Functional Analysis[1]

–TW–

2024 年 10 月 27 日

[1]参考书籍：

《Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications》– Philippe G. Ciarlet

《Real Analysis – Modern Techniques and Their Applications》– Gerald B. Folland

《Functional Analysis – Introduction to Further Topics in Analysis》– Elias M. Stein

《泛函分析讲义》– 张恭庆、林源渠

序

天道几何，万品流形先自守；

变分无限，孤心测度有同伦。

2024 年 10 月 27 日

长夜伴浪破晓梦，梦晓破浪伴夜长

目录

第一章　度量空间

1.1　L^p 空间为赋范线性空间

回顾实分析中对**范数**、**度量**及 L^p 空间的定义.

1.1.1　范数，度量

下面给出**范数**和**度量**的大致定义.

定义 1.1.1. Let X be a vector space over field $\mathbb{K}$, a **norm** is a function:

$$X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{1.1}$$

$$f \longmapsto \|f\| \tag{1.2}$$

satisfying the following properties:

(i) $\|f\| \geq 0, \forall f \in X.$　　　$(\|f\| = 0 \iff f = 0\ a.e.)$

(ii) $\|af\| = |a|\,\|f\|, \forall a \in \mathbb{K}, f \in X.$

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in X.$

注.

- (i) 中的“$\|f\| = 0 \iff f = 0\ a.e.$”的“**a.e.**”是对于 X 取函数空间时的条件，在实分析的取等条件中基本为默认叙述，在后续定义中往往省略. 在对 $\mathcal{L}^p$ 空间的定义 (**定义 1.1.3**) 中可以看到其合理性.

- **范数**实际上是对 $\mathbb{R}^n$ 空间中“**与原点之间的距离**”这一概念的推广. 将函数视作向量，则其范数即为到原点的距离，即**模长**.

- 若一个**线性空间** X 上配备了一个**范数**，则称其为**赋范空间 (赋范线性空间)**.

将函数视作向量，就有其**到原点的距离为范数**. 但若是想要衡量**任意两个函数之间的距离**，则需要引入下面**度量**的概念.

定义 1.1.2. A **metric** on X is a map

$$\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{1.3}$$

$$(x, y) \longmapsto \rho(x, y) \tag{1.4}$$

satisfying

(i) $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X.$ $\quad (\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X.$

(iii) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z), \forall x, y, z \in X.$

注.

- 若 X 为函数空间，则 (i) 中“$\rho(x, y) = 0$”等价条件默认为“$x = y$ $a.e.$”.
- **度量**可看作将两个函数 (向量) 的起点均平移至原点后，其两个终点之间的**距离**.

1.1.2 L^p Space

L^p Space 下面给出 L^p 空间的定义.

定义 1.1.3. For any measure space $(X, \mathcal{M}, \mu)$, define the *L^p Space $L^p(X)$* on X $(1 \leq p < \infty)$

$$L^p(X) = \left\{ f \in \mathcal{M} \mid \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}, \ \forall 1 \leq p < \infty \tag{1.5}$$

$$L^\infty(X) = \left\{ f \in \mathcal{M} \,\middle|\, \inf \{ C \geq 0 \mid |f| \leq C \ a.e. \} < \infty \right\} \tag{1.6}$$

注. 与 L^1 空间 (即可积函数构成的空间) 类似, 后面我们考虑的 $L^p(X)$ 空间事实上为**几乎处处相等**意义下的完全剩余系, 即在 $L^p(X)$ 空间上定义一个等价关系 $\sim$:

$$f \sim g \ \Leftrightarrow \ f = g \ a.e.$$

此时再令 $L^p(X)$ 空间模去该等价关系 $\sim$, 即

$$L^p(X) := L^p(X) / \sim$$

L^p 范数　在 L^p 空间上, 我们来定义 L^p 范数.

定义 1.1.4. Measure space $(X, \mathcal{M}, \mu)$. For any function $f \in L^p(X)$, define the **L^p norm** of f

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall 1 \le p < \infty \tag{1.7}$$

$$\|f\|_\infty = \inf \{ C \ge 0 \mid |f| \le C \ a.e. \} \tag{1.8}$$

注.
- 不难得到 L^∞ 范数的**等价定义**为

$$\|f\|_\infty = \sup \{ C \ge 0 \mid \mu(|f| > C) > 0 \} \tag{1.9}$$

- 为了说明上述定义是 well-defined, 我们需要验证其满足**范数的三条公理 (Def 1.1.1)**. 其中前面两条 (正定性、绝对齐性) 是显然的, 而对于三角不等式, 我们需要用到后续证明的 **Minkowski Inequality (Thm 1.1.4)**.

事实上, 在证明了 **Minkowski Inequality (Thm 1.1.4)** 后, 我们还可得到 $L^p(X)$ 为**线性空间**, 从而证明 $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ 为**赋范线性空间**. 下面我们的证明思路如下:

Young Inequality $\Rightarrow$ **Hölder Inequality** $\Rightarrow$ **Minkowski Inequality**

1.1.3 Young Inequality

为了证明 **Hölder 不等式**, 先来给出 **Young 不等式**, 可视作一条**均值不等式的加权推广**.

定理 1.1.1. Young Inequality.

Suppose $p, q > 0$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Then for $\forall a, b \geq 0$, s. t.

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \tag{1.10}$$

注. **Young 不等式**可视作一条均值不等式 (几何平均数 $\leq$ 平方平均数) 的**加权推广**, 即

$$\sqrt{ab} \leq \sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}}$$

证明. (利用**指数函数的凸性**及 **Jensen Inequality**).

It's trivial when $a = 0$ or $b = 0$. 不妨设 $a, b \neq 0$, 即 $a, b > 0$.

Since $f(x) = e^x$ is convex, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, then by **Jensen Inequality**,

$$e^{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}} \leq \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

Let $x = \log a^p$, $y = \log b^q$, $\forall a, b > 0$, then

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \ \ \forall a, b > 0 \tag{1.12}$$

□

下面给出一条推论, 将用于 **Hölder Inequality** 的证明中.

推论 1.1.2. Suppose $p, q > 0$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Then for $\forall f \in L^p, g \in L^q$, s. t.

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p}\int |f|^p + \frac{1}{q}\int |g|^q \tag{1.13}$$

证明. By **Young Inequality (Thm 1.1.1)**, 逐点均有

$$|fg|(x) \leq \frac{1}{p}|f|^p(x) + \frac{1}{q}|g|^q(x), \ \ \forall x \in X \tag{1.14}$$

积分, 得

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p}\int |f|^p + \frac{1}{q}\int |g|^q \tag{1.15}$$

□

1.1.4 Hölder Inequality

下面给出二元情形下的 **Hölder** 不等式.

定理 1.1.3. Hölder Inequality.

Suppose $1 < p, q < \infty$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Then $\forall f \in L^p, g \in L^q$, s. t. $fg \in L^1$ and

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{1.16}$$

证明. It's trivial when $\|f\|_p = 0$ or $\|g\|_q = 0$. 不妨设 $\|f\|_p$，$\|g\|_q \neq 0$.
不妨设 $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. (Otherwise we can let $\widetilde{f} = \frac{f}{\|f\|_p}$ and $\widetilde{g} = \frac{g}{\|g\|_q}$)
Then by **Young Inequality (Cor 1.1.2)**,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_1 = \int |fg| &\leq \frac{1}{p}\int |f|^p + \frac{1}{q}\int |g|^q && (1.17)\\
&= \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q && (1.18)\\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} && (1.19)\\
&= 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q && (1.20)
\end{aligned}$$

□

1.1.5 Minkowski Inequality

下面给出 **Minkowski 不等式**的内容, 它说明了我们所定义的 L^p 范数 $\|\cdot\|_p$ (Def 1.1.4) 的合理性, 并且可以推出 L^p 空间为**线性空间**, 从而得到 $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ 为**赋范线性空间**.

定理 1.1.4. Minkowski Inequality.
Suppose $1 \le p < \infty$. Then for $\forall f, g \in L^p$, s. t.

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \tag{1.21}$$

证明. $\forall f, g \in L^p$, we have

$$\|f+g\|_p^p = \int |f+g|^p = \int |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \tag{1.22}$$

$$\le \int |f| \cdot |f+g|^{p-1} + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1} \tag{1.23}$$

By **Hölder Inequality (Thm 1.1.3)**,

$$\int |f| \cdot |f+g|^{p-1} = \| \, |f| \cdot |f+g|^{p-1} \, \|_1 \le \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |f+g|^{(p-1)\cdot q} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.24}$$

where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Thus $q = \frac{p}{p-1}$, $(p-1)q = p$, we have

$$\int |f| \cdot |f+g|^{p-1} \le \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |f+g|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f\|_p \cdot \|f+g\|_p^{p-1} \tag{1.25}$$

Similarly, we get

$$\int |g| \cdot |f+g|^{p-1} \le \left(\int |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |f+g|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|g\|_p \cdot \|f+g\|_p^{p-1} \tag{1.26}$$

Therefore,

$$\|f+g\|_p^p \le \int |f| \cdot |f+g|^{p-1} + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1} \tag{1.27}$$

$$\le (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f+g\|_p^{p-1} \tag{1.28}$$

i.e.

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p, \ \forall f, g \in L^p \tag{1.29}$$

□

1.2 Completion of a metric space

下面我们来讨论**度量空间的完备化**的内容. 在此之前先给出一些基础概念.

1.2.1 Complete metric spaces

柯西列 先来推广**一般度量空间** (X,ρ) **上的柯西列**的定义.

定义 1.2.1. In a metric space (X,ρ), a sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ of points $x_n \in X$ is a **Cauchy sequence** if $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\rho(x_m, x_n) < \epsilon, \ \ \forall m, n > N \tag{1.30}$$

注. **Cauchy sequence** 也有一种**等价定义**, 涉及到**直径 diam** 在一般度量空间 (X,ρ) 上的推广, 即

定义 1.2.2. In a metric space (X,ρ), a sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ of points $x_n \in X$ is a **Cauchy sequence** if

$$\lim_{n\to\infty} diam(\bigcup_{m=n}^{\infty}\{x_m\}) = 0 \tag{1.31}$$

where

$$diam(\Omega) = \sup_{x,y\in\Omega} \rho(x,y), \ \ \forall \Omega \subset X \tag{1.32}$$

完备性 下面给出一般度量空间**完备性**的定义.

定义 1.2.3. A metric space (X,ρ) is **complete** if every Cauchy sequence of points of X converges in X.

下面给出几个**完备**与**不完备**度量空间的例子.

例 1.2.1.
- $\mathbb{Q}$ 不完备, $\mathbb{R}$ 完备.
- 在 L^∞ 意义下, $P[a,b]$ **不完备** ($[a,b]$ 上的多项式空间), $C[a,b]$ **完备**.

下面给出度量空间**完备的等价表述**.

命题 1.2.1. Suppose (X,ρ) be a metric space, then

$$(X,\rho) \text{ is complete } \Leftrightarrow X \text{ 中闭集套定理成立}$$

i.e. $\forall$ 非空闭集列 $\{F_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(X)$

$$\text{If } F_1 \supset F_2 \supset \cdots \text{ and } diam(F_n) \to 0, \text{ then } \bigcap_{n=1}^\infty F_n \text{ 为单点集}$$

证明.

(a) 必要性 $\Rightarrow$: Suppose (X,ρ) is complete.
$\forall \{F_n\}_{n=1}^\infty$, $F_n \underset{closed}{\subset} X$, $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ and $diam(F_n) \to 0$. Take $x_n \in F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Then $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ is a Cauchy seqeunce in X.
Since (X,ρ) is complete, then $x_n \to x_0 \in X$. 不难证明, $x_0 \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n$. Thus $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \varnothing$.
下用反证法证明 $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ 为单点集:
Assume $\exists x' \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n$, $x' \neq x_0$, then

$$x', x_0 \in F_n, \ \forall n \in N$$

Then

$$diam(F_n) \geq \rho(x', x_0) > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$diam(F_n) \not\to 0$$

which is a contradiction. Therefore, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$ 为单点集.

(b) 充分性 $\Leftarrow$: $\forall$ Cauchy sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Let

$$F_j = \overline{\bigcup_{n=j}^{\infty} \{x_n\}}, \ j = 1, 2, \cdots \tag{1.33}$$

Then $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足闭集套条件, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$ 为单点集, $x_n \to x_0 \in X$. (X, ρ) complete.

$\square$

1.2.2 Nowhere dense & Category Set

在这一节我们给出**无处稠密 (稀疏)** 以及**纲集**的概念.

Nowhere dense 下面给出**无处稠密 / 稀疏**的定义.

定义 1.2.4. Suppose (X, ρ) be a metric space. We call $A \subset X$ **nowhere dense** if

$$\left(\overline{A}\right)^{\circ} = \varnothing \tag{1.34}$$

注.

- $A \subset X$ **无处稠密 / 稀疏**即 A 的闭包 $\overline{A}$ 无内点.

- **稠密 (dense)** 和**无处稠密 / 稀疏 (nowhere dense)**并不是一对**对偶概念**, 有如下关系:

$$A \text{ dense} \ \Leftarrow \ A^c \text{ nowhere dense}$$
$$A \text{ dense} \ \not\Rightarrow \ A^c \text{ nowhere dense}$$

证明. A^c nowhere dense $\Rightarrow$ $(\overline{A^c})^{\circ} = \varnothing$ $\Rightarrow$ $(A^c)^{\circ} = (\overline{A})^c = \varnothing$ $\Rightarrow$ $\overline{A} = X$ $\Rightarrow$ A dense □

- **单点集**不一定为**无处稠密集 / 稀疏集**. 这取决于度量 ρ 的选取, 下面给出反例.

例 1.2.2. Consider a metric space $(\mathbb{Z}, \rho)$ with

$$\rho : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{1.35}$$

$$(x, y) \longmapsto \rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \mathit{if} \ \ x = y \\ 1, & \mathit{if} \ \ x \neq y \end{cases} \tag{1.36}$$

Then for $\forall \{x\} \subset \mathbb{Z}$, $B(x, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Z} \subset \overline{\{x\}}$, 于是 $\left(\overline{\{x\}}\right)^{\circ} = \{x\}$ 非空, 单点集 $\{x\}$ **不稀疏**.

下面给出更常用的用于判断**无处稠密 / 稀疏**的**等价刻画**.

命题 1.2.2. Suppose (X, ρ) be a metric space. Then

$$A \subset X \text{ nowhere dense} \iff \forall B(x,r) \subset X,\ \exists \overline{B(x',r')} \subset B(x,r), \text{ s. t. } \overline{B(x',r')} \cap \overline{A} = \varnothing$$

证明.

(a) 必要性 $\Rightarrow$: 反证法. Assume $\exists B(x,r) \subset X$, s. t. $\forall \overline{B(x',r')} \subset B(x,r)$, $\overline{B(x',r')} \cap \overline{A} \neq \varnothing$. Then $\forall x' \in B(x,r)$, $x' \in \overline{A}$. Thus $x \in \overline{A}$ and $B(x,r) \subset \overline{A} \Rightarrow x$ 为 $\overline{A}$ 的内点, 矛盾.

(b) 充分性 $\Leftarrow$: 反证法. Suppose $\exists x_0 \in \left(\overline{A}\right)^\circ$, then $\exists B(x_0, r_0) \subset \overline{A}$. $\forall \overline{B(x',r')} \subset B(x_0, r_0)$, $\overline{B(x',r')} \subset \overline{A}$, 矛盾.

□

Category Set 下面我们来给出**纲集**的定义, 这实际上给出了度量空间 (X, ρ) 的**子集的分类**.

定义 1.2.5. Suppose (X, ρ) be a metric space. If $A \subset X$ is a countable union of nowhere dense subsets of X, i.e.

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \ \textit{where } E_n' s \textit{ are nowhere dense} \tag{1.37}$$

then we say A is a **First Category Set**. Otherwise we call it a **Second Category Set**.

例 1.2.3. 考虑欧式度量 $(\mathbb{R}^1, d)$, 则有理数集 $\mathbb{Q}$ 为**第一纲集**. 一般地, $(\mathbb{R}^1, d)$ 中的**可数点集**均为**第一纲集**.

下面给出 **Baire** 定理, 它给出了**完备度量空间的刻画**.

定理 1.2.1. Baire's Theorem.

Complete metric spaces are Second Category Sets.

证明. 反证法. Assume complete metric space (X, ρ) is a first category set. Then $\exists \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_n \subset X$ nowhere dense, s. t.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \tag{1.38}$$

Since E_n is nowhere dense, then $\exists \overline{B(x_1, r_1)} \subset X$, s. t. $\overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{E_1} = \varnothing$.

Similarly, for E_2 nowhere dense, $\exists \overline{B(x_2, r_2)} \subset B(x_1, r_1)$, s. t. $\overline{B(x_2, r_2)} \cap \overline{E_2} = \varnothing$

$$\cdots$$

Denote $F_n = \overline{B(x_n, r_n)}$, we can always choose F_k with $diam(F_{k+1}) \leq \frac{diam(F_k)}{2}$. Then F_n's satisfies:

$$F_n \underset{closed}{\subset} X, F_1 \supset F_2 \supset \cdots, diam(F_n) \to 0$$

Since X is complete, then by **Prop 1.2.1 (完备的等价表述)**,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\} \text{ 为单点集.}$$

Since $(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}) = \varnothing$, 而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} = X$, then $x_0 \notin X$, 矛盾.
Therefore, (X, ρ) is a Second Category Set. $\square$

1.2.3 保距同构, 完备化空间

这一小节我们来介绍**等距同构 (Isometry)** 和**完备化 (度量) 空间**的概念.

等距同构 (Isometry) 下面给出度量空间之间的**等距 (保距) 同构**的定义.

定义 1.2.6. Suppose $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$ are both metric spaces. Suppose

$$T : (X_1, \rho_1) \to (X_2, \rho_2)$$

If $\rho_2 \circ T = \rho_1$, then we call T an **isometry (等距 / 保距映射)**. 若进一步 T 为满射, 则称 T 为等距 / 保距同构.

注. 事实上, 条件 "$\rho_2 \circ T = \rho_1$" 已经蕴含了 **T 为单射**. 从而加上**满射**的条件即为**同构**.

证明. $\forall x, y \in X_1, x \neq y$, we have

$$\rho_1(x, y) = \rho_2(T(x), T(y)) \neq 0 \;\Rightarrow\; T(x) \neq T(y) \;\Rightarrow\; T \text{ injective}$$

□

完备化空间 下面给出一般度量空间的**完备化空间**的定义.

定义 1.2.7. Suppose (X, ρ) be a metric space. If there exists a complete metric space (X_1, ρ_1), s. t.

$$(X, \rho) \text{ 等距同构于 } (X_1, \rho_1) \text{ 的某个稠密子集}$$

则称 X_1 为 X 的完备化空间.

注. 事实上, 不难说明度量空间的**完备化空间**有如下的等价定义[1].

定义 1.2.8. 包含 (X, ρ) 的最小的完备度量空间称为 (X, ρ) 的完备化空间.

[1]详见《泛函分析讲义》– 张恭庆、林源渠, 定义 1.2.2 & 命题 1.2.5

1.2.4 Completion of a metric space

下面给出一般度量空间**完备化的过程**.

定理 1.2.2. Completion of a metric space.

任一度量空间 (X,ρ) 存在完备化空间, 且在保距同构意义下唯一.

证明.

1. Construction of the complete metric space (X_2,ρ_2):

   Let

   $$X_1 = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X \textit{ is a Cauchy squence}\} \tag{1.39}$$

   $\forall \xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \eta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in X_1$, we define an equivalence relation $\sim$[2]:

   $$\xi \sim \eta \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0 \tag{1.40}$$

   Then let

   $$X_2 = X_1 / \sim \tag{1.41}$$

   Define the metric ρ_2 on X_2

   $$\rho_2 : X_2 \times X_2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{1.42}$$

   $$([\xi],[\eta]) \longmapsto \rho_2([\xi],[\eta]) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \tag{1.43}$$

   where $\xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \eta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in X_1$.

