

# *Partial Differential Equations<sup>1</sup>*

–TW–

2025 年 1 月 21 日

<sup>1</sup>参考书籍：

《Partial Differential Equations》 – Lawrence C. Evans

《Partial Differential Equations》 – Fritz John

《数学物理方程讲义(第二版)》 – 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐

# 序

天道几何，万品流形先自守；  
变分无限，孤心测度有同伦。

2025年1月21日

长夜伴浪破晓梦，梦晓破浪伴夜长

# 目录

<b>第一章 The Single First-Order Equation</b>	<b>1</b>
1.1 一阶线性方程的特征线解法 . . . . .	1
1.1.1 一阶常系数线性方程 . . . . .	1
1.1.2 一阶变系数线性方程 . . . . .	2
1.1.3 一阶线性方程的特征线解法 . . . . .	4
1.2 Quasi-Linear Equations . . . . .	6
1.2.1 Integral Surfaces . . . . .	6
1.2.2 Characteristic Curves . . . . .	7
1.3 The Cauchy Problem for the Quasi-Linear Equation . . . . .	9
<b>第二章 Second-Order Equations : Hyperbolic Equations for Functions of Two Variables</b>	<b>13</b>
2.1 Characteristics for Quasi-Linear Second-Order Equations . . . . .	13
2.2 The Linear Second-Order Equation . . . . .	17
2.2.1 含 2 个自变量的 2 阶 Linear Equation 的标准型 . . . . .	17
2.2.2 含 2 个自变量的 2 阶 Linear Equation 的化简 . . . . .	18
2.3 The One-Dimensional Wave Equation . . . . .	23
2.3.1 一维齐次波动方程的特征线法 (上半空间, D'Alembert, 能量不等式) . . . . .	23
2.3.2 一维波动方程的特征线法 (上半空间) . . . . .	29
2.3.3 一维波动方程的特征线法 (半无界问题) . . . . .	31
2.3.4 Sturm-Liouville Problem . . . . .	34
2.3.5 一维齐次波动方程的分离变量法 (混合问题) . . . . .	36
2.3.6 一般的一维波动方程的分离变量法 (混合问题) . . . . .	47
2.3.7 一维波动方程的广义解 . . . . .	50

<b>第三章 The Laplace Equation</b>	<b>53</b>
3.1 Dirichlet & Newmann Problem 解的唯一性 . . . . .	53
3.2 基本解, Green 恒等式变式, 调和函数均解析 . . . . .	56
3.2.1 基本解 (With Spherical Symmetry), Green 恒等式变式 . . . . .	56
3.2.2 调和函数均解析 . . . . .	60
3.3 调和函数的平均值等式, 任一 $C^2$ 函数可由基本解表示 . . . . .	61
3.3.1 调和函数的平均值等式 (球面 & 球体) . . . . .	61
3.3.2 任一 $C^2$ 函数可由基本解表示 (Laplace 算子作用后的形式) . . . . .	63
3.4 下调和函数的性质 . . . . .	66
3.4.1 均值不等式 (球面) . . . . .	66
3.4.2 均值不等式 (球体) . . . . .	67
3.4.3 极值原理 (The Maximum Principle) . . . . .	68
3.4.4 极值原理的应用——再论 Dirichlet Problem 解的唯一性 . . . . .	70
3.4.5 强极值原理 (Strong Maximum Principle) . . . . .	71
3.5 Green's Function, 球上的 Possion 公式 . . . . .	72
3.5.1 Green's Function . . . . .	72
3.5.2 球上的 Poisson 公式 . . . . .	74
<b>附录 A Supplementary Content</b>	<b>80</b>
A.1 变分原理与最小曲面问题 . . . . .	80
A.1.1 Cut-Off Function . . . . .	80
A.1.2 极小曲面问题 . . . . .	82
A.2 线性 PDE 的叠加原理 . . . . .	86
A.3 一维波动方程的 Duhamel 原理 (齐次化原理) . . . . .	87
A.4 一维波动方程的能量不等式 . . . . .	89
<b>附录 B Fundamental Knowledge</b>	<b>92</b>
B.1 区域边界的光滑性 . . . . .	92
B.2 ODE 解的存在唯一性定理 . . . . .	93
B.3 反函数定理 . . . . .	94
B.4 Gauss-Green 公式 . . . . .	95
B.5 一阶常系数线性 ODE 的求解 . . . . .	98

# 第一章 The Single First-Order Equation

## 1.1 一阶线性方程的特征线解法

对于波动方程来说, 经典的解题方法有两类: 分离变量法 & 特征线法. 这两类方法也可以应用于除波动方程外的很多 PDE. 这一节我们以一阶线性方程为例, 引出特征线的概念.

### 1.1.1 一阶常系数线性方程

首先先来考虑最简单的情形: 在区域  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$  上求解 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

对于该问题, 给出特征线的定义.

**定义 1.1.1.** 我们称下列 ODE 初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \\ x(0) = c \end{cases}$$

的解  $x(t, c) = at + c$  为方程 (1.1) 的特征线, 其中  $c \in \mathbb{R}$  为常数.

**注.** “特征线”的含义如下:

沿着特征线  $x = x(t, c)$ , 待求函数表达式为  $\rho = \rho(x(t, c), t)$ , s. t.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \rho_t + a\rho_x = 0$$

即  $\rho(x, t)$  在特征线  $x = x(t, c)$  上恒为常数.

故只需知道特征线上一点取值即可得到整条线上的函数值. 而在特征线的起点  $x = c, t = 0$  处,

$$\rho(x(0, c), 0) = \rho(c, 0) = \rho_0(c)$$

于是在特征线  $x = x(t, c)$  上,

$$\rho(x(t, c), t) = \rho(at + c, c) = \rho_0(c)$$

根据  $x = at + c$ , 解得  $c = x - at$ , 代入上式, 得到  $\rho(x, t)$  的解

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - at), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

### 1.1.2 一阶变系数线性方程

更一般地, 我们考虑变系数方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v(x) \cdot \rho) = 0 \quad (1.2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + v(x) \frac{\partial \rho}{\partial x} + v'(x)\rho = 0 \quad (1.3)$$

类似地, 对于该变系数问题, 同样给出特征线的定义.

**定义 1.1.2.** 设曲线  $x = x(t, c)$  满足

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v(x(t)) \\ x(0) = c \end{cases}$$

这条积分曲线  $x = x(t, c)$  称为方程 (1.3) 的特征线, 其中  $c \in \mathbb{R}$  为常数. 沿着特征线  $x = x(t, c)$ , 待求函数  $\rho = \rho(x(t, c), t)$  满足:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -v'(x(t, c)) \cdot \rho \\ \rho(x(0, c), 0) = \rho(c, 0) = \rho_0(c) \end{cases} \quad (1.4)$$

**注.** 事实上, 此处我们已经将 PDE 问题 (1.3) 转化为了求解 ODE 问题 (1.4). 但在处理积分时要留意, 方程 (1.4) 中等号右端函数  $v'$  的自变量为  $x(t, c)$  而非  $t$ , 因此要进行变量替换, 即

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= -v'(x(t, c)) dt \\ \ln \rho(x(t, c), t) - \ln \rho_0(c) &= \int_0^t -v'(x(\tau, c)) d\tau \\ &= \int_c^{x(t, c)} -v'(x(\tau, c)) \cdot \frac{1}{dx} \cdot d\tau \end{aligned}$$

由于特征线方程满足

$$\frac{dx}{dt} = v(x(t, c))$$

因此

$$\begin{aligned}\ln \rho(x(t, c), t) - \ln \rho_0(c) &= \int_c^{x(t, c)} -v'(x(\tau, c)) \cdot \frac{1}{dx} d\tau \\ &= \int_c^{x(t, c)} \frac{-v'(x(\tau, c))}{v(x(\tau, c))} dx \\ &= -\ln v(x(t, c)) + \ln v(c)\end{aligned}$$

从而容易得到特征线  $x = x(t, c)$  上函数  $\rho = \rho(x(t, c), t)$  为

$$\rho(x(t, c), c) = \rho_0(c) \cdot \frac{v(c)}{v(x(t, c))}$$

从特征线方程  $x = x(t, c)$  中解出  $c = \varphi(x, t)$ , 代入上式, 解得

$$\rho(x, t) = \rho_0(\varphi(x, t)) \cdot \frac{v(\varphi(x, t))}{v(x)}$$

可以验证, 上述表达式确实是方程 (1.3) 的解.

### 1.1.3 一阶线性方程的特征线解法

下面对前两个小节所给出的特征线法进行总结归纳, 大致分为以下步骤:

1. 求特征线  $x = x(t, c)$ .
2. 沿特征线  $x = x(t, c)$ , 将原方程化为关于  $\rho = \rho(x(t, c), t)$  的 ODE 方程 (其中  $c \in \mathbb{R}$  为参数), 并求出  $\rho = u(t, c)$ .
3. 从特征线方程  $x = x(t, c)$  中解出  $c = \varphi(x, t)$ , 代入  $\rho = u(t, c)$  中, 解得  $\rho(x, t) = u(t, \varphi(x, t))$ .

下面给出一个实例.

**例 1.1.1.** 求下列 Cauchy 问题的解.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (x + t) \frac{\partial u}{\partial x} + u = x, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = x \end{cases}$$

解.

**Step 1 .** 求特征线. 特征方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + t \\ x(0) = c \end{cases}$$

的解为

$$x = x(t) = e^t(1 + c) - (1 + t)$$

**Step 2 .** 令  $U(t) = u(x(t), t)$ , then

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = x(t) - u(x(t), t) = -U(t) + e^t(1 + c) - (1 + t) \\ U(0) = u(x(0), 0) = u(c, 0) = c \end{cases}$$

解得

$$U(t) = u(x(t), t) = \frac{1}{2}(c + 1)e^t + \frac{1}{2}(c - 1)e^{-t} - t$$

**Step 3** . 从特征线方程  $x = e^t(1 + c) - (1 + t)$  中, 解得

$$c = (x + t + 1)e^{-t} - 1$$

代入  $u(x(t), t)$  中, 得到

$$u(x, t) = \frac{1}{2}e^{-2t}(x + t + 1) - e^{-t} + \frac{1}{2}(x - t + 1)$$

□

## 1.2 Quasi-Linear Equations

这一节我们将会把线性方程中的特征线法拓展到更一般的 **Quasi-Linear** 方程中, 并将给出 **Integral Surfaces** (积分曲面) 等概念. 此处我们为了简化问题, 均讨论含 2 个自变量的一阶 **Quasi-Linear** 方程, 即

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (1.5)$$

### 1.2.1 Integral Surfaces

为了直观地理解方程 (1.5), 我们不妨令  $z = u(x, y)$  代表  $\mathbb{R}^3$  中的曲面, 方程 (1.5) 可化为

$$(a, b, c) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0$$

根据外法向的定义 (B.1.1),  $(u_x, u_y, -1)$  即为曲面  $z = u(x, y)$  在各点处的外法向. 于是对于  $\mathbb{R}^3$  中向量场  $(a, b, c)$ , 其与曲面  $z = u(x, y)$  在各点处的法向量垂直.

从而我们的问题可由“求解方程 (1.5)”, 转化为:

对于  $\mathbb{R}^3$  中的向量场  $(a, b, c)$ , 我们要找到一个曲面  $z = u(x, y)$ ,  
s. t. 曲面上每个点的切线均平行于  $(a, b, c)$ .

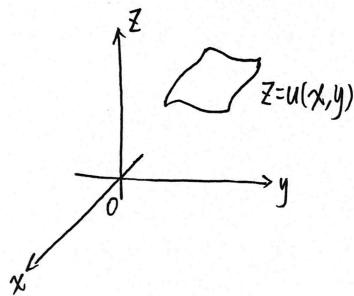


图 1.1: 曲面  $z = u(x, y)$

由此, 引出 **Integral Surfaces** 的概念.

**定义 1.2.1.** Surfaces corresponding to solutions of a P.D.E. are called integral surfaces of the P.D.E.

## 1.2.2 Characteristic Curves

为了求解 **Quasi-Linear Equations**, 我们来拓展 **Def 1.1.1** 及 **Def 1.1.2** 中关于特征线的概念. Assume  $a, b, c \in C^1(\Omega)$ , where  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  is a bounded region. 对于方程 (1.5),

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

我们给出特征线的定义.

**定义 1.2.2.** 设曲线  $\gamma : (x(t), y(t), z(t)) \subset \mathbb{R}^3$ . 若曲线  $\gamma$  满足 ODE 方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, z) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = b(x, y, z) \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

则称这条积分曲线  $\gamma : (x(t), y(t), z(t))$  为方程 (1.5) 在点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  处的 特征线.

**注.** • 由于  $a, b, c \in C^1(\Omega)$ , 因此  $a, b, c$  Lipschitz 连续, 根据 **ODE** 解的存在唯一性定理 (**Thm B.2.1**), 对于给定的初值点  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ , 该特征线存在且唯一.

- 此处仅为含 2 个自变量的 1 阶 **Quasi-Linear Equation** 的特征线, 事实上, 对于  $n$  维可类似推广, 即对于含  $n$  个自变量的 1 阶 **Quasi-Linear Equation**

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u)u_{x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, u)u_{x_n} = a_{n+1}(x_1, \dots, x_n, u)$$

对于  $\mathbb{R}^{n+1}$  中的曲线  $\gamma : (x_1(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t))$ , 若  $\gamma$  满足

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \\ \dots \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} = a_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \\ x_1(0) = x_0^1, \dots, x_{n+1}(0) = x_0^{n+1} \end{cases}$$

则称  $\gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$  为上述含  $n$  个自变量的 1 阶 Quasi-Linear Equation 的特征线.

下面我们将说明, 若已知所求曲面  $z = u(x, y)$  上一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , 则该点处的特征线就落在所求曲面  $z = u(x, y)$  上. 这一结论将直接提供利用特征线法解决 **Quasi-Linear Equation** 的理论依据, 即只要我们知道了所求曲面  $z = u(x, y)$  上一条曲线的方程, 则沿着这条曲线上, 求出每个点所在的特征线, 再将所有特征线“拼”在一起, 即得到了所求曲面  $z = u(x, y)$ .

### 定理 1.2.1. [Characteristic Curve].

Suppose  $P(x_0, y_0, z_0) \in S = \{(x, y, z) \mid z = u(x, y)\}$ .  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  为点  $P$  所在特征线, i.e.

$$P(x_0, y_0, z_0) \in \gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a, b]\}$$

Then  $\gamma \subset S$ .

证明. Define  $U(t) = z(t) - u(x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ . WTS:  $U \equiv 0$  on  $[a, b]$ .

Since  $P \in \gamma$ , then  $\exists t_0 \in [a, b]$ , s. t.

$$(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0)$$

Since  $P \in S$ , then

$$z_0 = u(x_0, y_0) \Rightarrow U(t_0) = z_0 - u(x_0, y_0) = 0$$

Hence 根据特征线所满足方程 (1.6),

$$\begin{aligned} \frac{dU(t)}{dt} &= \frac{dz}{dt} - u_x \frac{dx}{dt} - u_y \frac{dy}{dt} \\ &= c(x(t), y(t), z(t)) - u_x \cdot a(x(t), y(t), z(t)) - u_y \cdot b(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

由于  $z(t) = U(t) + u(x(t), y(t))$ , 因此 (下面将等式右侧  $t$  略去),

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = c(x, y, U + u(x, y)) - u_x \cdot a(x, y, U + u(x, y)) - u_y \cdot b(x, y, U + u(x, y)) \\ U(t_0) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Since  $a, b, c \in C^1(\Omega)$ , then  $a, b, c$  are Lipschitz continuous.

By ODE 解的存在唯一性定理 (Thm B.2.1), the above-mentioned problem 1.7 has a unique solution.

又因为  $U(t_0) = 0$ ,  $U = 0$  是方程 (1.7) 的一个解, 所以解得

$$U \equiv 0 \text{ on } [a, b]$$

i.e. 对于方程 1.6 所求得特征线  $\gamma : (x(t), y(t), z(t))$ , s. t.

$$z(t) = u(x(t), y(t)), \forall t \in [a, b]$$

Therefore,  $\gamma \subset S$ . □

### 1.3 The Cauchy Problem for the Quasi-Linear Equation

这一节我们将延续上一节对 1 阶 Quasi-Linear Equation 的特征线的讨论, 来给出有关 Quasi-Linear 方程的 Cauchy 问题的解法, 并给出其解存在的充分条件 (当已知曲线非特征线时为充要条件).

对于 2 维 1 阶 Quasi-Linear Equation,  $a, b, c \in C^1$  near  $P_0$ ,

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

在上一节的讨论中我们已经将“求解该方程” 转化为了“求曲面  $z = u(x, y)$ ”. 现在对于所求曲面  $z = u(x, y)$ , 已知其上一条曲线  $\Gamma$  的参数方程及其上一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , i.e.

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases}, \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \in \Gamma$$

where  $f, g, h \in C^1$  near  $s_0$ ,  $s_0 \in [a, b]$ .

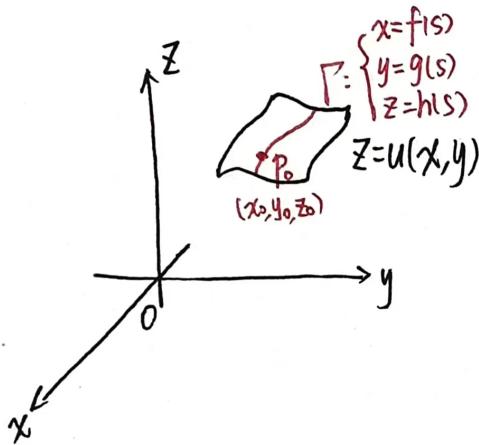


图 1.2: Cauchy Problem for Quasi-Linear Equation

下面给出该 Cauchy 问题解存在的充分条件, 并将说明当已知曲线  $\Gamma$  并非点  $P_0$  处特征线时, 该条件为充要条件. 证明过程也即给出了运用特征线法求解 Quasi-Linear 方程的 Cauchy 问题的方法.

### 定理 1.3.1. [Cauchy Problem for Quasi-Linear Equation].

考虑如下 Cauchy 问题. Assume  $a, b, c \in C^1$  near  $P_0$ . For the Quasi-Linear Equation

$$\begin{cases} a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \\ x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s) \\ h(s) = u(f(s), g(s)) \\ (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \end{cases}$$

即已知  $\mathbb{R}^3$  中曲面  $z = u(x, y)$  上的一条曲线  $\Gamma$  及其上一点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , 其中  $\Gamma$  的参数方程可表示为

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases}, \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \in \Gamma$$

其中  $f, g, h \in C^1$  near  $s_0$ ,  $s_0 \in [a, b]$ . 则该 Cauchy 问题在  $P_0$  附近有解的充分条件为:

$$J = \begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

特别地, 当  $\Gamma$  不是点  $P_0$  处的特征线时, 该条件为充要条件.

