \leq \left( \int |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int |f + g|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|g\|_p \cdot \|f + g\|_p^{p-1} \quad (1.26)$$

Therefore,

$$\|f + g\|_p^p \leq \int |f| \cdot |f + g|^{p-1} + \int |g| \cdot |f + g|^{p-1} \quad (1.27)$$

$$\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f + g\|_p^{p-1} \quad (1.28)$$

i.e.

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad \forall f, g \in L^p \quad (1.29)$$

□

## 1.2 Completion of a metric space

下面我们来讨论度量空间的完备化的内容. 在此之前先给出一些基础概念.

### 1.2.1 Complete metric spaces

柯西列 先来推广一般度量空间  $(X, \rho)$  上的柯西列的定义.

定义 1.2.1. In a metric space  $(X, \rho)$ , a sequence  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  of points  $x_n \in X$  is a Cauchy sequence if  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , s. t.

$$\rho(x_m, x_n) < \epsilon, \quad \forall m, n > N \quad (1.30)$$

注. Cauchy sequence 也有一种等价定义, 涉及到直径 **diam** 在一般度量空间  $(X, \rho)$  上的推广, 即

定义 1.2.2. In a metric space  $(X, \rho)$ , a sequence  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  of points  $x_n \in X$  is a Cauchy sequence if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{x_m\}\right) = 0 \quad (1.31)$$

where

$$\text{diam}(\Omega) = \sup_{x, y \in \Omega} \rho(x, y), \quad \forall \Omega \subset X \quad (1.32)$$

**完备性** 下面给出一般度量空间**完备性**的定义.

**定义 1.2.3.** A metric space  $(X, \rho)$  is complete if every Cauchy sequence of points of  $X$  converges in  $X$ .

下面给出几个**完备**与**不完备**度量空间的例子.

**例 1.2.1.** •  $\mathbb{Q}$  不完备,  $\mathbb{R}$  完备.

• 在  $L^\infty$  意义下,  $P[a, b]$  不完备 ( $[a, b]$  上的多项式空间),  $C[a, b]$  完备.

下面给出度量空间**完备**的等价表述.

**命题 1.2.1.** Suppose  $(X, \rho)$  be a metric space, then

$(X, \rho)$  is complete  $\Leftrightarrow X$  中**闭集套定理**成立

i.e.  $\forall$  非空闭集列  $\{F_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(X)$

If  $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$  and  $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ , then  $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$  为单点集

**证明.**

(a) 必要性  $\Rightarrow$ : Suppose  $(X, \rho)$  is complete.

$\forall \{F_n\}_{n=1}^\infty, F_n \subset_{\text{closed}} X, F_1 \supset F_2 \supset \cdots$  and  $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ . Take  $x_n \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Then  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  is a Cauchy sequence in  $X$ .

Since  $(X, \rho)$  is complete, then  $x_n \rightarrow x_0 \in X$ . 不难证明,  $x_0 \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n$ . Thus  $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$ .

下用反证法证明  $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$  为单点集:

Assume  $\exists x' \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n, x' \neq x_0$ , then

$$x', x_0 \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Then

$$\text{diam}(F_n) \geq \rho(x', x_0) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{diam}(F_n) \not\rightarrow 0$$

which is a contradiction. Therefore,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$  为单点集.

(b) 充分性  $\Leftarrow$ :  $\forall$  Cauchy sequence  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ . Let

$$F_j = \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} \{x_n\}}, j = 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

Then  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  满足闭集套条件,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$  为单点集,  $x_n \rightarrow x_0 \in X$ .  $(X, \rho)$  complete.

□

## 1.2.2 Nowhere dense & Category Set

在这一节我们给出无处稠密 (稀疏) 以及纲集的概念.

**Nowhere dense** 下面给出无处稠密 / 稀疏的定义.

定义 1.2.4. Suppose  $(X, \rho)$  be a metric space. We call  $A \subset X$  nowhere dense if

$$(\overline{A})^\circ = \emptyset \quad (1.34)$$

**注.** •  $A \subset X$  无处稠密 / 稀疏即  $A$  的闭包  $\overline{A}$  无内点.

- 稠密 (dense) 和 无处稠密 / 稀疏 (nowhere dense) **并不是一**对对偶概念, 有如下关系:

$$A \text{ dense} \Leftarrow A^c \text{ nowhere dense}$$

$$A \text{ dense} \not\Rightarrow A^c \text{ nowhere dense}$$

证明.  $A^c \text{ nowhere dense} \Rightarrow (\overline{A^c})^\circ = \emptyset \Rightarrow (A^c)^\circ = (\overline{A})^c = \emptyset \Rightarrow \overline{A} = X \Rightarrow A \text{ dense} \quad \square$

- 单点集 **不一定** 为无处稠密集 / 稀疏集. 这取决于度量  $\rho$  的选取, 下面给出反例.

**例 1.2.2.** Consider a metric space  $(\mathbb{Z}, \rho)$  with

$$\rho : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (1.35)$$

$$(x, y) \longmapsto \rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = y \\ 1, & \text{if } x \neq y \end{cases} \quad (1.36)$$

Then for  $\forall \{x\} \subset \mathbb{Z}$ ,  $B(x, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Z} \subset \{x\}$ , 于是  $(\overline{\{x\}})^\circ = \{x\}$  非空, 单点集  $\{x\}$  不稀疏.

下面给出更常用的用于判断无处稠密 / 稀疏的等价刻画.

**命题 1.2.2.** Suppose  $(X, \rho)$  be a metric space. Then

$$A \subset X \text{ nowhere dense} \Leftrightarrow \forall B(x, r) \subset X, \exists \overline{B(x', r')} \subset B(x, r), \text{ s. t. } \overline{B(x', r')} \cap \overline{A} = \emptyset$$

**证明.**

(a) 必要性  $\Rightarrow$ : 反证法. Assume  $\exists B(x, r) \subset X$ , s. t.  $\forall \overline{B(x', r')} \subset B(x, r), \overline{B(x', r')} \cap \overline{A} \neq \emptyset$ .

Then  $\forall x' \in B(x, r), x' \in \overline{A}$ . Thus  $x \in \overline{A}$  and  $B(x, r) \subset \overline{A} \Rightarrow x$  为  $\overline{A}$  的内点, 矛盾.

(b) 充分性  $\Leftarrow$ : 反证法. Suppose  $\exists x_0 \in (\overline{A})^\circ$ , then  $\exists B(x_0, r_0) \subset \overline{A}$ .

$\forall \overline{B(x', r')} \subset B(x_0, r_0), \overline{B(x', r')} \subset \overline{A}$ , 矛盾.

□

**Category Set** 下面我们来给出**纲集**的定义, 这实际上给出了度量空间  $(X, \rho)$  的子集的分类.

**定义 1.2.5.** Suppose  $(X, \rho)$  be a metric space. If  $A \subset X$  is a countable union of nowhere dense subsets of  $X$ , i.e.

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \text{ where } E_n' \text{'s are nowhere dense} \quad (1.37)$$

then we say  $A$  is a **First Category Set**. Otherwise we call it a **Second Category Set**.

**例 1.2.3.** 考虑欧式度量  $(\mathbb{R}^1, d)$ , 则有理数集  $\mathbb{Q}$  为**第一纲集**. 一般地,  $(\mathbb{R}^1, d)$  中的可数点集均为**第一纲集**.

下面给出 **Baire 定理**, 它给出了完备度量空间的刻画.

**定理 1.2.1. Baire's Theorem.**

Complete metric spaces are Second Category Sets.

**证明.** 反证法. Assume complete metric space  $(X, \rho)$  is a first category set. Then  $\exists \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $E_n \subset X$  nowhere dense, s. t.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad (1.38)$$

Since  $E_n$  is nowhere dense, then  $\exists \overline{B(x_1, r_1)} \subset X$ , s. t.  $\overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{E_1} = \emptyset$ .

Similarly, for  $E_2$  nowhere dense,  $\exists \overline{B(x_2, r_2)} \subset \overline{B(x_1, r_1)}$ , s. t.  $\overline{B(x_2, r_2)} \cap \overline{E_2} = \emptyset$

...