   下面说明 ρ_2 is well-defined (与代表元无关 & 极限存在):

   (a) 与代表元无关: $\forall \widetilde{\xi} = \{\widetilde{x_n}\}_{n=1}^{\infty}, \widetilde{\eta} = \{\widetilde{y_n}\}_{n=1}^{\infty}$ with $[\widetilde{\xi}] = [\xi], [\widetilde{\eta}] = [\eta]$. Then

   $$\rho(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n}) \leq \rho(\widetilde{x_n}, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, \widetilde{y_n}), \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.44}$$

   $$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, \widetilde{x_n}) + \rho(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n}) + \rho(\widetilde{y_n}, y_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.45}$$

[2]不难证明 well-defined: 自反性、对称性、传递性

Since $[\widetilde{\xi}] = [\xi], [\widetilde{\eta}] = [\eta]$, then

$$\rho(x_n, \widetilde{x_n}) \to 0,\ \ \rho(y_n, \widetilde{y_n}) \to 0 \tag{1.46}$$

Letting $n \to \infty$, we get

$$\rho_2(\widetilde{x_n}, \widetilde{y_n}) = \rho_2(x_n, y_n) \tag{1.47}$$

(b) 极限存在: 即证 $\{\rho(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathbb{R}$ 中 Cauchy sequence.

$\forall [\xi], [\eta] \in X_2$, where $\xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \eta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ are Cauchy sequences. Then

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| = |(\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_n)) + (\rho(x_m, y_n) - \rho(x_m, y_m))| \tag{1.48}$$

$$\leq |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_n)| + |\rho(x_m, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \tag{1.49}$$

$$\leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m),\ \ \forall n, m \in \mathbb{N} \tag{1.50}$$

Since $\xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \eta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ are Cauchy sequences, then $\{\rho(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in $\mathbb{R}$.

2. Construct isometry T:

Consider 嵌入映射

$$T : X \to X_2 \tag{1.51}$$

$$x \longmapsto [\{x\}_{n=1}^{\infty}] \tag{1.52}$$

下面证明 T 为保距映射:

$\forall x, y \in X$, then

$$\rho_2(T(x), T(y)) = \lim_{n\to\infty} \rho(x, y) = \rho(x, y),\ \ \forall x, y \in X \tag{1.53}$$

Thus T is an isometry (保距映射).

3. $T(X)$ is dense in X_2:

   $\forall[\xi] = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}] \in X_2$, where $\xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in X. Then

   Consider the sequence $\{T(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ in X_2. We have

$$\rho_2(T(x_n), [\xi]) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m),\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.54}$$

   Since $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ is a Cauchy sequence in X, then

$$\lim_{n\to\infty} \rho_2(T(x_n), [\xi]) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0 \tag{1.55}$$

   i.e.

$$T(x_n) \xrightarrow{\rho_2} [\xi],\ \forall[\xi] = [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}] \in X_2 \tag{1.56}$$

   Therefore, $T(X)$ is dense[3] in X_2, and so (X, ρ) 保距同构于 (X_2, ρ_2) 的稠密子集 TX.

4. (X_2, ρ_2) is complete:

   $\forall$ Cauchy sequence $\{[\xi_n]\}_{n=1}^{\infty} \subset X_2$, where $\xi_n = \{x_j^n\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ is a Cauchy sequence.

   By **Step 3**, $T(X)$ is dense in X_2 and $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\rho_2(T(x_j^n), [\xi_n]) \to 0,\ as\ j \to \infty \tag{1.57}$$

   Thus $\exists j_n \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\rho_2(T(x_{j_n}^n), [\xi_n]) < \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.58}$$

   Let $\xi = \{x_{j_n}^n\}_{n=1}^{\infty}$. It suffices to show $[\xi_n] \to [\xi]$, i.e.

$$\rho_2([\xi_n], [\xi]) \to 0,\ as\ n \to \infty \tag{1.59}$$

   而这需要证明两点结论, 即 $[\xi] \in X_2$ & $[\xi_n] \to [\xi]$:

[3]此处实际用到了**度量空间稠密子集的等价刻画**, 具体可见**附录 A - Lemma A.1.1**

(a) $[\xi] \in X_2$, i.e. $\xi = \{x_{j_n}^n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ is a Cauchy sequence in X:

Fix $\epsilon > 0$. Since $\{[\xi_n]\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in X_2, and $\rho_2(T(x_{j_n}^n), [\xi_n]) \to 0$, then since T is isometry (by **Step 2**)

$\exists N \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\rho(x_{j_k}^k, x_{j_l}^l) = \rho_2(T(x_{j_k}^k), T(x_{j_l}^l)) \tag{1.60}$$

$$\leq \rho_2(T(x_{j_k}^k), [\xi_k]) + \rho_2([\xi_k], [\xi_l]) + \rho_2([\xi_l], T(x_{j_l}^l)) \tag{1.61}$$

$$< \epsilon, \ \forall k, l > N \tag{1.62}$$

Therefore, $\xi = \{x_{j_n}^n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ is a Cauchy sequence, thus $[\xi] \in X_2$.

(b) $[\xi_n] \to [\xi]$:

WTS: $\rho_2([\xi_n], [\xi]) \to 0$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \rho_2([\xi_n], [\xi]) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \rho(x_k^n, x_{j_k}^k) = 0 \tag{1.63}$$

Fix $n \in \mathbb{N}$. Since

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_{j_n}^n, x_k^n) = \rho_2(T(x_{j_n}^n), [\xi_n]) < \frac{1}{n} \tag{1.64}$$

Then $\forall \epsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\rho(x_{j_n}^n, x_k^n) < \frac{1}{n} + \epsilon, \ \forall k > k_0 \tag{1.65}$$

Since $\xi = \{x_{j_n}^n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ is a Cauchy sequence in X, then

$$\rho(x_{j_n}^n, x_{j_k}^k) \to 0 \ as \ n, k \to \infty \tag{1.66}$$

Then

$$\rho(x_k^n, x_{j_k}^k) \leq \rho(x_k^n, x_{j_n}^n) + \rho(x_{j_n}^n, x_{j_k}^k) \tag{1.67}$$

$$\leq \frac{1}{n} + \epsilon + \rho(x_{j_n}^n, x_{j_k}^k) \tag{1.68}$$

Letting $\epsilon \to 0^+$ and $n, k \to \infty$, we have

$$\lim_{n\to\infty} \rho_2([\xi_n], [\xi]) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \rho(x_k^n, x_{j_k}^k) = 0 \tag{1.69}$$

5. X_2 在保距同构下的唯一性:

   Suppose $(X_2, \rho_2), (X_2^{'}, \rho_2^{'})$ 均为 (X, ρ) 的完备化空间. $i_1 : X \to X_2$, $i_2 : X \to X_2^{'}$ 为保距映射. $\forall [\xi] \in X_2$. By **Step 3**, $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, s. t.

$$i_1(x_n) \to [\xi] \ in \ X_2, \ as \ n \to \infty \tag{1.70}$$

   $\Rightarrow$ $\{i_1(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset X_2$ is a Cauchy sequence in X_2.

   $\Rightarrow$ $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\rho_2(i_1(x_n), i_1(x_m)) = \rho(x_n, x_m) < \epsilon, \ \forall n, m > N \tag{1.71}$$

   $\Rightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ is a Cauchy sequence in X.

   $\Rightarrow$ $\{i_2(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset X_2^{'}$ is a Cauchy sequence in $X_2^{'}$.

   $\Rightarrow$ Suppose $i_2(x_n) \to [\xi^{'}] \in X_2^{'}$ as $n \to \infty$. Let

$$T : X_2 \longrightarrow X_2^{'} \tag{1.72}$$

$$[\xi] \longmapsto T([\xi]) = [\xi^{'}] \tag{1.73}$$

   不难证明 $T : X_2 \to X_2^{'}$ 为保距映射. Similarly, we can prove T is surjective.

   $\Rightarrow$ T is an isometry. i.e. $X_2, X_2^{'}$ 保距同构.

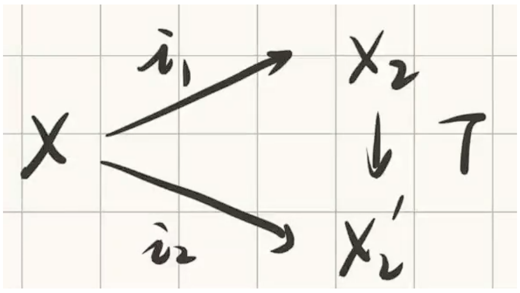

图 1.1: X_2 在保距同构下的唯一性

□

例 **1.2.4.** 下面给出两个完备化空间的例子.

1. $(P[a,b], \rho_\infty) \to (C[a,b], \rho_\infty)$, 即区间 $[a,b]$ 上的多项式全体在度量 ρ_∞ 下的完备化空间为 $[a,b]$ 上的连续函数全体. 其中

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| \tag{1.74}$$

2. $(C[a,b], \rho_1) \to (L^1[a,b], \rho_1)$, 即区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体在度量 ρ_1 下的完备化空间为 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积函数全体.

1.3 Sequentially Compact

引入 回顾在拓扑和数学分析中接触过的概念, **列紧性 (sequentially compact)**. 现将其限制于**度量空间**上给出定义.

定义 1.3.1. Suppose (X, ρ) be a metric space, $A \subset X$. If $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, $\exists$ subsequence $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergent in X, then we call A **sequentially compact (列紧的)**.

注.
- 将条件 "**metric space** (X, ρ)" 改为 "**拓扑空间** X" 即可得到拓扑中的一般性定义.

回顾一般拓扑空间中 "**紧致**"、"**列紧**"、"**极限点紧**" 的定义与性质, 有如下关系:

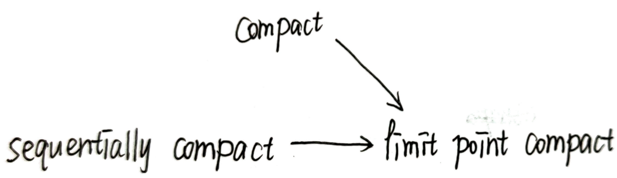

图 1.2: Relations among **compact**, **sequentially compact** and **limit point compact**

- If $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, $\exists$ subsequence $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergent in A, then 称 A 自列紧.

例子 下面给出一个经典的**非列紧空间**的例子.

例 1.3.1. Consider the set

$$l^1 = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty, \ x_n \in \mathbb{R} \right\} \tag{1.75}$$

$\forall \xi = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \eta = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$, define the metric ρ_1 on l^1:

$$\rho_1 : l^1 \times l^1 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{1.76}$$

$$(\xi, \eta) \longmapsto \rho_1(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n| \tag{1.77}$$

Let

$$A = \left\{ \{\delta_{kj}\}_{j=1}^{\infty} \right\}_{k=1}^{\infty} \tag{1.78}$$

$$= \{(1, 0, \cdots, 0, \cdots), (0, 1, \cdots, 0, \cdots), \cdots, (0, 0, \cdots, 1, \cdots), \cdots\} \subset l^1 \tag{1.79}$$

则 $A \subset l^1$ 中每两个元素之间的距离均为 2, 无收敛子列, 故 (l^1, ρ_1) 非列紧.

性质 对于**度量空间中的列紧集**, 容易得到其必为**完备度量空间**.

命题 1.3.1. 列紧度量空间必完备.

证明. Suppose (X, ρ) be sequentially compact. Then for $\forall$ Cauchy sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\exists$ subsequence $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergent $\Rightarrow$ Cauchy sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergent $\Rightarrow$ (X, ρ) complete $\square$

为了更好地理解一般度量空间中的**列紧性**, 我们可以与欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中**有界**的概念联系.

$\mathbb{R}^n$	度量空间
有界 (*bounded*)	**列紧**
有界闭	**自列紧**

1.4 完全有界集

ϵ-网 在一般的度量空间中, 我们来引入一个比**有界集**更强的概念. 首先来给出 **ϵ-网**的定义.

定义 1.4.1. Suppose (X, ρ) be a metric space, $N \subset M \subset X$ and $\epsilon > 0$. If for $\forall x \in M$, $\exists y \in N$, s. t.

$$\rho(x, y) < \epsilon$$

则称 N 为 M 的一个ϵ-网, 即 $M \subset \bigcup\limits_{x \in N} B(x, \epsilon)$. 进一步若 N 为有穷集 (*finite*), 则称 N 为 M 的一个有穷 ϵ-网.

完全有界集 下面给出**完全有界集**的概念.

定义 1.4.2. Suppose (X, ρ) be a metric space, $A \subset X$. If $\forall \epsilon > 0$, A 存在有穷 ϵ-网, 则称 A 为完全有界集.

注. **完全有界集**的概念比**有界集**要更强, 即

$$\text{完全有界集} \Rightarrow \text{有界集} \quad , \quad \text{完全有界集} \not\Leftarrow \text{有界集}$$

例1.3.1 中集合 $A = \left\{\left\{\delta_{kj}\right\}_{j=1}^{\infty}\right\}_{k=1}^{\infty}$ 即为有界集但非**完全有界**.

等价表述 下面我们将给出一般度量空间中**完全有界集的等价表述**, 便于我们判断和理解**完全有界集**的概念.

定理 1.4.1. 完全有界集的等价表述.

Suppose (X,ρ) be a metric space and $A\subset X$. Then

$$A\text{ 完全有界 }\Leftrightarrow A\text{ 中任意点列存在 }Cauchy\text{ 子列}$$

注. 根据该定理我们容易得到, 在**一般的度量空间**中, **列紧 $\Rightarrow$ 完全有界**. 而在**完备度量空间**中, **完全有界 $\Leftrightarrow$ 列紧**. 特别地, 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, **列紧、完全有界、有界**三者等价.

证明.

$\Rightarrow$: 若 A 完全有界. $\forall\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset A$, 下面证明 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 存在 *Cauchy* 子列:

- For $\epsilon=1$, $\exists y_1\in A$, s. t. $B(y_1,1)$ 中包含 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 无穷多项, 记为 $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty\subset\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

  (否则若 $\forall y\in A$, $B(y,1)$ 均至多包含 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 中有穷个点, 则 A 无有穷 1-网)

- For $\epsilon=\dfrac{1}{2}$, $\exists y_2\in A$, s. t. $B(y_2,\dfrac{1}{2})$ 中包含 $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$ 无穷多项, 记为 $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^\infty\subset\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty$.

  $\cdots$

- For $\epsilon=\dfrac{1}{k}$, $\exists y_k\in A$, s. t. $B(y_k,\dfrac{1}{k})$ 中包含 $\{x_n^{(k-1)}\}_{n=1}^\infty$ 中无穷多项, 记为 $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty\subset\{x_n^{(k-1)}\}_{n=1}^\infty$.

从而我们得到了 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的一列子列: $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty,\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^\infty,\cdots,\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty,\cdots$

取出第 k 个子列 $\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ 的第 k 项 $x_k^{(k)}$, 得到子列 $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty$[4].

下面证明：$\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty\subset\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为 *Cauchy* 列.

Since

$$\rho(x_{n+p}^{(n+p)},x_n^{(n)})\le\rho(x_{n+p}^{(n+p)},y_n)+\rho(y_n,x_n^{(n)})\le\frac{2}{n},\quad\forall n,p\in\mathbb{N}\tag{1.80}$$

Therefore, $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty\subset\{x_n\}_{n=1}^\infty$ is a Cauchy sequence in A.

[4]这种从一列序列中各取出一个元素构成新序列，再（一致）收敛的方法称为**对角线法则**，在**实分析** (*Real Analysis*) 中证明**任一可测函数可由简单函数列逼近**时曾使用, 详情可见 *Real Analysis* 笔记**定理 2.2.1**.

$\Leftarrow$: 反证法. Assume A 非完全有界, 即 $\exists \epsilon_0 > 0$, s. t. A 无有穷 ϵ_0-网.

- $\forall x_1 \in A$, $\exists x_2 \in A \backslash B(x_1, \epsilon_0)$ (Otherwise $A \subset B(x_1, \epsilon_0)$, A 存在有穷 ϵ_0-网)
- Similarly, $\exists x_3 \in A \backslash \left(B(x_1, \epsilon_0) \cup B(x_2, \epsilon_0)\right)$

$$\cdots$$

- $\exists x_k \in A \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} B(x_i, \epsilon_0) \right)$

从而得到 A 中的一列点 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, 其中

$$\rho(x_i, x_j) > \epsilon_0 > 0, \ \forall i \neq j$$

于是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ 无 Cauchy 子列, 矛盾.

$\square$

1.5 可分度量空间

作为一类特殊的**拓扑空间**, 下面我们来讨论一些常见的**度量空间**的**可分性**. 首先回顾一下**可分**的定义.

定义 1.5.1. Suppose (X, τ) be a Topological space. If (X, τ) 存在**可数稠密子集**, then (X, τ) is called **separable (可分的)**.

根据**可分空间**的定义, 不难得到上节所介绍的**完全有界空间可分**.

命题 1.5.1. 完全有界空间为可分度量空间.

证明. Suppose (X, ρ) is totally bounded. Then for $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \in \mathbb{N}$, $y_1, \cdots, y_{n_k} \in X$, s. t.

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n_k} B(y_i^k, \frac{1}{k}) \tag{1.81}$$

Let

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \{y_i^k\} \subset X \ countable \tag{1.82}$$

Then for $\forall x \in X$, $\exists 1 \leq l_k \leq n_k$, $y_{l_k}^k \in A$, s. t.

$$\rho(x, y_{l_k}^k) < \frac{1}{k}, \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Thus $\{y_{l_k}^k\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ convergent to $x \in X$, i.e. $y_{l_k}^k \xrightarrow{\rho} x$ as $k \to \infty$.

Therefore, by **Lemma A.1.1**, $A \subset X$ is dense in X. X is separable. □

下面来讨论一些常见的**度量空间**的**可分性**.

例 1.5.1. [可分空间].

- $(C[a,b],\rho_\infty)$ 可分.
  - **证明.** 有理系数多项式 $\xRightarrow{\text{一致逼近}}$ 多项式 $\xRightarrow{\text{一致逼近}}$ 连续函数 □

- (l^p,ρ_p) 可分.
  - **证明.** 此处 (l^p,ρ_p) 定义与**例 1.3.1** 中一致, 即

$$l^p=\left\{\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p<\infty,\ x_n\in\mathbb{R}\right\} \tag{1.83}$$

$$\rho_p: l^p\times l^p\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{1.84}$$

$$(\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty)\longmapsto \rho_p(\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty)=\sum_{n=1}^\infty |x_n-y_n|^p \tag{1.85}$$

下面来构造 (l^p,ρ_p) 的可数稠密子集：

* Let

$$A_1=\{\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid x_1\in\mathbb{Q},\ x_n=0,\ \forall n>1\}\subset l^p \tag{1.86}$$

$$A_2=\{\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid x_1,x_2\in\mathbb{Q},\ x_n=0,\ \forall n>2\}\subset l^p \tag{1.87}$$

$$\cdots \tag{1.88}$$

$$A_k=\{\{x_n\}_{n=1}^\infty \mid x_1,\cdots,x_k\in\mathbb{Q},\ x_n=0,\ \forall n>k\}\subset l^p \tag{1.89}$$

$$A=\bigcup_{k=1}^\infty A_k\subset l^p \tag{1.90}$$

* $A\subset l^p$ 即为 (l^p,ρ_p) 的可数稠密子集：

$\forall\{x_n\}_{n=1}^\infty\in l^p$. Since

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p<\infty$$

Then for $\forall\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, s. t.

$$\sum_{n=N+1}^\infty |x_n|^p<\frac{\epsilon}{2}$$

Thus $\exists\{y_n\}_{n=1}^\infty\in A_N\subset A$, $y_n=0$, $\forall n>N$ and

$$|y_n-x_n|^p<\frac{\epsilon}{2N},\quad \forall 1\leq n\leq N$$

Therefore

$$\rho_p(\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty)=\sum_{n=1}^\infty |x_n-y_n|^p<\epsilon$$

$A\subset l^p$ is dense in l^p while it's also countable.