证明.

- 充分性 (一般情形): Suppose  $a, b, c \in C^1(\Omega)$  and  $f, g, h \in C^1[a_0, b_0]$ .

Fix  $s \in [a_0, b_0]$ . 对于每个  $s \in [a_0, b_0]$ , 考虑如下 ODE(特征线)

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = a(x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = b(x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dz(t)}{dt} = c(x(t), y(t), z(t)) \\ x(0) = f(s), \quad y(0) = g(s), \quad z(0) = h(s) \end{cases}$$

Since  $a, b, c \in C^1(\Omega)$ ,  $f, g, h \in C^1[a_0, b_0]$ , then by ODE 解的存在唯一性定理 (Thm B.2.1),

对于每个  $s \in [a_0, b_0]$ , 上述 ODE 均有唯一解, 即对于每个  $s \in [a_0, b_0]$ , 在点  $P = (f(s), g(s), h(s))$  处均可解出唯一的一条特征线.

设所求曲面  $z = u(x, y)$  的参数方程为

$$\begin{cases} x = X(s, t) \\ y = Y(s, t) \\ z = Z(s, t) \end{cases}$$

则将上述对于所有  $\text{fixed } s \in [a_0, b_0]$  的 ODE 方程合在一起, 等价于下述 ODE 方程组:

$$\begin{cases} X_t(s, t) = a(X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)) \\ Y_t(s, t) = b(X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)) \\ Z_t(s, t) = c(X(s, t), Y(s, t), Z(s, t)) \\ X(s, 0) = f(s), \quad Y(s, 0) = g(s), \quad Z(s, 0) = h(s) \end{cases}$$

根据 **ODE 解的存在唯一性定理 (Thm B.2.1)**, 上述 ODE 解存在且唯一, i.e.

$\exists X, Y, Z \in C^1 \text{ near } (s_0, 0)$ , s. t. 曲面  $z = u(x, y)$  在  $P_0$  附近参数方程为

$$\begin{cases} x = X(s, t) \\ y = Y(s, t) \\ z = Z(s, t) \end{cases}$$

下面我们来解出曲面  $z = u(x, y)$  的表达式, 即原 Quasi-Linear Equation 的解:

我们已知在  $(s_0, 0)$  点附近,

$$\begin{cases} x = X(s, t) \\ y = Y(s, t) \end{cases}$$

因为

$$\begin{vmatrix} X_s & X_t \\ Y_s & Y_t \end{vmatrix} (s_0, 0) = \begin{vmatrix} f'(s_0) & a(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \\ g'(s_0) & b(f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \end{vmatrix} = J \neq 0$$

所以根据反函数定理 (Thm B.3.1),  $\exists F, G \in C^1 \text{ near } P_0$  为  $x = X(s, t)$ ,  $y = Y(s, t)$  的反函数, s. t.

$$\begin{cases} s = F(x, y) \\ t = G(x, y) \end{cases} \Rightarrow z = Z(s, t) = Z(F(x, y), G(x, y))$$

Let

$$z = Z(F(x, y), G(x, y)) = u(x, y)$$

即得到了曲面  $z = u(x, y)$  的方程, 也即求得了原方程的解.

- 必要性(若  $\Gamma$  并非点  $P_0$  处的特征线): 反证法. Assume  $J = 0$ . Then

$$J = b(P_0)f'(s_0) - a(P_0)g'(s_0) = 0$$

Since  $h(s) = u(f(s), g(s))$  in  $\Gamma$ , then

$$h'(s_0) = f'(s_0)u_x + g'(s_0)u_y$$

根据原 Quasi-Linear 方程, 还可得到关系:

$$c = au_x + bu_y$$

于是, at  $s = s_0$ ,  $x = f(s_0)$ ,  $y = g(s_0)$ , we have three relations

$$bf' - ag' = 0 \quad h' = f'u_x + g'u_y \quad c = au_x + bu_y$$

These imply that<sup>1</sup>

$$bh' - cg' = 0 \text{ and } ah' - cf' = 0$$

Therefore, 在  $P_0$  点,  $(f', g', h')$  与  $(a, b, c)$  成比例, i.e.

曲线  $\Gamma$  在点  $P_0$  处的切线方向即为  $(a, b, c) \Rightarrow \Gamma$  满足在  $P_0$  点处的特征线 ODE 方程.

由充分性证明过程, 根据 **ODE 解的存在唯一性定理 (Thm B.2.1)**,  $\Gamma$  即为点  $P_0$  处的特征线, 这与假设条件“ $\Gamma$  并非点  $P_0$  处的特征线”矛盾.

Therefore, we have proved the necessity.

□

**注.** 可以容易地推广至含  $n$  个自变量的 1 阶 Quasi-Linear Equation.

---

<sup>1</sup>在等式  $h' = f'u_x + g'u_y$  两侧乘  $b$ , 在  $c = au_x + bu_y$  两侧乘  $g'$ , 分别得到  $bh' = bf'u_x + bg'u_y$ ,  $cg' = ag'u_x + bg'u_y$ . 两个等式相减即得到  $bh' - cg' = 0$ . 同理可得到  $ah' - cf' = 0$ .

# 第二章 Second-Order Equations : Hyperbolic Equations for Functions of Two Variables

这一章我们来讨论含 2 个自变量的 2 阶 PDE, 首先将特征线的推广至 2 阶 Quasi-Linear Equation 上, 并利用特征线来对 2 阶 Linear Equation 进行化简分类, 而后我们将重点讨论一维波动方程, 介绍其两种不同的解法.

## 2.1 Characteristics for Quasi-Linear Second-Order Equations

这一节我们将讨论一般的含 2 个自变量的 2 阶 Quasi-Linear Equation 的 Cauchy 问题, 讨论其解的存在性问题, 并引出特征线的拓展定义, 为后续 Linear Equation 的化简分类工作做好铺垫.

Consider the general Quasi-Linear Equation

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d \quad (2.1)$$

where  $a, b, c, d$  depend on  $(x, y, u, u_x, u_y)$ . 与 §1.2 & §1.3 中的讨论类似 (**Def 1.2.1**), 此处将求解方程 (2.1) 等价视作求解  $\mathbb{R}^3$  中的积分曲面  $z = u(x, y)$ .

对于 Cauchy 问题, 即已知积分曲面  $z = u(x, y)$  在  $xOy$  平面上投影区域  $\Omega$  中的一条曲线  $\gamma$ , 及  $\gamma$  所对应积分曲面上  $u, u_x, u_y$  的表达式, 其中  $\gamma$  的参数方程及上述 Cauchy data 为

$$\gamma : \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \end{cases}, \quad \begin{cases} u|_y = u(f(s), g(s)) = h(s) \\ u_x|_y = \varphi(s) \\ u_y|_y = \psi(s) \end{cases} \quad (2.2)$$

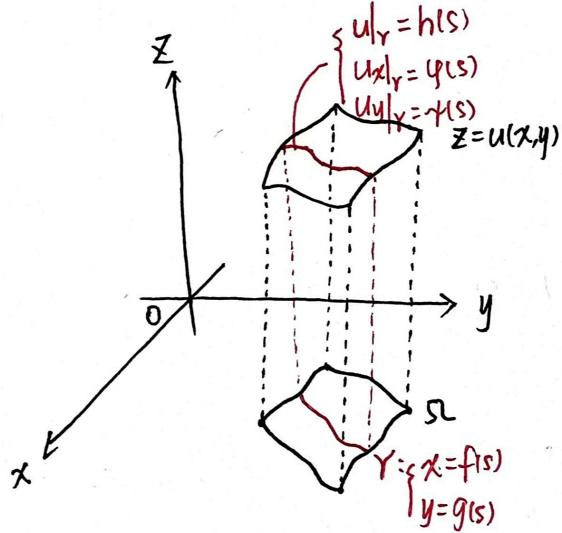


图 2.1: Cauchy Problem for Quasi-Linear Second-Order Equation

对 (2.2) 中 Cauchy data 等式左右两侧对  $s$  求导, 同时结合原方程 (2.1), 可得到在  $\gamma$  所对应积分曲面区域上, 有关系式

$$\begin{cases} f' u_{xx} + g' u_{xy} = \varphi' \\ f' u_{xy} + g' u_{yy} = \psi' \\ au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \\ a & 2b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \psi' \\ d \end{pmatrix}$$

考虑系数矩阵行列式

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \\ a & 2b & c \end{vmatrix} = a(g')^2 - 2bf'g' + c(f')^2$$

Fix  $P_0 = (f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \in \text{Graph}(\varphi|_\gamma)$ ,

下面根据  $\Delta$  是否为零可给出该 Cauchy 问题解的存在性讨论:

- 若  $\tilde{\Delta}|_{P_0} \neq 0$ , then

By **Cramer's Rule**,  $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$  can be uniquely determined near  $P_0$ .

而我们已知  $y$  上  $u$  及一阶导数  $u_x, u_y$  解析式  $\Rightarrow u$  的各阶导数可确定 ( $u$  足够光滑).

If  $u$  analytic, then  $u$  在  $P_0$  附近的解析式可被唯一确定. 从而此时可得到  $P_0$  附近  $u$  的解.

- $\tilde{\Delta}|_{P_0} = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2b\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right) + c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0 &\Leftrightarrow a(dy)^2 - 2b(dx)(dy) + c(dx)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \end{aligned}$$

不难得到此时  $P_0$  在平面  $xOy$  上的投影落在满足方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$  的曲线上.

基于上述讨论, 我们给出含 2 个自变量的 2 阶 **Quasi-Linear Equation** 的特征方程、特征线等概念, 并给出 2 阶 **Quasi-Linear Equation** 的分类.

**定义 2.1.1.** 对于含 2 个自变量的 2 阶 Quasi-Linear Equation,

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d \quad (2.3)$$

where  $a, b, c, d$  depend on  $(x, y, u, u_x, u_y)$ . 我们称方程

$$a(dy)^2 - 2b(dx)(dy) + c(dx)^2 = 0 \quad (2.4)$$

为该 Quasi-Linear Equation 的特征方程. 称  $xOy$  平面上满足方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (2.5)$$

的曲线称为该 Quasi-Linear Equation 的特征线. 并对方程 (2.3) 给出如下分类:

- $\Delta = b^2 - ac < 0 \Rightarrow \underline{\text{elliptic (椭圆方程)}}$
- $\Delta = b^2 - ac > 0 \Rightarrow \underline{\text{hyperbolic (双曲方程)}}$
- $\Delta = b^2 - ac = 0 \Rightarrow \underline{\text{parabolic (抛物方程)}}$

**注.** • 不难理解, 该分类为局部概念, 即在积分曲面  $z = u(x, y)$  的不同区域上, 方程的分类可能有所不同.

- 对于 **Linear Equation**, 还可定义特征曲面、特征方向等特征理论, 详情可见书<sup>1</sup>.
- Fix  $P_0 \in \gamma$ . 对于椭圆方程 (**elliptic**), 其在  $P_0$  附近不存在实特征线; 对于双曲方程 (**hyperbolic**), 其在  $P_0$  附近存在两族不同的实特征线; 对于抛物方程 (**parabolic**), 其在  $P_0$  点附近存在一族实特征线.
- 设  $\varphi(x, y) = C$  为一族特征线, 即满足特征方程 (2.4), i.e.

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0$$

由于  $\varphi(x, y) = C$ , 因此  $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$ , thus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \Rightarrow a\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 + 2b\frac{\varphi_x}{\varphi_y} + c = 0$$

i.e.

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$$

根据前面的讨论, 对于方程 (2.3) 在曲线  $\gamma$  上一点  $P_0$ , 若  $\tilde{\Delta}|_{P_0} \neq 0$  且  $u$  解析, 则  $u$  在  $P_0$  附近可由幂级数展开式唯一确定. 基于此, 对于 **Hyperbolic Equation** (双曲方程), 给出如下命题.

### 命题 2.1.1. [Propagation of Singularity].

对于 **Hyperbolic** 情形, 解本身或其导数的间断 (不连续) 等奇异情况只会发生在特征线上.

**证明.** 在特征线外,  $\Delta \neq 0$ ,  $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$  可解.

(此处命题和证明都只给出了大致的叙述, 详细严谨的讨论可参见书籍<sup>2</sup>)

□

---

<sup>1</sup>参考书籍: 《数学物理方程讲义 (第二版)》 – 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐 – 第 5 章

<sup>2</sup>参考书籍: 《Partial Differential Equations》 – Fritz John – §2.2 Propagation of Singularities.

## 2.2 The Linear Second-Order Equation

这一节我们主要来对一般的含 2 个自变量的 2 阶 Linear Equation 进行化简分类, 即

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + 2du_x + 2eu_y + fu = 0 \quad (2.6)$$

where coefficients  $a, b, c, d, e, f$  depend on  $(x, y)$ .

### 2.2.1 含 2 个自变量的 2 阶 Linear Equation 的标准型

首先先来给出标准型的概念.

**定义 2.2.1.** 对于如下 3 种形式的方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f & \text{(波动方程)} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f & \text{(热传导方程)} \\ -\Delta u = f & \text{(位势方程)} \end{cases} \quad (2.7)$$

上述三个方程分别称为双曲型 (Hyperbolic)、抛物型 (Parabolic) 和椭圆型 (Elliptic) 的标准型.

**注.** 对含 2 个自变量的 2 阶 Linear Equation 进行化简分类的工作, 即将方程 (2.6) 经过变量代换后 (线性 / 非线性), 其二阶项被化为标准型. 而对于含 2 个自变量的情形, 上述标准型可简化表达为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f \\ u_t - a^2 u_{xx} = f \\ -u_{xx} = f \end{cases}$$

## 2.2.2 含 2 个自变量的 2 阶 Linear Equation 的化简

Suppose  $\Omega \subset xOy$  为积分曲面  $z = u(x, y)$  在平面  $xOy$  上的投影区域. Fix  $P_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ . 下面对方程 (2.6) 在  $P_0$  点附近的区域化简为标准型 (**Def 2.2.1**).

下面针对方程 (2.6) 在点  $P_0$  附近的类型, 分为 3 种情况进行讨论:

### 1. Hyperbolic ( $\Delta = b^2 - ac > 0$ , 双曲方程):

根据 §2.1 节的讨论 (**Def 2.1.1**), 通过求解特征方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

可得到两族实特征线  $\varphi(x, y) = C$  与  $\psi(x, y) = C$ . 令

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (2.8)$$

不难证明上述变换可逆<sup>3</sup>, 即

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

经计算,

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_\eta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ u_y = u_\xi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u_\eta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{cases}, \quad \begin{cases} u_{xx} = \dots \\ u_{xy} = \dots \\ u_{yy} = \dots \end{cases}$$

代入原方程 (2.6), 得到

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \dots = 0 \quad (2.9)$$

where

$$\begin{cases} A = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 \\ B = a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y \\ C = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \end{cases}$$

---

<sup>3</sup>由于  $\varphi(x, y) = C$ , 因此  $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ . 因为  $\varphi$  满足特征方程 (2.4), 所以  $-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$  为方程  $a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0$  的解. 同理可说明  $-\frac{\psi_x}{\psi_y}$  为该方程两个不同的实根, 从而  $-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \neq -\frac{\psi_x}{\psi_y} \Rightarrow J \neq 0$ .

Since  $\varphi(x, y) = C$  and  $\psi(x, y) = C$  为方程 (2.6) 的两族特征线, then by 特征线方程所满足的关系 (Def 2.1.1),

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0 \quad \text{and} \quad a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 = 0$$

i.e.  $A = C = 0$ . 可以计算证明  $B \neq 0$ , 等式 (2.9) 两侧除去  $2B$ , 得到

$$u_{\xi\eta} + 2Du_\xi + 2Eu_\eta + Fu = 0$$

为了消去交叉项  $u_{\xi\eta}$ , 此时再进行一次变量代换

$$x' = \xi + \eta, \quad y' = \xi - \eta$$

可将方程化简为

$$u_{y'y'} - u_{x'x'} + 2D'u_{x'} + 2E'u_{y'} + F'u = 0$$

此即得到了二次项化简为双曲标准型 (Def 2.2.1) 的结果.

## 2. Parabolic ( $\Delta = b^2 - ac = 0$ , 抛物方程):

由于  $\Delta = b^2 - ac = 0$ , 因此求解特征方程可得到一族特征曲线  $\varphi(x, y) = C$ . 此时任取函数  $\psi(x, y) = C$ , s. t.  $\varphi$  与  $\psi$  线性无关, 令

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

同理, 可通过计算得到

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \dots = 0$$

where

$$\begin{cases} A = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 \\ B = a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y \\ C = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \end{cases}$$

Similarly, since  $\varphi(x, y) = C$  为特征线, then by 特征线方程所满足的关系 (Def 2.1.1),

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$$

Thus  $A = 0$ .

Since  $\Delta = b^2 - ac = 0$ , then  $b = \pm\sqrt{ac}$ . 不妨设  $a, b, c \geq 0$ , then

$$\begin{aligned} B &= a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y \\ &= (\sqrt{a}\varphi_x + \sqrt{c}\varphi_y)(\sqrt{a}\psi_x + \sqrt{c}\psi_y) \end{aligned}$$

Since  $a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$ ,  $b = \sqrt{ac}$ , then

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = (\sqrt{a}\varphi_x + \sqrt{c}\varphi_y)^2 = 0$$

Hence  $A = B = 0$ . 方程可化为

$$u_{\eta\eta} + 2Du_{\xi\eta} + 2Eu_{\eta\xi} + Fu = 0$$

对比抛物方程的标准型 (Def 2.2.1), 为了消去  $u_\eta$ , 再令

$$v = ue^{\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} 2E(\xi, t) dt}$$

从而可得到二次项化为抛物方程的标准型 (Def 2.2.1) 的结果

$$v_{\eta\eta} + 2D'v_\xi + F'v = 0$$

### 3. Elliptic ( $\Delta = b^2 - ac < 0$ , 椭圆方程):

对于实数域  $\mathbb{R}$  上的情形<sup>4</sup>, 我们先引入变量替换, 而后再给出所需条件求解该替换方程,  
i.e.

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

同理可得到

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \dots = 0$$

where

$$\begin{cases} A = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 \\ B = a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y \\ C = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \end{cases}$$

参考椭圆方程的标准型 (Def 2.2.1), 我们要化简的目标形式应为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2Du_\xi + 2Eu_\eta + Fu = 0$$

可以验证的是, 当  $\varphi$  与  $\psi$  满足下述条件时,

$$\begin{cases} \varphi_x = \frac{b\psi_x + c\psi_y}{W} \\ \varphi_y = -\frac{a\psi_x + b\psi_y}{W} \end{cases}, \quad W = \sqrt{ac - b^2}$$

此时可得到  $A = C, B = 0$ . 从而即可得到目标形式.