Denote  $F_n = \overline{B(x_n, r_n)}$ , we can always choose  $F_k$  with  $\text{diam}(F_{k+1}) \leq \frac{\text{diam}(F_k)}{2}$ . Then  $F_n$ 's satisfies:

$$F_n \underset{\text{closed}}{\subset} X, F_1 \supset F_2 \supset \cdots, \text{diam}(F_n) \rightarrow 0$$

Since  $X$  is complete, then by **Prop 1.2.1** (完备的等价表述),

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\} \text{ 为单点集.}$$

Since  $(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}) = \emptyset$ , 而  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} = X$ , then  $x_0 \notin X$ , 矛盾.

Therefore,  $(X, \rho)$  is a Second Category Set. □



### 1.2.3 保距同构, 完备化空间

这一小节我们来介绍等距同构 (Isometry) 和完备化 (度量) 空间的概念.

**等距同构 (Isometry)** 下面给出度量空间之间的等距 (保距) 同构的定义.

**定义 1.2.6.** Suppose  $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$  are both metric spaces. Suppose

$$T : (X_1, \rho_1) \rightarrow (X_2, \rho_2)$$

If  $\rho_2 \circ T = \rho_1$ , then we call  $T$  an isometry (等距 / 保距映射). 若进一步  $T$  为满射, 则称  $T$  为等距 / 保距同构.

**注.** 事实上, 条件 “ $\rho_2 \circ T = \rho_1$ ” 已经蕴含了  $T$  为单射. 从而加上满射的条件即为同构.

**证明.**  $\forall x, y \in X_1, x \neq y$ , we have

$$\rho_1(x, y) = \rho_2(T(x), T(y)) \neq 0 \Rightarrow T(x) \neq T(y) \Rightarrow T \text{ injective}$$

□

**完备化空间** 下面给出一般度量空间的完备化空间的定义.

**定义 1.2.7.** Suppose  $(X, \rho)$  be a metric space. If there exists a complete metric space  $(X_1, \rho_1)$ , s. t.

$(X, \rho)$  等距同构于  $(X_1, \rho_1)$  的某个稠密子集

则称  $X_1$  为  $X$  的完备化空间.

**注.** 事实上, 不难说明度量空间的完备化空间有如下的等价定义<sup>1</sup>.

**定义 1.2.8.** 包含  $(X, \rho)$  的最小的完备度量空间称为  $(X, \rho)$  的完备化空间.

---

<sup>1</sup>详见《泛函分析讲义》— 张恭庆、林源渠, 定义 1.2.2 & 命题 1.2.5

## 1.2.4 Completion of a metric space

下面给出一般度量空间完备化的过程.

### 定理 1.2.2. Completion of a metric space.

任一度量空间  $(X, \rho)$  存在完备化空间, 且在保距同构意义下唯一.

证明.

1. Construction of the complete metric space  $(X_2, \rho_2)$ :

Let

$$X_1 = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \text{ is a Cauchy sequence}\} \quad (1.39)$$

$\forall \xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \eta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in X_1$ , we define a equivalence relation  $\sim^2$ :

$$\xi \sim \eta \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0 \quad (1.40)$$

Then let

$$X_2 = X_1 / \sim \quad (1.41)$$

Define the metric  $\rho_2$  on  $X_2$

$$\rho_2 : X_2 \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (1.42)$$

$$([\xi], [\eta]) \longmapsto \rho_2([\xi], [\eta]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \quad (1.43)$$

where  $\xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \eta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in X_1$ .

下面说明  $\rho_2$  is well-defined (与代表元无关 & 极限存在):

(a) 与代表元无关:  $\forall \tilde{\xi} = \{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}, \tilde{\eta} = \{\tilde{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$  with  $[\tilde{\xi}] = [\xi], [\tilde{\eta}] = [\eta]$ . Then

$$\rho(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \leq \rho(\tilde{x}_n, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, \tilde{y}_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.44)$$

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, \tilde{x}_n) + \rho(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) + \rho(\tilde{y}_n, y_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.45)$$

---

<sup>2</sup>不难证明 well-defined: 自反性、对称性、传递性

Since  $[\widetilde{\xi}] = [\xi]$ ,  $[\widetilde{\eta}] = [\eta]$ , then

$$\rho(x_n, \widetilde{x}_n) \rightarrow 0, \quad \rho(y_n, \widetilde{y}_n) \rightarrow 0 \quad (1.46)$$

Letting  $n \rightarrow \infty$ , we get

$$\rho_2(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n) = \rho_2(x_n, y_n) \quad (1.47)$$

(b) 极限存在: 即证  $\{\rho(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  为  $\mathbb{R}$  中 Cauchy sequence.

$\forall [\xi], [\eta] \in X_2$ , where  $\xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\eta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  are Cauchy sequences. Then

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| = |(\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_n)) + (\rho(x_m, y_n) - \rho(x_m, y_m))| \quad (1.48)$$

$$\leq |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_n)| + |\rho(x_m, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \quad (1.49)$$

$$\leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m), \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (1.50)$$

Since  $\xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\eta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$  are Cauchy sequences, then  $\{\rho(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$  is a Cauchy sequence in  $\mathbb{R}$ .

## 2. Construct isometry $T$ :

Consider 嵌入映射

$$T : X \rightarrow X_2 \quad (1.51)$$

$$x \mapsto [\{x\}_{n=1}^{\infty}] \quad (1.52)$$

下面证明  $T$  为保距映射:

$\forall x, y \in X$ , then

$$\rho(T(x), T(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, y) = \rho(x, y), \quad \forall x, y \in X \quad (1.53)$$

Thus  $T$  is an isometry (保距映射).

3.  $T(X)$  is dense in  $X_2$ :

$\forall [\xi] = [\{x_n\}_{n=1}^\infty] \in X_2$ , where  $\xi = \{x_n\}_{n=1}^\infty$  is a Cauchy sequence in  $X$ . Then

Consider the sequence  $\{T(x_n)\}_{n=1}^\infty$  in  $X_2$ . We have

$$\rho_2(T(x_n), [\xi]) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.54)$$

Since  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$  is a Cauchy sequence in  $X$ , then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2(T(x_n), [\xi]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) = 0 \quad (1.55)$$

i.e.

$$T(x_n) \xrightarrow{\rho_2} [\xi], \quad \forall [\xi] = [\{x_n\}_{n=1}^\infty] \in X_2 \quad (1.56)$$

Therefore,  $T(X)$  is dense<sup>3</sup> in  $X_2$ , and so  $(X, \rho)$  保距同构于  $(X_2, \rho_2)$  的稠密子集  $TX$ .

4.  $(X_2, \rho_2)$  is complete:

$\forall$  Cauchy sequence  $\{[\xi_n]\}_{n=1}^\infty \subset X_2$ , where  $\xi_n = \{x_j^n\}_{j=1}^\infty \subset X$  is a Cauchy sequence.

By **Step 3**,  $T(X)$  is dense in  $X_2$  and  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\rho_2(T(x_j^n), [\xi_n]) \rightarrow 0, \quad \text{as } j \rightarrow \infty \quad (1.57)$$

Thus  $\exists j_n \in \mathbb{N}$ , s. t.

$$\rho_2(T(x_{j_n}^n), [\xi_n]) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.58)$$

Let  $\xi = \{x_{j_n}^n\}_{n=1}^\infty$ . It suffices to show  $[\xi_n] \rightarrow [\xi]$ , i.e.

$$\rho_2([\xi_n], [\xi]) \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (1.59)$$

而这需要证明两点结论, 即  $[\xi] \in X_2$  &  $[\xi_n] \rightarrow [\xi]$ :

---

<sup>3</sup>此处实际用到了度量空间稠密子集的等价刻画, 具体可见附录 A - Lemma A.1.1

(a)  $[\xi] \in X_2$ , i.e.  $\xi = \{x_{j_n}^n\}_{n=1}^\infty \subset X$  is a Cauchy sequence in  $X$ :

Fix  $\epsilon > 0$ . Since  $\{[\xi_n]\}_{n=1}^\infty$  is a Cauchy sequence in  $X_2$ , and  $\rho_2(T(x_{j_n}^n), [\xi_n]) \rightarrow 0$ , then since  $T$  is isometry (by **Step 2**)

$\exists N \in \mathbb{N}$ , s. t.

$$\rho(x_{j_k}^k, x_{j_l}^l) = \rho_2(T(x_{j_k}^k), T(x_{j_l}^l)) \quad (1.60)$$

$$\leq \rho_2(T(x_{j_k}^k), [\xi_k]) + \rho_2([\xi_k], [\xi_l]) + \rho_2([\xi_l], T(x_{j_l}^l)) \quad (1.61)$$

$$< \epsilon, \quad \forall k, l > N \quad (1.62)$$

Therefore,  $\xi = \{x_{j_n}^n\}_{n=1}^\infty \subset X$  is a Cauchy sequence, thus  $[\xi] \in X_2$ .