□

- $L^p[a,b]$ 可分.

证明. Review the conclusions in *Real Analysis*. $\forall f \in L^p[a,b]$, then f is measurable.

Since **任一可测函数可由简单函数列逼近** (*Real Analysis* 笔记 **Thm 2.2.1**)

又根据 **Lusin 定理** (*Real Analysis* 笔记 **Thm 3.8.2**), 可得:

$$\text{连续函数} \Rightarrow \text{简单函数} \Rightarrow f \in L^p$$

□

- $L^\infty[a,b]$ 不可分.

证明. Let

$$E = \left\{ f \in L^\infty[a,b] \;\middle|\; f(x) = \begin{cases} 0, x \in [a,r] \\ 1, x \in (r,b] \end{cases}, \ \forall r \in (a,b) \right\} \tag{1.91}$$

Then $E \subset L^\infty[a,b]$ is uncountable, and

$$\rho_\infty(f,g) = 1 > 0, \ \forall f, g \in E$$

下面用反证法证明 $L^\infty[a,b]$ 不可分. Assume $L^\infty[a,b]$ is separable.

Then $\exists$ countable $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty[a,b]$, s. t.

$$\overline{\{f_n\}_{n=1}^\infty} = L^\infty[a,b]$$

即 $L^\infty[a,b]$ 中点均可由 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 中的某些点逼近, 从而

$$\bigcup_{n=1}^\infty B(f_n, \frac{1}{3}) = L^\infty[a,b] \supset E$$

于是 $\exists N \in \mathbb{N}$, s. t.

$$B(f_N, \frac{1}{3}) \text{ 中包含 } E \text{ 中至少 2 个点 (事实上可严格地说包含 } E \text{ 中不可数个点)}$$

而 $\rho_\infty(f,g) = 1 > 0, \ \forall f, g \in E$, 这与 $f, g \in B(f_N, \frac{1}{3})$ 矛盾.

综上, $L^\infty[a,b]$ 不可分. □

- l^∞ 不可分.

证明. Similarly. Let

$$E = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty \mid x_n = 0 \ or \ 1, \ \forall n \in \mathbb{N}\} \subset l^\infty \tag{1.92}$$

Then $E \subset l^\infty$ is uncountable (E 与二进制数一一对应, 而二进制数与实数 $\mathbb{R}$ 一一对应), and

$$\rho_\infty(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = 1 > 0, \ \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \in E$$

后续步骤与上述 $L^\infty[a,b]$ 不可分证明过程一致. □

1.6 Compact

首先来回顾一下**拓扑学**中关于**紧致**的定义, 在度量空间中也是一脉相承的.

定义 1.6.1. Suppose (X, τ) be a topological space. If X 的任意开覆盖都有有限子覆盖, 则称 X 为**紧致的 (compact)**.

注. 事实上我们运用的更多的为**一般拓扑 / 度量空间**的**紧致子集**的概念, 其定义如下:

Suppose $A \subset (X, \tau)$. If A 的任意开覆盖都有有限子覆盖 (在子空间拓扑意义下为紧集), 则称 A 为**紧 (子) 集**.

1.6.1 度量空间紧集的性质

下面我们给出度量空间中紧集的 4 条性质 (事实上大部分对一般的 Hausdorff 空间成立).

命题 1.6.1. [紧 $\Rightarrow$ 闭, Hausdorff].

若 $A \subset (X, \rho)$ 紧致, 则 A 为闭集.

注. 该结论对于一般拓扑空间不成立, 但对于 **Hausdorff 空间**成立, 故自然**度量空间**成立.

证明. 下面对一般情形进行证明, 即 (X, τ) 为 Hausdorff 空间, 证明: A^c open.
Fix $x \in A^c$. Since X is Hausdorff, then for $\forall y \in A$, $\exists x \in V_y^x, y \in U_y^x$, s. t.

$$U_y^x \cap V_y^x = \varnothing, \;\; U_y^x, V_y^x \underset{open}{\subset} X$$

Then we have

$$A \subset \bigcup_{y \in A} U_y^x$$

Since A is compact, there exists $U_{y_1}^x, \cdots, U_{y_n}^x \in \{U_y^x\}_{y \in A}$, s. t.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}^x$$

Let

$$V^x = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}^x \underset{open}{\subset} X$$

Then $x \in V^x$ and $V^x \cap \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}^x = \varnothing$, so $V^x \cap A = \varnothing$, $V^x \subset A^c$. Therefore, A^c is open. $\square$

命题 1.6.2. [紧集的闭子集必为紧集, 一般拓扑空间].

若 $A \subset (X, \rho)$ 紧致, $K \subset A$ 为闭集, 则 K 紧致.

注. 该结论对于**一般的拓扑空间**均成立.

证明. 下面对一般情形进行证明, 且下述证明过程均以子空间 (A, τ_A) 作为全空间.
$\forall \{U_i\}_{i \in I}$, $U_i \underset{open}{\subset} A$, $\forall i \in I$, s. t.

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

Since $K \subset A$ closed, then $K^c \subset A$ open. Thus

$$A = K^c \cup K = K^c \cup \bigcup_{i \in I} U_i$$

Since A is compact, then $\exists i_1, \cdot, i_n \in I$, s. t.

$$A = K^c \cup \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

Therefore $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$. $K \subset A$ is compact. □

根据**命题 1.6.2**, 我们可得到另一条直接推论.

推论 1.6.1. [Hausdorff].

紧集和闭集的交为紧集.

证明. 紧集与闭集相交 $\Rightarrow$ 交集为原紧集的闭子集 $\Rightarrow$ 根据**命题 1.6.2**, 该交集为紧集 □

命题 1.6.3. [Hausdorff].
$\{K_\alpha \subset X\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为一个紧子集族, 满足任意有限交非空, 则

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha \neq \varnothing \tag{1.93}$$

证明. 反证法. Assume $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha = \varnothing$. Then for $\forall \alpha_0 \in \Lambda$,

$$K_{\alpha_0} \cap \bigcap_{\substack{\alpha\in\Lambda \\ \alpha\neq\alpha_0}} K_\alpha = \varnothing \quad , \quad K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\substack{\alpha\in\Lambda \\ \alpha\neq\alpha_0}} K_\alpha^c$$

Since X is Hausdorff, $K_\alpha \subset X$ is compact, then K_α is closed, $\forall \alpha \in \Lambda$. Thus $\{K_\alpha^c \mid \alpha \neq \alpha_0\}_{\alpha\in\Lambda}$ is an open covering of K_{α_0}. Since $K_{\alpha_0} \subset X$ is compact, then $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Lambda$, s. t.

$$K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{i=1}^n K_{\alpha_i}^c$$

Therefore,

$$\bigcap_{i=0}^n K_{\alpha_i} = \varnothing$$

which is a contradiction to “任意有限交非空”. □

命题 1.6.4. [Hausdorff].
$A \subset (X,\rho)$ 为闭集. 若对于 A 中任意闭子集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 如果满足任意有限交非空, 便有 $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \neq \varnothing$, 则 A 为紧集.

证明. $\forall \{U_i\}_{i\in I}$, $U_i \underset{open}{\subset} X$, $\forall i \in I$, s. t.

$$A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$$

Then $\{U_i^c \cap A\}_{i\in I}$ 为 A 的闭子集族. Since

$$\bigcap_{i\in I} U_i^c \cap A = \varnothing$$

Then 根据条件, $\{U_i^c \cap A\}_{i\in I}$ 存在有限交为空集, 即 $\exists i_1, \cdots, i_n \in I$, s. t.

$$\bigcap_{k=1}^n U_i^c \cap A = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n U_{i_k}\right)^c = \varnothing$$

Thus

$$A \subset \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$$

Therefore, $A \subset X$ is compact. □

1.6.2 度量空间紧致的等价刻画

下面我们将说明, 在度量空间中, **紧致性**与**自列紧性**等价.

定理 1.6.2. [紧致 $\Leftrightarrow$ 自列紧, 度量空间].
在度量空间 (X,ρ) 中,

$$A \subset X \text{ 紧致 } \Leftrightarrow \text{ 自列紧}$$

证明.

$\Rightarrow$: 只需考虑 A 中无穷点集的情形. $\forall$ 无穷点集 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, 不妨设 x_n 互异.
反证法. Assume $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ 在 A 中无聚点, 则 $\forall x \in A$, $\exists U_x \underset{open}{\subset} X$, s. t.

$$U_x \cap \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x\} \qquad (= \varnothing \text{ or } \{x\})$$

Since $A \subset \bigcup_{x\in A} U_x$, A is compact, then $\exists y_1, \cdots, y_n \in A$, s. t.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$$

从而 $\{U_{y_i}\}_{i=1}^{n}$ 中至少有一项中包含 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中无穷多项, 这与 $U_x \cap \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x\}$ 矛盾.
综上, $A \subset X$ 紧致 $\Rightarrow$ 自列紧.

$\Leftarrow$: 反证法. 假设 $\exists A$ 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 不存在有限子覆盖.
Since A 自列紧 $\Rightarrow$ 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界 (**Thm 1.4.1**), then for $\forall$ fixed $n \in \mathbb{N}$,
A 存在有穷 $\frac{1}{n}$-网, i.e. $\exists M_n$ finite, s. t.

$$A \subset \bigcup_{x\in M_n} B(x, \frac{1}{n})$$

Then for the fixed n, $\exists x_n \in M_n$, s. t. $B(x_n, \frac{1}{n})$ 不能被 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 有限覆盖.

(否则若 $\forall x \in M_n$, $B(x, \frac{1}{n})$ 均可被 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 有限覆盖, 则 $A \subset \bigcup_{x\in M_n} B(x, \frac{1}{n})$ 可被 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 有限覆盖. 矛盾)

Then we get a sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ in A.

Since A 自列紧, then $\exists$ subsequence $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, s. t.

$$x_{n_k} \to x_0 \in A \ as \ k \to \infty$$

Since $\{U_a\}_{a\in\Lambda}$ covers A, then $\exists a_0 \in \Lambda$, s. t. $x_0 \in U_{a_0}$.

Since U_{a_0} is open, then $\exists \epsilon > 0$, s. t. $B(x_0, \epsilon) \subset U_{a_0}$.

However, since $x_{n_k} \to x_0$, for $\epsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\rho(x_{n_{k_0}}, x_0) < \frac{\epsilon}{3} \text{ and } \frac{1}{n_{k_0}} < \frac{\epsilon}{3}$$

Then $B(x_{n_{k_0}}, \frac{1}{n_{k_0}}) \subset U_{a_0}$, 于是 $B(x_{n_{k_0}}, \frac{1}{n_{k_0}})$ 被 $\{U_a\}_{a\in\Lambda}$ 有限覆盖, 矛盾.

综上, A 自列紧 $\Rightarrow$ compact.

$\square$

1.7 一致有界, 等度连续

为了给出上 $C[a,b]$ (列) 紧集的刻画, 即下节介绍的 **Arzelà-Ascoli 定理**, 本节来给出一些前置概念.

1.7.1 紧致度量空间上的连续函数全体

首先来给出**紧致度量空间** X 上的连续函数全体 $C(X)$, 并赋予相应的**度量 (无穷范数)**, 使其称为**完备度量空间**.

定义 1.7.1. 设 (X,ρ) 为紧致度量空间, 其上的连续函数全体 $C(X)$ 被定义为:

$$C(X) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ continuous}\},\ \ \mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\} \tag{1.94}$$

赋予 $C(X)$ 上度量 d, 定义为:

$$d : C(X) \times C(X) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{1.95}$$

$$(f,g) \longmapsto \max_{x\in X} |f(x) - g(x)| \tag{1.96}$$

注.

- 不难证明上述定义的度量 d 满足**度量的三大公理 (Def 1.1.2)**. 关于其定义是否**良好 (Well-defined)** 的问题, 只需说明对于 $\forall f,g \in C(X)$, $d(f,g)$ 的存在性:

  – **证明.** 不难证明 $C(X)$ 为线性空间, 于是对于 $\forall f,g \in C(X), f-g \in C(X)$.
  根据**绝对值不等式**, 容易得到绝对值保持 $C(X)$ 中函数的连续性.

  $$\left(\Big| |\varphi(x)| - |\varphi(y)| \Big| \leq |\varphi(x) - \varphi(y)|\,,\ \ \forall \varphi \in C(X), x, y \in X\right)$$

  因此 $|f-g| \in C(X)$, 即连续.
  Since X is compact, then $|f-g|(X) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ compact, 可取到最大值. 故 $d(f,g)$ 存在. □

- 事实上, 上述定义的度量空间 $(C(X),d)$ 是**完备的**, 这在下面的**命题 1.7.1** 中得以证明.

下面的命题证明了, **定义 1.7.1** 中定义的度量空间 $(C(X), d)$ 是完备的.

命题 1.7.1. $(C(X), d)$ **为完备度量空间.**

证明. $\forall$ Cauchy sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X)$, i.e. $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, s. t.

$$d(f_m, f_n) = \max_{x\in X} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \ \ \forall m, n \geq N_\epsilon$$

下面分两步进行证明：

1. $\exists f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, s. t. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \ \ \forall x \in X$：

   Since $\max\limits_{x\in X} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \ \ \forall m, n \geq N_\epsilon$, then

   $$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \ \ \forall x \in X, \ \ \forall m, n \geq N_\epsilon$$

   Thus $\forall x \in X$, fix x. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ is a Cauchy sequence in $\mathbb{K}$.

   Since both $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$ are complete, then $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converges, $\forall x \in X$. Let

   $$f : X \longrightarrow \mathbb{K} \tag{1.97}$$

   $$x \longmapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{1.98}$$

   Then f is a mapping from X to $\mathbb{K}$ with $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), \ \ \forall x \in X$.

2. $f \in C(X)$, i.e. $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ continuous：

   Since

   $$|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \ \ \forall x \in X, \ \ \forall m, n \geq N_\epsilon$$

   Then letting $m \to \infty$, we get $f_n \rightrightarrows f$, i.e.

   $$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \ \ \forall x \in X, \ \ \forall n \geq N_\epsilon$$

   For $f_{N_\epsilon} \in C(X)$, fix $\epsilon > 0$. Since f_{N_ϵ} continuous, $\exists \delta > 0$, s. t.

   $$\left|f_{N_\epsilon}(x) - f_{N_\epsilon}(y)\right| < \epsilon, \ \ \forall \rho(x, y) < \delta$$

   Then for $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0, N_\epsilon \in \mathbb{N}$, s. t.

   $$|f(x) - f(y)| \leq \left|f(x) - f_{N_\epsilon}(x)\right| + \left|f_{N_\epsilon}(x) - f_{N_\epsilon}(y)\right| + \left|f_{N_\epsilon}(y) - f(y)\right| \tag{1.99}$$

   $$< 3\epsilon, \ \ \forall \rho(x, y) < \delta \tag{1.100}$$

   Therefore, $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ is continuous, $f \in C(X)$. In short, $(C(X), d)$ is complete.

$\square$

1.7.2 一致有界, 等度连续

下面我们来给出**一致有界**与**等度连续**的概念, 实际上为数学分析中**一致有界**与**一致连续**在更高维度上的一致性的推广, 即同时对函数和自变量都一致.

定义 1.7.2. [一致有界].
设 (X,ρ) 为紧致度量空间, $A \subset (C(X),d)$. 若

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \varphi\in A}} |\varphi(x)| < \infty$$

则称A 一致有界.

定义 1.7.3. [等度连续].
设 (X,ρ) 为紧致度量空间, $A \subset (C(X),d)$. 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, s. t.

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon,\ \ \forall \rho(x,y) < \delta,\ \ \forall \varphi \in A$$

则称A 等度连续.

注. 相当于在数学分析**函数一致连续**的概念上增加了对 A 中所有函数的一致性.

1.8 Arzelà-Ascoli 定理

接下来我们将介绍 **Arezelà-Ascoli** 定理, 它给出了**紧致度量空间** X **上连续函数全体** $(C(X), d)$ **的 (列) 紧子集的等价刻画**.

定理 1.8.1. [Arezelà-Ascoli].
设 (X, ρ) 为紧致度量空间, $A \subset C(X)$, 则：

$$A \text{ 列紧} \iff A \text{ 一致有界且等度连续}$$

证明.

$\Rightarrow$: 下面分两点分别证明一致有界和等度连续.

- A 一致有界：Since A 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界, then for $\epsilon = 1$, $\exists \varphi_1, \cdots, \varphi_n \in A$, s. t.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\varphi_i, 1)$$

$\forall \varphi \in A$, WTS: $\exists M > 0$, s. t. $|\varphi(x)| \leq M, \ \forall x \in X$.

$\exists 1 \leq i_0 \leq n$, s. t.

$$\varphi \in B(\varphi_{i_0}, 1)$$

Then

$$d(\varphi, \varphi_{i_0}) = \max_{x \in X} \left|\varphi(x) - \varphi_{i_0}(x)\right| < 1$$

Thus

$$\left|\varphi(x) - \varphi_{i_0}(x)\right| < 1, \ \forall x \in X$$

Fix $1 \leq i \leq n$. For $\varphi_i \in A \subset C(X)$.

Since X is compact, φ_i continuous, then $\varphi_i(X) \subset \mathbb{K}$ bounded, i.e. $\exists 0 < k_i < \infty$, s. t.

$$|\varphi_i(x)| \leq k_i, \ \forall x \in X$$

Let $k = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{k_i\}$, then

$$|\varphi(x)| \leq \left|\varphi(x) - \varphi_{i_0}(x)\right| + \left|\varphi_{i_0}(x)\right| \tag{1.101}$$

$$\leq 1 + k, \ \forall x \in X, \ \forall \varphi \in A \tag{1.102}$$

Therefore, $A \subset C(X)$ 一致有界.

- A 等度连续：Since A 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界, then for $\forall \epsilon > 0$, A 存在有穷 ϵ-网, i.e. $\exists \varphi_1^\epsilon, \cdots, \varphi_{i_\epsilon}^\epsilon \in A$, s. t.
$$A \subset \bigcup_{i=1}^{i_\epsilon} B(\varphi_i^\epsilon, \epsilon)$$
Since $\varphi_i \in C(X)$ continuous, $\forall 1 \leq i \leq i_\epsilon$, then for $\epsilon > 0$, $\exists \delta_1^\epsilon, \cdots, \delta_{i_\epsilon}^\epsilon > 0$, s. t.
$$\left|\varphi_k^\epsilon(x) - \varphi_k^\epsilon(y)\right| < \epsilon,\ \forall \rho(x, y) < \delta_k^\epsilon,\ \forall 1 \leq k \leq i_\epsilon$$
Let $\delta_\epsilon = \min\{\delta_1^\epsilon, \cdots, \delta_{i_\epsilon}^\epsilon\} > 0$, then for $\forall 1 \leq k \leq i_\epsilon$,
$$\left|\varphi_k^\epsilon(x) - \varphi_k^\epsilon(y)\right| < \epsilon,\ \forall \rho(x, y) < \delta_\epsilon$$
$\forall \psi \in A$, $\exists 1 \leq i_0 \leq i_\epsilon$, s. t.
$$\psi \in B(\varphi_{i_0}^\epsilon, \epsilon) \ \Rightarrow\ d(\psi, \varphi_{i_0}^\epsilon) < \epsilon$$
Thus
$$\left|\psi(x) - \varphi_{i_0}^\epsilon(x)\right| < \epsilon,\ \forall x \in X$$
Then
$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(y)| &\leq \left|\psi(x) - \varphi_{i_0}^\epsilon(x)\right| + \left|\varphi_{i_0}^\epsilon(x) - \varphi_{i_0}^\epsilon(y)\right| + \left|\varphi_{i_0}^\epsilon(y) - \psi(y)\right| && (1.103) \\ &\leq 3\epsilon,\ \forall \rho(x, y) < \delta_\epsilon && (1.104) \end{aligned}$$
Therefore, $A \subset C(X)$ 等度连续.