而上述条件所需的必要条件为求解下述方程 (**Beltrami Equation**)

$$\left( \frac{b\psi_x + c\psi_y}{W} \right)_y + \left( \frac{a\psi_x + b\psi_y}{W} \right)_x = 0$$

---

<sup>4</sup>若放宽至复数域  $\mathbb{C}$  上进行化简, 则过程将是 Trivial 的, 详情可见书籍: 《数学物理方程讲义 (第二版)》 – 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐 – 第五章 §2 第 253 页.

下面给出一个例子.

**例 2.2.1. [The Tricomi Equation].**

$$u_{yy} - yu_{xx} = 0$$

解. 在一般形式下

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d$$

$a = -y, b = 0, c = 1$ . 计算得到  $\Delta = b^2 - ac = y$ . 于是方程可分类为:

$$\begin{cases} y > 0, \text{ Hyperbolic (双曲方程)} \\ y = 0, \text{ Parabolilc (抛物方程)} \\ y < 0, \text{ Elliptic (椭圆方程)} \end{cases}$$

For  $y > 0$ , calculate the characteristic equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \pm \frac{1}{\sqrt{y}}$$

i.e. 特征曲线为

$$3x \pm 2y^{\frac{3}{2}} = C$$

Let

$$\xi = 3x - 2y^{\frac{3}{2}}, \eta = 3x + 2y^{\frac{3}{2}}$$

得到

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6} \frac{u_\xi - u_\eta}{\xi - \eta} = 0$$

为了消去交叉项  $u_{\xi\eta}$ , let

$$x' = \xi + \eta, y' = \xi - \eta$$

Then

$$u_\xi = u_{x'} \frac{\partial x'}{\partial \xi} + u_{y'} \frac{\partial y'}{\partial \xi} = u_{x'} + u_{y'}, \quad u_\eta = u_{x'} \frac{\partial x'}{\partial \eta} + u_{y'} \frac{\partial y'}{\partial \eta} = u_{x'} - u_{y'}$$

And

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} &= (u_\xi)_\eta = (u_\xi)_{x'} \frac{\partial x'}{\partial \eta} + (u_\xi)_{y'} \frac{\partial y'}{\partial \eta} = (u_\xi)_{x'} - (u_\xi)_{y'} \\ &= (u_{x'x'}) + (u_{x'y'}) - (u_{x'y'}) - (u_{y'y'}) = u_{x'x'} - u_{y'y'} \end{aligned}$$

代入可解得

$$u_{x'x'} - u_{y'y'} + \frac{1}{3y'} u_{y'} = 0, \text{ when } y > 0$$

□

## 2.3 The One-Dimensional Wave Equation

这一节我们将在两种不同的边界条件下, 给出一维波动方程的两种不同解法(特征线法和分离变量法), 并将给出其解的存在唯一性讨论.

### 2.3.1 一维齐次波动方程的特征线法 (上半空间, D'Alembert, 能量不等式)

对于在 上半空间  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  上考虑一般的一维波动方程的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad (2.10)$$

根据线性 PDE 的叠加原理 (Thm A.2.1), 该方程的解可写为如下两个子问题的解的和:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

又根据一维波动方程的齐次性原理 (Thm A.3.1), 事实上只需求解第一个齐次初值问题的解, 在后面我们也将给出有关解的存在唯一性的严谨讨论.

对于一维齐次波动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad (2.11)$$

解的存在唯一性问题, 下面给出定理.

**定理 2.3.1.** [一维齐次波动方程, D'Alembert, 能量不等式].

If  $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ , then for the problem (2.11)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

It has a unique solution  $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi \quad (2.12)$$

which is called the **D'Alembert Formula**.

**注.**  $\forall$  fixed  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ , by **D'Alembert Formula**, 解  $u(x, t)$  在该点处取值

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} [\varphi(x_0 + ct_0) + \varphi(x_0 - ct_0)] + \frac{1}{2c} \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(\xi) d\xi$$

故  $u$  在点  $(x_0, t_0)$  处取值只与  $\varphi$  在  $x_0 - ct_0, x_0 + ct_0$  两点处的取值, 以及  $\psi$  在区间  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  上的取值有关. 基于此, 下面我们给出依赖区间、决定区域、影响区域等概念.

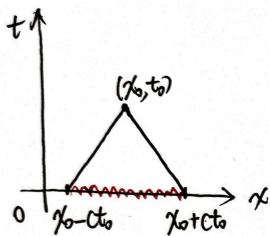


图 2.2: 点  $(x_0, t_0)$  的依赖区间

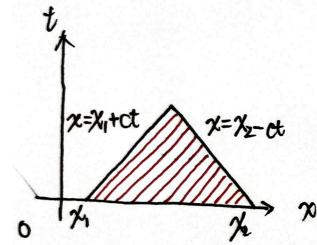


图 2.3: 区间  $[x_1, x_2]$  的决定区域

**定义 2.3.1.** [依赖区间, 决定区域, 影响区域]<sup>5</sup>.

对于初值问题 (2.11), 称  $x$  轴上的区间  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  为点  $(x_0, t_0)$  的依赖区间, 表示解  $u(x, t)$  在点  $(x_0, t_0)$  处取值只与  $\varphi$  在  $x_0 - ct_0, x_0 + ct_0$  两点处的取值, 以及  $\psi$  在区间  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  上的取值有关, 而与其他点上的初始条件无关.

<sup>5</sup>详细论述可参考:《数学物理方程讲义(第二版)》- 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐 - §2.2.3 依赖区间、决定区域和影响区域.

对于  $x$  轴上任一区间  $[x_1, x_2]$ , 直线  $x = x_1 + ct$  与  $x = x_2 - ct$  一起围成一个三角形区域, 解  $u(x, t)$  在此三角形区域中任一点  $(x_0, t_0)$  的依赖区间都完全落在  $[x_1, x_2]$  中, 而与此区间外的初始条件无关, 这个区域称为区间  $[x_1, x_2]$  的决定区域.

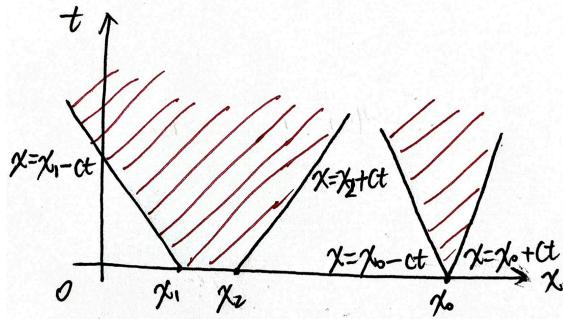


图 2.4: 区间  $[x_1, x_2]$  及点  $x_0$  的影响区域

对于  $x$  轴上任一区间  $[x_1, x_2]$ , 区域

$$E = \{(x, t) \mid x_1 - ct \leq x \leq x_2 + ct, t > 0\}$$

中每一点的依赖区间都与  $[x_1, x_2]$  有交集, 即解  $u(x, t)$  在其中任一点的取值都要受到区间  $[x_1, x_2]$  上某些点处初始条件的影响, 称平面区域  $E$  为区间  $[x_1, x_2]$  的影响区域. 特别地, 当  $x_1 = x_2 = x_0$  时, 我们可以得到一个点  $x_0$  的影响区域, 即定义域中函数值能被  $x_0$  处初始条件影响的范围.

证明.

- 存在性:

[思路: 先证明若有解, 则解满足上述形式; 再将上述  $u$  回代至原问题, 证明它是解].

假设原问题有解. 对于 Hyperbolic Equation

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

其特征方程为

$$(dx)^2 - c^2(dt)^2 = 0$$

得到两族实特征线  $x \pm ct = C$ . 下面进行可逆坐标变换 (合理性可见 (2.8)), 令

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

经过计算, 原波动方程等价于

$$u_{\xi\eta} = 0$$

由此可知  $u$  中不含  $\xi$  与  $\eta$  的交叉项, 即可表示为

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

i.e.

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

对于原初值问题 (2.11) 的边界条件, 可转化为

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ cF'(x) - cG'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

Since  $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ , then

$$F'(x) = \frac{1}{2c}(c\varphi(x) + \psi(x)), \quad G'(x) = \frac{1}{2c}(c\varphi(x) - \psi(x))$$

对  $x$  积分, 结合  $F(x) + G(x) = \varphi(x)$ , 可得

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2c}\left(c\varphi(x) + \int_{x_0}^x \psi(s) ds\right) + \alpha \\ G(x) = \frac{1}{2c}\left(c\varphi(x) - \int_{x_0}^x \psi(s) ds\right) + \beta \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

从而若原问题有解, 则解  $u$  可表达为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x + ct) + G(x - ct) \\ &= \frac{1}{2c}\left[c\varphi(x + ct) + \int_{x_0}^{x+ct} \psi(s) ds\right] + \frac{1}{2c}\left[c\varphi(x - ct) - \int_{x_0}^{x-ct} \psi(s) ds\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)\right] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds \end{aligned}$$

将上述函数  $u(x, t)$  回代至原问题 (2.11), 不难证明其就是原问题的一个解.

- 唯一性: [利用 能量不等式 进行证明].

$\forall$  fixed  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ , 根据 Def 2.3.1, 我们可得到其依赖区间为  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  及该区间的决定区域. 对于  $\forall \tau \in [0, t_0]$ , 定义区域  $K_\tau$  如下

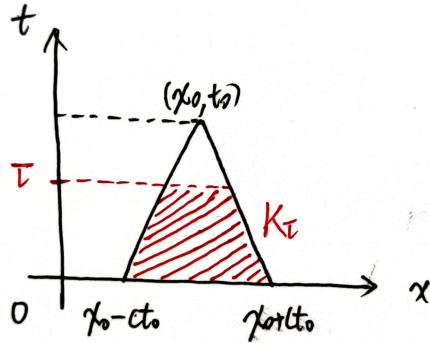


图 2.5: 依赖区间及区域  $K_\tau$  的定义

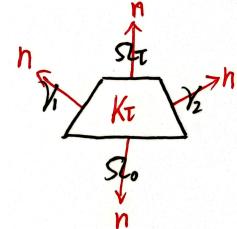


图 2.6: 区域  $K_\tau$  各边记号及法向

经过简单的计算, 可得到各边法向  $\vec{n} = (n_x, n_t)$  为:

$$\begin{cases} \Omega_\tau : n_x = 0, n_t = 1 \\ \Omega_0 : n_x = 0, n_t = -1 \\ \gamma_1 : n_x = \frac{-1}{\sqrt{1+c^2}}, n_t = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \\ \gamma_2 : n_x = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}, n_t = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \end{cases}$$

下面来构造能量不等式:

Since  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  on  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , then

$$\int_{K_\tau} u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = 0$$

Since

$$\begin{cases} u_t \cdot u_{tt} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u_t^2 \\ u_t \cdot u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (u_t \cdot u_x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u_x^2 \end{cases}$$

Hence by **Gauss-Green Theorem (Thm B.4.1)**,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{K_\tau} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [u_t^2 + c^2 u_x^2] - c^2 \frac{\partial}{\partial x} (u_t \cdot u_x) \right\} = \int_{\partial K_\tau} \left\{ \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 u_x^2) \cdot n_t - c^2 u_t u_x \cdot n_x \right\} \\ &= \int_{\Omega_\tau} \frac{1}{2} [u_t^2 + c^2 u_x^2] + \int_{\Omega_0} -\frac{1}{2} [u_t^2 + c^2 u_x^2] + \int_{\gamma_1} \left\{ \frac{1}{2} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \cdot \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - c^2 u_t u_x \cdot \left( \frac{-1}{\sqrt{1+c^2}} \right) \right\} + \\ &\quad \int_{\gamma_2} \left\{ \frac{1}{2} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \cdot \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - c^2 u_t u_x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right\} \end{aligned}$$

对于上述等式, 将  $\Omega_0$  上的积分移至等号另一侧, 等式两边乘 2.

Since  $\Omega_0 \subset \mathbb{R} \times \{t = 0\}$ , then

$$\int_{\Omega_0} [u_t^2 + c^2 u_x^2] = \int_{\Omega_0} [\psi^2 + c^2 \varphi_x^2]$$

At the same time,

$$\int_{\gamma_1} \left\{ \frac{1}{2} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \cdot \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - c^2 u_t u_x \cdot \left( \frac{-1}{\sqrt{1+c^2}} \right) \right\} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \cdot \int_{\gamma_1} (u_t + cu_x)^2$$

Similarly,

$$\int_{\gamma_2} \left\{ \frac{1}{2} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \cdot \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - c^2 u_t u_x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right\} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \cdot \int_{\gamma_2} (u_t - cu_x)^2$$

故进行上述移项操作后, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} [\psi^2 + c^2 \varphi_x^2] &= \int_{\Omega_t} [u_t^2 + c^2 u_x^2] + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \cdot \int_{\gamma_1} (u_t + cu_x)^2 + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \cdot \int_{\gamma_2} (u_t - cu_x)^2 \\ &\geq \int_{\Omega_t} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \end{aligned}$$

i.e.

$$\int_{\Omega_0} [\psi^2 + c^2 \varphi_x^2] \geq \int_{\Omega_t} [u_t^2 + c^2 u_x^2], \quad \forall \tau \in [0, t_0], \quad \forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad (2.13)$$

此即为一维齐次波动方程的能量不等式<sup>6</sup>, 积分  $\int_{\Omega_t} [u_t^2 + c^2 u_x^2]$  称为能量积分, 表示弦振动问题中弦段  $\Omega_t$  在  $t$  时刻的总能量. 下面利用该不等式来证明解的唯一性:

Suppose both  $u_1$  &  $u_2$  are solutions. Then

$$\begin{cases} (u_1 - u_2)_{tt} - c^2 (u_1 - u_2)_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ (u_1 - u_2) \Big|_{t=0} = 0 \\ (u_1 - u_2)_t \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Then by **Energe Inequality**,

$$0 \geq \int_{\Omega_t} (u_1 - u_2)_t^2 + c^2 (u_1 - u_2)_x^2, \quad \forall \tau \in [0, t_0], \quad \forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

Thus

$$(u_1 - u_2)_t \equiv (u_1 - u_2)_x \equiv 0 \text{ on } \mathbb{R} \times [0, \infty)$$

Hence

$$u_1 - u_2 \equiv C \text{ for some } C \in \mathbb{R}$$

Since  $(u_1 - u_2) \Big|_{t=0} = 0$ , then  $C = 0$ . Therefore,  $u_1 = u_2$ .

□

---

<sup>6</sup>对于一般的一维波动方程的能量不等式, 可见附录A - Thm A.4.1.

### 2.3.2 一维波动方程的特征线法 (上半空间)

根据一维齐次波动方程的解 (**Thm 2.3.1**), 可得到齐次波动方程的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi$$

令  $\varphi = 0$ , 得到定解问题 (A.2) 的解为

$$M_\psi = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi$$

从而对于非齐次问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

根据一维波动方程的 **Duhamel 原理** (齐次化原理, **Thm A.3.1**), 得到其解为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t M_{f_\tau}(x, t - \tau) d\tau = \frac{1}{2c} \int_0^t \left( \int_{x-ct}^{x+ct} f(\xi, t - \tau) d\xi \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^t \left( \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau \end{aligned}$$

where  $f_\tau = f(x, \tau)$ . 根据线性 PDE 的叠加原理 (**Thm A.2.1**), 可得到上半空间  $\mathbb{R} \times [0, \infty)$  上一般的一维波动方程的初值问题的解, 即下面给出的定理.

**定理 2.3.2.** [一维波动方程解的存在唯一性, 上半空间, D'Alembert, 能量不等式].

If  $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , then for the Cauchy Problem (2.10)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

It has a unique solution  $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \left( \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau \quad (2.14)$$

which is called the **D'Alembert Formula**.

**注.** • 对于解的存在性, 可根据一维齐次波动方程解的存在唯一性 (Thm 2.3.1) 与线性 PDE 的叠加原理 (Thm A.2.1), 得到解的形式的推导过程. 再代入原问题证明其是原方程的解.

- 对于解的唯一性, 可根据一维波动方程的能量不等式 (Thm A.4.1), 类比一维齐次波动方程解的存在唯一性 (Thm 2.3.1) 中唯一性的证明得到.

### 2.3.3 一维波动方程的特征线法(半无界问题)

对于半无界区域  $[0, \infty) \times [0, \infty)$  上考虑一般的一维波动方程的初值问题, 对于  $x = 0$  处所给的初值条件, 一般有以下两种:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = g(t) \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u_x|_{x=0} = g(t) \end{cases}$$

上述两个问题分别称为第一类边界问题 和第二类边界问题. 对于这两种问题的一般形式, 分别作变换

$$v(x, t) = u(x, t) - g(t) \quad , \quad v(x, t) = u(x, t) - x \cdot g(t)$$

可将各自在  $x = 0$  处的边值条件变为 0, 即  $u|_{x=0} = 0$  及  $u_x|_{x=0} = 0$ . 故只需考虑如下齐次边界问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u_x|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

对于一维实轴  $\mathbb{R}$  上的光滑函数  $h(x)$ , 若  $h$  为奇函数, 则有  $h|_{x=0} = 0$ ; 若  $h$  为偶函数, 则  $h_x|_{x=0} = 0$ . 基于该想法, 我们对上述两种边界问题, 分别采用奇延拓 和偶延拓 的方法进行求解, 即将  $f, \varphi, \psi$  延拓至整个上半空间 ( $f$  为  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ,  $\varphi, \psi$  为  $\mathbb{R}$ ) 上, 使得  $f, \varphi, \psi$  均关于  $x$  称为奇(偶) 函数.

**定理 2.3.3.** [一维波动方程解的存在唯一性, 半无界问题, D'Alembert, 第一类边界].

If  $\varphi \in C^2[0, \infty)$ ,  $\psi \in C^1[0, \infty]$ ,  $f \in C^1([0, \infty) \times [0, \infty))$ , then for the Cauchy Problem (2.10)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x > 0, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

此时可对  $f, \varphi, \psi$  进行奇延拓:

$$\bar{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x \geq 0, t \geq 0 \\ -f(-x, t), & x < 0, t \geq 0 \end{cases}, \quad \bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad \bar{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Then for the new Cauchy Problem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \bar{f}(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \bar{\varphi}(x) \\ u_t|_{t=0} = \bar{\psi}(x) \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

It has a unique solution  $\bar{u} \in C^2(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ :

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{2} [\bar{\varphi}(x + ct) + \bar{\varphi}(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{\psi}(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \left( \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \bar{f}(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau \quad (2.15)$$

which is called the **D'Alembert Formula**. In response to the origin problem, it has the unique solution  $u \in C^2((0, \infty) \times (0, \infty)) \cap C^1([0, \infty) \times [0, \infty))$ , which can be represented by:

When  $x > ct$ ,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \left( \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau$$

When  $x < ct$ ,

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) - \varphi(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{2c} \left[ \int_{t-\frac{x}{c}}^t \left( \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau + \int_0^{t-\frac{x}{c}} \left( \int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau \right] \end{aligned}$$

**注.** • 解的存在唯一性可类似 **Thm 2.3.2** 得到, 其中唯一性可在半无界区域上利用能量不等式证明<sup>7</sup>.

- 对于第二类边界问题, 将  $f, \varphi, \psi$  进行偶延拓,

$$\bar{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x \geq 0, t \geq 0 \\ f(-x, t), & x < 0, t \geq 0 \end{cases}, \quad \bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad \bar{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ \psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

可类似得到解的存在唯一性.