(b)  $[\xi_n] \rightarrow [\xi]$ :

WTS:  $\rho_2([\xi_n], [\xi]) \rightarrow 0$ , i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2([\xi_n], [\xi]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_k^n, x_{j_k}^k) = 0 \quad (1.63)$$

Fix  $n \in \mathbb{N}$ . Since

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_{j_n}^n, x_k^n) = \rho_2(T(x_{j_n}^n), [\xi_n]) < \frac{1}{n} \quad (1.64)$$

Then  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ , s. t.

$$\rho(x_{j_n}^n, x_k^n) < \frac{1}{n} + \epsilon, \quad \forall k > k_0 \quad (1.65)$$

Since  $\xi = \{x_{j_n}^n\}_{n=1}^\infty \subset X$  is a Cauchy sequence in  $X$ , then

$$\rho(x_{j_n}^n, x_{j_k}^k) \rightarrow 0 \text{ as } n, k \rightarrow \infty \quad (1.66)$$

Then

$$\rho(x_k^n, x_{j_k}^k) \leq \rho(x_k^n, x_{j_n}^n) + \rho(x_{j_n}^n, x_{j_k}^k) \quad (1.67)$$

$$\leq \frac{1}{n} + \epsilon + \rho(x_{j_n}^n, x_{j_k}^k) \quad (1.68)$$

Letting  $\epsilon \rightarrow 0^+$  and  $n, k \rightarrow \infty$ , we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2([\xi_n], [\xi]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_k^n, x_{j_k}^k) = 0 \quad (1.69)$$

5.  $X_2$  在保距同构下的唯一性:

Suppose  $(X_2, \rho_2), (X'_2, \rho'_2)$  均为  $(X, \rho)$  的完备化空间.  $i_1 : X \rightarrow X_2, i_2 : X \rightarrow X'_2$  为保距同构.  
 $\forall [\xi] \in X_2$ . By **Step 3**,  $\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ , s. t.

$$i_1(x_n) \rightarrow [\xi] \text{ in } X_2, \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (1.70)$$

$\Rightarrow \{i_1(x_n)\}_{n=1}^\infty \subset X_2$  is a Cauchy sequence in  $X_2$ .

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , s. t.

$$\rho_2(i_1(x_n), i_1(x_m)) = \rho(x_n, x_m) < \epsilon, \forall n, m > N \quad (1.71)$$

$\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$  is a Cauchy sequence in  $X$ .

$\Rightarrow \{i_2(x_n)\}_{n=1}^\infty \subset X'_2$  is a Cauchy sequence in  $X'_2$ .

$\Rightarrow$  Suppose  $i_2(x_n) \rightarrow [\xi'] \in X'_2$  as  $n \rightarrow \infty$ . Let

$$T : X_2 \rightarrow X'_2 \quad (1.72)$$

$$[\xi] \mapsto T([\xi]) = [\xi'] \quad (1.73)$$

不难证明  $T : X_2 \rightarrow X'_2$  为保距映射. Similarly, we can prove  $T$  is surjective.

$\Rightarrow T$  is an isometry. i.e.  $X_2, X'_2$  保距同构.

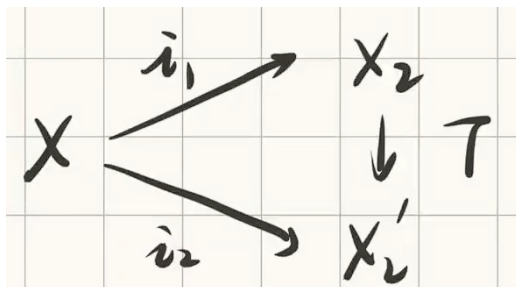


图 1.1:  $X_2$  在保距同构下的唯一性

□

**例 1.2.4.** 下面给出两个完备化空间的例子.

1.  $(P[a, b], \rho_\infty) \rightarrow (C[a, b], \rho_\infty)$ , 即区间  $[a, b]$  上的多项式全体在度量  $\rho_\infty$  下的完备化空间为  $[a, b]$  上的连续函数全体. 其中

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad (1.74)$$

2.  $(C[a, b], \rho_1) \rightarrow (L^1[a, b], \rho_1)$ , 即区间  $[a, b]$  上的连续函数全体在度量  $\rho_1$  下的完备化空间为  $[a, b]$  上 Lebesgue 可积函数全体.

## 1.3 Sequentially Compact

引入 回顾在拓扑和数学分析中接触过的概念, 列紧性 (sequentially compact). 现将其限制于度量空间上给出定义.

定义 1.3.1. Suppose  $(X, \rho)$  be a metric space,  $A \subset X$ . If  $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ ,  $\exists$  subsequence  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  convergent in  $X$ , then we call  $A$  sequentially compact (列紧的).

注. • 将条件 “metric space  $(X, \rho)$ ” 改为 “拓扑空间  $X$ ” 即可得到拓扑中的一般性定义.

回顾一般拓扑空间中 “紧致”、“列紧”、“极限点紧” 的定义与性质, 有如下关系:

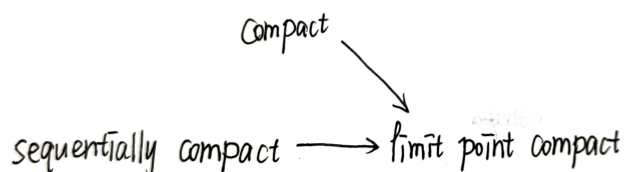


图 1.2: Relations among compact, sequentially compact and limit point compact

• If  $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ ,  $\exists$  subsequence  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  convergent in  $A$ , then 称  $A$  自列紧.

例子 下面给出一个经典的非列紧空间的例子.

例 1.3.1. Consider the set

$$l^1 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty, x_n \in \mathbb{R} \right\} \quad (1.75)$$

$\forall \xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \eta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$ , define the metric  $\rho_1$  on  $l^1$ :

$$\rho_1 : l^1 \times l^1 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (1.76)$$

$$(\xi, \eta) \longmapsto \rho_1(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n| \quad (1.77)$$

Let

$$A = \left\{ \{\delta_{kj}\}_{j=1}^{\infty} \right\}_{k=1}^{\infty} \quad (1.78)$$

$$= \{(1, 0, \dots, 0, \dots), (0, 1, \dots, 0, \dots), \dots, (0, 0, \dots, 1, \dots), \dots\} \subset l^1 \quad (1.79)$$

则  $A \subset l^1$  中每两个元素之间的距离均为 2, 无收敛子列, 故  $(l^1, \rho_1)$  非列紧.

性质 对于度量空间中的列紧集, 容易得到其必为完备度量空间.

命题 1.3.1. 列紧度量空间必完备.

证明. Suppose  $(X, \rho)$  be sequentially compact. Then for  $\forall$  Cauchy sequence  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ ,  
 $\exists$  subsequence  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  convergent  $\Rightarrow$  Cauchy sequence  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  convergent  $\Rightarrow (X, \rho)$  complete  $\square$

为了更好地理解一般度量空间中的列紧性, 我们可以与欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中有界的概念联系.