$\Leftarrow$: Since A 等度连续, then for $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s. t.
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\epsilon}{3},\ \forall \rho(x, y) < \delta,\ \forall \varphi \in A$$
Since X is compact, then X 存在有穷 δ-网, i.e. $\exists\{x_1^\delta, \cdots, x_n^\delta\} \subset X$, s. t.
$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i^n, \delta)$$
Let
$$\widetilde{A} = \left\{\left(\varphi(x_1^\delta), \cdots, \varphi(x_n^\delta)\right) \in \mathbb{K}^n \mid \varphi \in A\right\}$$

and denote

$$\widetilde{\varphi}: X^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \tag{1.105}$$

$$x^\delta \longmapsto \left(\varphi(x_1^\delta), \cdots, \varphi(x_n^\delta)\right) \in \mathbb{K}^n \tag{1.106}$$

Then $\widetilde{A} = \{\widetilde{\varphi}(x^\delta) \in \mathbb{K}^n \mid \varphi \in A\}$.

Since A 一致有界, i.e.

$$|\varphi(x)| \leq M, \ \forall x \in X, \ \forall \varphi \in A \text{ for some } M > 0$$

$$\Rightarrow \ \widetilde{A} \subset \mathbb{K}^n \text{ is bounded in } \mathbb{K}^n$$

Since both in $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{C}^n$, 有界 $\Leftrightarrow$ 列紧 $\Leftrightarrow$ 完全有界, then $\widetilde{A}$ 完全有界.

Thus $\widetilde{A}$ 存在有穷 δ-网, i.e. $\exists\{\widetilde{\varphi_1}(x^\delta), \cdots, \widetilde{\varphi_m}(x^\delta)\} \subset \widetilde{A}$, s. t.

$$\widetilde{A} \subset \bigcup_{i=1}^m B(\widetilde{\varphi_i}(x^\delta), \frac{\epsilon}{3})$$

下面证明：$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_m\}$ 即为 A 的有穷 ϵ-网：

$\forall \varphi \in A$, $\exists 1 \leq i_0 \leq m$, s. t.

$$\widetilde{\varphi}(x^\delta) \subset B(\widetilde{\varphi_{i_0}}(x^\delta), \frac{\epsilon}{3})$$

$\forall x \in X$, fix x. Since $\{x_1^\delta, \cdots, x_n^\delta\}$ 为 X 的 δ-网, then $\exists 1 \leq j_0 \leq n$, s. t.

$$\rho(x, x_{j_0}^\delta) < \delta$$

Then by A 等度连续,

$$\left|\varphi(x) - \varphi_{i_0}(x)\right| \leq \left|\varphi(x) - \varphi(x_{j_0}^\delta)\right| + \left|\varphi(x_{j_0}^\delta) - \varphi_{i_0}(x_{j_0}^\delta)\right| + \left|\varphi_{i_0}(x_{j_0}^\delta) - \varphi_{i_0}(x)\right| \tag{1.107}$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \left|\varphi(x_{j_0}^\delta) - \varphi_{i_0}(x_{j_0}^\delta)\right| + \frac{\epsilon}{3} \tag{1.108}$$

$$< \frac{2}{3}\epsilon + \left|\widetilde{\varphi}(x^\delta) - \widetilde{\varphi_{i_0}}(x^\delta)\right| \tag{1.109}$$

$$< \epsilon, \ \forall x \in X \tag{1.110}$$

Thus,

$$d(\varphi, \varphi_{i_0}) = \max_{x \in X} \left|\varphi(x) - \varphi_{i_0}(x)\right| < \epsilon$$

i.e.

$$\varphi \in B(\varphi_{i_0}, \epsilon)$$

Therefore, A 完全有界 $\Leftrightarrow$ 列紧.

□

1.9 Banach 不动点定理

1.9.1 Banach 不动点定理 / 压缩映射原理

在数学分析中我们事实上已经接触过 **Banach 不动点定理 (压缩映射原理)**, 此处给出其在**完备度量空间**上的推广. 首先来回顾一下**压缩映射**的概念.

定义 1.9.1. Suppose (X, ρ) be a metric space, $T : X \longrightarrow X$. If $\exists 0 < L < 1$, s. t.

$$\rho(Tx, Ty) \leq L\,\rho(x, y),\ \ \forall x, y \in X$$

Then 称 T 为度量空间 (X, ρ) 上的一个压缩映射.

下面我们来给出 **Banach 不动点定理**.

定理 1.9.1. [Banach 不动点定理 / 压缩映射原理].

若度量空间 (X, ρ) 完备, 则 X 到自身的压缩映射 T 必存在**唯一不动点**.

证明. 证明是 Trivial 的. 下面分两步, 先证明存在性, 再证明唯一性.

- 压缩映射 $T : X \longrightarrow X$ 存在不动点: $\forall x \in X$, consider the sequence $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

  Since T 为压缩映射, then $\exists 0 < L < 1$, s. t.

  $$\rho(Tx, Ty) \leq T\,\rho(x, y),\ \ \forall x, y \in X$$

  Thus for $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, s. t. $L^n < \epsilon,\ \forall n > N_\epsilon$. Then

  $$\begin{aligned} \rho(T^{n+p}(x), T^n(x)) &\leq L^n \rho(T^p(x), x) && (1.111)\\ &\leq L^n \left[\rho(T^p(x), T^{p-1}(x)) + \cdots + \rho(T(x), x)\right] && (1.112)\\ &\leq L^n(L^{p-1} + \cdots + L + 1)\rho(T(x), x) && (1.113)\\ &\leq \frac{L^n}{1-L}\rho(T(x), x) \leq \frac{\rho(T(x), x)}{1-L}\epsilon,\ \ \forall n > N_\epsilon,\ \ \forall p \in \mathbb{N} && (1.114) \end{aligned}$$

  Thus $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ is a Cauchy sequence in X.

  Since X is complete, then $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converges. Let $T^n(x) \to x_0 \in X$,

  Then 根据 $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$, letting $n \to \infty$, we get $T(x_0) = x_0$. $x_0 \in X$ 即为 T 的不动点.

- $T : X \longrightarrow X$ 的不动点唯一：Assume $x_0, y_0 \in X$ 均为 T 的不动点, then

$$T^n(x_0) = x_0, T^n(y_0) = y_0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Thus

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(T^n(x_0), T^n(y_0)) \le L^n \rho(x_0, y_0),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Letting $n \to \infty$, we have $\rho(x_0, y_0) = 0$, i.e. $x_0 = y_0$.

□

根据**定理 1.9.1**, 我们可以得到一个有趣的推论.

推论 1.9.2. Suppose (X, ρ) be a complete metric space, $T : X \longrightarrow X$. 若 T^n 为压缩映射, 则 T 存在唯一不动点.

证明.

- 存在性：Since $T^n : X \longrightarrow X$ 为压缩映射, then by **Banach 不动点定理 (Thm 1.9.1)**, $\exists x_0 \in X$, s. t.

$$T^n(x_0) = x_0$$

等式两边同时作用 T, 得到

$$T^n(T(x_0)) = T(x_0)$$

于是 $T(x_0) \in X$ 也为 T^n 的不动点. 根据**不动点的唯一性 (Thm 1.9.1)**, 可得

$$T(x_0) = x_0$$

于是 $x_0 \in X$ 也为 T 的不动点.

- 唯一性：设 $y_0 \in X$ 也为 T 的不动点, 即 $y_0 = T(y_0)$, 则归纳可得：

$$y_0 = T(y_0) = T^k(y_0),\ \forall k \in \mathbb{N}$$

取 $k = n + 1$, 得到：$T(y_0) = T^n(T(y_0))$, 于是 $T(y_0) = y_0$ 为 T^n 的不动点.
根据 T^n 不动点唯一性, 可得：

$$T(y_0) = y_0 = x_0$$

□

1.9.2 Volterra 方程

这一小节我们将回顾**常微分方程 (ODE)** 课程中最常见的 **Volterra 方程**, 并运用 **Banach 不动点定理 (压缩映射原理)** 及其推论来证明其解的存在唯一性.

例 1.9.1. **[Volterra 方程解的存在唯一性].**
证明：积分方程

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t,s)x(s)\,ds$$

在 $C[a,b]$ 中存在唯一解, 其中 $f \in C[a,b]$, $k \in C[a,b]^2$ 给定, $\lambda \in \mathbb{R}$ 是任意的.

证明. Let

$$T : C[a,b] \longrightarrow C[a,b] \tag{1.115}$$

$$x \longmapsto Tx : t \longmapsto f(t) + \lambda \int_a^t k(t,s)x(s)\,ds \tag{1.116}$$

Then T 为良定义的算子. 我们考虑使用**推论 1.9.2** 来证明, 其关键就在于该如何计算 T^n, 即

要证：T 存在唯一不动点

只需证：$\exists n \in \mathbb{N}$, s. t. T^n 为压缩映射

不难发现, $\forall x \in C[a,b]$ 在经过算子 T^n 作用后, 得到的结果中, f 与 x 是不相关的, 于是可写为如下形式：

$$T^n(x) = S_n(f) + R_n(x)$$

于是

$$T^n(x) - T^n(y) = R_n(x) - R_n(y)$$

由于

$$R_n(x) = \lambda^n \int_a^t \int_a^{t_n} \cdots \int_a^{t_2} k(t,t_n)k(t_n,t_{n-1})\cdots k(t_2,t_1)x(t_1)\,dt_1 dt_2 \cdots dt_n$$

于是

$$\begin{aligned}
d(T^n(x),T^n(y)) &= \|T^n(x) - T^n(y)\|_\infty && (1.117)\\
&= |\lambda|^n \left\| \int_a^{t_n} \cdots \int_a^{t_2} k(t,t_n)k(t_n,t_{n-1})\cdots k(t_2,t_1)x(t_1)\,dt_1 dt_2 \cdots dt_n \right\|_\infty && (1.118)\\
&\le |\lambda|^n \|k\|_\infty^n \|x-y\|_\infty \left| \int_a^{t_n} \cdots \int_a^{t_2} dt_1 dt_2 \cdots dt_n \right| && (1.119)\\
&\le |\lambda|^n \|k\|_\infty^n \|x-y\|_\infty \frac{(t-a)^n}{n!} && (1.120)\\
&\le |\lambda|^n \|k\|_\infty^n \|x-y\|_\infty \frac{(b-a)^n}{n!} \to 0 \ as\ n \to \infty && (1.121)
\end{aligned}$$

Thus $\exists N \in \mathbb{N}$, s. t. T^N 为压缩映射, 从而 T 存在唯一不动点, 即方程在 $C[a,b]$ 上存在唯一解. □

第二章　赋范空间

2.1　赋范线性空间

2.1.1　赋范线性空间

这一章我们将来讨论**赋范线性空间**的相关定义及性质. 首先回顾**范数**的定义 (**同定义 1.1.1**).

定义 2.1.1. Let X be a vector space over field $\mathbb{K}$, a **norm** is a function:

$$X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{2.1}$$

$$f \longmapsto \|f\| \tag{2.2}$$

satisfying the following properties:

(i) $\|f\| \geq 0, \forall f \in X.$ $\qquad (\|f\| = 0 \ \Leftrightarrow \ f = 0)$

(ii) $\|af\| = |a|\,\|f\|, \forall a \in \mathbb{K}, f \in X.$

(iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in X.$

注.
- 事实上**赋范线性空间**的称呼有些许不妥, 应直接称**赋范空间**. 因为**范数**的概念本就需要在**线性空间**上定义.

  (否则**范数定义第 (iii) 条"三角不等式"**中"$f + g$"的加法无从定义)

- **赋范空间**与**度量空间**的关系为:

  赋范空间 $\Rightarrow$ **度量空间**　,　**度量空间** $\nRightarrow$ **赋范空间**

  即**赋范空间**上均可定义**度量**, 但**度量空间**却不一定能扩充为**赋范空间**.

  其中对于任意**赋范空间** $(X, \|\cdot\|)$, 其上总是默认定义如下**度量** d:

  $$d(x, y) = \|x - y\|, \ \forall x, y \in X$$

  不难证明其满足**度量**的三条公理 (**Def 1.1.2**)

- 此处讨论的**赋范空间**的范数应当为定义在**数域** $\mathbb{K}$ 上的线性空间之上, 否则第 (ii) 条“**绝对齐性**”中“a”的**绝对值**无从定义. 且默认取完备的数域, 即 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$.

- 对于“**度量空间** $\nRightarrow$ **赋范空间**”, 先来明确**度量空间** (X, ρ) 要扩充为**赋范空间**所需条件:

  1. 引入数域 $\mathbb{K}$, 在 X 中定义加法 & 数乘运算, 使其满足线性空间八大公理. 即度量 ρ 需要先定义在线性空间上, 使其称为**度量线性空间**.

  2. 度量 ρ 需要满足**平移不变性**, 即
  $$\rho(x, 0) = \rho(x + y, y), \ \forall x, y \in X$$

  3. 对应**范数**定义的**绝对齐性**, 度量 ρ 也需要满足
  $$\rho(ax, 0) = |a|\,\rho(x, 0), \ \forall x \in X, a \in \mathbb{K}$$

  而即便是对于**度量线性空间**, 大多数也并不满足后两者条件, 下面给出一个反例.

  例 2.1.1. 在欧氏空间 $\mathbb{R}$ 中定义度量 ρ:
  $$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$
  则 ρ 不满足绝对齐性, 从而无法扩充为**赋范空间**.

- 对于任意**赋范空间** $(X, \|\cdot\|)$, 其上定义的范数 $\|\cdot\|$ 均为连续函数.

  - **证明.** 下面分两步进行证明, 首先证明一条引理.

    1. $\forall x, y \in X, \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|$:
    根据范数的三角不等式, $\forall x, y \in X$,
    $$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$
    $$\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\|$$
    移项后可得: $\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|$.

    2. $\|\cdot\|$ 连续: $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ with $x_n \to x \in X$. Since
    $$\Big|\|x_n\| - \|x\|\Big| \leq \|x_n - x\|$$

    Thus $\|x_n\| \to \|x\|$, 即 $\|\cdot\|$ 连续. □

2.1.2 Banach 空间

下面给出 **Banach** 空间的定义.

定义 2.1.2. 完备的 B^* 空间称为 B 空间 / **Banach 空间**.

注. • 我们称赋范空间为 B^* 空间.

- 若 X 为赋范空间, 我们记 $X \in B^*$; 若 X 为 **Banach** 空间, 我们记 $X \in B$.

Banach 空间事实上十分常见, 下面给出两个经典的例子. 首先便是连续函数构成的空间.

例 2.1.2. **[Banach 空间].** $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ 即为 Banach 空间, 其中 $\|\cdot\|_\infty = \max\limits_{[a,b]} |\cdot|$.

证明. 根据**命题 1.7.1**即可得证. □

下面我们来证明实分析中的 L^p 空间为 Banach 空间, 即实分析中的 **Riesz-Fisher 定理**[1].

定理 2.1.1. [Riesz-Fisher 定理].

$$(L^p[a,b], \|\cdot\|_p) \text{ 为 Banach 空间, 其中 } \|\cdot\|_p = \left(\int_{[a,b]} |\cdot|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明. 根据 **Minkowski 不等式 (定理 1.1.4)**, 不难证明 $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ 为赋范空间.
下面证明其完备性:
$\forall$ Cauchy sequence $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^p[a,b]$. i.e. $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\|f_m - f_n\|_p \le \epsilon, \quad \forall m, n \ge N_\epsilon$$

[1]详情可见 **Real Analysis – Folland , P183 Theorem 6.6**.

For $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\|f_m - f_n\|_p \le \frac{1}{2}, \ \forall m, n \ge n_1$$

For $\epsilon = \dfrac{1}{4}$, $\exists n_2 > n_1$, s. t.

$$\|f_m - f_n\|_p \le \frac{1}{4}, \ \forall m, n \ge n_2$$

$$\cdots$$

Then we get a subsequence $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, s. t.

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \le \frac{1}{2^k}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Since $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p[a,b]$ is a Cauchy sequence, thus

要证：$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

只需证：$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛. Let

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \left| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right|(x), \ \forall m \in \mathbb{N}, x \in [a,b]$$

Then $g_m \in L^p$, $g_m \ge 0$ and $g_m \le g_{m+1}$ 单调递增, and

$$g_m(x) \le \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \le 1, \ \forall m \in \mathbb{N}$$

记

$$g(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right|(x) \le 1$$

Then $g_m^p \in L^1$, $g_m^p \ge 0$, $g_m^p \le g_{m+1}^p$. By **MCT (单调收敛定理)**[2],

$$\lim_{m\to\infty} \int_{[a,b]} g_m^p(x)\, d\mu = \int_{[a,b]} \lim_{m\to\infty} g_m^p(x)\, d\mu$$

Thus

$$\left(\int_{[a,b]} |g(x)|^p \ d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{m\to\infty} \left(\int_{[a,b]} |g_m(x)|^p \ d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.3}$$

$$\le \lim_{m\to\infty} \left(\int_{[a,b]} 1 \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

$$= (b-a)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.5}$$

[2]**Monotone Convergence Theorem**, 详见 *Real Analysis* 笔记 **定理 3.1.2** & **定理 3.1.4**.

i.e. $\|g\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} < \infty$, then $g \in L^p$. 故 $g_m \overset{a.e.}{\to} g \in L^p$.
由于 $\sum\limits_{k=1}^{m} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|(x)$ 与 $f_{n_k}(x)$ 有相同的收敛性, 因此 $\exists f \in L^p$, s. t.

$$f_{n_k} \overset{a.e.}{\to} f \ as \ k \to \infty$$

下面来证明 f_{n_k} 在 p-范数 $\|\cdot\|_p$ 意义下收敛于 f：
考虑函数列 $\{\left|f_{n_k} - f\right|\}_{k=1}^{\infty} \subset L^p$. Since

$$\left|f_{n_k} - f\right| = \sum_{j=k}^{\infty} \left|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right| = g - g_{k-1} \leq 2g \tag{2.6}$$

Thus 函数列 $\{\left|f_{n_k} - f\right|\}_{k=1}^{\infty}$ 被可积函数 $2g \in L^p$ 所控制.
$\Rightarrow$ $\{\left|f_{n_k} - f\right|^p\}_{k=1}^{\infty} \subset L^1$ 可被 $(2g)^p \in L^1$ 所控制. 根据 **DCT (控制收敛定理)**[3],

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \left|f_{n_k} - f\right|^p \, d\mu = \int_{[a,b]} \lim_{k\to\infty} \left|f_{n_k} - f\right|^p \, d\mu = 0 \tag{2.7}$$

i.e. $\|f_{n_k} - f\|_p \to 0$ as $k \to \infty$. 故 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛, 从而 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, L^p complete. □

[3]**Dominated Convergence Theorem**, 详见 *Real Analysis* 笔记 **Thm 3.1.7**.

2.1.3 绝对收敛

回顾数学分析中级数绝对收敛的概念, 下面将其拓展到**一般的赋范空间** (B^* **空间**) 中.

定义 2.1.3. 对于 B^* 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的无穷级数 $\sum x_n$, 若 $\sum \|x_n\|$ 收敛, 则称 $\sum x_n$ **绝对收敛**.

注.

- 此处对于 $x_n \in X$, 部分和 $\sum x_n$ 有定义的来源为 B^* 空间均为线性空间.
- 在**欧氏空间**中, **绝对收敛** $\Rightarrow$ **收敛**. 但对于一般的赋范空间 (B^* 空间), 该结论不成立. 下面给出一个反例.

例 2.1.3. 考虑 $\mathbb{R}$ 中的一个子空间 $([0,1), |\cdot|)$. 取 $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \in [0,1)$, $n = 1, 2, \cdots$.
Since

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 < \infty$$

Thus $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converges in $\mathbb{R}$. Then 无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛. However,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \notin [0,1)$$

Thus $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 $[0,1)$ 中不收敛.