---

<sup>7</sup>详细论述可参考: 《数学物理方程讲义(第二版)》 – 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐 – §2.2.5 半无界问题.

### 2.3.4 Sturm-Liouville Problem

这一小节我们将对于二阶常微分方程

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0, l)$$

的 **Sturm-Liouville** 问题给出相关结论. 这是下一节分离变量法的理论基础. 首先给出一些基础概念的定义.

**定义 2.3.2.** 对于 ODE 齐次边值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0, l) \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, & , \quad \alpha_i, \beta_i \geq 0, \quad \alpha_i + \beta_i \neq 0, \quad \forall i = 1, 2 \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

使其具有非零解的  $\lambda$  称为该边值问题的 特征值, 对应的非零解  $X(x)$  称为这个特征值对应的 特征函数. 而寻求方程 (2.16) 的所有特征值和特征函数的问题称为 Sturm-Liouville 问题 或 特征值问题.

下面我们不加证明地给出有关二阶 ODE 的 **Sturm-Liouville** 问题的相关结论.

**定理 2.3.4. [Sturm-Liouville]<sup>8</sup>.**

考虑  $[0, l]$  上的 Sturm-Liouville 问题 (2.16)

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0, l) \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0 & , \quad \alpha_i, \beta_i \geq 0, \quad \alpha_i + \beta_i \neq 0, \quad \forall i = 1, 2 \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 \end{cases}$$

其具有如下性质：

(i) 其有可数个非负实特征值, 每个特征值单重, 特别当  $\beta_1 + \beta_2 > 0$  时, 所有特征值均为正数.

(ii) 所有特征值组成一个严格单调递增、以无穷远点为聚点的序列 (无有限聚点):

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

(iii) 对于所有的特征值  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  对应的特征函数  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 其构成了 Hilbert 空间  $L^2[0, l]$  上的一组完备正交系<sup>9</sup>, 即

$$\int_0^l X_k(x) X_l(x) dx = 0, \quad \forall k \neq l$$

且对于  $\forall f \in L^2[0, l]$ ,  $\exists C_n \in \mathbb{R}$ , s. t.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$$

where

$$C_n = \frac{(f, X_n)}{(X_n, X_n)} = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

---

<sup>8</sup>定理的部分证明可参考: 《数学物理方程讲义 (第二版)》 – 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐 – §2.4 定理 4.1.

<sup>9</sup>在《泛函分析讲义》 – 张恭庆、林源渠一书中称为封闭的正交集.

### 2.3.5 一维齐次波动方程的分离变量法(混合问题)

在混合区域  $[0, l] \times [0, \infty)$  上考虑一维齐次波动方程的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in (0, l), t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

我们既可以类似 §2.3 节 Thm 2.3.3, 将  $u$  延拓为整个上半空间的函数, 再利用 D'Alembert 公式 (Thm 2.3.2) 求解 (在 Thm 2.3.5 注解中会讨论); 但也可通过下面介绍的分离变量法进行求解. 且该方法还可推广至热方程 (Heat Equation) 的混合问题等问题的求解中.

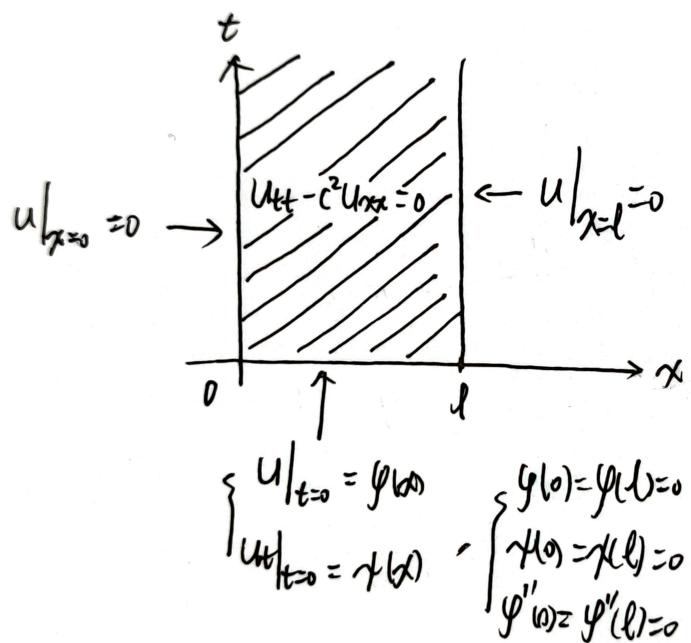


图 2.7: 一维齐次波动方程的混合问题

下面给出分离变量法求解一维齐次波动方程混合问题的解的存在唯一性讨论.

**定理 2.3.5.** [一维齐次波动方程, 混合问题, 分离变量法].

Suppose  $\varphi \in C^3[0, l]$ ,  $\psi \in C^2[0, l]$ , 且  $\varphi(x), \psi(x)$  满足相容性条件:

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi(l) = 0 \\ \psi(0) = \psi(l) = 0 \\ \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0 \end{cases}$$

Then for the homogenous problem (2.17)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (0, l), t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 \end{cases}$$

The formula

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \sin \frac{cn\pi}{l} t + B_n \cos \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (2.18)$$

where

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \\ B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.19)$$

defines a function  $u \in C^2([0, l] \times [0, \infty))$  and gives the unique solution of (2.17) in  $C^2([0, l] \times [0, \infty))$ .

**注.** 事实上, 对于问题(2.17), 我们可以采取与 **Thm 2.3.3** 类似的对称开拓法, 并结合 **D'Alembert** 公式求解. 根据 **Thm 2.3.3**, 此方法关于  $\varphi, \psi$  的光滑性可进一步减弱为

$$\varphi \in C^2[0, l], \quad \psi \in C^1[0, l]$$

对称开拓法即定义周期为  $2l$  的周期奇函数  $\Phi, \Psi$ , 使其分别成为  $\varphi, \psi$  的延拓, 具体为

$$\begin{cases} \Phi(x) = -\Phi(-x), \quad \Phi(x) = \Phi(x + 2l), \quad x \in \mathbb{R} \\ \Phi(x) = \varphi(x), \quad x \in [0, l] \end{cases}, \quad \begin{cases} \Psi(x) = -\Psi(-x), \quad \Psi(x) = \Psi(x + 2l), \quad x \in \mathbb{R} \\ \Psi(x) = \psi(x), \quad x \in [0, l] \end{cases}$$

可以证明, 在  $\varphi \in C^3, \psi \in C^2$  的条件下, 这两种方法得到的  $u$  相等.

证明.

- 存在性: [分离变量法求解过程]

[思路: 先证明若有特解可满足变量分离, 则解满足上述形式; (Step 1: P38 - 40)

再将该特解  $u$  回代至原问题, 证明它是解 (Step 2: P40 - 44)].

**Step 1** . 先证明若有特解可满足变量分离, 则解满足上述形式:

假设非零特解  $u(x, t) \in C^2([0, l] \times [0, \infty))$  具有变量分离形式, i.e.  $\exists X(x), T(t)$ , s. t.

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Since

$$u_{tt} - c^2 u_x x = 0 \quad \text{and} \quad u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0$$

Then

$$XT'' - c^2 X'' T = 0 \quad \text{and} \quad X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0, \quad \forall t > 0$$

i.e.

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T}$$

由于等式左侧仅为  $x$  的函数, 右侧为  $t$  的函数, 因此该等式恒为定值, 记为  $-\lambda$ , 则有

$$T'' + c^2 \lambda T = 0, \quad t > 0$$

$$X'' + \lambda X = 0, \quad x \in (0, l)$$

由于  $u(x, t)$  为非零特解,  $X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0$ , 因此  $X(0) = X(l) = 0$ . 从而  $X$  满足

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0, l) \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

故根据 **Def 2.3.2**, 求解  $X(x)$  即为求解上述 **Sturm-Liouville** 问题. 根据一阶常系数线性 ODE 的求解 (**Thm B.5.1**), 得到上述 ODE 的通解为

$$X(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x$$

结合边界条件  $X(0) = X(l) = 0$ , 得到

$$C_2 = 0, \quad C_1 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

由于  $u \not\equiv 0, X \not\equiv 0$ , 因此  $C_1 \neq 0, \sin \sqrt{\lambda}l = 0$ . 从而该 Sturm-Liouville 问题所有可能的特征值为

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

根据 **Sturm-Liouville 问题的性质 (Thm 2.3.4)**, 结合该方程, 可得到其所有的特征值及对应特征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = C \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad n = 1, 2, \dots$$

通过求解 ODE

$$T'' + c^2 \lambda_n T = 0, \quad t > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

得到

$$T_n(t) = A_n \sin \frac{cn\pi}{l}t + B_n \cos \frac{cn\pi}{l}t, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

即可得到满足方程  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  与边界条件  $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$  的函数  $u_n$

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \sin \frac{cn\pi}{l}t + B_n \cos \frac{cn\pi}{l}t\right) \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Let

$$u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{cn\pi}{l}t + B_n \cos \frac{cn\pi}{l}t\right) \sin \frac{n\pi}{l}x$$

由于我们此时是求形式解, 因此不妨假设求和、求导、极限均可交换次序. 若上述定义的  $u(x, t)$  为所需特解, 则满足问题 (2.17) 的边界条件, 即

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

i.e.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l}x \\ \psi(x) &= u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{l} A_n \sin \frac{n\pi}{l}x \end{aligned}$$

根据 **Sturm-Liouville 问题的性质 (Thm 2.3.4)**, Sturm-Liouville 问题 (2.20) 的所有特征函数  $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2[0, l]$  构成了 Hilbert 空间  $L^2[0, l]$  的一组完备正交系. 又因为  $\varphi \in C^3[0, l], \psi \in C^2[0, l]$  在  $[0, l]$  上连续, 所以  $\varphi, \psi \in L^2[0, l]$ . Thus

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi}{l}x \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l}x \end{aligned}$$

where  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n = \frac{(\varphi, X_n)}{(X_n, X_n)} = \frac{\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$\psi_n = \frac{(\varphi, X_n)}{(X_n, X_n)} = \frac{\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

Take

$$A_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

因此若满足变量分离的特解存在, 则其形式为 (2.18)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \sin \frac{cn\pi}{l} t + B_n \cos \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

## Step 2 . 证明上述定义的 $u(x, t)$ 是原问题的解:

要证明上述定义的  $u(x, t)$  是原问题 (2.17) 的解, 将其代入各条件, 即证

- (1).  $L \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} Lu_n$
- (2).  $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0} u_n, \quad \lim_{x \rightarrow l} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow l} u_n$
- (3).  $\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} u_n$
- (4).  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} u_n$

where  $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . 而满足上述条件, 只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} Du_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D^2 u_n$$

一致收敛. 下面分别进行证明.

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  一致收敛: 注意到  $u_n = X_n T_n$ .

---

根据上述讨论,

$$T_n(x) = \frac{l \cdot \psi_n}{cn\pi} \sin \frac{cn\pi}{l} t + \varphi_n \cos \frac{cn\pi}{l} t$$

根据分部积分公式,

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \left( -\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \right)' dx \\ &= \frac{2}{l} \varphi(x) \cdot \left( -\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \right) \Big|_0^l + \frac{2}{l} \int_0^l \varphi'(x) \cdot \frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx\end{aligned}$$

由于  $\varphi \in C^3[0, l]$ , 因此对  $\varphi_n$  再用两次分部积分公式, 可得

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \frac{2}{n\pi} \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_0^l \varphi'(x) \left( \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} x \right)' dx \\ &= -\frac{2l}{(n\pi)^2} \int_0^l \varphi''(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \\ &= -\frac{2l^2}{(n\pi)^3} \int_0^l \varphi'''(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\ &:= -\frac{2l^2}{(n\pi)^3} a_n\end{aligned}$$

Similarly, 对  $\psi_n$  运用两次分部积分公式, 可得

$$\psi_n = -\frac{2l}{(n\pi)^2} \int_0^l \psi''(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx := -\frac{2l}{(n\pi)^2} b_n$$

Therefore,

$$T_n(t) = -\frac{2l^2}{(n\pi)^3} a_n \cdot \cos \frac{cn\pi}{l} t - \frac{2l^2}{c(n\pi)^3} b_n \cdot \sin \frac{cn\pi}{l} t$$

where

$$\begin{aligned}a_n &= \int_0^l \varphi'''(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx \\ b_n &= \int_0^l \psi''(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx\end{aligned}$$

Since  $\varphi \in C^3[0, l]$ ,  $\psi \in C^2[0, l]$ , then  $\exists M > 0$ , s. t.

$$|\varphi'''|, |\psi''|, |a_n|, |b_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

Hence  $\exists C > 0$  constant, s. t.

$$|T_n(t)| \leq C \cdot \frac{1}{n^3}, \quad \forall t > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Since  $X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x$ , and  $|X_n(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [0, l], \forall n \in \mathbb{N}$ , then

$$|u_n(x, t)| = |T_n(t) \cdot X_n(x)| \leq C \cdot \frac{1}{n^3}, \quad \forall x \in [0, l], t > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Therefore,  $\forall x \in [0, l], t > 0$ ,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) < \infty \text{ 一致收敛}$$

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} Du_n$  一致收敛: 即证

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X'_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) X_n(x) \text{ 一致收敛}$$

Since  $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$ , then  $|X'_n(x)| \leq 1$ ,

$$|T_n(t) \cdot X'_n(x)| \leq |T_n(t)| \leq C \cdot \frac{1}{n^3}, \quad \forall x \in [0, l], t > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

而根据

$$T_n(t) = -\frac{2l^2}{(n\pi)^3} a_n \cdot \cos \frac{cn\pi}{l} t - \frac{2l^2}{c(n\pi)^3} b_n \cdot \sin \frac{cn\pi}{l} t$$

可得到

$$|T'_n(t) \cdot X_n(x)| \leq |T'_n(t)| \leq C \cdot \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in [0, l], t > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X'_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) X_n(x) \text{ 一致收敛}$$

(iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} D^2 u_n$  一致收敛: 即证

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n'(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) X_n'(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n''(x), \text{ 一致收敛}$$

根据前面的讨论, 后两者显然一致收敛. 下面证明  $\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n'(x)$  一致收敛:

Since

$$|T_n'' X_n| \leq C \left( \frac{|a_n|}{n} + \frac{|b_n|}{n} \right)$$

Hence by 比较判别法, it suffices to show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \text{ converges}$$

By Cauchy-Schwarz's Inequality,

$$\sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{n} \leq \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \cdot \left( \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

where  $C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ .

考慮 Hilbert 空間  $(L^2[0, l], (\cdot, \cdot))$ , 其上定义的内积为:

$$(f, g) := \int_0^l f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \forall f, g \in L^2[0, l]$$

Let

$$e_n(x) = \frac{2}{l} \cos \frac{n\pi}{l} x \in L^2[0, l]$$

不难证明  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2[0, l]$  为一组完备的标准正交系.

因为  $\varphi \in C^3[0, l]$ , 所以  $\varphi''' \in C[0, l]$ ,  $\varphi''' \in L^2[0, l]$ . 于是

$$|a_n|^2 = \left( \int_0^l \varphi'''(x) \cdot \cos \frac{n\pi}{l} x dx \right)^2 = \left| \frac{l}{2} (\varphi''', e_n) \right|^2 = \frac{l^2}{4} |(\varphi''', e_n)|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

根据内积空间的 Bessel 不等式,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{l^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi''', e_n)|^2 \leq \frac{l^2}{4} \cdot \|\varphi'''\|_{L^2}^2$$

因为  $|\varphi'''| \leq M$ ,  $\forall x \in [0, l]$ , 所以

$$\|\varphi'''\|_{L^2}^2 = (\varphi''', \varphi''') = \int_0^l |\varphi'''(x)|^2 dx \leq M^2 l \leq \infty$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \frac{l^2}{4} \|\varphi'''\|_{L^2}^2 \leq \frac{M^2 l^3}{4} < \infty \text{ converges}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq C \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ converges}$$

Similarly, we can prove

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n} < \infty \text{ converges}$$

- 唯一性: [能量不等式]

对于  $\forall \tau > 0$ , 定义区域  $K_\tau$  及对应边界如下:

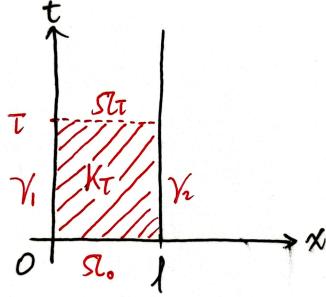


图 2.8: 区域  $K_\tau$  及边界定义

设  $u(x, t)$  为原问题 (2.17) 的解. Then

$$\iint_{K_\tau} u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = 0$$

Since

$$\begin{aligned} u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2) + \frac{c^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_x^2) - c^2 \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c^2 u_x^2) - c^2 \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) \end{aligned}$$

Then by **Gauss-Green Theorem (Thm B.4.1)**,

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{K_\tau} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c^2 u_x^2) - c^2 \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x) \right] \\ &= \int_{\partial K_\tau} \left[ \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 u_x^2) \cdot n_t - c^2 (u_t u_x) \cdot n_x \right] \\ &= \int_{\Omega_0} \left[ -\frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 u_x^2) \right] + \int_{\Omega_\tau} \left[ \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 u_x^2) \right] + \int_{\gamma_1} c^2 u_t u_x - \int_{\gamma_2} c^2 u_t u_x \end{aligned}$$

Since  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ , then  $u_t \Big|_{x=0} = u_t \Big|_{x=l} = 0$ . Thus

$$\int_{\Omega_0} \left[ -\frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 u_x^2) \right] + \int_{\Omega_\tau} \left[ \frac{1}{2} (u_t^2 + c^2 u_x^2) \right] = 0$$

i.e.

$$\int_{\Omega_\tau} (u_t^2 + c^2 u_x^2) = \int_{\Omega_0} (\psi^2 + c^2 \varphi_x^2), \quad \forall \tau > 0$$

Suppose  $u_1$  &  $u_2$  are both solutions of Problem (2.17). Then

$$\begin{cases} (u_1 - u_2)_{tt} - c^2(u_1 - u_2)_{xx} = 0, \quad x \in (0, l), t > 0 \\ (u_1 - u_2)|_{t=0} = 0 \\ (u_1 - u_2)_t|_{t=0} = 0 \\ (u_1 - u_2)(0, t) = (u_1 - u_2)(l, t) = 0 \end{cases}$$

故  $u_1 - u_2$  为上述混合问题的解, 其中  $\varphi = \psi = 0$ . 根据混合问题的能量不等式,

$$\int_{\Omega_t} ((u_1 - u_2)_t^2 + c^2(u_1 - u_2)_x^2) = \int_{\Omega_0} (\psi^2 + c^2\varphi_x^2) = 0, \quad \forall t > 0$$

Thus

$$(u_1 - u_2)_t \equiv (u_1 - u_2)_x \equiv 0 \text{ on } [0, l] \times [0, \infty)$$

Hence

$$u_1 - u_2 \equiv C \text{ for some } C \in \mathbb{R}$$

Since  $(u_1 - u_2)|_{t=0} = 0$ , then  $C = 0$ . Therefore,  $u_1 = u_2$ .