$\mathbb{R}^n$	度量空间
有界 ( <i>bounded</i> )	列紧
有界闭	自列紧



## 1.4 完全有界集

**$\epsilon$ -网** 在一般的度量空间中, 我们来引入一个比**有界集**更强的概念. 首先来给出  **$\epsilon$ -网**的定义.

**定义 1.4.1.** Suppose  $(X, \rho)$  be a metric space,  $N \subset M \subset X$  and  $\epsilon > 0$ . If for  $\forall x \in M$ ,  $\exists y \in N$ , s. t.

$$\rho(x, y) < \epsilon$$

则称  $N$  为  $M$  的一个 **$\epsilon$ -网**, 即  $M \subset \bigcup_{x \in N} B(x, \epsilon)$ . 进一步若  $N$  为有穷集 (*finite*), 则称  $N$  为  $M$  的一个**有穷  $\epsilon$ -网**.

**完全有界集** 下面给出**完全有界集**的概念.

**定义 1.4.2.** Suppose  $(X, \rho)$  be a metric space,  $A \subset X$ . If  $\forall \epsilon > 0$ ,  $A$  存在有穷  $\epsilon$ -网, 则称  $A$  为**完全有界集**.

**注.** 完全有界集的概念比**有界集**要更强, 即

$$\text{完全有界集} \Rightarrow \text{有界集}, \quad \text{完全有界集} \not\Leftrightarrow \text{有界集}$$

**例1.3.1** 中集合  $A = \left\{ \left\{ \delta_{kj} \right\}_{j=1}^{\infty} \right\}_{k=1}^{\infty}$  即为有界集但非**完全有界**.

**等价表述** 下面我们将给出一般度量空间中**完全有界集**的等价表述, 便于我们判断和理解**完全有界集**的概念.

### 定理 1.4.1. 完全有界集的等价表述.

Suppose  $(X, \rho)$  be a metric space and  $A \subset X$ . Then

$$A \text{ 完全有界} \Leftrightarrow A \text{ 中任意点列存在 } Cauchy \text{ 子列}$$

**注.** 根据该定理我们容易得到, 在一般的度量空间中, 列紧  $\Rightarrow$  完全有界. 而在完备度量空间中, 完全有界  $\Leftrightarrow$  列紧. 特别地, 在欧氏空间  $\mathbb{R}^n$  中, 列紧、完全有界、有界三者等价.

证明.

$\Rightarrow$  : 若  $A$  完全有界.  $\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ , 下面证明  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  存在 *Cauchy* 子列:

- For  $\epsilon = 1$ ,  $\exists y_1 \in A$ , s. t.  $B(y_1, 1)$  中包含  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  无穷多项, 记为  $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$ .

(否则若  $\forall y \in A$ ,  $B(y, 1)$  均至多包含  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  中有穷个点, 则  $A$  无有穷 1-网)

- For  $\epsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\exists y_2 \in A$ , s. t.  $B(y_2, \frac{1}{2})$  中包含  $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$  无穷多项, 记为  $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^\infty \subset \{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ .

...

- For  $\epsilon = \frac{1}{k}$ ,  $\exists y_k \in A$ , s. t.  $B(y_k, \frac{1}{k})$  中包含  $\{x_n^{(k-1)}\}_{n=1}^\infty$  中无穷多项, 记为  $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty \subset \{x_n^{(k-1)}\}_{n=1}^\infty$ .

从而我们得到了  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  的一系列子列:  $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty, \{x_n^{(2)}\}_{n=1}^\infty, \dots, \{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty, \dots$

取出第  $k$  个子列  $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$  的第  $k$  项  $x_k^{(k)}$ , 得到子列  $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ <sup>4</sup>.

下面证明:  $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$  为 *Cauchy* 列.

Since

$$\rho(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)}) \leq \rho(x_{n+p}^{(n+p)}, y_n) + \rho(y_n, x_n^{(n)}) \leq \frac{2}{n}, \quad \forall n, p \in \mathbb{N} \quad (1.80)$$

Therefore,  $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$  is a Cauchy sequence in  $A$ .

---

<sup>4</sup>这种从一系列序列中各取出一个元素构成新序列, 再 (一致) 收敛的方法称为对角线法则, 在实分析 (Real Analysis) 中证明任一可测函数可由简单函数列逼近时曾使用, 详情可见 Real Analysis 笔记定理 2.2.1.

$\Leftarrow$  : 反证法. Assume  $A$  非完全有界, 即  $\exists \epsilon_0 > 0$ , s. t.  $A$  无有穷  $\epsilon_0$ -网.

- $\forall x_1 \in A, \exists x_2 \in A \setminus B(x_1, \epsilon_0)$  (Otherwise  $A \subset B(x_1, \epsilon_0)$ ,  $A$  存在有穷  $\epsilon_0$ -网)

- Similarly,  $\exists x_3 \in A \setminus (B(x_1, \epsilon_0) \cup B(x_2, \epsilon_0))$

...

- $\exists x_k \in A \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{k-1} B(x_i, \epsilon_0) \right)$

从而得到  $A$  中的一列点  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ , 其中

$$\rho(x_i, x_j) > \epsilon_0 > 0, \forall i \neq j$$

于是  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$  无 Cauchy 子列, 矛盾.

□

## 1.5 可分度量空间

作为一类特殊的拓扑空间, 下面我们来讨论一些常见的度量空间的可分性. 首先回顾一下可分的定义.

**定义 1.5.1.** Suppose  $(X, \tau)$  be a Topological space. If  $(X, \tau)$  存在可数稠密子集, then  $(X, \tau)$  is called separable (可分的).

根据可分空间的定义, 不难得到上节所介绍的完全有界空间可分.

**命题 1.5.1.** 完全有界空间为可分度量空间.

**证明.** Suppose  $(X, \rho)$  is totally bounded. Then for  $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \in \mathbb{N}, y_1, \dots, y_{n_k} \in X$ , s. t.

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n_k} B(y_i^k, \frac{1}{k}) \quad (1.81)$$

Let

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \{y_i^k\} \subset X \text{ countable} \quad (1.82)$$

Then for  $\forall x \in X, \exists 1 \leq l_k \leq n_k, y_{l_k}^k \in A$ , s. t.

$$\rho(x, y_{l_k}^k) < \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Thus  $\{y_{l_k}^k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$  convergent to  $x \in X$ , i.e.  $y_{l_k}^k \xrightarrow{\rho} x$  as  $k \rightarrow \infty$ .

Therefore, by **Lemma A.1.1**,  $A \subset X$  is dense in  $X$ .  $X$  is separable. □

下面来讨论一些常见的度量空间的可分性.

例 1.5.1. [可分空间].

- $(C[a, b], \rho_\infty)$  可分.

– 证明. 有理系数多项式  $\xrightarrow{\text{一致逼近}}$  多项式  $\xrightarrow{\text{一致逼近}}$  连续函数 □

- $(l^p, \rho_p)$  可分.

– 证明. 此处  $(l^p, \rho_p)$  定义与例 1.3.1 中一致, 即

$$l^p = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty \mid \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty, x_n \in \mathbb{R} \right\} \quad (1.83)$$

$$\rho_p : l^p \times l^p \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (1.84)$$

$$(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) \longmapsto \rho_p(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p \quad (1.85)$$

下面来构造  $(l^p, \rho_p)$  的可数稠密子集:

\* Let

$$A_1 = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid x_1 \in \mathbb{Q}, x_n = 0, \forall n > 1\} \subset l^p \quad (1.86)$$

$$A_2 = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Q}, x_n = 0, \forall n > 2\} \subset l^p \quad (1.87)$$

$$\dots \quad (1.88)$$

$$A_k = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Q}, x_n = 0, \forall n > k\} \subset l^p \quad (1.89)$$

$$A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k \subset l^p \quad (1.90)$$

\*  $A \subset l^p$  即为  $(l^p, \rho_p)$  的可数稠密子集:

$\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^p$ . Since

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$$

Then for  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , s. t.

$$\sum_{n=N+1}^\infty |x_n|^p < \frac{\epsilon}{2}$$

Thus  $\exists \{y_n\}_{n=1}^\infty \in A_N \subset A, y_n = 0, \forall n > N$  and

$$|y_n - x_n|^p < \frac{\epsilon}{2N}, \forall 1 \leq n \leq N$$

Therefore

$$\rho_p(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p < \epsilon$$

$A \subset l^p$  is dense in  $l^p$  while it's also countable.

□

- $L^p[a, b]$  可分.

证明. Review the conclusions in *Real Analysis*.  $\forall f \in L^p[a, b]$ , then  $f$  is measurable.