下面的定理给出了 B^* 空间成为 B 空间的**等价刻画**, 即**绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛**.

定理 2.1.2. [B^* 空间完备的等价刻画].

$$B^* \text{ 空间 } (X, \|\cdot\|) \text{ 完备} \Leftrightarrow \text{绝对收敛必收敛}$$

证明.

$\Rightarrow$: $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ with $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. By **范数的三角不等式 (Def 2.1.1)**,

$$\|\sum_{n=1}^{N} x_n\| \le \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|, \ \forall N \in \mathbb{N}$$

Letting $N \to \infty$, then

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

Thus $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ converges.

$\Leftarrow$: $\forall$ Cauchy sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, i.e. $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\rho(x_m, x_n) = \|x_m - x_n\| \le \epsilon, \ \forall m, n \ge N_\epsilon$$

For $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\|x_m - x_n\| \le \frac{1}{2}, \ \forall m, n \ge n_1$$

For $\epsilon = \frac{1}{4}$, $\exists n_2 > n_1$, s. t.

$$\|x_m - x_n\| \le \frac{1}{4}, \ \forall m, n \ge n_2$$

$$\cdots$$

Thus we get a subsequence $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \le \frac{1}{2^k}$.

WTS：$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges.

只需证：$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converges. Since

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \le 1 < \infty$$

Then $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ 绝对收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ 收敛.

Since x_{n_k} 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ 有相同收敛性 $\Rightarrow$ $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛 $\Rightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛 $\Rightarrow$ $(X, \|\cdot\|)$ complete.

$\square$

2.2 有限维赋范空间

2.2.1 范数的比较

这一节我们来讨论一类特殊的赋范空间——**有限维赋范空间**的性质, 首先来给出同一线性空间上所定义的不同范数之间的比较.

定义 2.2.1. 在线性空间 X 上赋予两个范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$. 若 $\|\cdot\|_2$ 意义下收敛蕴含 $\|\cdot\|_1$ 意义下收敛, i.e. $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x_0 \in X$,

$$\|x_n - x_0\|_2 \to 0 \ \Rightarrow \ \|x_n - x_0\|_1 \to 0$$

则称$\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强.

注. 范数间的比较有等价刻画, 即

$$\|\cdot\|_2 \text{ 比 } \|\cdot\|_1 \text{ 强} \ \Leftrightarrow \ \exists C > 0, \text{s.t.} \|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$$

此即下文的**命题 2.2.1**. 同时可得到**两个范数等价**的刻画, 即 (**推论 2.2.1**)

$$\|\cdot\|_2 \text{ 与 } \|\cdot\|_1 \text{ 等价} \ \Leftrightarrow \ \exists C_1, C_2 > 0, \text{s.t.}\, C_1\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq C_2\|\cdot\|_1$$

下面给出**范数间比较的等价刻画**.

命题 2.2.1. [范数比较等价刻画].
设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 为线性空间 X 上定义的两个范数, 则

$$\|\cdot\|_2 \text{ 比 } \|\cdot\|_1 \text{ 强} \ \Leftrightarrow \ \exists C > 0, \text{s.t.} \|\cdot\|_1 \leq C\|\cdot\|_2$$

证明.

$\Leftarrow$: Trivial.

$\Rightarrow$: 反证法. Assume for $\forall C > 0$, $\exists x \in X$, s. t. $\|x\|_1 > C\|x\|_2$.

Then for $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in X$, s. t.

$$\|x_n\|_1 > n\|x_n\|_2,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Thus

$$\frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1} = \left\|\frac{x_n}{\|x_n\|_1}\right\|_2 < \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Then $\left\{\dfrac{x_n}{\|x_n\|_1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converges to 0 in $\|\cdot\|_2$. However,

$$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|_1}\right\|_1 = \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_1} = 1 \not\to 0$$

Thus $\left\{\dfrac{x_n}{\|x_n\|_1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ doesn't converge to 0 in $\|\cdot\|_1$, which is a contradiction to "$\|\cdot\|_2$ 比 $\|\cdot\|_1$ 强"
.

Therefore, $\exists C > 0$, s. t. $\|\cdot\|_1 \le C\|\cdot\|_2$.

□

作为**命题 2.2.1**的推论, 下面给出**两个范数等价的刻画**.

推论 2.2.1. [两个范数等价的刻画].
设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 为线性空间 X 上定义的两个范数, 则

$$\|\cdot\|_2 \text{ 与 } \|\cdot\|_1 \text{ 等价} \iff \exists C_1, C_2 > 0, \text{s. t. } C_1\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2 \le C_2\|\cdot\|_1$$

2.2.2 有限维 B^* 空间的范数

这一小节我们主要来讨论**有限维 B^* 空间上范数的等价性**, 并给出其推论.

定理 2.2.2. [有限维 B^* 空间范数的等价性].

设 $(X, \|\cdot\|) \in B^*, \dim X = n < \infty, \{e_1, \cdots e_n\} \subset X$ 为 X 的一组基, 则 $\exists C_1, C_2 > 0$, s. t.

$$C_1 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \le \|x\| \le C_2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},\ \forall x \in X$$

其中 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i,\ x_i \in \mathbb{K}$.

注. 该定理说明了**有限维**线性空间 X 上任意两种范数均等价. 这是因为:

对于点列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X, x_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k e_i \in X$, 其在 $\|\cdot\|$ 下的收敛性与 $\mathbb{K}^n$ 中的点列 $\{\widetilde{x_k} = (x_1^k, \cdots, x_n^k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}^n$ 在欧式范数 $|\cdot|$ 意义下的收敛性一致, 即

$$\|x_k - x_0\| \to 0 \ \Leftrightarrow\ \left|\widetilde{x_k} - \widetilde{x_0}\right| \to 0$$

因此对于任意 X 上两种范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$,

$$\|x_k - x_0\|_1 \to 0 \ \Leftrightarrow\ \left|\widetilde{x_k} - \widetilde{x_0}\right| \to 0 \ \Leftrightarrow\ \|x_k - x_0\|_2 \to 0$$

这就说明了其等价性.

证明. 下面分别对两个不等式进行证明.

- 右侧不等式是显然的. $\forall x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i, x_i \in \mathbb{K}$. By **Triangle Inequality and linearity (Def 2.1.1)**

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| \le \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\|$$

  Then by **Cauchy-Schwarz's Inequality**,

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = C_2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

- 要证明左侧不等式, 不妨先设 $x=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \neq 0$. Then

$$\frac{\|x\|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}}=\left\|\frac{x}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}}\right\|=\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}}e_k\right\|$$

Then

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}},\cdots,\frac{x_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}}\right)\in\mathbb{S}^{n-1}$$

Let

$$f:\mathbb{S}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}_{>0} \tag{2.8}$$

$$x\longmapsto\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i e_i\right\| \tag{2.9}$$

where $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{S}^{n-1}$. 下面证明 $f\in C(\mathbb{S}^{n-1})$:

By the **Absolute Value Inequality**,

$$|f(x)-f(y)|=\left|\|\sum_{i=1}^{n}x_i e_i\|-\|\sum_{i=1}^{n}y_i e_i\|\right|\leq\left\|\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)e_i\right\|$$

Then by **Cauchy-Schwarz's Inequality**,

$$|f(x)-f(y)|\leq\left\|\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)e_i\right\|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}|x-y| \tag{2.11}$$

$$=C\,|x-y|\,,\ \ \forall x,y\in\mathbb{S}^{n-1} \tag{2.12}$$

Thus f is **Lipchitz continuous** on $\mathbb{S}^{n-1}$, specifically continuous.

Since $\mathbb{S}^{n-1}$ is compact, $f\in C(\mathbb{S}^{n-1})$, then $f(\mathbb{S}^{n-1})\subset\mathbb{R}$ is compact, i.e.

$$f(\mathbb{S}^{n-1})=[m,M]\subset\mathbb{R}_{>0}$$

Take $C_1=m>0$, then

$$\frac{\|x\|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}}=f\left(\frac{x_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}},\cdots,\frac{x_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}}\right)\geq C_1 \tag{2.13}$$

i.e.

$$\|x\|\geq C_1\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2},\ \ \forall x=\sum_{i=1}^{n}x_i e_i\in X$$

□

下面给出该定理的一些直接推论. 首先是有限维 B^* 空间必完备.

推论 2.2.3. [有限维 B^* 空间的完备性].

任一有限维 B^* 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 必为 B 空间 (完备).

证明. $\forall$ Cauchy sequence $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, $x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k e_i$. By **Thm 2.2.2**, $\exists C_1, C_2 > 0$, s. t.

$$C_1 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^k - x_i^l\right|^2} \le \|x_k - x_l\| \le C_2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^k - x_i^l\right|^2}, \ \forall k, l \in \mathbb{N}$$

Therefore, $\{\widetilde{x_k} = (x_1^k, \cdots, x_n^k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}^n$ is also a Cauchy sequence in $\mathbb{K}^n$.

Since $\mathbb{K}^n$ is complete, thus $\exists \widetilde{x_0} = (x_1^0, \cdots, x_n^0) \in \mathbb{K}$, s. t.

$$\left|\widetilde{x_k} - \widetilde{x_0}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^k - x_i^0\right|^2} \to 0$$

Let $x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 e_i \in X$, then by **Thm 2.2.2**,

$$\|x_k - x_0\| \le C_2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|x_i^k - x_i^0\right|^2} \to 0$$

Therefore, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ converges to $x_0 \in X$ in $\|\cdot\| \ \Rightarrow \ (X, \|\cdot\|)$ is complete, $X \in B$. □

下面的推论说明了有限维 B^* 空间中有界性与列紧性等价.

推论 2.2.4. [有限维 B^* 空间有界与列紧等价].

对于任一有限维 B^* 空间 $(X, \|\cdot\|)$, 有界 $\Leftrightarrow$ 列紧.

证明. 与 **Cor 2.2.3**同思路, 利用 **Thm 2.2.2** 范数等价性, 以及 $\mathbb{K}^n$ 空间中有界 $\Leftrightarrow$ 列紧,

$$A \subset X \text{ 有界 } \Leftrightarrow \widetilde{A} \subset \mathbb{K}^n \text{ 有界 } \Leftrightarrow \widetilde{A} \text{ 列紧 } \Leftrightarrow A \text{ 列紧}$$

□

2.2.3 Riesz 引理

下一小节我们将给出**赋范空间有限性的等价刻画**, 在证明其之前, 先来给出一个非常重要的引理——**Riesz** 引理.

引理 2.2.5. [Riesz's Lemma].
设 $(X, \|\cdot\|) \in B^*$, $X_0 \subset X$ 为 X 的真闭子空间, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists y \in X, \|y\| = 1$, s. t.

$$dist(y, X_0) \geq 1 - \epsilon$$

注. • 此处 $dist(y, X_0)$ 指点 y 与集合 X_0 的距离, 定义为

$$dist(y, X_0) = \inf_{x \in X_0} \|y - x\|$$

• 此处要求 $X_0 \subset X$ closed 的目的是保证

$$dist(y, X_0) > 0, \ \forall y \in X \setminus X_0$$

从而保证取点步骤的进行. 下面进行证明:

– **证明.** 反证法. Assume $\exists y \in X \setminus X_0$, s. t. $dist(y, X_0) = \inf_{\inf_{x \in X_0}} \|y - x\| = 0$.

Then for $\forall \epsilon = \dfrac{1}{n} > 0, \exists x_n \in X_0$, s. t.

$$\|y - x_n\| \leq \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Thus $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_0$ converges to $y \in X$ in $\|\cdot\|$. Since $X_0 \subset X$ is closed, then $y \in X_0$, contradiction. □

证明. Take $\forall y \in X \setminus X_0$, then $d = dist(y, X_0) > 0$. Since $d = \inf\limits_{x \in X_0} \|y - x\|$, then for $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_0 \in X_0$, s. t.

$$d \leq \|y - x_0\| \leq (1 + \epsilon)d$$

Let $y_0 = \dfrac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \in X$, then $\|y_0\| = 1$. 下面证明 $y_0 \in X$ 即为所求点：
Since

$$\|y_0 - x\| = \left\| \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} - x \right\| = \frac{\left\| y - (x_0 + \|y - x_0\| x) \right\|}{\|y - x_0\|}, \ \forall x \in X_0$$

Since $X_0 \subset X$ is a linear subspace, then

$$x_0 + \|y - x_0\| x \in X_0$$

Thus

$$\left\| y - (x_0 + \|y - x_0\| x) \right\| \geq \inf_{x \in X_0} \|y - x\| = d$$

Therefore,

$$\|y_0 - x\| = \frac{\left\| y - (x_0 + \|y - x_0\| x) \right\|}{\|y - x_0\|} \geq \frac{d}{\|y - x_0\|} \geq \frac{d}{(1 + \epsilon)d} \geq 1 - \epsilon, \ \forall x \in X_0$$

i.e.

$$dist(y_0, X_0) = \inf_{x \in X_0} \|y_0 - x\| \geq 1 - \epsilon$$

□

2.2.4 赋范空间有限性的刻画

上一小节我们介绍了 **Riesz 引理 (Lemma 2.2.5)**, 它说明了对于任一 B^* 空间 X 中的真闭子空间 $X_0 \subset X$, 单位球面与其距离的下确界为 1. 这一小节我们将利用 Riesz 引理, 来给出**有限维赋范空间的等价刻画**, 即有限维当且仅当有界 $\Leftrightarrow$ 列紧.

定理 2.2.6. [有限维赋范空间的等价刻画].

$$\text{若 } (X, \|\cdot\|) \in B^* \text{ 的任意有界集均列紧, 则 } dim(X) < \infty.$$

注. 结合**定理 2.2.2**及**推论 2.2.4**, 对于 $\forall (X, \|\cdot\|) \in B^*$,

$$X \text{ 中有界与列紧等价} \quad \Leftrightarrow \quad dim(X) < \infty$$

这就给出了 B^* 空间有限性的刻画.

证明. 反证法. Assume that $dim(X) = \infty$. Take $0 \neq x \in X$. Let

$$e_1 = \frac{x}{\|x\|} \in X, \;\; X_1 = span\{e_1\} \subset X$$

Since $dim(X) = \infty$, then $X_1 \subset X$ 为真子空间, 且为闭子空间 (线性子空间对运算封闭).
By **Riesz's Lemma (Lemma 2.2.5)**, for $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\exists e_2 \in X$, $\|e_2\| = 1$, s. t.

$$dist(e_2, X_1) \geq \frac{1}{2}$$

Thus $\|e_2 - e_1\| \geq \frac{1}{2}$. Let $X_2 = \{e_1, e_2\} \subset X$ 真闭子空间.
Similarly, By **Riesz's Lemma (Lemma 2.2.5)**, $\exists e_3 \in X$, $\|e_3\| = 1$, s. t.

$$|e_3 - e_1\| \geq \frac{1}{2} \text{ and } \|e_3 - e_2\| \geq \frac{1}{2}$$

$$\cdots$$

Then we get a sequence $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\|e_i\| = 1$, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ bounded and

$$\|e_i - e_j\| \geq \frac{1}{2}, \;\; \forall i \neq j$$

Thus $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ has no convergent subsequence, which contradicts to "X 中有界集均列紧".
Therefore, $dim(X) < \infty$. □

2.3 严格凸

这一节我们来介绍**严格凸**的概念, 这是对于**赋范空间**而言的一种性质, 注意与数学分析中接触过的集合、函数的**凸性**区别开来.

定义 2.3.1. Suppose $(X, \|\cdot\|) \in B^*$. If for $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$, s. t.

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| < 1,\ \ \forall \alpha \in (0,1)$$

Then 称 X 是严格凸 的.

注. 简单来说, **严格凸**意味着对于 X 中单位球面上任意两个不同的点 x, y, 他们之间连线上的点都在单位球的内部. 最简单直观的例子便是 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. 而 $\mathbb{R}^n$ 中也可以举出如下满足**非严格凸**的反例范数.

例 2.3.1. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的 1-范数 $\|\cdot\|_1$, 即

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|\,,\ \ \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

此时对于单位球面上任意两个不同的点 $x \neq y$, $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$, 若 x, y 处于同一象限内, 不难得到其连线上的点均落在球面上, 故 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ 非严格凸.

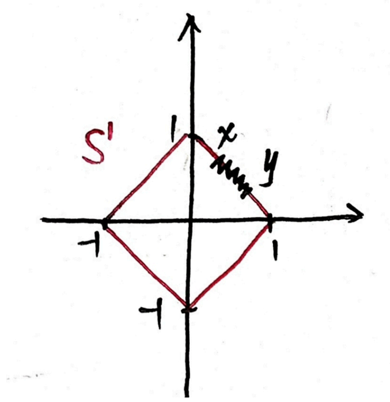

图 2.1: $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ 非严格凸

($(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ 中的单位球面 S^1 为红线所示正方形)

下面给出**严格凸的等价条件**, 即**范数三角不等式取等 $\Leftrightarrow$ 两向量同向共线**.

命题 2.3.1. [严格凸的等价条件].

Suppose $(X, \|\cdot\|) \in B^*$, then X 严格凸 $\Leftrightarrow$ For $\forall x, y \neq 0$,

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \;\;\Leftrightarrow\;\; \exists \lambda > 0, \text{s. t. } x = \lambda y$$

即 x 与 y 同向共线.

证明.

$\Leftarrow$: $\forall x, y \in X, x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1$, 下证：$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| < 1$, $\forall \alpha \in (0,1)$:

Since $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$, then x and y 不同向共线

(Otherwise if $x = \lambda y, \lambda > 0$, then $\|x\| = \|\lambda y\| = \|y\| \;\Rightarrow\; \lambda = 1$, 与 $x \neq y$ 矛盾)

Then αx 与 $(1-\alpha)y$ 也不同向共线, $\forall \alpha \in (0,1)$.
根据条件的逆否命题,

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \neq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\|, \;\forall \alpha \in (0,1)$$

Thus by the **triangle inequality (Def 2.1.1 (iii))**,

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\| < \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\|, \;\forall \alpha \in (0,1)$$

Therefore, X 严格凸.

$\Rightarrow$: Suppose $x, y \neq 0$, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, 下证：x, y 同向共线:

Since $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, then

$$\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|} = \left\|\frac{x}{\|x\|+\|y\|} + \frac{y}{\|x\|+\|y\|}\right\| = 1$$

Since

$$\frac{x}{\|x\|+\|y\|} = \frac{x}{\|x\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|} = \alpha \frac{x}{\|x\|}$$

where $\alpha = \dfrac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|} \in (0,1)$. Similarly, we can get

$$\frac{y}{\|x\|+\|y\|} = (1-\alpha)\frac{y}{\|y\|}, \;\text{ where } \alpha = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}$$

Thus

$$\frac{\|x+y\|}{\|x\|+\|y\|} = \left\|\alpha\frac{x}{\|x\|} + (1-\alpha)\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1$$

而又因为 X 严格凸, $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1$, thus

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow x = \frac{\|x\|}{\|y\|}y$$

Therefore, x, y 同向共线.

□

下面我们给出有关严格凸的一个命题, 它给出了**最佳逼近问题**[4]的存在唯一性的理论依据.

命题 2.3.2. [最佳逼近问题解的存在唯一性].
Suppose $(X, \|\cdot\|) \in B^*$. If X 严格凸, $X_0 \subset X$ 为有限维子空间, then for $\forall x \in X$, $\exists$ 唯一的 $x_0 \in X_0$, s. t.

$$\|x - x_0\| = dist(x, X_0)$$

注. • 作为该命题的一个直接推论, 考虑

区间 $[a, b]$ 上连续函数的多项式最优逼近问题

即在无穷范数意义下 $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, $\forall f \in C[a, b]$, 对于有限维子空间 $P[a, b] = span\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$, 根据该命题, 依赖 $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ 的**严格凸性**, 存在唯一的至多 n 次多项式 $g_0 \in P[a, b]$, s. t.

$$\|f - g_0\|_\infty = \inf_{g \in P[a,b]} \|f - g\|_\infty$$

这样就给出了该最佳逼近问题的**解的存在唯一性**的理论依据.