□

### 2.3.6 一般的一维波动方程的分离变量法(混合问题)

对于一般的一维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t), \quad x \in (0, l), t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0, l] \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0, l] \\ (-\alpha_1 u_x + \beta_1 u)|_{x=0} = g(t), \quad t > 0 \\ (\alpha_2 u_x + \beta_2 u)|_{x=l} = h(t), \quad t > 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

若其满足相应的相容性条件, 则解的存在唯一性可类似 **Thm 2.3.5** 得到. 下面给出其具体运用分离变量法求解的步骤:

**Step 0 . Find a function  $W(x, t)$ , s. t.**

$$\begin{cases} -\alpha_1 W_x(0, t) + \beta_1 W(0, t) = g(t) \\ \alpha_2 W_x(l, t) + \beta_2 W(l, t) = h(t) \end{cases}$$

Let  $v = u - W$ , 则可将  $x = 0, x = l$  处边界条件齐次化, i.e.

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x, t) - (W_{tt} - c^2 W_{xx}), \quad x \in (0, l), t > 0 \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - W(x, 0), \quad x \in [0, l] \\ v_t|_{t=0} = \psi(x) - W_t(x, 0), \quad x \in [0, l] \\ (-\alpha_1 v_x + \beta_1 v)|_{x=0} = 0, \quad t > 0 \\ (\alpha_2 v_x + \beta_2 v)|_{x=l} = 0, \quad t > 0 \end{cases}$$

故下列步骤中默认 (2.21) 中  $x = 0, x = l$  处边界条件为  $g = h = 0$ .

### **Step 1 . Sturm-Liouville Problem:**

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & x \in (0, l) \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0 \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 \end{cases}$$

求解出所有的特征值  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  及对应特征函数  $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

### **Step 2 . Expansion:**

根据 **Sturm-Liouville** 问题的性质 (**Thm 2.3.4**),  $\{X_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2[0, l]$  为一组完备正交系.

将  $f, \varphi, \psi$  按  $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$  展开,

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cdot X_k(x) \\ \varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot X_k(x) \\ \psi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cdot X_k(x) \end{aligned}$$

其中  $\varphi_k, \psi_k$  与 **Thm 2.3.5** 中一致,

$$f_k(t) = \frac{\int_0^l f(x, t) \cdot X_k(x) dx}{\int_0^l X_k^2(x) dx}$$

### **Step 3 . Substitution:**

将  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x)$  及上述展开式代入原方程 (2.21), 结合  $X_k'' = -\lambda_k X_k$ , 得到

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} (T_k''(t) + c^2 \lambda_k T_k(t)) \cdot X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cdot X_k(x) \\ \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \cdot X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot X_k(x) \\ \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(0) \cdot X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cdot X_k(x) \end{cases}$$

于是得到有关  $T_k(t)$  的 **ODE 初值问题**:

$$\begin{cases} T_k''(t) + c^2 \lambda_k T_k(t) = f_k(t) \\ T_k(0) = \varphi_k \\ T_k'(0) = \psi_k \end{cases}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

**Step 4 . Solve ODE.** 对每个  $k \in \mathbb{N}$ , 求解上述  $T_k(t)$ , 从而得到

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(x)$$

### 2.3.7 一维波动方程的广义解

对于任意区域上的一维波动方程

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

通过求解特征线, 作变换  $\xi = x + ct$ ,  $\eta = x - ct$ , 原方程转化为  $u_{\xi\eta} = 0$ , 从而解  $u$  必然满足形式

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

通过该式, 下面给出一维波动方程的解的性质.

**命题 2.3.1. [一维波动方程解的性质].**

Suppose  $u(x, t)$  be a solution of the one-dimensional wave equation on any fixed region

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

Then for  $\forall$  定义域内各边与特征线平行的平行四边形  $ABCD$ ,  $A(x_1, t_1)$ ,  $B(x_2, t_2)$ ,  $C(x_3, t_3)$ ,  $D(x_4, t_4)$ ,  $u$  satisfies

$$u(x_1, t_1) + u(x_3, t_3) = u(x_2, t_2) + u(x_4, t_4)$$

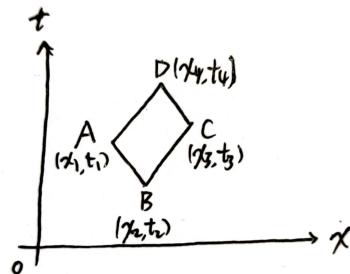


图 2.9: 各边与特征线平行的平行四边形  $ABCD$

证明. 不妨设  $BD \parallel t$  轴, 即  $x_2 = x_4$ . 设  $-\frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2} = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{x_4 - x_1}{t_4 - t_1} = -\frac{x_4 - x_3}{t_4 - t_3} = c$ , 有

$$x_1 - x_2 = -c(t_1 - t_2), \quad x_3 - x_2 = c(t_3 - t_2), \quad x_4 - x_1 = c(t_4 - t_1), \quad x_4 - x_3 = -c(t_4 - t_3)$$

i.e.

$$x_1 + ct_1 = x_2 + ct_2, \quad x_2 - ct_2 = x_3 - ct_3, \quad x_1 - ct_1 = x_4 - ct_4, \quad x_3 + ct_3 = x_4 + ct_4$$

于是

$$\begin{aligned} u(x_1, t_1) + u(x_3, t_3) &= F(x_1 + ct_1) + G(x_1 - ct_1) + F(x_3 + ct_3) + G(x_3 - ct_3) \\ &= F(x_2 + ct_2) + G(x_4 - ct_4) + F(x_4 + ct_4) + G(x_2 - ct_2) = u(x_2, t_2) + u(x_4, t_4) \end{aligned}$$

□

基于上述性质, 我们来给出一维波动方程广义解的定义.

**定义 2.3.3.** Suppose  $u \in C(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ , s. t.

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$$

for any parallel with characteristic curve as its sides. Then we call  $u$  is a **generalized solution** of the one-dimentional wave equation

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

**注.** 一维波动方程的广义解的定义并不依赖于任何的初始条件及定义域, 只要求在上半平面连续, 且对任一各边与特征线平行的平行四边形满足 **Prop 2.3.1**即可. 下面我们会说明, 这样定义的广义解是对前面我们所讨论的**传统解 (classical solution)** 的推广.

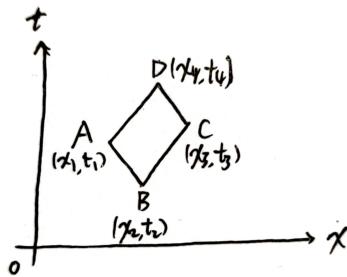


图 2.10: 各边与特征线平行的平行四边形  $ABCD$

下面我们来说明, 这样定义的广义解是对传统解的良好推广.

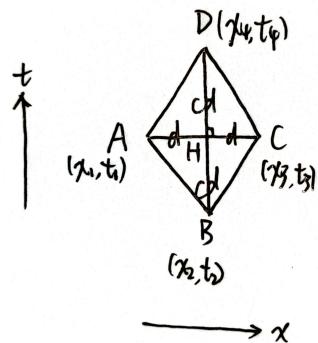


图 2.11: 以  $H$  为中心的菱形  $ABCD$  (各边与特征线平行, **Thm 2.3.6**)

**定理 2.3.6. [一维波动方程的广义解, Well-Defined].**

对于一维波动方程  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$  的广义解, 有如下结论:

- (1) Classical solutions are generalized solutions.
- (2) Suppose  $u$  is a generalized solution and  $u \in C^2$ , then  $u$  is a classical solution.
- (3) With boundary and initial conditions, generalized solution is unique.

**证明. Proof of (2):** It suffices to show  $u_{tt}(H) - c^2 u_{xx}(H) = 0$ ,  $\forall H \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ .

Fix  $\forall H \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ . Take 以  $H$  为中心的菱形  $ABCD$ , s. t.  $AC // x$  轴,  $BD // t$  轴.

$A(x_1, t_1), B(x_2, t_2), C(x_3, t_3), D(x_4, t_4)$ .

Since  $ABCD$  各边平行于特征线, then suppose

$$|HA| = |HC| = cd > 0, |HB| = |HD| = d$$

By Taylor's Formula,

$$u(x_1, t_1) = u(H) + \nabla u(H) \cdot \overrightarrow{HA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{HA}^T \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xt} \\ u_{xt} & u_{tt} \end{pmatrix} \Big|_H \overrightarrow{HA} + o(d^2)$$

同理可得到  $u(x_i, t_i)$ ,  $\forall i = 1 \sim 4$  在  $H$  点的展开式. Then

By  $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$ , with  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$ , we have

$$\overrightarrow{HA}^T \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xt} \\ u_{xt} & u_{tt} \end{pmatrix} \Big|_H \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC}^T \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xt} \\ u_{xt} & u_{tt} \end{pmatrix} \Big|_H \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HB}^T \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xt} \\ u_{xt} & u_{tt} \end{pmatrix} \Big|_H \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HD}^T \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xt} \\ u_{xt} & u_{tt} \end{pmatrix} \Big|_H \overrightarrow{HD} + o(d^2)$$

Since  $AC // x$  轴,  $BD // t$  轴, then

$$\overrightarrow{HA} = (-cd, 0), \overrightarrow{HC} = (cd, 0), \overrightarrow{HB} = (0, -d), \overrightarrow{HD} = (0, d)$$

代入上式, 得到

$$2d^2 u_{tt}(H) = 2c^2 d^2 u_{xx}(H) + o(d^2)$$

i.e.

$$u_{tt}(H) - c^2 u_{xx}(H) = \frac{o(d^2)}{d^2}$$

Letting  $d \rightarrow 0^+$ , we have proved  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ . □

# 第三章 The Laplace Equation

这一章我们将来讨论 **Laplace Equation**, 求出其基本解, 给出(下)调和函数的性质、球上的 Possion 公式, 并最终得出 Dirichlet 问题的解的存在唯一性.

对于 **Laplace Equation** 的初值问题, 常见的有两种, **Dirichlet & Newmann Problem**, i.e.

$$\text{Dirichlet: } \begin{cases} \Delta u = f \text{ on } \Omega \\ u = g \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{Newmann: } \begin{cases} \Delta u = f \text{ on } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} = g \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

## 3.1 Dirichlet & Newmann Problem 解的唯一性

这一节我们将利用 **Green 恒等式** 来证明 Dirichlet & Newmann Problem 解的唯一性, 并且我们将会在后续利用极值原理给出更一般的证明.

首先来回顾 **Green's Identities (Thm B.4.3)**.

**命题 3.1.1. [Green's Identities].**

For  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ,  $\partial\Omega \in C^1$ ,

$$(1) \int_{\Omega} v \Delta u = - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \gamma}$$
$$(2) \int_{\Omega} v \Delta u - \int_{\Omega} u \Delta v = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \gamma} - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \gamma}$$

下面我们来证明 Dirichlet & Newmann Problem 解的唯一性.

**命题 3.1.2. [Dirichlet & Newmann Problem 解的唯一性].**

对于 Dirichlet & Newmann Problem,

$$\text{Dirichlet: } \begin{cases} \Delta u = f \text{ on } \Omega \\ u = g \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{Newmann: } \begin{cases} \Delta u = f \text{ on } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} = g \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

若存在解  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , 则该解唯一.

**注.** 事实上, 后续我们将用极值原理证明更一般的解的唯一性, 即 Dirichlet Problem 在空间  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  的解若存在则唯一.

证明. 根据 Green's Identities (Prop 3.1.1 (1)), 当  $\Delta u = 0, v = u$  时,

$$-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i} u)^2 + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \gamma} = 0$$

下面证明 Dirichlet Problem 在空间  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  中的解若存在则唯一:

Assume  $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  be solutions of Dirichlet Problem, then

$$\begin{cases} \Delta(u_1 - u_2) = 0 \text{ on } \Omega \\ u_1 - u_2 = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

将  $u_1 - u_2$  代入上述 Green's Identity 变式中, 得到

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\partial_{x_i}(u_1 - u_2))^2 = 0$$

Hence  $\nabla(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 \equiv C$  on  $\Omega$ .

又因为  $u_1 - u_2 = 0$  on  $\partial\Omega$ ,  $u_1, u_2 \in C^1(\bar{\Omega})$ , 所以

$$u_1 = u_2$$

Similarly 可证明 Newmann Problem 在相差常数意义下解唯一. □

事实上, 后续我们将说明,

- Dirichlet Problem 中的  $f, g$  独立, 即

对于  $\forall f \in C^2(\Omega), g \in C(\partial\Omega)$ , Dirichlet Problem 均有解 (且在  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  中唯一).

- 而对于 Newmann Problem,  $f, g$  需要满足条件 (必要性可由 **Green's Identities (Prop 3.1.1 (1))** 得到):

$$\int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} g$$

实际上, 若  $\forall f \in C^2(\Omega), g \in C(\partial\Omega)$  满足上式, Newmann Problem 有解, 即为充要条件.

## 3.2 基本解, Green 恒等式变式, 调和函数均解析

### 3.2.1 基本解 (With Spherical Symmetry), Green 恒等式变式

我们首先来求出 Laplace Equation

$$\Delta u = 0$$

的满足径向对称 (radial / spherical symmetry) 的基本解<sup>1</sup>, 设  $v(x)$  为上述基本解, 即

$$\Delta v = \delta(x) \quad \text{and} \quad v(x) = f(|x|) = f(r)$$

首先对于径向对称性, 根据  $\Delta v = 0$  on  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  且  $v(x) = f(r)$ , 可解出<sup>2</sup>

$$v(x) = \begin{cases} C_1 \ln r, & n = 2 \\ C_2 r^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}, \quad \text{where } r = |x|$$

下面来确定系数  $C_1, C_2$ :

由于  $\Delta v = \delta(x)$ , 因此 for  $\forall u \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $\forall \xi \in \Omega$ , s. t.

$$u(\xi) = \int_{\Omega} u(x) \Delta v(x - \xi) dx$$

根据上述讨论, 求出的  $v, v(x - \xi)$  在  $\xi$  处无定义, 因此在区域  $\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi)$  上, 运用 **Green's Identity (Prop 3.1.1 (2))**,

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi)} \Delta u(x) \cdot v(x - \xi) - \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi)} u(x) \Delta v(x - \xi) = \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi))} \frac{\partial u(x)}{\partial \gamma} v(x - \xi) - \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi))} u(x) \frac{\partial v(x - \xi)}{\partial \gamma}$$

Since  $\Delta v(x - \xi) = 0$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$ , then  $\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi)} u(x) \Delta v(x - \xi) = 0$ , i.e.

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi)} \Delta u(x) \cdot v(x - \xi) = \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi))} \frac{\partial u(x)}{\partial \gamma} v(x - \xi) - \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi))} u(x) \frac{\partial v(x - \xi)}{\partial \gamma}$$

下面逐项讨论, 当  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  后的取值:

---

<sup>1</sup>有关广义函数、基本解等详细内容可以参考:

《数学物理方程讲义 (第二版)》 – 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐 P131-146 §3.1.3 - 3.1.4.

<sup>2</sup>具体过程可参考: 《Partial Differential Equations》 – Lawrence C. Evans P21-22 §2.2.1.

$$1. \underline{\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi)} \Delta u \cdot v;}$$

由于  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , 因此  $\Delta u \in C(\overline{\Omega})$ . Thus  $\exists M > 0$ , s. t.

$$|\Delta u| \leq M \text{ on } \overline{\Omega}$$

- For  $n = 2$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_\varepsilon(\xi)} \Delta u \cdot v \right| &\leq M \cdot \int_{B_\varepsilon(\xi)} |v| dx dy = M \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon |C_1 \ln r| \cdot r dr d\theta \\ &= 2\pi M |C_1| \cdot \int_0^\varepsilon |\ln r| \cdot r dr \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

- For  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_\varepsilon(\xi)} \Delta u(x) \cdot v(x - \xi) \right| &\leq M \cdot \int_{B_\varepsilon(\xi)} |v(x - \xi)| dx \\ &\leq M \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\varepsilon |C_2 r^{2-n}| \cdot r^{n-1} \sin^{n-2} \vartheta_1 \cdots \sin \vartheta_{n-2} dr d\vartheta_1 \cdots d\vartheta_{n-1} \\ &\leq (2\pi)^{n-1} M |C_2| \cdot \int_0^\varepsilon r dr \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Therefore,

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi)} \Delta u \cdot v \rightarrow \int_{\Omega} \Delta u \cdot v \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

$$2. \underline{\int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi))} \frac{\partial u(x)}{\partial \gamma} v(x - \xi);}$$

$$\int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi))} \frac{\partial u(x)}{\partial \gamma} v(x - \xi) = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \gamma} v - \int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} \frac{\partial u}{\partial \gamma} v$$

Since  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ , then  $\frac{\partial u}{\partial \gamma} \in C^1(\overline{\Omega})$  and  $\exists M > 0$ , s. t.