Since 任一可测函数可由简单函数列逼近 (*Real Analysis* 笔记 Thm 2.2.1)

又根据 **Lusin** 定理 (*Real Analysis* 笔记 Thm 3.8.2), 可得:

$$\text{连续函数} \Rightarrow \text{简单函数} \Rightarrow f \in L^p$$

□

- $L^\infty[a, b]$  不可分.

证明. Let

$$E = \left\{ f \in L^\infty[a, b] \mid f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, r] \\ 1, & x \in (r, b] \end{cases}, \forall r \in (a, b) \right\} \quad (1.91)$$

Then  $E \subset L^\infty[a, b]$  is uncountable, and

$$\rho_\infty(f, g) = 1 > 0, \forall f, g \in E$$

下面用反证法证明  $L^\infty[a, b]$  不可分. Assume  $L^\infty[a, b]$  is separable.

Then  $\exists$  countable  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty[a, b]$ , s. t.

$$\overline{\{f_n\}_{n=1}^\infty} = L^\infty[a, b]$$

即  $L^\infty[a, b]$  中点均可由  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  中的某些点逼近, 从而

$$\bigcup_{n=1}^\infty B(f_n, \frac{1}{3}) = L^\infty[a, b] \supset E$$

于是  $\exists N \in \mathbb{N}$ , s. t.

$B(f_N, \frac{1}{3})$  中包含  $E$  中至少 2 个点 (事实上可严格地说包含  $E$  中不可数个点)

而  $\rho_\infty(f, g) = 1 > 0, \forall f, g \in E$ , 这与  $f, g \in B(f_N, \frac{1}{3})$  矛盾.

综上,  $L^\infty[a, b]$  不可分.

□

- $l^\infty$  不可分.

证明. Similarly. Let

$$E = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty \mid x_n = 0 \text{ or } 1, \forall n \in \mathbb{N}\} \subset l^\infty \quad (1.92)$$

Then  $E \subset l^\infty$  is uncountable ( $E$  与二进制数一一对应, 而二进制数与实数  $\mathbb{R}$  一一对应), and

$$\rho_\infty(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = 1 > 0, \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \in E$$

后续步骤与上述  $L^\infty[a, b]$  不可分证明过程一致.

□

## 1.6 Compact

首先来回顾一下拓扑学中关于紧致的定义, 在度量空间中也是一脉相承的.

**定义 1.6.1.** Suppose  $(X, \tau)$  be a topological space. If  $X$  的任意开覆盖都有有限子覆盖, 则称  $X$  为紧致的 (compact).

**注.** 事实上我们运用的更多的为一般拓扑 / 度量空间的紧致子集的概念, 其定义如下:

Suppose  $A \subset (X, \tau)$ . If  $A$  的任意开覆盖都有有限子覆盖 (在子空间拓扑意义下为紧集), 则称  $A$  为紧 (子) 集.

### 1.6.1 度量空间紧集的性质

下面我们给出度量空间中紧集的 4 条性质 (事实上大部分对一般的 Hausdorff 空间成立).

**命题 1.6.1.** [紧  $\Rightarrow$  闭, Hausdorff].

若  $A \subset (X, \rho)$  紧致, 则  $A$  为闭集.

**注.** 该结论对于一般拓扑空间不成立, 但对于 **Hausdorff** 空间成立, 故自然度量空间成立.

**证明.** 下面对一般情形进行证明, 即  $(X, \tau)$  为 Hausdorff 空间, 证明:  $A^c$  open.

Fix  $x \in A^c$ . Since  $X$  is Hausdorff, then for  $\forall y \in A, \exists x \in V_y^x, y \in U_y^x$ , s. t.

$$U_y^x \cap V_y^x = \emptyset, U_y^x, V_y^x \subset X$$

open

Then we have

$$A \subset \bigcup_{y \in A} U_y^x$$

Since  $A$  is compact, there exists  $U_{y_1}^x, \dots, U_{y_n}^x \in \{U_y^x\}_{y \in A}$ , s. t.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}^x$$

Let

$$V^x = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}^x \subset X$$

open

Then  $x \in V^x$  and  $V^x \cap \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}^x = \emptyset$ , so  $V^x \cap A = \emptyset, V^x \subset A^c$ . Therefore,  $A^c$  is open. □



**命题 1.6.2.** [紧集的闭子集必为紧集, 一般拓扑空间].

若  $A \subset (X, \rho)$  紧致,  $K \subset A$  为闭集, 则  $K$  紧致.

**注.** 该结论对于一般的拓扑空间均成立.

**证明.** 下面对一般情形进行证明, 且下述证明过程均以子空间  $(A, \tau_A)$  作为全空间.

$\forall \{U_i\}_{i \in I}, U_i \underset{\text{open}}{\subset} X, \forall i \in I, \text{ s. t.}$

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

Since  $K \subset A$  closed, then  $K^c \subset A$  open. Thus

$$A = K^c \cup K = K^c \cup \bigcup_{i \in I} U_i$$

Since  $A$  is compact, then  $\exists i_1, \dots, i_n \in I, \text{ s. t.}$

$$A = K^c \cup \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$$

Therefore  $K \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$ .  $K \subset A$  is compact. □

根据**命题 1.6.2**, 我们可得到另一条直接推论.

**推论 1.6.1. [Hausdorff].**

紧集和闭集的交为紧集.

**证明.** 紧集与闭集相交  $\Rightarrow$  交集为原紧集的闭子集  $\Rightarrow$  根据**命题 1.6.2**, 该交集为紧集 □

**命题 1.6.3. [Hausdorff].**

$\{K_a \subset X\}_{a \in \Lambda}$  为一个紧子集族, 满足任意有限交非空, 则

$$\bigcap_{a \in \Lambda} K_a \neq \emptyset \quad (1.93)$$

**证明.** 反证法. Assume  $\bigcap_{a \in \Lambda} K_a = \emptyset$ . Then for  $\forall a_0 \in \Lambda$ ,

$$K_{a_0} \cap \bigcap_{\substack{a \in \Lambda \\ a \neq a_0}} K_a = \emptyset, \quad K_{a_0} \subset \bigcup_{\substack{a \in \Lambda \\ a \neq a_0}} K_a^c$$

Since  $X$  is Hausdorff,  $K_a \subset X$  is compact, then  $K_a$  is closed,  $\forall a \in \Lambda$ . Thus

$\{K_a^c \mid a \neq a_0\}_{a \in \Lambda}$  is an open covering of  $K_{a_0}$ . Since  $K_{a_0} \subset X$  is compact, then  $\exists a_1, \dots, a_n \in \Lambda$ , s. t.

$$K_{a_0} \subset \bigcup_{i=1}^n K_{a_i}^c$$

Therefore,

$$\bigcap_{i=0}^n K_{a_i} = \emptyset$$

which is a contradiction to “任意有限交非空”. □

**命题 1.6.4. [Hausdorff].**

$A \subset (X, \rho)$  为闭集. 若对于  $A$  中任意闭子集族  $\{F_a\}_{a \in \Lambda}$ , 如果满足任意有限交非空, 便有  $\bigcap_{a \in \Lambda} F_a \neq \emptyset$ , 则  $A$  为紧集.

**证明.**  $\forall \{U_i\}_{i \in I}, U_i \subset X, \forall i \in I$ , s. t.

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

Then  $\{U_i^c \cap A\}_{i \in I}$  为  $A$  的闭子集族. Since

$$\bigcap_{i \in I} U_i^c \cap A = \emptyset$$

Then 根据条件,  $\{U_i^c \cap A\}_{i \in I}$  存在有限交为空集, 即  $\exists i_1, \dots, i_n \in I$ , s. t.

$$\bigcap_{k=1}^n U_{i_k}^c \cap A = A \cap \left( \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \right)^c = \emptyset$$

Thus

$$A \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$$

Therefore,  $A \subset X$  is compact. □

## 1.6.2 度量空间紧致的等价刻画

下面我们将说明, 在度量空间中, 紧致性与自列紧性等价.