• 在命题条件中, X 的**严格凸性**事实上只保证了解的**唯一性**, 而解的**存在性**不需要严格凸的保证.

[4]可参考《泛函分析讲义》——张恭庆、林源渠 **P39** §4.5 应用：最佳逼近问题.

证明.

- 存在性：Fix $x \in X$. Since $d = dist(x, X_0) = \inf_{y \in X_0} \|x - y\|$, then for $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$, $\exists x_n \in X_0$, s. t.

$$d \leq \|x - x_n\| < d + \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Thus $x_n \in B(x, d+1), \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_0$ is bounded.

Since $dim(X_0) < \infty$, then By 有限维赋范空间的等价刻画 (**Thm 2.2.6**),

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_0 \text{ bounded } \Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ subsequentially compact}$$

Thus $\exists$ subsequence $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, s. t. $x_{n_k} \to x_0 \in X_0$ as $k \to \infty$.

Then $\|x - x_0\| = \lim_{k\to\infty} \|x - x_{n_k}\| = d$.

- 唯一性：反证法. Assume $\exists x_0, y_0 \in X_0$, $x_0 \neq y_0$, s. t. $\|x - x_0\| = \|x - y_0\| = d$.

For $\forall a \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned}
\Big\| x - [a x_0 + (1-a) y_0] \Big\| &= \Big\| a(x - x_0) + (1-a)(x - y_0) \Big\| && (2.14)\\
&\leq a\|x - x_0\| + (1-a)\|x - y_0\| && (2.15)\\
&= d && (2.16)
\end{aligned}$$

Since $a x_0 + (1-a) y_0 \in X_0$, then by the **minimality of** d,

$$\Big\| x - [a x_0 + (1-a) y_0] \Big\| = d, \ \forall a \in (0, 1)$$

i.e.

$$\Big\| a\frac{x - x_0}{d} + (1-a)\frac{x - y_0}{d} \Big\| = 1, \ \forall a \in (0, 1)$$

Since X 严格凸, $\Big\|\frac{x - x_0}{d}\Big\| = \Big\|\frac{x - y_0}{d}\Big\| = 1$, $\frac{x - x_0}{d} \neq \frac{x - y_0}{d}$, then

$$\Big\| a\frac{x - x_0}{d} + (1-a)\frac{x - y_0}{d} \Big\| < 1, \ \forall a \in (0, 1)$$

which contradicts to the upper conclusion. Therefore, $x_0 = y_0$.

□

2.4 B^* 空间的商空间

这一节我们来介绍**赋范空间的商空间**, 在其上定义运算与范数, 并说明其成为**完备赋范空间** (B 空间).

定义 2.4.1. Suppose $(X, \|\cdot\|) \in B^*$, $X_0 \subset X$ 为闭子空间, 定义等价关系

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x - y \in X_0$$

记 $x + X_0$ 表示 $x \in X$ 所在等价类, 从而得到商集 X/X_0, 即

$$X/X_0 := \{x + X_0 \mid x \in X\}$$

引入 X/X_0 中加法和数乘运算如下：

$$\begin{cases} (x + X_0) + (y + X_0) := (x + y) + X_0, \; \forall x, y \in X \\ k \cdot (x + X_0) := kx + X_0, \; \forall k \in \mathbb{K}, \; \forall x \in X \end{cases}$$

不难证明此时 X/X_0 满足线性空间的要求. 再引入范数

$$\|x + X_0\|_0 := dist(x, X_0) = \inf_{y \in X_0} \|x - y\|, \; \forall x \in X$$

则 $(X/X_0, \|\cdot\|_0) \in B^*$, 称 $(X/X_0, \|\cdot\|_0)$ 为关于 X 的商空间.

注. • 由于 $X_0 \subset X$ 为子空间, 不难验证二元关系 $\sim$ 满足：**自反性、对称性、传递性**.

• 下面来证明上述定义的 $\|\cdot\|_0$ 满足**范数的三条公理** (**Def 2.1.1**)：

证明. 由于 $\|\cdot\|$ 满足正定性, 因此 $\|\cdot\|_0$ 显然满足**正定性**.

For $\forall k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$,

$$\|k \cdot (x + X_0)\|_0 = \|kx + X_0\|_0 = \inf_{y \in X_0} \|kx - y\| \tag{2.17}$$

$$= |k| \inf_{\frac{y}{k} \in X_0} \|x - \frac{y}{k}\| \tag{2.18}$$

$$= |k| \inf_{z \in X_0} \|x - z\| = |k| \cdot \|x + X_0\|_0, \; \forall x \in X \tag{2.19}$$

Thus $\|\cdot\|_0$ 满足绝对齐性.

$$\begin{aligned}
\|(x+X_0)+(y+X_0)\|_0 = \|(x+y)+X_0\|_0 &= \inf_{z\in X_0}\|(x+y)-z\| && (2.20)\\
&= \inf_{\substack{x_0\in X_0\\ y_0\in X_0}}\|(x+y)-(x_0+y_0)\| && (2.21)\\
&\le \inf_{\substack{x_0\in X_0\\ y_0\in X_0}}(\|x-x_0\|+\|y-y_0\|) && (2.22)\\
&= \inf_{y_0\in X_0}\left[\inf_{x_0\in X_0}\Big(\|x-x_0\|+\|y-y_0\|\Big)\right] && (2.23)\\
&= \inf_{y_0\in X_0}\left(\|y-y_0\|+\inf_{x_0\in X_0}\|x-x_0\|\right) && (2.24)\\
&= \inf_{x_0\in X_0}\|x-x_0\|+\inf_{y_0\in X_0}\|y-y_0\| && (2.25)\\
&= \|x+X_0\|_0+\|y+X_0\|_0,\ \ \forall x,y\in X && (2.26)
\end{aligned}$$

Therefore, $\|\cdot\|_0$ satisfies the **triangle inequality**, $(X/X_0,\|\cdot\|_0)\in B^*$. □

2.4.1 商空间的完备性

在前面我们给出了 B^* 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 上商空间 $(X/X_0, \|\cdot\|_0)$ 的定义, 并说明了其为**赋范空间** (B^* **空间**). 在这一小节我们将揭示, 如果 $X \in B$ 完备, 则**其上定义的商空间均为完备赋范空间** (B 空间).

定理 2.4.1. [商空间的完备性].

$$\text{设 } (X, \|\cdot\|) \in B,\ X_0 \subset X \text{ 为闭子空间, 则 } (X/X_0, \|\cdot\|_0) \in B.$$

证明. $\forall$ Cauchy sequence $\{x_n + X_0\}_{n=1}^{\infty} \subset X/X_0$, i.e. $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\left\|(x_n + X_0) - (x_m + X_0)\right\|_0 < \epsilon,\ \forall m, n \geq N_\epsilon$$

For $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\left\|(x_n + X_0) - (x_m + X_0)\right\|_0 < \frac{1}{2},\ \forall m, n \geq n_1$$

For $\epsilon = \dfrac{1}{4}$, $\exists n_2 > n_1$, s. t.

$$\left\|(x_n + X_0) - (x_m + X_0)\right\|_0 < \frac{1}{4},\ \forall m, n \geq n_2$$

$$\cdots$$

Then we get a subsequence $\{x_{n_k} + X_0\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n + X_0\}_{n=1}^{\infty}$, s. t.

$$\left\|(x_{n_{k+1}} + X_0) - (x_{n_k} + X_0)\right\|_0 < \frac{1}{2^k},\ \forall k \in \mathbb{N}$$

i.e.

$$dist(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}, X_0) = \inf_{y \in X_0} \|(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) - y\| < \frac{1}{2^k}$$

Thus $\exists y_k \in X_0$, s. t.

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_k\| < \frac{1}{2^k},\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Then the series $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_k\right)$ 绝对收敛.

Since $(X, \|\cdot\|) \in B$ complete, then by B^* **空间完备的等价刻画 (Thm 2.1.2)**, 级数收敛,

即 $\exists z \in X$, s. t.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_k\right) = z$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k} - y_k\right) = x_{n_N} - x_{n_1} - \sum_{k=1}^{N-1} y_k \longrightarrow z \text{ as } N \to \infty$$

Thus

$$x_{n_N} - \sum_{k=1}^{N-1} y_k \to z + x_{n_1} \text{ as } N \to \infty$$

Consider 自然同态

$$\pi : X \longrightarrow X/X_0 \tag{2.27}$$

$$x \longmapsto x + X_0 \tag{2.28}$$

Since $X_0 \subset X$ 为子空间, then $0 \in X_0$. Thus for $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon > 0$, s. t.

$$\begin{aligned} \|\pi(x) - \pi(y)\|_0 = \|(x-y) + X_0\|_0 &= dist(x-y, X_0) && (2.29)\\ &= \inf_{z\in X_0} \|(x-y) - z\| && (2.30)\\ &\le \|x-y\| + \inf_{z\in X_0} \|z\| && (2.31)\\ &= \|x-y\| < \epsilon,\ \ \forall \|x-y\| < \delta && (2.32) \end{aligned}$$

Thus π is continuous. Since

$$x_{n_N} - \sum_{k=1}^{N-1} y_k \to z + x_{n_1} \text{ as } N \to \infty$$

Then

$$\pi\left(x_{n_N} - \sum_{k=1}^{N-1} y_k\right) \to \pi(z + x_{n_1})$$

i.e.

$$\left(x_{n_N} - \sum_{k=1}^{N-1} y_k\right) + X_0 \to (z + x_{n_1}) + X_0$$

Since $y_k \in X_0, \ \forall k \in \mathbb{N}$, then

$$\left(x_{n_N} - \sum_{k=1}^{N-1} y_k\right) + X_0 = x_{n_N} + X_0 \to (z + x_{n_1}) + X_0 \text{ as } N \to \infty$$

Therefore, $\{x_{n_k} + X_0\}_{k=1}^{\infty}$ converges to $(z + x_{n_1}) + X_0 \in X/X_0$

$\Rightarrow$ Cauchy sequence $\{x_n + X_0\}_{n=1}^{\infty}$ converges

$\Rightarrow$ $(X/X_0, \|\cdot\|_0)$ complete □

第三章　内积空间

3.1　内积空间

在先前的学习中, 我们已经得到了**度量空间**、**赋范空间**的概念, 它们的性质都很好, 但相比于我们所熟知的**欧氏空间** $\mathbb{R}^n$, 尤其是在**几何性质**上还存在着较大的差距. 这一章我们将给出**内积空间**的概念和性质, 并说明, 其与**赋范空间**之间只相差了一条**平行四边形公式**.

定义 3.1.1. 设 X 为定义在数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 如果映射 $(\cdot,\cdot)$

$$(\cdot,\cdot): X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

满足如下三条性质:

1. **[正定性].**

$$(x,x) \geq 0,\ \forall x \in X \qquad \big((x,x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0\big)$$

2. **[共轭对称性].**

$$(x,y) = \overline{(y,x)},\ \forall x,y \in X$$

3. **[关于第一变元线性性].**

$$(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1,y) + \beta(x_2,y),\ \forall x_1,x_2,y \in X,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}$$

则称 $(\cdot,\cdot)$ 为 X 上的内积, $(X,(\cdot,\cdot))$ 称为内积空间.

注.
- 此处讨论的**内积**应当定义在**数域** $\mathbb{K}$ 上的线性空间之上, 即内积的**陪域** $\mathbb{K}$ 与线性空间的域 $\mathbb{K}$ 二者应当为相同的数域, 且默认取完备数域, 即 $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$[1].
- $(x,0) = (0,x) = 0,\ \forall x \in X$

[1]可参考《**Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications**》**– Philippe G. Ciarlet** § 4.1 Page 174, 其分别对**实内积空间**与**复内积空间**进行了定义.

- 内积关于**第二变元**具有**共轭线性性**：

$$(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{\alpha}(x, y_1) + \overline{\beta}(x, y_2),\ \forall x, y_1, y_2 \in X,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

证明. 根据**共轭对称性**及**第一变元线性性**, $\forall x, y_1, y_2 \in X,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$,

$$(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \overline{(\alpha y_1 + \beta y_2, x)} = \overline{\alpha}\overline{(y_1, x)} + \overline{\beta}\overline{(y_2, x)} = \overline{\alpha}(x, y_1) + \overline{\beta}(x, y_2)$$

□

- 事实上, 内积可**诱导范数**, 即**内积空间为一类特殊的 B^* 空间**. 即

$$\text{内积空间} \Rightarrow \text{赋范空间} \quad , \quad \text{赋范空间} \not\Rightarrow \text{内积空间}$$

后续我们将说明, 赋范空间只需再满足一条平行四边形公式, 即可扩充为内积空间.
对于一般的内积空间 $(X, (\cdot, \cdot))$, 我们总是诱导范数 $\|\cdot\|$ 定义如下：

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)},\ \forall x \in X$$

下面证明该定义满足**范数的三条公理 (Def 2.1.1)**：

证明. 正定性不难验证. 对于绝对齐性, 根据**第一变元线性性**及**第二变元共轭线性性**,

$$\|kx\| = \sqrt{(kx, kx)} = \sqrt{k(x, kx)} = \sqrt{k\overline{k}(x, x)} = |k|\sqrt{(x, x)} = |k| \cdot \|x\|,\ \forall x \in X,\ \forall k \in \mathbb{F}$$

而对于三角不等式, 根据我们接下来马上介绍的 **Cauchy-Schwarz's Inequality (Thm 3.1.1)**,

$$Re(x, y) \le \left|(x, y)\right| \le \|x\| \cdot \|y\|,\ \forall x, y \in X$$

Thus

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2Re(x, y) + (y, y) \tag{3.1}$$

$$\le (x, x) + 2\|x\| \cdot \|y\| + (y, y) \tag{3.2}$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2,\ \forall x, y \in X \tag{3.3}$$

i.e.

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in X$$

Therefore, $\|\cdot\|$ is a norm defined on X. □

3.1.1 Cauchy-Schwarz's Inequality

下面我们将介绍大名鼎鼎的 **Cauchy-Schwarz's Inequality**, 其在一般的内积空间中均成立, 并为内积空间中“**角度**”这一几何概念提供了理论支撑.

定理 3.1.1. [Cauchy-Schwarz's Inequality].
Suppose $(X, (\cdot,\cdot))$ be an inner product space. Let $\|x\| = \sqrt{(x,x)},\ \forall x \in X$. Then

$$\left|(x,y)\right| \leq \|x\| \cdot \|y\|,\ \forall x, y \in X$$

且等号“=”成立 $\Leftrightarrow$ x, y 线性相关.

证明. 下面考虑一般情况, 即数域 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 的情况 (**Def 3.1.1**).
Fix $\forall x, y \in X$. Let $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$f(t) = \|x+ty\|^2 = (x,x) + 2Re(x,ty) + |t|^2\,(y,y) \tag{3.4}$$

$$= (x,x) + 2Re\Big(\bar{t}(x,y)\Big) + |t|^2\,(y,y) \tag{3.5}$$

Then $f(t) \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{C}$. 下面我们只考虑 $\bar{t}(x,y) \in \mathbb{R}$ 的情形, 即

$$t = s\frac{(x,y)}{|(x,y)|},\ \forall s \in \mathbb{R}$$

Thus $2Re\Big(\bar{t}(x,y)\Big) = 2Re\Big(s \cdot \overline{\frac{(x,y)}{|(x,y)|}} \cdot (x,y)\Big) = 2s\,|(x,y)|$. Then we have

$$f(t) = g(s) = (x,x) + 2s\,|(x,y)| + s^2(y,y),\ \forall s \in \mathbb{R}$$

Since $f(t) \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{C}$, then $g(s) \geq 0,\ \forall s \in \mathbb{R}$. Thus

$$\Delta_g = 4\left|(x,y)\right|^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0$$

i.e.

$$\left|(x,y)\right| \leq \|x\| \cdot \|y\|,\ \forall x, y \in X$$

□

3.2 内积与范数的关系

这一节我们将揭示**内积与范数**的关系, 即内积空间为特殊的 B^* 空间, 但二者事实上只相差一个**平行四边形公式**.

3.2.1 内积的连续性

下面我们来说明, 内积 $(\cdot,\cdot)$ 关于其所诱导的范数连续.

命题 3.2.1. [内积的连续性].

> **对于内积空间 $(X,(\cdot,\cdot))$, 其内积 $(\cdot,\cdot)$ 在 $X\times X$ 上关于其诱导的范数 $\|\cdot\|$ 连续.**

注. 该命题严谨叙述应该为 $(\cdot,\cdot)$ 在其诱导的范数 $\|\cdot\|$ 所诱导的度量 $\rho(\cdot,\cdot)$ 下连续, 即连续的概念应当建立在拓扑上, 特别地可为度量所诱导的拓扑.

证明. Suppose $x_n \overset{\|\cdot\|}{\to} x\in X$, $y_n \overset{\|\cdot\|}{\to} y\in X$. Then both $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ and $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ are bounded. i.e. $\exists M>0$, s. t.

$$\|x_n\|\le M,\ \ \|y_n\|\le M,\ \ \forall n\in\mathbb{N}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}\Big|(x_n,y_n)-(x,y)\Big| &= \Big|(x_n,y_n)-(x,y_n)+(x,y_n)-(x,y)\Big| &(3.6)\\ &\le \Big|(x_n-x,y_n)\Big|+\Big|(x,y_n-y)\Big| &(3.7)\end{aligned}$$

By **Cauchy-Schwarz's Inequality (Thm 3.1.1)**,

$$\begin{aligned}\Big|(x_n,y_n)-(x,y)\Big| &\le \Big|(x_n-x,y_n)\Big|+\Big|(x,y_n-y)\Big| &(3.8)\\ &\le \|x_n-x\|\cdot\|y_n\|+\|x\|\cdot\|y_n-y\| &(3.9)\\ &\le M\cdot\|x_n-x\|+\|x\|\cdot\|y_n-y\|\to 0 &(3.10)\end{aligned}$$

Therefore, $(x_n,y_n)\to(x,y)$ in $\mathbb{K}$. $(\cdot,\cdot):X\times X\longrightarrow\mathbb{K}$ is continuous. $\square$

3.2.2 极化恒等式与平行四边形公式

本小节将说明赋范空间配备上**平行四边形公式**后即可成为内积空间, 并给出内积的定义式 – **极化恒等式**. 首先来给出内积空间的**极化恒等式**.

命题 3.2.2. [极化恒等式].
设 $(X, (\cdot, \cdot))$ 为定义在数域 $\mathbb{K}$ 上的内积空间, 则

(i) If $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, then

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right), \ \forall x, y \in X$$

(ii) If $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, then

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right), \ \forall x, y \in X$$

证明. 当 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 时,

$$\frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) = Re(x, y) \tag{3.11}$$

$$\frac{i}{4}\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right) = iRe(x, iy), \ \forall x, y \in X \tag{3.12}$$

而

$$Re(x, iy) = Re\left(\bar{\imath}(x, y)\right) = Im(x, y), \ \forall x, y \in X$$

Therefore,

$$\frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right) \tag{3.13}$$

$$= Re(x, y) + iIm(x, y) \tag{3.14}$$

$$= (x, y), \ \forall x, y \in X \tag{3.15}$$

□

下面我们将说明, 对于 B^* 空间 $(X, \|\cdot\|)$, 若其范数满足**平行四边形公式**, 则可引入内积 $(\cdot, \cdot)$, s. t.

$$\sqrt{(x, x)} = \|x\|, \ \forall x \in X$$

定理 3.2.1. [范数诱导内积].
设 $(X, \|\cdot\|) \in B^*$, 若其范数满足平行四边形公式, 即

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),\ \forall x, y \in X$$

则可定义由此范数诱导的内积 $(\cdot,\cdot)$, s. t. $\sqrt{(x,x)} = \|x\|,\ \forall x \in X$, 使之成为内积空间.