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right| \leq M \text{ on } \overline{\Omega}$$

Thus

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} \frac{\partial u}{\partial \gamma} v \right| \leq M \cdot \int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} |v(x - \xi)| = \begin{cases} M |C_1| \cdot 2\pi \varepsilon |\ln \varepsilon|, & n = 2 \\ M |C_2| \cdot w_n \varepsilon^{n-1} \cdot \varepsilon^{2-n} = M |C_2| \cdot w_n \varepsilon, & n \geq 3 \end{cases} \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

Hence

$$\int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi))} \frac{\partial u(x)}{\partial \gamma} v(x - \xi) \rightarrow \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \gamma} v \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

3.  $\int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi))} u(x) \frac{\partial v(x - \xi)}{\partial \gamma}:$

$$\int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi))} u(x) \frac{\partial v(x - \xi)}{\partial \gamma} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \gamma} - \int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u \frac{\partial v}{\partial \gamma}$$

- For  $n = 2$ . 由于  $\gamma$  为球面  $\partial B_\varepsilon(\xi)$  的单位外法向, 而  $v$  径向对称, 因此

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u \frac{\partial v}{\partial \gamma} &= \int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u \frac{dv}{dr} = \int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u \cdot \frac{C_1}{\varepsilon} \\ &= 2\pi C_1 \cdot \oint_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u(x) dx \rightarrow 2\pi C_1 \cdot u(\xi) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

- For  $n \geq 3$ . Similarly,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u \frac{\partial v}{\partial \gamma} &= \int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u \frac{dv}{dr} = \int_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u \cdot C_2(2-n)\varepsilon^{1-n} \\ &= (2-n)w_n C_2 \cdot \oint_{\partial B_\varepsilon(\xi)} u(x) dx \rightarrow (2-n)w_n C_2 \cdot u(\xi) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Therefore, for the formula

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi)} \Delta u(x) \cdot v(x - \xi) = \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi))} \frac{\partial u(x)}{\partial \gamma} v(x - \xi) - \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(\xi))} u(x) \frac{\partial v(x - \xi)}{\partial \gamma}$$

Letting  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , we have

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot v(x - \xi) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \gamma} v - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \gamma} + C \cdot u(\xi) \quad (3.1)$$

where  $C = \begin{cases} 2\pi C_1, & n = 2 \\ (2-n)w_n C_2, & n \geq 3 \end{cases}$ . 根据 **Green's Identity (Prop 3.1.1 (2))**, 可得

$$\begin{aligned} C \cdot u(\xi) &= \int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot v(x - \xi) - \left( \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \gamma} v - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \gamma} \right) \\ &= \int_{\Omega} u(x) \cdot \Delta v(x - \xi) \\ &= u(\xi), \text{ since } v = \delta(x) \text{ is a fundamental solution} \end{aligned}$$

Therefore,  $C = 1$ , i.e.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2\pi} \\ C_2 = \frac{1}{w_n(2-n)} \end{cases}$$

至此, 我们求出了 **Laplace Equation** 满足径向对称的基本解, 下面将其写为定义.

**定义 3.2.1.** The function

$$\psi(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln r, & n = 2 \\ \frac{r^{2-n}}{(2-n)w_n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

被称为 Laplace 方程的基本解, 其中  $w_n$  表示  $\mathbb{R}^n$  中单位球面的面积, 在  $\mathbb{R}^n$  中  $|B_1| = \frac{w_n}{n}$ .

在后面我们记

$$K(x, \xi) := \psi(|x - \xi|)$$

则根据前文讨论 (3.1) 式, 我们可以得到 **Green's Identity (Prop 3.1.1 (2))** 的一条变式, i.e.

$\forall u \in C^2(\overline{\Omega})$  and  $\xi \in \Omega$ ,

$$u(\xi) = \int_{\Omega} K(x, \xi) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial n_x} u(x) - \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} K(x, \xi) \right) dS_x \quad (3.2)$$

### 3.2.2 调和函数均解析

利用 **Def 3.2.1 (3.2)** 式, 我们可以证明  $C^2$  的调和函数均解析. 下面给出命题.

**命题 3.2.1. [ $C^2$  调和函数均解析].**

**Suppose  $u \in C^2(\Omega)$  and  $\Delta u = 0$  on  $\Omega$  (harmonic), then  $u$  is analytic.**

证明. 详情可参考:

《Partial Differential Equations》 – Lawrence C. Evans P31 §2.2.3 Theorem 10.

□

### 3.3 调和函数的平均值等式, 任一 $C^2$ 函数可由基本解表示

#### 3.3.1 调和函数的平均值等式 (球面 & 球体)

下面给出调和函数的平均值等式.

**命题 3.3.1.** [调和函数平均值等式 (球面)].

Suppose  $u \in C^2(\Omega)$  and  $\Delta u = 0$  on  $\Omega$ . Then

$$u(y) = \oint_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_x = \frac{1}{|\partial B_\rho|} \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_x, \quad \forall B_\rho(y) \subset \Omega$$

证明. 先证明一个 Lemma.

**引理 3.3.1. [Green 恒等式变式的调整].**

The  $K(x, \xi)$  in **Def 3.2.1** 式 (3.2) can be replaced by  $K - c$ ,  $\forall c \in \mathbb{R}$ , i.e.  $\forall u \in C^2(\overline{\Omega})$  and  $\xi \in \Omega$ ,

$$u(\xi) = \int_{\Omega} (K(x, \xi) - c) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial(K(x, \xi) - c)}{\partial n_x} u(x) - \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} (K(x, \xi) - c) \right) dS_x$$

证明. 将右式各项展开后运用 **Gauss-Green 公式 (Cor B.4.3 (i))** 即可得证. □

下面证明原命题:

根据上述 **Lemma 3.3.1**, for  $u \in C^2(\Omega)$  and  $\Delta u = 0$  on  $\Omega$ ,

$$u(y) = \int_{\partial B_\rho(y)} \left[ \frac{\partial K}{\partial n_x} u - \frac{\partial u}{\partial n_x} (K - c) \right] dS_x, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad \forall B_\rho(y) \subset \Omega$$

Fix  $\rho > 0$ . Take  $c = \psi(\rho) = K(x, y)$  constant in  $\partial B_\rho(y)$ , then

$$u(y) = \int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial K(x, y)}{\partial n_x} u(x) dS_x$$

由于  $K(x, y) = \psi(|x - y|)$  是径向的, 和  $n_x$  为单位外法向, 因此

$$\frac{\partial K(x, y)}{\partial n_x} \Big|_{x \in \partial B_\rho(y)} = \frac{d\psi(r)}{dr} \Big|_{r=\rho} = \frac{1}{|\partial B_\rho|}$$

Therefore,

$$u(y) = \frac{1}{|\partial B_\rho|} \cdot \int_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_x = \oint_{\partial B_\rho(y)} u(x) dS_x, \quad \forall B_\rho(y) \subset \Omega$$

□

由球面上的平均值等式, 可以容易得到球体上的平均值等式.

**推论 3.3.2.** [调和函数平均值等式 (球体)].

Suppose  $u \in C^2(\Omega)$  and  $\Delta u = 0$  on  $\Omega$ . Then

$$u(y) = \fint_{B_\rho(y)} u(x) dS_x = \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho(y)} u(x) dS_x, \quad \forall B_\rho(y) \subset \Omega$$

证明. 由 **Prop 3.3.1** 结论经积分后可证. □

### 3.3.2 任一 $C^2$ 函数可由基本解表示 (Laplace 算子作用后的形式)

这一小节我们将说明, 对于任意的  $C^2$  function, 都可以通过基本解表示为 Laplace 算子作用在一个函数上的形式. 并且将说明, 通过这一命题, 可将所有一般形式的 **Dirichlet Problem** 转化为调和函数的初值问题.

首先给出一个函数空间的记号.

$$C_0^k(\Omega) := \left\{ u \in C^k(\Omega) \mid u \Big|_{\partial\Omega} = u^1 \Big|_{\partial\Omega} = \cdots = u^{(k-1)} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

下面说明任一  $C^2$  函数可由基本解表示.

**命题 3.3.2.** [任一  $C^2$  函数可由基本解表示 (Laplace 算子作用后的形式)].

Suppose  $w \in C^2(\bar{\Omega})$ . Then

$$w(\xi) = \Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot w(x) dx, \quad \forall \xi \in \Omega$$

**注.** 事实上, 此命题可以将一般的 Dirichlet Problem 转化为齐次形式, 即调和函数的初值问题. 具体来说, 对于 Dirichlet Problem,  $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ ,

$$\begin{cases} \Delta u = \varphi \text{ on } \Omega \\ u = f \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

记  $\psi(\xi) = \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot \varphi(x) dx$ , 则根据该命题,  $\varphi = \Delta\psi$ , i.e.

$$\begin{cases} \Delta(u - \psi) = \varphi - \Delta\psi = 0 \text{ on } \Omega \\ u - \psi = f - \psi \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

这样我们就将一般的 Dirichlet Problem 转化为了齐次形式.

**证明.** 下面分两步进行证明:

1. 先对更强的条件进行证明: Suppose  $w \in C_0^2(\bar{\Omega})$ .

Let  $\tilde{w}$  为  $w$  的零延拓, then

$$\begin{aligned}
\Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot w(x) dx &= \Delta_\xi \int_{\mathbb{R}^n} K(x, \xi) \cdot \tilde{w}(x) dx \\
&= \Delta_\xi \int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x - xi|) \cdot \tilde{w}(x) dx \\
&= \Delta_\xi \int_{\mathbb{R}^n} \psi(|y|) \cdot \tilde{w}(y + \xi) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(|y|) \cdot \Delta_\xi \tilde{w}(y + \xi) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(|y|) \cdot \Delta_y \tilde{w}(y + \xi) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x - y|) \cdot \Delta_y \tilde{w}(y) dy = \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot \Delta_x w(x) dx = w(\xi)
\end{aligned}$$

(运算的合理性可由逆向得到)

2. 现证一般情况: Suppose  $w \in C^2(\overline{\Omega})$ . For  $\forall \xi \in \Omega$ ,  $\forall \delta > 0$ , 记 Cut off function:

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \|x - \xi\| \leq \frac{\delta}{2} \\ ke^{\frac{4}{3} - \frac{\delta^2}{\delta^2 - \|x - \xi\|^2}}, & \frac{\delta}{2} < \|x - \xi\| < \delta \\ 0, & \|x - \xi\| \geq \delta \end{cases}$$

Take  $k \in \mathbb{R}$ , s. t.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \zeta(x) dx = 1$$

Then  $\zeta(x) \in C_c^\infty(B_\delta(\xi))$  and  $\zeta(x) = 1$ ,  $\forall x \in B_{\frac{\delta}{2}}(\xi)$ . Hence

$$w(x) = \zeta(x) \cdot w(x) + (1 - \zeta(x)) \cdot w(x)$$

i.e.

$$\Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot [\zeta w + (1 - \zeta)w] dx = \Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot (\zeta w) dx + \Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot [(1 - \zeta)w] dx$$

Since  $(1 - \zeta(x))w(x) = 0$  in  $B_{\frac{\delta}{2}}(\xi)$  且  $K$  为基本解, then

$$\begin{aligned}
&\Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot [\zeta w + (1 - \zeta)w] dx \\
&= \Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot (\zeta w) dx + \Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot [(1 - \zeta)w] dx
\end{aligned}$$

下面分为两项来讨论.

- 对于第一项, 由于  $\zeta w \in C_0^2(\overline{\Omega})$ , 因此根据第一步的讨论,

$$\Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot (\zeta w) = \zeta(\xi) \cdot w(\xi) = w(\xi)$$

- 对于第二项, 由于  $(1 - \zeta)w \equiv 0$  on  $B_{\frac{\delta}{2}}(\xi)$ , 因此

$$\begin{aligned} \Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot [(1 - \zeta)w] &= \Delta_\xi \int_{\Omega \setminus B_{\frac{\delta}{2}}(\xi)} K(x, \xi) \cdot [(1 - \zeta)w] \\ &= \int_{\Omega \setminus B_{\frac{\delta}{2}}(\xi)} \Delta_\xi K(x, \xi) \cdot [(1 - \zeta)w] \end{aligned}$$

综上,

$$\Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot w(x) dx = w(\xi) + \int_{\Omega \setminus B_{\frac{\delta}{2}}(\xi)} \Delta_\xi K(x, \xi) \cdot [(1 - \zeta)w]$$

由于  $K(x, \xi)$  为 Laplace 方程基本解, 因此 Letting  $\delta \rightarrow 0^+$ , 可得

$$\Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot w(x) dx = w(\xi) + (1 - \zeta(\xi)) \cdot w(\xi) = w(\xi)$$

□

## 3.4 下调和函数的性质

在这一节我们将来讨论下调和函数的性质, 包括均值不等式(球面、球体), 极值原理和强极值原理, 并且会利用极值原理给出 **Dirichlet** 问题解的唯一性的更一般的证明.

在这一节, 我们先粗略地将 下调和函数 定义为满足  $\Delta u \geq 0$  的函数, 后续我们会重新给个更广泛的规定.

### 3.4.1 均值不等式(球面)

根据调和函数平均值等式 (**Prop 3.3.1**), 调和函数等于其球面积分平均. 而对于下调和函数, 其有对应的不等式.

**命题 3.4.1.** [下调和函数均值不等式(球面)].

Suppose  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , then

$$\Delta u \geq 0 \Rightarrow u(\xi) \leq \int_{\partial B_r(\xi)} u(x) dS_x, \quad \forall B_r(\xi) \subset \Omega$$

**注.** 其对偶命题(上调和函数)也成立, 即

$$\Delta u \leq 0 \Rightarrow u(\xi) \geq \int_{\partial B_r(\xi)} u(x) dS_x, \quad \forall B_r(\xi) \subset \Omega$$

证明. 根据 **Lemma 3.3.1**, fix  $B_r(\xi) \subset \Omega$ . Then for  $\forall c \in \mathbb{R}$

$$u(\xi) = \int_{B_r(\xi)} (K(x, \xi) - c) \Delta u(x) dx + \int_{\partial B_r(\xi)} \left( \frac{\partial(K(x, \xi) - c)}{\partial n_x} u(x) - \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} (K(x, \xi) - c) \right) dS_x$$

Take  $c = \psi(r) \in \mathbb{R}$ . 由于  $\psi(r)$  关于  $r$  递增, 因此  $K(x, \xi) - \psi(r) \leq 0, \forall x \in B_r(\xi)$ . 于是

$$u(\xi) \leq \int_{\partial B_r(\xi)} \left( \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial n_x} u(x) - \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} (K(x, \xi) - \psi(r)) \right) dS_x$$

由于在  $\partial B_r(\xi)$  上,  $K(x, \xi) = \psi(|x - \xi|) = \psi(r)$ , 且

$$\left. \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial n_x} \right|_{\partial B_r(\xi)} = \left. \frac{d\psi(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=r} = \frac{1}{|\partial B_r|}$$

因此

$$u(\xi) \leq \int_{\partial B_r(\xi)} \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial n_x} u(x) dS_x = \int_{\partial B_r(\xi)} u(x) dS_x, \quad \forall B_r(\xi) \subset \Omega$$

□

### 3.4.2 均值不等式 (球体)

类似地, 调和函数等于球体积分平均 (**Cor 3.3.2**), 而下调和函数也有对应不等式.

**推论 3.4.1.** [下调和函数均值不等式 (球体)].

Suppose  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , then

$$\Delta u \geq 0 \Rightarrow u(\xi) \leq \fint_{B_r(\xi)} u(x) dx, \quad \forall B_r(\xi) \subset \Omega$$

**注.** 其对偶命题 (上调和函数) 也成立, 即

$$\Delta u \leq 0 \Rightarrow u(\xi) \geq \fint_{B_r(\xi)} u(x) dx, \quad \forall B_r(\xi) \subset \Omega$$

证明. 根据下调和函数球面上的均值不等式 (**Prop 3.4.1**), for  $\forall B_r(\xi) \subset \Omega$ ,

$$u(\xi) \cdot |\partial B_\rho(\xi)| \leq \int_{\partial B_\rho(\xi)} u(x) dS_x, \quad \forall \rho \leq r$$

不等式两侧对  $\rho$  从 0 到  $r$  积分,

$$\int_0^r u(\xi) \cdot |\partial B_\rho(\xi)| d\rho \leq \int_0^r \left( \int_{\partial B_\rho(\xi)} u(x) dS_x \right) d\rho = \int_{B_r(\xi)} u(x) dx$$

i.e.

$$u(\xi) \cdot \int_0^r w_n \cdot \rho^{n-1} d\rho \leq \int_{B_r(\xi)} u(x) dx$$

Since

$$\int_0^r w_n \cdot \rho^{n-1} d\rho = \frac{w_n}{n} r^{n-1} = |B_r|, \quad \text{where } B_r \subset \mathbb{R}^n$$

Then

$$u(\xi) \leq \fint_{B_r(\xi)} u(x) dx$$

□

### 3.4.3 极值原理 (The Maximum Principle)

下面我们来给出极值原理, 它告诉了我们下调和函数的最大值在边界处取到.

**定理 3.4.2. [极值原理 (The Maximum Principle)].**

Suppose  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  bounded,  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  and  $\Delta u \geq 0$  on  $\Omega$ . Then

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

证明. 下面分两步来证明:

1. Suppose  $\Delta u > 0$  on  $\Omega$ . 下面证明比原结论更强的结论, 即  $u$  最大值只能在  $\partial\Omega$  上取到:

反证法. Assume

$$M = \max_{\bar{\Omega}} u = u(x_0), \text{ where } x_0 \in \Omega$$

Then  $u$  在  $x_0$  点的 Hessian 矩阵非正定, i.e.

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x_0} \leq 0$$

由于  $u$  的 Hessian 矩阵为对称阵, 因此其可正交对角化. 而矩阵非负定  $\Rightarrow$  特征值满足

$$\lambda_i \leq 0, \forall i = 1 \sim n$$

Thus

$$\Delta u(x_0) = \operatorname{tr} \left( \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x_0} \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 0$$

这与  $\Delta u > 0$  on  $\Omega$  矛盾. 故  $u$  的最大值只能在边界  $\partial\Omega$  上取到.

2. 下面证明原命题. Suppose  $\Delta u \geq 0$  on  $\Omega$ . Let

$$u_\varepsilon := u + \varepsilon \|x\|^2, \forall \varepsilon > 0$$

由于  $\Delta(\|x\|^2) = 2n$ , where  $n$  is the dimension of the space  $\mathbb{R}^n \ni x$ , 因此

$$\Delta u_\varepsilon = \Delta(u + \varepsilon \|x\|^2) = \Delta u + 2\varepsilon n > 0 \text{ on } \Omega$$

根据第一步中的讨论,

$$\max_{\bar{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

根据  $\max$  函数的连续性, Letting  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , we have

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

□

类似地不难得到其对偶结论, 即上调和函数最小值在边界处取到.

**推论 3.4.3.** [上调和函数极值原理].

Suppose  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  bounded,  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  and  $\Delta u \leq 0$  on  $\Omega$ . Then

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$$

**注.** 事实上, 结合 **Thm 3.4.2** 及 **Cor 3.4.3**, 我们可以得到调和函数的极值原理, 即

调和函数的极大值 & 极小值均在边界上取到.