**定理 1.6.2.** [紧致  $\Leftrightarrow$  自列紧, 度量空间].

在度量空间  $(X, \rho)$  中,

$$A \subset X \text{ 紧致} \Leftrightarrow \text{自列紧}$$

**证明.**

$\Rightarrow$  : 只需考虑  $A$  中无穷点集的情形.  $\forall$  无穷点集  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ , 不妨设  $x_n$  互异.

反证法. Assume  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$  在  $A$  中无聚点, 则  $\forall x \in A, \exists U_x \subset X$ , s. t.

$$U_x \cap \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \{x\} \quad (= \emptyset \text{ or } \{x\})$$

Since  $A \subset \bigcup_{x \in A} U_x$ ,  $A$  is compact, then  $\exists y_1, \dots, y_n \in A$ , s. t.

$$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$$

从而  $\{U_{y_i}\}_{i=1}^n$  中至少有一项中包含  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  中无穷多项, 这与  $U_x \cap \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \{x\}$  矛盾.

综上,  $A \subset X$  紧致  $\Rightarrow$  自列紧.

$\Leftarrow$  : 反证法. 假设  $\exists A$  的一个开覆盖  $\{U_a\}_{a \in \Lambda}$  不存在有限子覆盖.

Since  $A$  自列紧  $\Rightarrow$  列紧  $\Rightarrow$  完全有界 (**Thm 1.4.1**), then for  $\forall$  fixed  $n \in \mathbb{N}$ ,

$A$  存在有穷  $\frac{1}{n}$ -网, i.e.  $\exists M_n$  finite, s. t.

$$A \subset \bigcup_{x \in M_n} B(x, \frac{1}{n})$$

Then for the fixed  $n, \exists x_n \in M_n$ , s. t.  $B(x_n, \frac{1}{n})$  不能被  $\{U_a\}_{a \in \Lambda}$  有限覆盖.

(否则若  $\forall x \in M_n, B(x, \frac{1}{n})$  均可被  $\{U_a\}_{a \in \Lambda}$  有限覆盖, 则  $A \subset \bigcup_{x \in M_n} B(x, \frac{1}{n})$  可被  $\{U_a\}_{a \in \Lambda}$  有限覆盖. 矛盾)

Then we get a sequence  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$  in  $A$ .

Since  $A$  自列紧, then  $\exists$  subsequence  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , s. t.

$$x_{n_k} \rightarrow x_0 \in A \text{ as } k \rightarrow \infty$$

Since  $\{U_a\}_{a \in \Lambda}$  covers  $A$ , then  $\exists a_0 \in \Lambda$ , s. t.  $x_0 \in U_{a_0}$ .

Since  $U_{a_0}$  is open, then  $\exists \epsilon > 0$ , s. t.  $B(x_0, \epsilon) \subset U_{a_0}$ .

However, since  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ , for  $\epsilon > 0$ ,  $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ , s. t.

$$\rho(x_{n_{k_0}}, x_0) < \frac{\epsilon}{3} \text{ and } \frac{1}{n_{k_0}} < \frac{\epsilon}{3}$$

Then  $B(x_{n_{k_0}}, \frac{1}{n_{k_0}}) \subset U_{a_0}$ , 于是  $B(x_{n_{k_0}}, \frac{1}{n_{k_0}})$  被  $\{U_a\}_{a \in \Lambda}$  有限覆盖, 矛盾.  
综上,  $A$  自列紧  $\Rightarrow$  compact.

□

## 1.7 一致有界, 等度连续

为了给出上  $C[a, b]$  (列) 紧集的刻画, 即下节介绍的 **Arzelà-Ascoli 定理**, 本节来给出一些前置概念.

### 1.7.1 紧致度量空间上的连续函数全体

首先来给出紧致度量空间  $X$  上的连续函数全体  $C(X)$ , 并赋予相应的度量 (无穷范数), 使其称为完备度量空间.

**定义 1.7.1.** 设  $(X, \rho)$  为紧致度量空间, 其上的连续函数全体  $C(X)$  被定义为:

$$C(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ continuous}\}, \mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\} \quad (1.94)$$

赋予  $C(X)$  上度量  $d$ , 定义为:

$$d : C(X) \times C(X) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (1.95)$$

$$(f, g) \mapsto \max_{x \in X} |f(x) - g(x)| \quad (1.96)$$

**注.** • 不难证明上述定义的度量  $d$  满足度量的三大公理 (**Def 1.1.2**). 关于其定义是否良好 (**Well-defined**) 的问题, 只需说明对于  $\forall f, g \in C(X)$ ,  $d(f, g)$  的存在性:

- **证明.** 不难证明  $C(X)$  为线性空间, 于是对于  $\forall f, g \in C(X)$ ,  $f - g \in C(X)$ . 根据绝对值不等式, 容易得到绝对值保持  $C(X)$  中函数的连续性.

$$(|\varphi(x)| - |\varphi(y)|) \leq |\varphi(x) - \varphi(y)|, \forall \varphi \in C(X), x, y \in X$$

因此  $|f - g| \in C(X)$ , 即连续.

Since  $X$  is compact, then  $|f - g|(X) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  compact, 可取到最大值. 故  $d(f, g)$  存在.  $\square$

- 事实上, 上述定义的度量空间  $(C(X), d)$  是完备的, 这在下面的**命题 1.7.1** 中得以证明.

下面的命题证明了, 定义 1.7.1 中定义的度量空间  $(C(X), d)$  是完备的.

**命题 1.7.1.**  $(C(X), d)$  为完备度量空间.

**证明.**  $\forall$  Cauchy sequence  $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C(X)$ , i.e.  $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ , s. t.

$$d(f_m, f_n) = \max_{x \in X} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \forall m, n \geq N_\epsilon$$

下面分两步进行证明:

1.  $\exists f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ , s. t.  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ,  $\forall x \in X$ :

Since  $\max_{x \in X} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$ ,  $\forall m, n \geq N_\epsilon$ , then

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X, \quad \forall m, n \geq N_\epsilon$$

Thus  $\forall x \in X$ , fix  $x$ .  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K}$  is a Cauchy sequence in  $\mathbb{K}$ .

Since both  $\mathbb{C}$  and  $\mathbb{R}$  are complete, then  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  converges,  $\forall x \in X$ . Let

$$f : X \longrightarrow \mathbb{K} \tag{1.97}$$

$$x \longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \tag{1.98}$$

Then  $f$  is a mapping from  $X$  to  $\mathbb{K}$  with  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ,  $\forall x \in X$ .

2.  $f \in C(X)$ , i.e.  $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$  continuous:

Since

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X, \quad \forall m, n \geq N_\epsilon$$

Then letting  $m \rightarrow \infty$ , we get  $f_n \Rightarrow f$ , i.e.

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X, \quad \forall n \geq N_\epsilon$$

For  $f_{N_\epsilon} \in C(X)$ , fix  $\epsilon > 0$ . Since  $f_{N_\epsilon}$  continuous,  $\exists \delta > 0$ , s. t.

$$|f_{N_\epsilon}(x) - f_{N_\epsilon}(y)| < \epsilon, \quad \forall \rho(x, y) < \delta$$

Then for  $\epsilon > 0, \exists \delta > 0, N_\epsilon \in \mathbb{N}$ , s. t.

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{N_\epsilon}(x)| + |f_{N_\epsilon}(x) - f_{N_\epsilon}(y)| + |f_{N_\epsilon}(y) - f(y)| \tag{1.99}$$

$$< 3\epsilon, \quad \forall \rho(x, y) < \delta \tag{1.100}$$

Therefore,  $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$  is continuous,  $f \in C(X)$ . In short,  $(C(X), d)$  is complete.

□

## 1.7.2 一致有界, 等度连续

下面我们来给出一致有界与等度连续的概念, 实际上为数学分析中一致有界与一致连续在更高维度上的一致性的推广, 即同时对函数和自变量都一致.

**定义 1.7.2. [一致有界].**

设  $(X, \rho)$  为紧致度量空间,  $A \subset (C(X), d)$ . 若

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \varphi \in A}} |\varphi(x)| < \infty$$

则称 A 一致有界.

**定义 1.7.3. [等度连续].**

设  $(X, \rho)$  为紧致度量空间,  $A \subset (C(X), d)$ . 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s. t.}$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon, \quad \forall \rho(x, y) < \delta, \quad \forall \varphi \in A$$

则称 A 等度连续.