证明. 内积按照**极化恒等式 (Prop 3.2.2)** 定义.
下面我们只证明 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 的情形, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 可类似证明. 即定义

$$(x, y) := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \forall x, y \in X$$

依次验证**内积的三条公理 (Def 3.1.1)**, **正定性**及**共轭对称性**显然成立.
下面分两方面来证明**关于第一变元线性性**：(对加法 & 数乘封闭)

- **对加法封闭**：Since

$$\begin{aligned}(x,z)+(y,z) &= \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) &(3.16)\\ &= \frac{1}{8}\left[2\left(\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2\right) - 2\left(\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2\right)\right] &(3.17)\end{aligned}$$

  By **平行四边形公式**,

$$\begin{aligned}(x,z)+(y,z) &= \frac{1}{8}\left[2\left(\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2\right) - 2\left(\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2\right)\right] &(3.18)\\ &= \frac{1}{8}\left(\|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2 - \|x+y-2z\|^2 - \|x-y\|^2\right) &(3.19)\\ &= \frac{1}{8}\left(\|x+y+2z\|^2 - \|x+y-2z\|^2\right) &(3.20)\\ &= \frac{1}{2}(x+y, 2z) = 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right),\ \forall x,y,z \in X &(3.21)\end{aligned}$$

  Let $y = 0$, we get

$$(x,z) = 2\left(\frac{x}{2}, z\right),\ \forall x, z \in X$$

  Thus replace x by $x+y$,

$$(x,z)+(y,z) = 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right) = (x+y, z),\ \forall x,y,z \in X$$

  i.e.

$$(x,z)+(y,z) = (x+y, z),\ \forall x,y,z \in X$$

- **对数乘封闭**：Fix $\forall x, y \in X$. Let

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.22}$$

$$t \longmapsto f(t) = (tx, y) \tag{3.23}$$

只需证：$f(t)$ 为线性函数.

By the previous result,

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2), \ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Since $\|\cdot\|$ is continuous (**范数的连续性 (Def 2.1.1)**), then f is continuous.

Thus f 为线性函数, i.e.

$$f(t) = tf(1), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Therefore,

$$(tx, y) = t(x, y), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

综上,

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z), \ \forall x, y, z \in X, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

□

例 3.2.1. [l^p 及 L^p 内积空间].

对于 l^p 空间 (Ex 1.3.1) 及 L^p 空间, 平行四边形公式成立的充要条件均为 $p = 2$.

证明. 充分性可按定义验证. 对于必要性, 只需给出 l^p 空间特例即可 (l^p 空间可视作 L^p 空间的子空间 (阶梯函数)).

Let $x = (1, 0, 0, \cdots), y = (0, 1, 0, \cdots) \in l^p$, then $\|x\| = \|y\| = 1$,

$$\|x + y\| = (1^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}, \ \|x - y\| = (1^p + |-1|^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$$

Thus $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \ \Rightarrow \ 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 2 \cdot 2 \ \Rightarrow \ p = 2.$ □

3.3 正交分解

3.3.1 正交补

这一节开始我们来探索内积空间的几何性质. 首先给出在高等代数中接触过的**正交**及**正交补**的概念.

定义 3.3.1. 对于内积空间 $(X, (\cdot, \cdot))$ 中的两个元素 $x, y \in X$, 如果

$$(x, y) = 0$$

则称 x 与 y 正交. 设 $M \subset X$ 为非空子集, 如果 $\forall y \in M, (x, y) = 0$, 则称 x 与 M 正交.
同时, 对于内积空间 $(X, (\cdot, \cdot))$ 的子集 $M \subset X$, 定义其正交补 $M^\perp$ 如下:

$$M^\perp := \{x \in X \mid \forall y \in M,\ (x, y) = 0\}$$

即为与 M 中所有成员均正交的元素所构成的集合.

注.

- $\forall M \subset X, 0 \in M^\perp \neq \varnothing$.
- 正交补继承了补运算的**反包含性**, 即 $\forall M_1 \subset M_2$, 有 $M_2^\perp \subset M_1^\perp$. (根据定义容易验证)
- $\forall M \subset X,\ M^\perp \cap M \subset \{0\}$, 即 M 与 $M^\perp$ 交集为 0 或空集.
- $M^\perp$ 为 X 的**闭线性子空间**, 即对**加法**、**数乘**和**极限**封闭. (并不依赖于 M 的线性性)

证明. 根据内积关于第一变元的线性性 **(Def 3.1.1)**, $\forall x, y \in M^\perp$,

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) = 0,\ \forall z \in M,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

于是 $\alpha x + \beta y \in M^\perp$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, 即为线性子空间.
$\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset M^\perp$ with $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0 \in X$. 根据**内积的连续性 (Prop 3.2.1)**,

$$(x_0, y) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n, y\right) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y) = 0,\ \forall y \in M$$

Thus $x_0 \in M^\perp$. Therefore, $M^\perp$ 对极限运算封闭, 即为闭线性子空间. □

- 根据 $M^\perp$ 为 X 的闭线性子空间, 不难得到将 M 扩张为线性空间后 $M^\perp$ 不变, 即

$$M^\perp = span(M)^\perp = \overline{span(M)}^\perp,\ \forall M \subset X$$

证明. 分别证明两个等式：

$M^\perp = span(M)^\perp$：Trivial.

$span(M)^\perp = \overline{span(M)}^\perp$：By **反包含性**, $\overline{span(M)}^\perp \subset span(M)^\perp$.

Fix $x \in span(M)^\perp$. $\forall y \in \overline{span(M)}$.

(a) If $y \in span(M)$, then since $x \in span(M)^\perp$, then $(x, y) = 0$.

(b) If $y \in \overline{span(M)} \setminus span(M)$, then $\exists \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset span(M)$, s. t. $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$.

By **内积的连续性 (Prop 3.2.1)**,

$$(x, y) = \left(x, \lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty}(x, y_n) = 0$$

Therefore,

$$(x, y) = 0,\ \forall y \in \overline{span(M)}^\perp$$

$span(M)^\perp \subset \overline{span(M)}^\perp \quad \Rightarrow \quad span(M)^\perp = \overline{span(M)}^\perp$. □

- $\forall \{x_i\}_{i=1}^n \subset X$, 若 x_i 两两正交, 即 $(x_i, x_j) = 0,\ \forall i \neq j$, 则满足勾股定理, i.e.

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

证明. 只需对 $n = 2$ 情形证明, 即 $\forall (x, y) = 0$, WTS：$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Since $(x, y) = 0$, then

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2Re(x, y) + (y, y) \tag{3.24}$$

$$= (x, x) + (y, y) \tag{3.25}$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2,\ \forall x, y \in M^\perp \tag{3.26}$$

再由归纳法容易证明原命题. □

3.3.2 内积空间的严格凸性

回顾**严格凸 (Def 2.3.1)** 的定义, 下面我们说明内积空间均为严格凸的 B^* 空间.

命题 3.3.1. [内积空间的严格凸性].

内积空间 $(X, (\cdot,\cdot))$ 必严格凸.

证明. $\forall x, y \in X$ with $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$. Fix x and y.

Let

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \tag{3.27}$$

$$\lambda \longmapsto f(\lambda) = \Big\|(1-\lambda)x + \lambda y\Big\| \tag{3.28}$$

By **范数的连续性 (Def 2.1.1)**, $f \in C[0, 1]$. Since 平行四边形公式 can be represented as

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big) \tag{3.29}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big) \tag{3.30}$$

Take

$$x \Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y, \;\; y \Rightarrow (1-\mu)x + \mu y, \;\; \forall 0 \leq \lambda < \mu \leq 1$$

Then by **平行四边形公式**, since $\Big\|(\mu - \lambda)(x - y)\Big\| > 0$,

$$\left\|\left(1 - \frac{\lambda+\mu}{2}\right)x + \frac{\lambda+\mu}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\Big\|(1-\lambda)x + \lambda y\Big\|^2 + \Big\|(1-\mu)x + \mu y\Big\|^2\right) - \Big\|(\mu-\lambda)(x-y)\Big\|^2 \tag{3.31}$$

$$< \frac{1}{2}\left(\Big\|(1-\lambda)x + \lambda y\Big\|^2 + \Big\|(1-\mu)x + \mu y\Big\|^2\right) \tag{3.32}$$

i.e.

$$f\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) < \frac{1}{2}\Big(f(\lambda) + f(\mu)\Big), \;\; \forall 0 \leq \lambda < \mu \leq 1$$

Since $f \in C[0, 1]$ continuous, then f is **strictly convex (严格凸)**.

With $f(0) = f(1) = 1$, we can easily proof that X is also **strictly convex**.

(对 $\forall \lambda_0 \in (0, 1)$, 可用二分法得到一系列区间端点 $\lambda_n \to \lambda_0$, 从而得到严格不等式 $f(\lambda_0) < 1$)

□

3.3.3 Hilbert 空间的闭凸子集 (最佳逼近问题)

回顾我们曾在介绍赋范空间严格凸性时, 给出过**对于严格凸赋范空间, 其空间上一点到有限维子空间的最佳逼近问题解的存在唯一性 (Prop 2.3.2)**. 而对于 **Hilbert** 空间, 我们同样有类似的定理, 并且可以用更一般的"**闭凸子集**"代替"**有限维子空间**"的条件.

首先给出 **Hilbert** 空间的定义.

定义 3.3.2. 完备的内积空间 $(X, (\cdot, \cdot))$ 称为**Hilbert 空间**, 记 $X \in \mathcal{H}$.

注. 此处的"完备"指的是由内积 $(\cdot, \cdot)$ 所诱导的范数 $\|\cdot\|$ 再诱导的度量 ρ 是完备的.

下面给出 Hilbert 空间上最佳逼近问题解的存在唯一性定理.

定理 3.3.1. [Hilbert 空间最佳逼近问题解的存在唯一性].
设 $(X, (\cdot, \cdot)) \in \mathcal{H}$, $M \subset X$ 为闭凸子集, then for $\forall x \in X$, $\exists$ 唯一的 $x_0 \in M$, s. t.

$$\|x - x_0\| = dist(x, M)$$

注. Hilbert 空间的完备性及闭凸子集保证了解的**存在性**, 而**内积空间的严格凸性 (Prop 3.3.1)** 则自动保证了解的**唯一性**.

证明.

- **存在性**: Since $dist(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|$, then for $\forall \epsilon = \frac{1}{n}$, $\exists x_n \in M$, s. t.

$$dist(x, M) \le \|x - x_n\| < dist(x, M) + \frac{1}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

i.e.

$$\|x - x_n\| \to dist(x, M) \text{ as } n \to \infty$$

下证 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ 为 Cauchy sequence：

By 平行四边形公式,

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\|^2 &= \left\| (x_n - x) + (x - x_m) \right\|^2 && (3.33)\\
&= 2\Big(\|x_n - x\|^2 + \|x - x_m\|^2\Big) - \Big\|2x - (x_m + x_n)\Big\|^2 && (3.34)\\
&= 2\Big(\|x_n - x\|^2 + \|x - x_m\|^2\Big) - 4\Big\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\Big\|^2 && (3.35)
\end{aligned}$$

Since $M \subset X$ 为闭凸子集, $x_m, x_n \in X$, then $\frac{x_m + x_n}{2} \in M$, thus $\Big\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\Big\| \geq dist(x, M)$,

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\|^2 &= 2\Big(\|x_n - x\|^2 + \|x - x_m\|^2\Big) - 4\Big\|x - \frac{x_m + x_n}{2}\Big\|^2 && (3.36)\\
&\leq 2\Big(\|x_n - x\|^2 + \|x - x_m\|^2\Big) - 4dist(x, M)^2 && (3.37)
\end{aligned}$$

Since $dist(x, M) \leq \|x - x_n\| < dist(x, M) + \frac{1}{n}$, then for $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 4\epsilon^2,\ \ \forall n, m \geq N_\epsilon$$

Thus $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ is a Cauchy sequence.

Since $X \in \mathcal{H}$ is complete, then $\exists x_0 \in X$, s. t.

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x_0$$

Since $M \subset X$ is closed, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, then $x_n \to x_0 \in M$. By 范数的连续性 **(Def 2.1.1)**,

$$\|x - x_0\| = \Big\|x - \lim_{n\to\infty} x_n\Big\| = \lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = dist(x, M)$$

- 唯一性：同 **Prop 2.3.2** 唯一性证明. 即利用内积空间的严格凸性 **(Prop 3.3.1)**.

□

3.3.4 投影定理 (正交分解)

下面我们给出 **Hilbert 空间上的投影定理 (正交分解)**, 它事实上给出了 Hilbert 空间**直和分解**的理论依据.

定理 3.3.2. [Hilbert 空间上的投影定理].
设 $(X, (\cdot, \cdot)) \in \mathcal{H}$, $M \subset X$ 为闭 (线性) 子空间, then for $\forall x \in X$, $\exists$ 唯一的 $x_0 \in M$, $x_1 \in M^{\perp}$, s. t.

$$x = x_0 + x_1$$

注. 事实上该投影定理给出 Hilbert 空间的直和分解, 即 $\forall$ 闭子空间 $M \subset X$,

$$X = M \oplus M^{\perp}$$

更一般地, 对于 $\forall$ 子集 $M \subset X$, 根据 $M^{\perp} = span(M)^{\perp} = \overline{span(M)}^{\perp}$ **(Def 3.3.1)**,

$$X = \overline{span(M)} \oplus M^{\perp}$$

证明.

- **存在性**: Since $M \subset X$ 为闭子空间, 故为线性空间, 同时为闭凸子集, then by **Thm 3.3.1**, $\exists x_0 \in M$, s. t.

  $$\|x - x_0| = dist(x, M)$$

  下面证明 $x - x_0 \in M^{\perp}$: $\forall y \in M$,

  $$\|x - x_0 - y\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|y\|^2 - 2Re(x - x_0, y)$$

  Since M is linear, then $x_0 + y \in M$,

  $$\|x - x_0 - y\|^2 = \left\|x - (x_0 + y)\right\|^2 \geq dist(x, M)^2 = \|x - x_0\|^2$$

  i.e.

  $$\|y\|^2 \geq 2Re(x - x_0, y), \ \forall y \in M$$

  Fix $y \in M$. Since M is linear, then $ty \in M, \ \forall t \in \mathbb{R}$, replace y as ty,

  $$t^2\|y\|^2 \geq 2t\, Re(x - x_0, y), \ \forall t \in \mathbb{R}$$

i.e.

$$\|y\|^2 \cdot t^2 - 2\,Re(x - x_0, y) \cdot t \geq 0, \;\; \forall t \in \mathbb{R}$$

Calculate 上述二次函数判别式, we have

$$\Delta = 4Re(x - x_0, y)^2 \leq 0 \;\; \Rightarrow \;\; Re(x - x_0, y) = 0$$

Similarly, replace y as $ity \in M, \;\; \forall t \in \mathbb{R}$,

$$t^2\|y\|^2 \geq 2t\,Re(x - x_0, iy) = 2t\,Re(\bar{i}(x - x_0, y)) \tag{3.38}$$

$$= 2t\,Re\left(\frac{(x - x_0, y)}{i}\right) \tag{3.39}$$

$$= 2t\,Im(x - x_0, y) \tag{3.40}$$

Calculate 判别式, we can get

$$Im(x - x_0, y) = 0$$

Therefore,

$$(x - x_0, y) = Re(x - x_0, y) + i\,Im(x - x_0, y) = 0, \;\; \forall y \in M$$

i.e.

$$x - x_0 \in M^\perp$$

Let $x_1 = x - x_0 \in M^\perp$, thus $x = x_0 + x_1$ for some $x_0 \in M, x_1 \in M^\perp$.

- 唯一性：Suppose $x = x_0 + x_1 = y_0 + y_1$, where $x_0, y_0 \in M, \;\; x_1, y_1 \in M^\perp$. Then

$$x_0 - y_0 = y_1 - x_1$$

Since both M and $M^\perp$ are linear, then $x_0 - y_0 \in M$ and $y_1 - x_1 \in M^\perp$. Thus

$$x_0 - y_0 = y_1 - x_1 \in M \cap M^\perp$$

Since $M \cap M^\perp \subset \{0\}$ **(Def 3.3.1)**, then

$$x_0 = y_0, \;\; x_1 = y_1$$

□

3.3.5 正交补的性质

这一小节我们来补充 **Hilbert** 空间中正交补的性质.

命题 3.3.2. [Hilbert 空间中正交补的性质].
设 $(X,(\cdot,\cdot)) \in \mathcal{H}$, $M \subset X$ 为闭子空间, 则

(i) $X = M \oplus M^{\perp}$. 更一般地, 对于 $\forall$ 子集 $M \subset X$,

$$X = \overline{span(M)} \oplus M^{\perp}$$

(ii) 若 $M \subsetneq X$ 为真闭子空间, 则 $M^{\perp} \neq \{0\}$.

(iii) $M = (M^{\perp})^{\perp}$

(iv) 设 $M \subset X$ 为子空间, 且 $M^{\perp} = \{0\}$, 则 $\overline{M} = X$.

证明.

(iii) **Claim**：$\forall$ 闭子空间 $M \subset X$, $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

- $\forall x \in M$. Fix x. $\forall y \in M^{\perp}$, then $(y,z) = 0,\ \forall z \in M$. Thus

$$(x,y) = 0,\ \forall y \in M^{\perp}$$

  Then $x \in (M^{\perp})^{\perp} \ \Rightarrow\ M \subset (M^{\perp})^{\perp}$.

By **Thm 3.3.2** (即本命题 (i)),

$$X = M \oplus M^{\perp} \subset (M^{\perp})^{\perp} \oplus M^{\perp}$$

Thus $X = M \oplus M^{\perp} = (M^{\perp})^{\perp} \oplus M^{\perp}$. Therefore, $M = (M^{\perp})^{\perp}$.

(iv) Since $M \subset \overline{M}$, then

$$X = M \oplus M^{\perp} \subset \overline{M} \oplus M^{\perp}$$

Thus $X = \overline{M} \oplus M^{\perp}$. Since $M^{\perp} = \{0\}$, then $X = \overline{M}$.

□

3.3.6 最佳逼近元的内积刻画

作为**投影定理 (正交分解)** 的推广, 对于 **Thm 3.3.1**中给出的 **Hilbert 空间上闭凸子集的最佳逼近问题**, 下面我们用内积来给出其**最佳逼近元**的刻画.

定理 3.3.3. [Hilbert 空间上闭凸子集最佳逼近元的内积刻画].
设 $(X, (\cdot, \cdot)) \in \mathcal{H}$, $M \subset X$ 为闭凸子集, then for $\forall x \in X$,

$$y \in M \text{ 为 } x \text{ 在 } M \text{ 上最佳逼近元} \iff Re(x-y, y-z) \geq 0, \ \forall z \in M$$

注. 此处**最佳逼近元** $y \in M$ 的**存在唯一性**可由 **Thm 3.3.1** 得到.

证明.

- **必要性** $\Rightarrow$: $\forall z \in M$. Since $M \subset X$ is convex, then $tz + (1-t)y \in M, \ \forall t \in [0, 1]$.
  Since $y \in M$ 为唯一最佳逼近元 (**Thm 3.3.1**), then

$$\left\| x - \left(tz + (1-t)y\right) \right\|^2 \geq \|x-y\|^2 \tag{3.41}$$
$$\iff \left\| (x-y) + t(y-z) \right\|^2 \geq \|x-y\|^2 \tag{3.42}$$
$$\iff t^2\|y-z\|^2 + 2t\, Re(x-y, y-z) \geq 0, \ \forall t \in [0,1] \tag{3.43}$$

  Calculate 该二次函数判别式, we get

$$\Delta = 4Re(x-y, y-z)^2 \leq 0 \ \Rightarrow \ Re(x-y, y-z) = 0, \ \forall z \in M$$

- **充分性** $\Leftarrow$: 由条件 $Re(x-y, y-z) \geq 0, \ \forall z \in M$, we can get

$$\left\| x - \left(tz + (1-t)y\right) \right\|^2 \geq \|x-y\|^2, \ \forall z \in M, \ \forall t \in [0,1]$$

  Take $t = 1$, then we have

$$\|x-z\| \geq \|x-y\|, \ \forall z \in M$$

  Thus $y \in M$ 为 x 在 M 上的最佳逼近元. By **Thm 3.3.1**, we have proved the uniqueness of y.