### 3.4.4 极值原理的应用——再论 Dirichlet Problem 解的唯一性

在 §3.1 节我们利用 **Green's Identities (Prop 3.1.1)** 证明了 **Dirichlet Problem** 在空间  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  上解的唯一性 (**Prop 3.1.2**). 在这一小节我们将运用极值原理 (**3.4.2**), 给出其在更一般的空间  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  上解的唯一性.

**命题 3.4.2.** [Dirichlet Problem 在空间  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  上解的唯一性].

对于 Dirichlet Problem,

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ on } \Omega \\ u = g \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

若存在解  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , 则该解唯一.

证明. Suppose  $u_1, u_2$  为 solution, then

$$\begin{cases} \Delta(u_1 - u_2) = 0 \text{ on } \Omega \\ u_1 - u_2 = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

对于  $\Omega$  上调和函数  $u_1 - u_2$ , 结合 **Thm 3.4.2** 及 **Cor 3.4.3**, 得到其极大值 & 极小值均在  $\partial\Omega$  取到, i.e.

$$\begin{cases} \max(u_1 - u_2) = 0 \\ \min(u_1 - u_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 \equiv u_2$$

□

### 3.4.5 强极值原理 (Strong Maximum Principle)

下面我们将给出强极值原理, 即当有界区域  $\Omega$  连通时, 下调和函数  $u$  的极大值只能在边界处取到.

**定理 3.4.4. [强极值原理 (Strong Maximum Principle)].**

Suppose  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  bounded and connected,  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  and  $\Delta u \geq 0$  on  $\Omega$ . Then

$$\text{Either } u \equiv C \quad \text{or} \quad u(\xi) < \max_{\bar{\Omega}} u, \quad \forall \xi \in \Omega$$

证明. 记  $M = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$ . Let

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid u(x) = M\} \quad \& \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega \mid u(x) < M\}$$

下面证明  $\Omega_1 \subset \Omega$  为开集:

$\forall \xi \in \Omega_1$ ,  $u(\xi) = M$ . 由于  $\Delta u \geq 0$ , 因此根据球体上的均值不等式 (Cor 3.4.1),  $\exists \rho_0 > 0$ , s. t.

$$M = u(\xi) \leq \int_{B_r(\xi)} u(x) dx, \quad \forall r \leq \rho_0$$

根据  $u$  在  $\xi$  处的连续性, 可得  $\exists 0 < r_0 < \rho_0$ , s. t.

$$u(x) \geq u(\xi) = M, \quad \forall x \in B_{r_0}(\xi)$$

因为  $M = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$ , 所以  $u(x) \equiv M, \quad \forall x \in B_{r_0}(\xi)$ .

故  $B_{r_0}(\xi) \subset \Omega_1$ ,  $\Omega_1$  为开集.

由于  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ,  $\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ ,  $\Omega_1, \Omega_2$  open, 因此根据  $\Omega$  的连通性,  $\Omega_1 = \emptyset$  或  $\Omega_2 = \emptyset$ .

分别对应

$$u(\xi) < \max_{\bar{\Omega}} u, \quad \forall \xi \in \Omega \quad \text{and} \quad u \equiv C$$

□

## 3.5 Green's Function, 球上的 Possion 公式

### 3.5.1 Green's Function

在前文, **Def 3.2.1 (3.2)** 式已经说明了, 对于任意的  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ , 只要知道  $\Delta u$  在  $\Omega$  中取值, 及  $u$  和  $\frac{\partial u}{\partial n_x}$  在边界  $\partial\Omega$  处取值, 即可确定  $u$  在  $\Omega$  内的值:

$$u(\xi) = \int_{\Omega} K(x, \xi) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial n_x} u(x) - \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} K(x, \xi) \right) dS_x, \quad \forall \xi \in \Omega$$

因此我们就希望通过这种方法来解决 **Dirichlet Problem**. 但对于 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ on } \Omega \\ u = g \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial n_x}$  在边界  $\partial\Omega$  处的取值无从得知. 这就意味着我们需要对 **Def 3.2.1 (3.2)** 式进行调整, 消去  $\frac{\partial u}{\partial n_x}$ . 在此操作中, 我们便会来定义区域  $\Omega$  上的 **Green's Function**.

For  $\forall$  fixed  $\xi \in \Omega$ , suppose  $v(x, \xi)$  satisfies

$$\begin{cases} \Delta_x v(x, \xi) = 0 \text{ on } \Omega \\ v(x, \xi) = -K(x, \xi) \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

By **Green's Identities (Prop 3.2.1 (2))**,  $\forall u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ,

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n_x} - v \frac{\partial u}{\partial n_x} \right)$$

Since  $\Delta v = 0$ , then

$$0 = \int_{\Omega} v \Delta u - \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n_x} - v \frac{\partial u}{\partial n_x} \right)$$

将上式与 **Def 3.2.1 (3.2)** 式相加, 得到

$$u(\xi) = \int_{\Omega} (K(x, \xi) + v(x, \xi)) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(K + v)}{\partial n_x} u(x) dS_x, \quad \forall \xi \in \Omega$$

这样我们就消去了  $\frac{\partial u}{\partial n_x}$ . 至此, 我们给出 **Green's Function** 的定义.

**定义 3.5.1.** For  $\forall$  fixed  $\xi \in \Omega$ , suppose  $v(x, \xi)$  satisfies

$$\begin{cases} \Delta_x v(x, \xi) = 0 \text{ on } \Omega \\ v(x, \xi) = -K(x, \xi) \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Let

$$G(x, \xi) = K(x, \xi) + v(x, \xi), \quad \forall x, \xi \in \Omega$$

称  $G(x, \xi)$  为区域  $\Omega$  上的 **Green's Function**. 则对于  $\forall u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  and  $\forall \xi \in \Omega$ ,

$$u(\xi) = \int_{\Omega} G(x, \xi) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_x} u(x) dS_x \quad (3.3)$$

**注.** • 事实上, Green's Function 给出了 Dirichlet Problem 的解的形式, 即若 Dirichlet Problem

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ on } \Omega \\ u = g \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

有解, 则解必然满足式 (3.3) 的形式.

- 对于任意的区域  $\Omega$ , 我们并未说明该区域上一定存在 Green's Function. 在下一小节我们将证明, 对于开球  $\Omega = B_a$ , 其上的 Green's Function 存在, 从而说明球  $B_a$  上的 Dirichlet Problem 有解, 并给出其具体的解.

### 3.5.2 球上的 Poisson 公式

这一小节我们将证明球上的 **Green's Function (Def 3.5.1)** 存在, 并给出球上的具体的 **Poisson 公式**.

**定理 3.5.1.** [球上的 Possion 公式].

If  $f \in C^0(\partial B_a)$ , then  $u$  defined by

$$u(\xi) = \int_{\partial B_a} \frac{a^2 - |\xi|^2}{a w_n |x - \xi|^n} f(x) dS_x, \quad \forall \xi \in B_a \quad (3.4)$$

satisfies:

$$(i). \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$$

$$(ii). \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ on } B_a \\ u = f(x) \text{ on } \partial B_a \end{cases}$$

**注.** 事实上, 此定理说明并给出了球  $\Omega = B_a$  上一般的 **Dirichlet Problem** 的解的存在, 即

For  $\forall \varphi \in C^2(\Omega)$  and  $f \in C^0(\partial\Omega)$ ,

$$\begin{cases} \Delta u = \varphi \text{ on } \Omega \\ u = f \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

根据任一  $C^2$  函数可由基本解表示 (**Prop 3.3.2**),

$$\varphi(\xi) = \Delta_\xi \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot \varphi(x) dx, \quad \forall \xi \in \Omega$$

Let  $\psi(\xi) = \int_{\Omega} K(x, \xi) \cdot \varphi(x) dx$ , 则  $\Delta\psi = \varphi$ , then

$$\begin{cases} \Delta(u - \psi) = \varphi - \Delta\psi = 0 \text{ on } B_a \\ u - \psi = f - \psi = \tilde{f} \text{ on } \partial B_a \end{cases}, \quad i.e. \quad \begin{cases} \Delta(u - \psi) = 0 \text{ on } B_a \\ u - \psi = \tilde{f} \text{ on } \partial B_a \end{cases}$$

从而根据球上的 **Poisson 公式** (式 (3.4)) 可解.

证明.

[思路: Step1: 先证明 Green's Function 存在并通过式 (3.3) 给出 Poisson 公式.  
Step 2: 证明给出的 Poisson 公式满足题目所需条件.]

Step 1 : 证明 Green's Function 存在并给出 Poisson's Formula: ( $\Omega = B_a(0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ )

$\forall$  fixed  $\xi \in B_a$ . Take  $\xi^*$  与  $\xi$  关于球面对称, 即  $O, \xi, \xi^*$  共线且  $\xi^* = \left(\frac{a}{|\xi|}\right)^2 \xi$ .

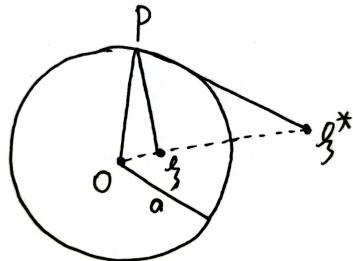


图 3.1: 球  $\Omega = B_a$  及  $O, \xi, \xi^*$  点

则根据三角形的相似关系 ( $\triangle D\xi P \sim \triangle DP\xi^*$ ), 可得到

$$\begin{cases} |\xi| \cdot |\xi^*| = a^2 \\ \frac{|P\xi|}{|P\xi^*|} = \frac{|\xi|}{a}, \quad \forall P \in \partial B_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K(x, \xi) = C \cdot |x - \xi|^{2-n} \\ K(x, \xi^*) = C \cdot |x - \xi^*|^{2-n} \\ \frac{K(x, \xi)}{K(x, \xi^*)} = \frac{|x - \xi|^{2-n}}{|x - \xi^*|^{2-n}} = \left(\frac{|\xi|}{a}\right)^{2-n}, \quad \forall x \in \partial B_a \end{cases}$$

where  $C = \frac{1}{(2-n)w_n}$  constant. Let

$$v(x, \xi) = -\left(\frac{|\xi|}{a}\right)^{2-n} K(x, \xi^*)$$

Then  $v$  satisfies

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \text{ on } \Omega \\ v = -K(x, \xi) \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

于是  $v(x, \xi)$  存在, 从而 Green's Function 存在, i.e.

$$G(x, \xi) = K(x, \xi) + v(x, \xi) = C \cdot \left( |x - \xi|^{2-n} - \left(\frac{|\xi|}{a}\right)^{2-n} \cdot \left|x - \left(\frac{a}{|\xi|}\right)^2 \xi\right|^{2-n} \right)$$

下面来给出 Poisson 公式, 即计算  $\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_x}$  on  $\partial B_a$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{|x|=a} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial n} \Big|_{|x|=a} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{Cx_i}{a} \left( (2-n) \cdot |x-\xi|^{1-n} \cdot \frac{x_i - \xi_i}{|x-\xi|} - (2-n) \cdot \left(\frac{|\xi|}{a}\right)^{2-n} \cdot \left|x - \left(\frac{a}{|\xi|}\right)^2 \xi\right|^{1-n} \cdot \frac{x_i - \left(\frac{a}{|\xi|}\right)^2 \xi_i}{\left|x - \left(\frac{a}{|\xi|}\right)^2 \xi\right|} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{aw_n} \left( |x-\xi|^{-n} (x_i - \xi_i) - \left(\frac{|\xi|}{a}\right)^{2-n} \cdot \left|x - \left(\frac{a}{|\xi|}\right)^2 \xi\right|^{-n} \cdot \left(x_i - \left(\frac{a}{|\xi|}\right)^2 \xi_i\right) \right) \\
&= \frac{1}{aw_n} \left( |x-\xi|^{-n} \cdot (|a|^2 - \vec{x} \cdot \vec{\xi}) - \left(\frac{|\xi|}{a}\right)^{2-n} \cdot \left|x - \left(\frac{a}{|\xi|}\right)^2 \xi\right|^{-n} \cdot \left(a^2 - \left(\frac{a}{|\xi|}\right)^2 \vec{x} \cdot \vec{\xi}\right) \right)
\end{aligned}$$

此时关注  $\vec{x} \cdot \vec{\xi}$  项，其系数为：

$$\left(\frac{|\xi|}{a}\right)^{-n} \cdot \left|x - \left(\frac{a}{|\xi|}\right)^2 \xi\right|^{-n} - |x-\xi|^{-n}$$

由几何关系可知， $\forall x \in \partial B_a, \forall \xi \in B_a$ , s. t.

$$\left| \left(\frac{|\xi|}{a}\right)x - \left(\frac{a}{|\xi|}\right)\xi \right| = |x-\xi|$$

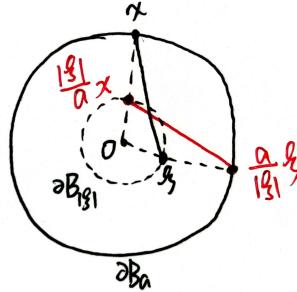


图 3.2:  $\left| \left(\frac{|\xi|}{a}\right)x - \left(\frac{a}{|\xi|}\right)\xi \right| = |x-\xi|$

故  $\vec{x} \cdot \vec{\xi}$  项系数：

$$\left(\frac{|\xi|}{a}\right)^{-n} \cdot \left|x - \left(\frac{a}{|\xi|}\right)^2 \xi\right|^{-n} - |x-\xi|^{-n} = 0$$

从而

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{|x|=a} &= \frac{a^2}{aw_n} \left[ |x-\xi|^{-n} - \left(\frac{|\xi|}{a}\right)^2 |x-\xi|^{-n} \right] \\
&= \frac{a}{w_n} \left( 1 - \frac{|\xi|^2}{a^2} \right) \cdot |x-\xi|^{-n} = \frac{a^2 - |\xi|^2}{aw_n |x-\xi|^n}
\end{aligned}$$

根据 **Def 3.5.1 式 (3.3)**,  $\forall u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , 若  $u$  为齐次 Dirichlet Problem 的解, 则必有

$$u(\xi) = \int_{\partial B_a} \frac{a^2 - |\xi|^2}{aw_n |x-\xi|^n} f(x) dS_x, \quad \forall \xi \in B_a$$

Step 2 : 证明  $u$  in (3.4)  $\in C^2(\Omega)$ :

由于  $\frac{a^2 - |\xi|^2}{aw_n|x - \xi|^n}$ ,  $x \in \partial B_a$  为关于  $\xi$  的初等函数, 因此  $u \in C^2(\Omega)$ .

Step 3 : 证明  $\Delta u = 0$  on  $B_a$ :

$$\Delta u = \Delta_\xi \int_{\partial B_a} \frac{a^2 - |\xi|^2}{aw_n|x - \xi|^n} f(x) dS_x = \int_{\partial B_a} \Delta \left( \frac{a^2 - |\xi|^2}{aw_n|x - \xi|^n} \right) f(x) dS_x$$

Since

$$\partial_\xi \left( \frac{a^2 - |\xi|^2}{|x - \xi|^n} \right) = \frac{-2\xi_i}{|x - \xi|^n} + \frac{n(a^2 - |\xi|^2)}{|x - \xi|^{n+2}} (x_i - \xi_i), \quad \forall i = 1 \sim n$$

Then (计算过程过于繁琐, 此处省略)

$$\Delta \left( \frac{a^2 - |\xi|^2}{|x - \xi|^n} \right) = 0$$

Thus  $\Delta u = 0$ .

Step 4 : 证明  $u \in C^0(\partial\Omega)$  且  $u = f$  on  $\partial\Omega$ , 即证极限

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow \bar{x} \\ \xi \in B_a}} u(\xi) = f(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in \partial B_a$$

WTS:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , s. t.

$$\left| \int_{\partial B_a} \frac{a^2 - |\xi|^2}{aw_n|x - \xi|^n} f(x) dS_x - f(\bar{x}) \right| < \varepsilon, \quad \forall |\bar{x} - \xi| < \delta, \quad \xi \in B_a$$

注意到<sup>3</sup>

$$\int_{\partial B_a} \frac{a^2 - |\xi|^2}{aw_n|x - \xi|^n} dS_x \equiv 1, \quad \forall \xi \in B_a$$

即证

$$\left| \int_{\partial B_a} \frac{a^2 - |\xi|^2}{aw_n|x - \xi|^n} (f(x) - f(\bar{x})) dS_x \right| < \varepsilon, \quad \forall |\bar{x} - \xi| < \delta, \quad \xi \in B_a$$

<sup>3</sup>当  $f \equiv 1$  时, 对于方程  $\begin{cases} \Delta u = 0 & B_a \\ u = 1 & \partial B_a \end{cases}$ , 根据 Step 1 讨论, 若有解则其解一定具有形式

$$u(\xi) = \int_{\partial B_a} \frac{a^2 - |\xi|^2}{aw_n|x - \xi|^n} dS_x$$

而对此 Dirichlet Problem, 不难发现  $u \equiv 1$  为一个解. 因此根据 Dirichlet 问题解的唯一性 (Prop 3.4.2), 该积分  $\equiv 1$ .

$$\int_{\partial B_a} \sim = \int_{\partial B_a \setminus B_{\delta_1}(\bar{x})} \sim + \int_{\partial B_a \cap B_{\delta_1}(\bar{x})} \sim$$

下面分为两个部分逐次讨论：

1° : Since  $f \in C(\partial B_a)$ , then  $\exists \delta_1 > 0$ , s. t.

$$|f(x) - f(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall |x - \bar{x}| < \delta_1$$

于是

$$\left| \int_{\partial B_a \cap B_{\delta_1}(\bar{x})} \sim \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left| \int_{\partial B_a \cap B_{\delta_1}(\bar{x})} \frac{a^2 - |\xi|^2}{aw_n|x - \xi|^n} dS_x \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left| \int_{\partial B_a} \frac{a^2 - |\xi|^2}{aw_n|x - \xi|^n} dS_x \right| = \frac{\varepsilon}{2}$$

2° : Set  $\delta \leq \frac{\delta_1}{2}$ , then 对于积分区域中的  $x$ ,

$$x \in \partial B_a \setminus B_{\delta_1}(\bar{x}) \quad \& \quad |\bar{x} - \xi| < \delta \leq \frac{\delta_1}{2} \quad \Rightarrow \quad |x - \xi| \geq \frac{\delta_1}{2}$$

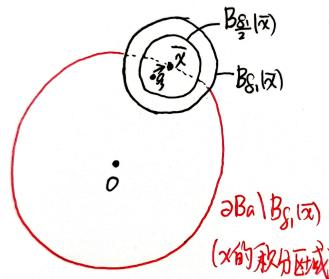


图 3.3:  $x$  的积分区域及  $x, \xi, \bar{x}$  的位置关系

Since  $f \in C(\partial B_a)$ , then  $\exists M > 0$ , s. t.  $|f| \leq M$  on  $\partial B_a$ .