**注.** 相当于在数学分析函数一致连续的概念上增加了对  $A$  中所有函数的一致性.

## 1.8 Arzelà-Ascoli 定理

接下来我们将介绍 **Arzelà-Ascoli** 定理, 它给出了紧致度量空间  $X$  上连续函数全体  $(C(X), d)$  的 (列) 紧子集的等价刻画.

**定理 1.8.1. [Arzelà-Ascoli].**

设  $(X, \rho)$  为紧致度量空间,  $A \subset C(X)$ , 则:

$$A \text{ 列紧} \Leftrightarrow A \text{ 一致有界且等度连续}$$

**证明.**

$\Rightarrow$  : 下面分两点分别证明一致有界和等度连续.

- $A$  一致有界: Since  $A$  列紧  $\Rightarrow$  完全有界, then for  $\epsilon = 1$ ,  $\exists \varphi_1, \dots, \varphi_n \in A$ , s. t.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B(\varphi_i, 1)$$

$$\forall \varphi \in A, \text{ WTS: } \exists M > 0, \text{ s. t. } |\varphi(x)| \leq M, \forall x \in X.$$

$$\exists 1 \leq i_0 \leq n, \text{ s. t.}$$

$$\varphi \in B(\varphi_{i_0}, 1)$$

Then

$$d(\varphi, \varphi_{i_0}) = \max_{x \in X} |\varphi(x) - \varphi_{i_0}(x)| < 1$$

Thus

$$|\varphi(x) - \varphi_{i_0}(x)| < 1, \forall x \in X$$

Fix  $1 \leq i \leq n$ . For  $\varphi_i \in A \subset C(X)$ .

Since  $X$  is compact,  $\varphi_i$  continuous, then  $\varphi_i(X) \subset \mathbb{K}$  bounded, i.e.  $\exists 0 < k_i < \infty$ , s. t.

$$|\varphi_i(x)| \leq k_i, \forall x \in X$$

Let  $k = \max_{1 \leq i \leq n} \{k_i\}$ , then

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi_{i_0}(x)| + |\varphi_{i_0}(x)| \tag{1.101}$$

$$\leq 1 + k, \forall x \in X, \forall \varphi \in A \tag{1.102}$$

Therefore,  $A \subset C(X)$  一致有界.



- $A$  等度连续: Since  $A$  列紧  $\Rightarrow$  完全有界, then for  $\forall \epsilon > 0$ ,  $A$  存在有穷  $\epsilon$ -网, i.e.

$$\exists \varphi_1^\epsilon, \dots, \varphi_{i_\epsilon}^\epsilon \in A, \text{ s. t.}$$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{i_\epsilon} B(\varphi_i^\epsilon, \epsilon)$$

Since  $\varphi_i \in C(X)$  continuous,  $\forall 1 \leq i \leq i_\epsilon$ , then for  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1^\epsilon, \dots, \delta_{i_\epsilon}^\epsilon > 0$ , s. t.

$$|\varphi_k^\epsilon(x) - \varphi_k^\epsilon(y)| < \epsilon, \quad \forall \rho(x, y) < \delta_k^\epsilon, \quad \forall 1 \leq k \leq i_\epsilon$$

Let  $\delta_\epsilon = \min\{\delta_1^\epsilon, \dots, \delta_{i_\epsilon}^\epsilon\} > 0$ , then for  $\forall 1 \leq k \leq i_\epsilon$ ,

$$|\varphi_k^\epsilon(x) - \varphi_k^\epsilon(y)| < \epsilon, \quad \forall \rho(x, y) < \delta_\epsilon$$

$\forall \psi \in A$ ,  $\exists 1 \leq i_0 \leq i_\epsilon$ , s. t.

$$\psi \in B(\varphi_{i_0}^\epsilon, \epsilon) \Rightarrow d(\psi, \varphi_{i_0}^\epsilon) < \epsilon$$

Thus

$$|\psi(x) - \varphi_{i_0}^\epsilon(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X$$

Then

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq |\psi(x) - \varphi_{i_0}^\epsilon(x)| + |\varphi_{i_0}^\epsilon(x) - \varphi_{i_0}^\epsilon(y)| + |\varphi_{i_0}^\epsilon(y) - \psi(y)| \quad (1.103)$$

$$\leq 3\epsilon, \quad \forall \rho(x, y) < \delta_\epsilon \quad (1.104)$$

Therefore,  $A \subset C(X)$  等度连续.

$\Leftarrow$  : Since  $A$  等度连续, then for  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , s. t.

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall \rho(x, y) < \delta, \quad \forall \varphi \in A$$

Since  $X$  is compact, then  $X$  存在有穷  $\delta$ -网, i.e.  $\exists \{x_1^\delta, \dots, x_n^\delta\} \subset X$ , s. t.

$$X \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i^\delta, \delta)$$

Let

$$\widetilde{A} = \left\{ \left( \varphi(x_1^\delta), \dots, \varphi(x_n^\delta) \right) \in \mathbb{K}^n \mid \varphi \in A \right\}$$

and denote

$$\widetilde{\varphi}: X^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \quad (1.105)$$

$$x^\delta \longmapsto (\varphi(x_1^\delta), \dots, \varphi(x_n^\delta)) \in \mathbb{K}^n \quad (1.106)$$

Then  $\widetilde{A} = \{\widetilde{\varphi}(x^\delta) \in \mathbb{K}^n \mid \varphi \in A\}$ .

Since  $A$  一致有界, i.e.

$$|\varphi(x)| \leq M, \quad \forall x \in X, \quad \forall \varphi \in A \text{ for some } M > 0$$

$$\Rightarrow \widetilde{A} \subset \mathbb{K}^n \text{ is bounded in } \mathbb{K}^n$$

Since both in  $\mathbb{R}^n$  and  $\mathbb{C}^n$ , 有界  $\Leftrightarrow$  列紧  $\Leftrightarrow$  完全有界, then  $\widetilde{A}$  完全有界.

Thus  $\widetilde{A}$  存在有穷  $\delta$ -网, i.e.  $\exists \{\widetilde{\varphi}_1(x^\delta), \dots, \widetilde{\varphi}_m(x^\delta)\} \subset \widetilde{A}$ , s. t.

$$\widetilde{A} \subset \bigcup_{i=1}^m B(\widetilde{\varphi}_i(x^\delta), \frac{\epsilon}{3})$$

下面证明:  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  即为  $A$  的有穷  $\epsilon$ -网:

$\forall \varphi \in A, \exists 1 \leq i_0 \leq m$ , s. t.

$$\widetilde{\varphi}(x^\delta) \subset B(\widetilde{\varphi}_{i_0}(x^\delta), \frac{\epsilon}{3})$$

$\forall x \in X$ , fix  $x$ . Since  $\{x_1^\delta, \dots, x_n^\delta\}$  为  $X$  的  $\delta$ -网, then  $\exists 1 \leq j_0 \leq n$ , s. t.

$$\rho(x, x_{j_0}^\delta) < \delta$$

Then by  $A$  等度连续,

$$|\varphi(x) - \varphi_{i_0}(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_{j_0}^\delta)| + |\varphi(x_{j_0}^\delta) - \varphi_{i_0}(x_{j_0}^\delta)| + |\varphi_{i_0}(x_{j_0}^\delta) - \varphi_{i_0}(x)| \quad (1.107)$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + |\varphi(x_{j_0}^\delta) - \varphi_{i_0}(x_{j_0}^\delta)| + \frac{\epsilon}{3} \quad (1.108)$$

$$< \frac{2}{3}\epsilon + |\widetilde{\varphi}(x^\delta) - \widetilde{\varphi}_{i_0}(x^\delta)| \quad (1.109)$$

$$< \epsilon, \quad \forall x \in X \quad (1.110)$$

Thus,

$$d(\varphi, \varphi_{i_0}) = \max_{x \in X} |\varphi(x) - \varphi_{i_0}(x)| < \epsilon$$

i.e.

$$\varphi \in B(\varphi_{i_0}, \epsilon)$$

Therefore,  $A$  完全有界  $\Leftrightarrow$  列紧.