□

3.4 正交系

3.4.1 正交系与 Bessel 不等式

这一节我们来介绍有关**正交系**的相关概念, 首先给出**正交系**的定义.

定义 3.4.1. 设 $(X,(\cdot,\cdot))$ 为内积空间, $\{e_n\}_{n\geq 1}\subset X$. 若 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 满足两两正交, 即

$$(e_n,e_m)=0,\ \forall n\neq m$$

则称 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 为 X 的一个正交系. 若进一步有 $\|e_n\|=1,\ \forall n\geq 1$, 即

$$(e_i,e_j)=\delta_i^j,\ \forall i,j$$

则称之为标准正交系, 此时称 $\{(x,e_n)\}_{n\geq 1}$ 为 $x\in X$ 关于 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 的**Fourier 系数**.

注. 此处 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 既可为有限项, 也可为无穷项. 大部分情况下我们将其视作无穷项的一般情况讨论, 即 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

下面给出在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中十分显然的一个定理, 这里将其拓展到了一般的内积空间中.

定理 3.4.1. [Bessel's Inequality].
设 $(X,(\cdot,\cdot))$ 为内积空间, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ 为 X 的一个标准正交系, then

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(x,e_n)\right|^2\leq\|x\|^2,\ \forall x\in X$$

注. 事实上, 若 $(X,(\cdot,\cdot))\in\mathcal{H}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ 即为 $x\in X$ 在闭线性子空间

$$\overline{\underset{n\in\mathbb{N}}{span}(e_n)}\subset X$$

上的投影. 在下面的证明过程中也会有所体现.

证明. Fix $\forall x \in X,\ \forall m \in \mathbb{N}$. Let $M = \overline{span(e_1, \cdots, e_m)} \subset X$ be a closed linear subspace.

Since

$$\Big(x - \sum_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n, e_k\Big) = (x, e_k) - (x, e_k) = 0,\ \forall k = 1 \sim m$$

Then for $M = \overline{\underset{1\le n\le m}{span}(e_n)}$,

$$\Big(x - \sum_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n, y\Big) = 0,\ \forall y \in M$$

Thus $x - \sum\limits_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n \in M^{\perp}$, and

$$x = \sum_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n + \Big(x - \sum_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n\Big)$$

Since $\sum\limits_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n \in M$, then

$$\Big(\sum_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n, x - \sum_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n\Big) = 0$$

Hence by 勾股定理 **(Def 3.3.1)**,

$$\|x\|^2 = \Big\|\sum_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n\Big\|^2 + \Big\|x - \sum_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n\Big\|^2 \ge \Big\|\sum_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n\Big\|^2$$

Since $(e_i, e_j) = 0,\ \forall i \ne j$, then by 勾股定理 **(Def 3.3.1)**,

$$\Big\|\sum_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n\Big\|^2 = \sum_{n=1}^{m}\Big\|(x, e_n)e_n\Big\|^2 = \sum_{n=1}^{m}\Big|(x, e_n)\Big|^2$$

Thus

$$\|x\|^2 \ge \Big\|\sum_{n=1}^{m}(x, e_n)e_n\Big\|^2 = \sum_{n=1}^{m}\Big|(x, e_n)\Big|^2,\ \forall m \in \mathbb{N}$$

Letting $m \to \infty$, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|(x, e_n)\Big|^2 \le \|x\|^2$$

□

3.4.2 正交系的完备性与完全性

这一小节我们来介绍**完备**与**完全**正交系, 并说明其在 **Hilbert 空间**中等价.

定义 3.4.2. 设 $(X,(\cdot,\cdot))$ 为内积空间, $\{e_n\}_{n\geq 1}\subset X$ 为 X 的一个标准正交系. 若对于 $\forall x\in X$, Parseval 等式成立 (Bessel 不等式 **(Thm 3.4.1)** 取等情况), i.e.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(x,e_n)\right|^2=\|x\|^2,\ \ \forall x\in X$$

则称 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 在 X 中**完备 (complete)**.

定义 3.4.3. 设 $(X,(\cdot,\cdot))$ 为内积空间, $\{e_n\}_{n\geq 1}\subset X$ 为 X 的一个标准正交系. 若对于 $\forall x\in X$,

$$(x,e_n)=0,\ \ \forall n\in\mathbb{N}\ \ \Rightarrow\ \ x=0$$

则称 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 是**完全的 (perfect)**.

下面我们就来说明在 Hilbert 空间中上述两个定义等价.

定理 3.4.2. [Hilbert 空间中标准正交系完备与完全等价].
设 $(X,(\cdot,\cdot))\in\mathcal{H}$, $\{e_n\}_{n\geq 1}\subset X$ 为 X 的一个标准正交系, 则下列叙述等价：

(i) $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 完备.

(ii) $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n,\ \ \forall x\in X$.

(iii) $\forall x,y\in X$,

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}$$

(iv) $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 完全.

注. • 事实上, 上述叙述均等价于 $\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}^{\perp}=\{0\}$, 在证明中会有所体现. 又因为 $\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}\subset X$ 为 X 的子空间, 根据 **Prop 3.3.2 (iv)**,

$$\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}^{\perp}=\{0\}\ \ \Leftrightarrow\ \ \overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}=X$$

即上述叙述等价于 $\underset{n\geq 1}{span}(e_n)$ 在 X 中稠密.

- 对于内积空间 $(X,(\cdot,\cdot))$, $\{e_n\}_{n\geq 1}\subset X$ 为 X 的一个标准正交系. 考虑映射

$$T: X \longrightarrow l^2 \tag{3.44}$$

$$x \longmapsto \Big((x,e_n)\Big)_{n=1}^{\infty} \tag{3.45}$$

根据 **Bessel's Inequality (Thm 3.3.1)**,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|(x,e_n)\Big|^2 \leq \|x\|^2 < \infty,\ \ \forall x\in X$$

Thus the definition of $f: X\longrightarrow l^2$ is reasonable. Also we can show that f is **surjective (满射)**: $\forall (a_n)_{n=1}^{\infty}\in l^2$. Let

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n \in \overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}\subset X$$

Then $(x,e_n)=a_n,\ \forall n\in\mathbb{N} \ \Rightarrow\ Tx=(a_n)_{n=1}^{\infty}\in l^2$. Hence $f: X\longrightarrow l^2$ is surjective.

下面我们来说明:

对于一般的内积空间 $(X,(\cdot,\cdot))$, $T\Big|_{\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}}: \overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}\longrightarrow l^2$ 为等距同构[2]

根据上述说明, 不难证明 $T\Big|_{\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}}$ 为双射. 下面证明其等距性.

$\forall x,y\in \overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}$,

$$\Big(\rho_{l^2}(Tx,Ty)\Big)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\Big|(x,e_n)-(y,e_n)\Big|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\Big|(x-y,e_n)\Big|^2$$

Since $x-y\in\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}$, then by **Bessel's Inequality (Pareval's Equality, Thm 3.3.1)**,

$$\Big(\rho_{l^2}(Tx,Ty)\Big)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\Big|(x-y,e_n)\Big|^2=\|x-y\|^2=\Big(\rho_X(x,y)\Big)^2,\ \ \forall x,y\in\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}$$

i.e.

$$\rho_{l^2}\circ T=\rho_X$$

Therefore, $T\Big|_{\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}}: \overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}\longrightarrow l^2$ 为等距同构.

[2]对于本定理的条件, 即对于 **Hilbert** 空间 X 上的**完备的标准正交系** $\{e_n\}_{n\geq 1}$, $T: X\longrightarrow l^2$ 即为**等距同构**.
对于一般的内积空间, 将 T 限制在 $\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}$ 上有两个作用: (i) 是保证双射; (ii) 是保证 **Parseval's Equality**.

证明.

1. 首先 (i) 与 (ii) 的等价性是显然的：

   - Since $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n, x-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\right)=0$, and

     $$x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n+\left(x-\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\right)$$

     Then by **勾股定理 (Def 3.3.1)**

     $$\|x\|^2=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\right\|^2+\left\|x-\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\right\|^2$$

     Thus

     $$\{e_n\}_{n\geq 1}\text{完备}\;\Leftrightarrow\;\left\|x-\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\right\|^2=\|x\|^2-\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\right\|^2=0,\;\forall x\in X \tag{3.46}$$

     $$\Leftrightarrow\; x=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n,\;\forall x\in X \tag{3.47}$$

2. 上述叙述 (i)、(ii)、(iii)、(iv) 均等价于 $\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}^{\perp}=\{0\}$：

   - Since $x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\in\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)},\;\forall x\in X\;\Leftrightarrow\;\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}^{\perp}=\{0\}$, then

     $$(i)\;\Leftrightarrow\;(ii)\;\Leftrightarrow\;\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}^{\perp}=\{0\}$$

   - $\forall x,y\in X$ with $x=x_0+x_1$, $y=y_0+y_1$, where $x_0,y_0\in\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}$, $x_1,y_1\in\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}^{\perp}$.

     Then $x_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n$ and $y_0=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(y,e_n)e_n$.

     Since

     $$(x,y)=(x_0,y_0)+(x_0,y_1)+(x_1,y_0)+(x_1,y_1)=(x_0,y_0)+(x_1,y_1)$$

     and

     $$(x_0,y_0)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n\right)\overline{\left(\sum_{n=1}^{\infty}(y,e_n)e_n\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}$$

     Thus

     $$(iii)\;\Leftrightarrow\;(x_1,y_1)=0,\;\forall x,y\in X$$

     遍历 $x,y\in X$, 不难说明同时遍历了 $x_1,y_1\in\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}^{\perp}$. Therefore,

     $$(iii)\;\Leftrightarrow\;(x_1,y_1)=0,\;\forall x_1,y_1\in\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}^{\perp}\;\Leftrightarrow\;\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}^{\perp}=\{0\}$$

- Since for $\forall x \in X$,

$$(x, e_n) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Leftrightarrow \ x \in \overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}^{\perp}$$

Therefore,

$$(iv) \ \Leftrightarrow \ \overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}^{\perp} = \{0\}$$

$\square$

3.4.3 可分 Hilbert 空间的分类

这一小节我们将给出**可分 Hilbert 空间**的所有分类, 即在等距同构的意义下, 只有 $\mathbb{K}^n$ 与 l^2 两类**可分 Hilbert** 空间.

首先回顾一下高等代数中接触过的 **Gram-Schmidt 正交化**过程, 可以应用到一般的内积空间之中:
设 $(X, (\cdot, \cdot))$ 为内积空间, $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ 线性无关且至多可数. Let

$$y_1 = x_1, \qquad e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} \tag{3.48}$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, e_1)e_1, \qquad e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} \tag{3.49}$$

$$\cdots \qquad \cdots \tag{3.50}$$

$$y_n = x_n - (x_n, e_{n-1})e_{n-1}, \qquad e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} \tag{3.51}$$

$$\cdots \qquad \cdots \tag{3.52}$$

上述过程即为 **Gram-Schmidt 正交化过程**. 可以证明, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 与 $\{e_n\}_{n\geq 1}$ 可互相表出, 即

$$\underset{n\geq 1}{span}(x_n) = \underset{n\geq 1}{span}(e_n)$$

下面我们就来给出**可分 Hilbert** 空间的分类.

定理 3.4.3. [可分 Hilbert 空间的分类].
设 $(X, (\cdot, \cdot)) \in \mathcal{H}$,

若 X 为有限维 (n 维) 可分 Hilbert 空间, 则 X 与 $\mathbb{K}^n$ 等距同构.
若 X 为无穷维可分 Hilbert 空间, 则 X 与 l^2 等距同构.

注. • 事实上, 对于**内积空间**, 其具有两种维数, 分别为**正交维数**及**线性维数**. 大部分情况下 (包括此处) 均讨论的为其**正交维数**, 即**标准正交系的最大元素个数**.

对于**线性维数**, 即 X 作为线性空间的维数, 可以证明的是, 对于 **Hilbert** 空间,

其线性维数要么有限, 要么不可数. (正交维数有限 $\Leftrightarrow$ 线性维数有限)[3]

- 该定理说明, 在等距同构意义下, 可分的 Hilbert 空间只有 $\mathbb{K}^n$ (有限维) 和 l^2 (无穷维).

证明.

- If X 为无穷维可分 Hilbert 空间, then $\exists$ 可数稠密子集 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$.
  Since X 正交维数为 ∞, then $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ 线性无关. 对 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 进行 Gram-Schmidt 正交化, 得到标准正交系 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, s. t.
$$\underset{n\geq 1}{span}(x_n) = \underset{n\geq 1}{span}(e_n)$$
  Since $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \underset{n\geq 1}{span}(x_n)$ and $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ dense, then
$$X = \overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} \subset \overline{\underset{n\geq 1}{span}(x_n)} = \overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)} \ \Rightarrow \ \overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)} = X$$
  Therefore, by **Thm 3.4.2's Remark**,
$$T\Big|_{\overline{\underset{n\geq 1}{span}(e_n)}} = T : X \longrightarrow l^2 \text{ 为等距同构}$$

- If X 为 n 维可分 Hilbert 空间, Similarly.

$\square$

---

[3]对于命题“**无可数无穷维 Hilbert 空间**”, 可根据 **Baire's Theorem (Thm 1.2.1)** 反证：可数无穷维 Hilbert 空间为第一纲集, 这与 Baire's Theorem 矛盾. 事实上该命题可推广为“**无可数无穷维 Banach 空间**”.
对于 Hilbert 空间不可数线性维数的讨论, 可参考**文献**：

吴亚敏. 希尔伯特空间 H 中两种维数的比较 [C]. //第七届中国智能计算大会论文集. 2013:157-158.

第四章　线性算子与线性泛函

4.1　线性算子 & 线性泛函

这一节我们主要来给出**线性算子**及**线性泛函**相关概念的定义. **线性算子**为高等代数中学过的**线性变换 (线性映射)** 的推广, 即更多的在**无穷维线性空间**上进行讨论. 而**线性泛函**是**线性算子**的一个特例, 即将线性泛函的陪域取作数域, 相当于定义域较大的函数, 即为函数的推广.

定义 4.1.1. 设 X, Y 为定义在数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 若映射 $T : X \longrightarrow Y$ 为线性映射, 即

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y),\ \ \forall x, y \in X,\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

则称 T 为 X 到 Y 上的一个线性算子. 特别地, 若 $Y = \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, 则称 T 为线性泛函.

注.
- 此处我们沿用高代与范畴论中的记号, 将从线性空间 X 到 Y 上的所有**线性算子**构成的空间记作 $Hom(X, Y)$. 不难说明 $Hom(X, Y)$ 也是个定义在数域 $\mathbb{K}$ 上的**线性空间**.

- 回顾高代中有关**有限维线性空间的对偶空间**的结论:

  数域 $\mathbb{K}$ 上有限维线性空间的所有线性泛函构成空间 (对偶空间) 同构于 $\mathbb{K}^n$.

证明. 设 X 为数域 $\mathbb{K}$ 上 n 维线性空间, $\{e_i\}_{i=1}^n \subset X$ 为一组基.

Then for $\forall f \in Hom(X, \mathbb{K})$,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i),\ \ \forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in X$$

Consider the mapping

$$T : Hom(X, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^n \tag{4.1}$$

$$f \longmapsto \big(f(e_1), \ \cdots, \ f(e_n)\big) \tag{4.2}$$

It's not hard to prove that T is an isomorphism between $Hom(X, \mathbb{K})$ and $\mathbb{K}^n$, i.e.

$$Hom(X, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n$$

□

对于线性空间 X 到 Y 上的线性算子 $Hom(X, Y)$, 为了考虑其连续性, 下面将 X, Y 限制为 B^* 空间, 给出**连续算子**的定义.

定义 4.1.2. 设 $X, Y \in B^*$, $T \in Hom(X, Y)$. 若 T 连续, 即在 X 中每点处连续, 则称 T 为连续算子, 记 X 到 Y 的连续算子全体为 $L(X, Y)$. 特别地, 若 $Y = \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, 记 $X^* = L(X, \mathbb{K})$.

注. • 事实上, 此处记号 X^* 是对高代中**对偶空间**概念的推广, 即当 X 为**有限维**线性空间时, $X^* = L(X, \mathbb{K})$ 就是 X 上的对偶空间, 故更多讨论无穷维的情况. 这一点由下述命题保证:

有限维 B^* 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 上的线性函数 $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ 连续.

证明. **根据有限维 B^* 空间范数的等价性 (Thm 2.2.2)** 容易证明, 于是 $Hom(X, \mathbb{K}) = X^*$. □

• 对于 $\forall T \in Hom(X, \mathbb{K})$, 根据 T 的线性性, 不难得到 $T \in L(X, Y) \iff T$ 在 $x = 0$ 处连续.

下面再给出**有界算子**的概念.

定义 4.1.3. 设 $X, Y \in B^*$ 且 $T \in Hom(X, Y)$. 如果 T 将任何有界集映为有界集, 则称 T 为有界 (线性) 算子.

注. 此处给出 T 有界的几个**等价定义**, 即对于 $\forall T \in Hom(X, Y)$,

$$T \text{ 有界} \ \Leftrightarrow\ \text{单位球 (面) 的像有界} \ \Leftrightarrow\ \exists M > 0,\ \text{s. t.} \, \|Tx\| \le M \|x\|,\ \forall x \in X$$

证明.

- T 有界 $\Leftrightarrow$ 单位球 (面) 的像有界：必要性显然. 下面证充分性 $\Leftarrow$：$\exists M > 0$, s. t.

  $$\|Tx\| \le M \|x\| = M,\ \forall x \in B(0, 1)$$

  $\forall A \subset X$ bounded, i.e. $\exists r > 0$, s. t. $A \subset B(0, r)$. Then by the linearity of $T \in Hom(X, Y)$,

  $$\|Tx\| = \left\|T\Big(\|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}\Big)\right\| = \|x\| \cdot \left\|T\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\right\| \le r \cdot M < \infty,\ \forall x \in A$$

  Therefore, $T(A) \subset \mathbb{K}$ bounded. T bounded.

- 单位球 (面) 的像有界 $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$, s. t. $\|Tx\| \le M \|x\|,\ \forall x \in X$：
  充分性显然. 下面证明必要性 $\Rightarrow$：$\exists M > 0$, s. t.

  $$\|Tx\| \le M,\ \forall x \in \partial B(0, 1)$$

  Then for $\forall x \in X$,

  $$\left\|T\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\right\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le M,\ \forall x \in M$$

  i.e. $\|Tx\| \le M \|x\|,\ \forall x \in X$.

$\square$

附录 A　*Supplementary Content*

A.1　度量空间稠密子集的等价刻画

引理 A.1.1. 度量空间稠密子集的等价刻画.

Suppose (X,ρ) be a metric space. Then for $A \subset X$,

$$A \text{ is dense in } X \iff \forall x \in X, \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A, \text{ s. t. } x_n \xrightarrow{\rho} x$$

证明.

$\Rightarrow$: Trivial. $\forall x \in X$, since A is dense in X, then

$$A \cap B(x,r) \cap X \neq \varnothing,\ \forall r > 0 \tag{A.1}$$

不妨设 $B(x,1) \cap X \backslash \{x\} \neq \varnothing$. Then we take

$$x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n}),\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{A.2}$$

where we get $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ with $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

$\Leftarrow$: $\forall x \in X \backslash A$, WTS: $x \in \overline{A} \backslash A$. Trivial.

□