□

## 1.9 Banach 不动点定理

### 1.9.1 Banach 不动点定理 / 压缩映射原理

在数学分析中我们事实上已经接触过 **Banach** 不动点定理 (压缩映射原理), 此处给出其在完备度量空间上的推广. 首先来回顾一下压缩映射的概念.

**定义 1.9.1.** Suppose  $(X, \rho)$  be a metric space,  $T : X \longrightarrow X$ . If  $\exists 0 < L < 1$ , s. t.

$$\rho(Tx, Ty) \leq L \rho(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

Then 称  $T$  为度量空间  $(X, \rho)$  上的一个 压缩映射.

下面我们来给出 **Banach** 不动点定理.

**定理 1.9.1. [Banach 不动点定理 / 压缩映射原理].**

若度量空间  $(X, \rho)$  完备, 则  $X$  到自身的压缩映射  $T$  必存在**唯一**不动点.

**证明.** 证明是 Trivial 的. 下面分两步, 先证明存在性, 再证明唯一性.

- 压缩映射  $T : X \longrightarrow X$  存在不动点:  $\forall x \in X$ , consider the sequence  $\{T^n(x)\}_{n=1}^\infty$ .

Since  $T$  为压缩映射, then  $\exists 0 < L < 1$ , s. t.

$$\rho(Tx, Ty) \leq L \rho(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

Thus for  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$ , s. t.  $L^n < \epsilon$ ,  $\forall n > N_\epsilon$ . Then

$$\rho(T^{n+p}(x), T^n(x)) \leq L^n \rho(T^p(x), x) \tag{1.111}$$

$$\leq L^n [\rho(T^p(x), T^{p-1}(x)) + \cdots + \rho(T(x), x)] \tag{1.112}$$

$$\leq L^n (L^{p-1} + \cdots + L + 1) \rho(T(x), x) \tag{1.113}$$

$$\leq \frac{L^n}{1-L} \rho(T(x), x) \leq \frac{\rho(T(x), x)}{1-L} \epsilon, \quad \forall n > N_\epsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N} \tag{1.114}$$

Thus  $\{T^n(x)\}_{n=1}^\infty \subset X$  is a Cauchy sequence in  $X$ .

Since  $X$  is complete, then  $\{T^n(x)\}_{n=1}^\infty$  converges. Let  $T^n(x) \rightarrow x_0 \in X$ ,

Then 根据  $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ , letting  $n \rightarrow \infty$ , we get  $T(x_0) = x_0$ .  $x_0 \in X$  即为  $T$  的不动点.

- $T : X \longrightarrow X$  的不动点唯一: Assume  $x_0, y_0 \in X$  均为  $T$  的不动点, then

$$T^n(x_0) = x_0, T^n(y_0) = y_0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Thus

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(T^n(x_0), T^n(y_0)) \leq L^n \rho(x_0, y_0), \forall n \in \mathbb{N}$$

Letting  $n \rightarrow \infty$ , we have  $\rho(x_0, y_0) = 0$ , i.e.  $x_0 = y_0$ .

□

根据定理 1.9.1, 我们可以得到一个有趣的推论.

**推论 1.9.2.** Suppose  $(X, \rho)$  be a complete metric space,  $T : X \longrightarrow X$ . 若  $T^n$  为压缩映射, 则  $T$  存在唯一不动点.

**证明.**

- 存在性: Since  $T^n : X \longrightarrow X$  为压缩映射, then by **Banach** 不动点定理 (Thm 1.9.1),  $\exists x_0 \in X$ , s. t.

$$T^n(x_0) = x_0$$

等式两边同时作用  $T$ , 得到

$$T^n(T(x_0)) = T(x_0)$$

于是  $T(x_0) \in X$  也为  $T^n$  的不动点. 根据不动点的唯一性 (Thm 1.9.1), 可得

$$T(x_0) = x_0$$

于是  $x_0 \in X$  也为  $T$  的不动点.

- 唯一性: 设  $y_0 \in X$  也为  $T$  的不动点, 即  $y_0 = T(y_0)$ , 则归纳可得:

$$y_0 = T(y_0) = T^k(y_0), \forall k \in \mathbb{N}$$

取  $k = n + 1$ , 得到:  $T(y_0) = T^n(T(y_0))$ , 于是  $T(y_0) = y_0$  为  $T^n$  的不动点.

根据  $T^n$  不动点唯一性, 可得:

$$T(y_0) = y_0 = x_0$$

□

## 1.9.2 Volterra 方程

这一小节我们将回顾常微分方程 (ODE) 课程中最常见的 **Volterra 方程**, 并运用 **Banach 不动点定理 (压缩映射原理)** 及其推论来证明其解的存在唯一性.

**例 1.9.1. [Volterra 方程解的存在唯一性].**

证明: 积分方程

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s)x(s) ds$$

在  $C[a, b]$  中存在唯一解, 其中  $f \in C[a, b]$ ,  $k \in C[a, b]^2$  给定,  $\lambda \in \mathbb{R}$  是任意的.

证明. Let

$$T : C[a, b] \longrightarrow C[a, b] \quad (1.115)$$

$$x \longmapsto Tx : t \longmapsto f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s)x(s) ds \quad (1.116)$$

Then  $T$  为良定义的算子. 我们考虑使用**推论 1.9.2** 来证明, 其关键就在于该如何计算  $T^n$ , 即

要证:  $T$  存在唯一不动点

只需证:  $\exists n \in \mathbb{N}$ , s. t.  $T^n$  为压缩映射

不难发现,  $\forall x \in C[a, b]$  在经过算子  $T^n$  作用后, 得到的结果中,  $f$  与  $x$  是不相关的, 于是可写为如下形式:

$$T^n(x) = S_n(f) + R_n(x)$$

于是

$$T^n(x) - T^n(y) = R_n(x) - R_n(y)$$

由于

$$R_n(x) = \lambda^n \int_a^t \int_a^{t_n} \cdots \int_a^{t_2} k(t, t_n)k(t_n, t_{n-1}) \cdots k(t_2, t_1)x(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_n$$

于是

$$d(T^n(x), T^n(y)) = \|T^n(x) - T^n(y)\|_\infty \quad (1.117)$$

$$= |\lambda|^n \left\| \int_a^{t_n} \cdots \int_a^{t_2} k(t, t_n)k(t_n, t_{n-1}) \cdots k(t_2, t_1)x(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_n \right\|_\infty \quad (1.118)$$

$$\leq |\lambda|^n \|k\|_\infty^n \|x - y\|_\infty \left| \int_a^{t_n} \cdots \int_a^{t_2} dt_1 dt_2 \cdots dt_n \right| \quad (1.119)$$

$$\leq |\lambda|^n \|k\|_\infty^n \|x - y\|_\infty \frac{(t-a)^n}{n!} \quad (1.120)$$

$$\leq |\lambda|^n \|k\|_\infty^n \|x - y\|_\infty \frac{(b-a)^n}{n!} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (1.121)$$

Thus  $\exists N \in \mathbb{N}$ , s. t.  $T^N$  为压缩映射, 从而  $T$  存在唯一不动点, 即方程在  $C[a, b]$  上存在唯一解.  $\square$

# 附录 A *Supplementary Content*

## A.1 度量空间稠密子集的等价刻画

引理 A.1.1. 度量空间稠密子集的等价刻画.

Suppose  $(X, \rho)$  be a metric space. Then for  $A \subset X$ ,

$$A \text{ is dense in } X \Leftrightarrow \forall x \in X, \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A, \text{ s. t. } x_n \xrightarrow{\rho} x$$

证明.

$\Rightarrow$  : Trivial.  $\forall x \in X$ , since  $A$  is dense in  $X$ , then

$$A \cap B(x, r) \cap X \neq \emptyset, \forall r > 0 \quad (\text{A.1})$$

不妨设  $B(x, 1) \cap X \setminus \{x\} \neq \emptyset$ . Then we take

$$x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n}), \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{A.2})$$

where we get  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$  with  $x_n \xrightarrow{\rho} x$ .

$\Leftarrow$  :  $\forall x \in X \setminus A$ , WTS:  $x \in \overline{A} \setminus A$ . Trivial.

□