Hence

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_a \setminus B_{\delta_1}(\bar{x})} \sim \right| &\leq \int_{\partial B_a \setminus B_{\delta_1}(\bar{x})} \frac{(a^2 - |\xi|^2) \cdot (|f(x)| + |f(\bar{x})|)}{aw_n \cdot \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^n} dS_x \\ &\leq \int_{\partial B_a \setminus B_{\delta_1}(\bar{x})} \frac{2M \cdot (a^2 - |\xi|^2)}{aw_n \cdot \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^n} dS_x \end{aligned}$$

由于  $\xi \rightarrow \bar{x}$  过程中,  $|\xi| \rightarrow a$ , 因此 we can take  $\delta_2 > 0$ , s. t.

$$a^2 - |\xi|^2 \leq \frac{aw_n \cdot \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^2}{2M} \cdot \frac{1}{|\partial B_a|} \cdot \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall |\bar{x} - \xi| < \delta_2$$

Let  $\delta = \min\{\frac{\delta_1}{2}, \delta_2\} > 0$ , then

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_a \setminus B_{\delta_1}(\bar{x})} \sim \right| &\leq \int_{\partial B_a \setminus B_{\delta_1}(\bar{x})} \frac{2M \cdot (a^2 - |\xi|^2)}{aw_n \cdot \left(\frac{\delta_1}{2}\right)^n} dS_x \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|\partial B_a|} \cdot \int_{\partial B_a \setminus B_{\delta_1}(\bar{x})} 1 dS_x \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall |\bar{x} - \xi| < \delta \end{aligned}$$

综上所述, for any fixed  $x \in \partial B_a$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1, \delta > 0$ , s. t.

$$\begin{aligned} |u(\xi) - f(\bar{x})| &= \left| \int_{\partial B_a} \frac{a^2 - |\xi|^2}{aw_n|x - \xi|^n} (f(x) - f(\bar{x})) dS_x \right| \\ &\leq \int_{\partial B_a \setminus B_{\delta_1}(\bar{x})} \sim + \int_{\partial B_a \cap B_{\delta_1}(\bar{x})} \sim \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall |\bar{x} - \xi| < \delta \end{aligned}$$

Therefore,

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow \bar{x} \\ \xi \in B_a}} u(\xi) = f(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in \partial B_a$$

i.e.  $u = f$  on  $\partial B_a$  and  $u \in C^0(\partial B_a)$ .

□

# 附录 A Supplementary Content

## A.1 变分原理与最小曲面问题

所谓变分问题, 即求某一特定泛函在定义域内的极值. 下面要介绍的最小曲面问题即为一个典型的变分问题.

### A.1.1 Cut-Off Function

先来回顾数分中给出过最常见的 **Cut-Off Function** (截断函数). 下面以 2 维情况为例.

**例 A.1.1.** Define

$$\rho(x, y) = \begin{cases} k e^{-\frac{1}{1-(x^2+y^2)}}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

Then  $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ . We can choose  $k \in \mathbb{R}$ , s. t.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y) dx dy = 1$$

Fix the taken  $k \in \mathbb{R}$ . 为了方便缩小紧支集的范围, 我们进一步定义

$$\rho_n(x, y) = n^2 \rho(nx, ny), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Then  $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  and  $\rho_n(x, y) \equiv 0, \forall \sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{1}{n}$ .

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \rho_n(x, y) dx dy = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

下面利用 **Cut-Off Function**, 给出一条引理, 在证明最小曲面问题的等价问题时会用到.

此处给出  $n$  维的一般性结论.

**引理 A.1.1.** Suppose  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  be open and bounded,  $f \in C(\Omega)$ . If  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ , we have

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0$$

Then  $f \equiv 0$  on  $\Omega$ .

**证明.** 反证法. Assume  $\exists x_0 \in \Omega$ , s. t.  $f(x_0) \neq 0$ . 不妨设  $f(x_0) > 0$ .

Since  $f \in C(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  open, then  $\exists \delta > 0$ , s. t.

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \subset \Omega$$

Fix  $\delta > 0$ . Take  $N \in \mathbb{N}$  satisfies  $\frac{1}{N} \leq \delta$ . Let

$$\varphi(x) = \rho_N(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Then  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  and

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = \int_{B_\delta(x_0)} f(x)\rho_N(x - x_0) dx > 0$$

which contradicts to  $\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

Therefore,  $f \equiv 0$  on  $\Omega$ . □

## A.1.2 极小曲面问题

考虑  $\mathbb{R}^2$  上有界区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . 极小曲面问题即指给定边界  $\partial\Omega$  上一条闭曲线  $l$ :

$$l : \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) & , 0 \leq s \leq s_0 \\ u = \varphi(s) \end{cases}$$

其中  $x = x(s), y = y(s)$  为平面曲线  $\partial\Omega$  的方程. 求一张定义在  $\bar{\Omega}$  上的曲面  $S$ , s. t.

$S$  以  $l$  为边界, 且表面积最小.

我们定义

$$M_\varphi = \left\{ v \in C^1(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = \varphi \right\}$$

上述问题即可表示为下述变分问题:

$$u = \underset{v \in M_\varphi}{\operatorname{argmin}} J(v)$$

where

$$\begin{aligned} J : M_\varphi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto J(v) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} dx dy \end{aligned}$$

下面我们直接给出极小曲面问题的解的必要条件 (需满足的方程), 事实上我们将说明, 当要求解满足一定光滑性时 ( $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ ), 这个条件为充要条件.

**定理 A.1.2. [Minimal Surface].**

Suppose  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  be a bounded region,  $\partial\Omega \in C^\infty$ ,  $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$ . Suppose  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  satisfies

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi$$

Let

$$M_\varphi = \left\{ v \in C^1(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = \varphi \right\}$$

Then

$$u = \underset{v \in M_\varphi}{\operatorname{argmin}} J(v) \iff (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_y \cdot u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

where

$$J(v) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2} dx dy, \quad \forall v \in M_\varphi$$

**注.** 若没有 “ $u \in C^2(\Omega)$ ” 的光滑性条件, 则结论中的 “ $\Leftrightarrow$ ” 应当换为 “ $\Rightarrow$ ”, 即

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_y \cdot u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

是  $u$  为极小曲面问题的解的必要条件.

证明.

- 必要性 “ $\Rightarrow$ ”: Suppose  $u = \underset{v \in M_\varphi}{\operatorname{argmin}} J(v)$ . 记

$$M_0 = \left\{ v \in C^1(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

Then for  $\forall v \in M_0$ , we have  $u + \epsilon v \in M_\varphi$ ,  $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$ . Let

$$j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\epsilon \mapsto j(\epsilon) = J(u + \epsilon v)$$

Then

$$\begin{aligned} j'(\epsilon) &= \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sqrt{1 + (u_x + \epsilon v_x)^2 + (u_y + \epsilon v_y)^2} dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \frac{v_x(u_x + \epsilon v_x) + v_y(u_y + \epsilon v_y)}{\sqrt{1 + (u_x + \epsilon v_x)^2 + (u_y + \epsilon v_y)^2}} dx dy \end{aligned}$$

Since  $u = \operatorname{argmin}_{v \in M_\phi} J(v)$ , then  $j(\epsilon)$  achieves its minimum at  $\epsilon = 0$ . Thus

$$j'(0) = 0$$

i.e.

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v_x + \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v_y \right) dx dy = 0, \quad \forall v \in M_0$$

Let  $\nabla f^1 = \left( \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}, \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right)$ , then by **第一 Green 恒等式**,

$$\iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla v dx dy = - \iint_{\Omega} \Delta f v dx dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \gamma} v dS$$

Since  $v \in M_0$ ,  $v \equiv 0$  on  $\partial\Omega$ , then

$$\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] \right\} v dx dy = 0, \quad \forall v \in M_0$$

Since  $C_0^\infty(\Omega) \subset M_0$ , then by **Lemma A.1.1**,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] \equiv 0 \text{ on } \Omega$$

i.e.

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y \cdot u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

---

<sup>1</sup>此处  $f$  的存在性并未证明, 待修正.

- 充分性 “ $\Leftarrow$ ”: Suppose  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  satisfies

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_xu_y \cdot u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right] \equiv 0 \text{ on } \Omega$$

Let

$$M_0 = \left\{ v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

By **Green 第一恒等式 (Thm B.4.3)**, 倒着必要性的证明过程, 不难得到

$$j'(0) = 0, \quad \forall v \in M_0$$

Since  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , then calculate

$$j''(\epsilon) = \iint_{\Omega} \frac{v_x^2 + v_y^2 + [v_y(u_x + \epsilon v_x)_x - v_x(u_y + \epsilon v_y)_y]^2}{\left[ \sqrt{1 + (u_x + \epsilon v_x)^2 + (u_y + \epsilon v_y)^2} \right]^3} dx dy > 0, \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}$$

又因为  $j'(0) = 0$ , Therefore,

$$u = \underset{v \in M_0}{\operatorname{argmin}} J(v)$$

□

## A.2 线性 PDE 的叠加原理

**定理 A.2.1.** [线性 PDE 的叠加原理].

Suppose  $L$  be a linear partial differential operator,  $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$  be the solutions of these equations respectively

$$Lu = f_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

若  $u_i$  存在 2 阶偏导数, 且级数  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$  均收敛, 记  $u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$ . 则  $u$  为方程

$$Lu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$$

的解.

**注.** 事实上该命题是 Trivial 的, 即对于线性微分算子  $L$ , 其对于任意有限项求和线性. 再根据级数的收敛性可知,  $L$  对于可数项求和线性.

### A.3 一维波动方程的 Duhamel 原理 (齐次化原理)

对于一维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

根据线性 PDE 的叠加原理 (Thm A.2.1), 其解可以表示为

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

其中  $u_1, u_2, u_3$  分别为下述三个初值问题的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u_1|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_{1t}|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u_2|_{t=0} = 0 \\ u_{2t}|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u_3|_{t=0} = 0 \\ u_{3t}|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

下面我们说明, 对于  $u_1$  与  $u_3$ , 其可由  $u_2$  表出, 这就是 Duhamel 原理 (齐次化原理).

**定理 A.3.1.** [一维波动方程的 Duhamel 原理 (齐次化原理)]<sup>2</sup>.

设  $u_2 = M_\psi(x, t)$  为定解问题 (A.2) 的解, 此处  $M_\psi$  表示以  $\psi$  为初值的定解问题 (A.2) 的解, 则  $u_1$  和  $u_3$  可表示为

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x, t) \\ u_3 = \int_0^t M_{f_i}(x, t - \tau) d\tau \end{cases}$$

where  $f_\tau = f(x, \tau)$ .

---

<sup>2</sup>详细证明可参考书籍: 《数学物理方程讲义 (第二版)》 – 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐 – §2.2 定理 2.1 .

## A.4 一维波动方程的能量不等式

**定理 A.4.1.** [一维波动方程的能量不等式].

记上半平面  $Q = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ . 设  $u \in C^1(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$  为定解问题 (2.10) 的解, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

则对于  $M = e^{t_0} > 0, \forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ , s. t.

$$\int_{\Omega_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \leq M \left[ \int_{\Omega_0} (\psi^2 + c^2 \varphi_x^2) + \iint_{K_\tau} f^2 \right], \quad \forall \tau \in [0, t_0] \quad (\text{A.4})$$

$$\iint_{K_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \leq M \left[ \int_{\Omega_0} (\psi^2 + c^2 \varphi_x^2) + \iint_{K_\tau} f^2 \right], \quad \forall \tau \in [0, t_0] \quad (\text{A.5})$$

其中有关区域  $K_\tau$  定义如下 (与 Thm 2.3.1 中保持一致)

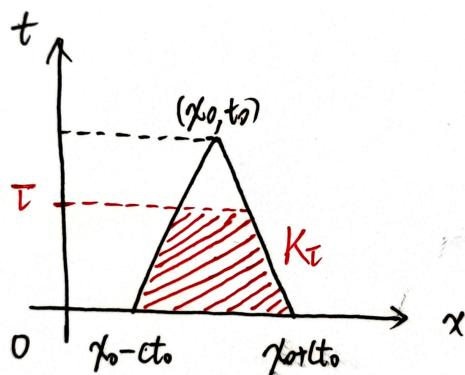


图 A.1: 依赖区间及区域  $K_\tau$  的定义

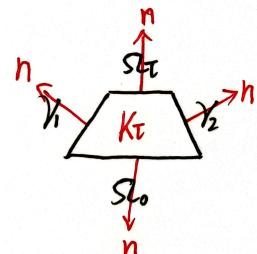


图 A.2: 区域  $K_\tau$  各边记号及法向

在证明能量不等式 (**Thm A.4.1**) 之前, 先给出一个引理.

**引理 A.4.2. [Gronwall Inequality].**

设非负函数  $G \in C[0, T]$ ,  $G(\tau) \geq 0$ . 若  $G(0) = 0$ , 且对于  $\forall \tau \in [0, T]$ , s. t.

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq C \cdot G(\tau) + F(\tau) \text{ for some } C > 0$$

where  $F(\tau)$  为  $[0, T]$  上递增的非负可积函数, 则有

$$\begin{aligned} \frac{dG(\tau)}{d\tau} &\leq e^{C\tau} F(\tau), \quad \forall \tau \in [0, T] \\ G(\tau) &\leq \frac{e^{C\tau} - 1}{C} F(\tau), \quad \forall \tau \in [0, T] \end{aligned}$$

证明. Since  $\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq C \cdot G(\tau) + F(\tau)$ , then 等式两侧同乘  $e^{-C\tau}$ , we have

$$\frac{d}{d\tau}[e^{-C\tau} G(\tau)] \leq e^{-C\tau} F(\tau), \quad \forall \tau \in [0, T]$$

等式两边在  $[0, \tau]$  上积分, since  $F(\tau)$  在  $[0, T]$  上递增非负, then

$$e^{-C\tau} G(\tau) \leq \int_0^\tau e^{-Ct} F(t) dt \leq F(\tau) \cdot \frac{1 - e^{-C\tau}}{C}, \quad \forall \tau \in [0, T]$$

i.e.

$$G(\tau) \leq \frac{e^{C\tau} - 1}{C} F(\tau), \quad \forall \tau \in [0, T]$$

将上述不等式代入  $\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq C \cdot G(\tau) + F(\tau)$  右侧, 即可得到

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq e^{C\tau} F(\tau), \quad \forall \tau \in [0, T]$$

□

证明. 下面开始证明能量不等式:

Since  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t)$  on  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , then

$$\iint_{K_t} u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = \iint_{K_t} u_t \cdot f$$

对于等式左边, 与 **Thm 2.3.1-唯一性** 证明过程一致 (2.13), 利用 **Gauss-Green 公式 (Thm B.4.1)**, 可得到

$$\int_{\Omega_t} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \leq \int_{\Omega_0} [\psi^2 + c^2 \varphi_x^2] + 2 \iint_{K_t} u_t \cdot f$$

根据均值不等式  $2ab \leq a^2 + b^2$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , then

$$\int_{\Omega_t} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \leq \int_{\Omega_0} [\psi^2 + c^2 \varphi_x^2] + \iint_{K_t} u_t^2 + \iint_{K_t} f^2$$

Let

$$G(\tau) = \iint_{K_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2] = \int_0^\tau \left( \int_{\Omega_t} [u_t^2 + c^2 u_x^2] dx \right) dt$$

Then  $G \in C[0, t_0]$ ,  $G \geq 0$ ,  $G(0) = 0$ . 且对于  $\forall \tau \in [0, t_0]$ , s. t.

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} = \int_{\Omega_0} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \leq \iint_{K_\tau} u_t^2 + F(\tau) \leq G(\tau) + F(\tau)$$

i.e.

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq G(\tau) + F(\tau), \quad \forall \tau \in [0, t_0]$$

where

$$F(\tau) = \int_{\Omega_0} [\psi^2 + c^2 \varphi_x^2] + \iint_{K_\tau} f^2 \geq 0 \text{ 在 } [0, t_0] \text{ 上非负递增可积}$$

Thus by **Gronwall Inequality (Lemma A.4.2)**, for  $C = 1$ ,

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq e^\tau F(\tau) \leq e^{t_0} F(\tau), \quad \forall \tau \in [0, t_0]$$

$$G(\tau) \leq (e^\tau - 1)F(\tau) \leq e^{t_0} F(\tau), \quad \forall \tau \in [0, t_0]$$

i.e.

$$\int_{\Omega_t} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \leq M \left[ \int_{\Omega_0} (\psi^2 + c^2 \varphi_x^2) + \iint_{K_t} f^2 \right], \quad \forall \tau \in [0, t_0]$$

and

$$\iint_{K_t} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \leq M \left[ \int_{\Omega_0} (\psi^2 + c^2 \varphi_x^2) + \iint_{K_t} f^2 \right], \quad \forall \tau \in [0, t_0]$$

where  $M = e^{t_0} > 0$ .

□

# 附录 B Fundamental Knowledge

## B.1 区域边界的光滑性

下面我们来给出区域边界的光滑性的定义.

**定义 B.1.1.** Suppose  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  is open,  $\partial\Omega \neq \emptyset$ . 如果对于  $\forall p \in \partial\Omega$ ,  $\exists p$  的邻域  $U$ , s. t. 在适当的空间直角坐标系下,

$$\partial\Omega \cap U = \{(x', x^n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x' \in D, x^n = \varphi(x')\} \quad (\text{B.1})$$

$$\Omega \cap U = \{(x', x^n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x' \in D, x^n > \varphi(x')\} \cap U \quad (\text{B.2})$$

where  $\varphi \in C^k(\Omega)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$  open. 我们称  $\partial\Omega \in C^k$ , 这里  $k = 0, 1, 2, \dots$  或  $\infty$ .

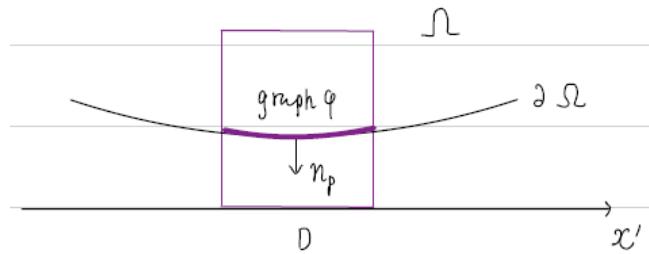


图 B.1: 边界的光滑性

**注.** 在定义 B.1.1 中, 设  $k \leq 1$ ,  $x'_0 \in \partial\Omega$ ,  $p = (x'_0, \varphi(x'_0))$ . 记

$$n_p = \frac{(\nabla \varphi(x'_0), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi(x'_0)|^2}}$$

称  $n_p$  为  $\partial\Omega$  在  $p$  点的 单位外法向.  $n_p$  的定义与空间直角坐标系的选择无关. 记

$$n : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{B.3})$$

$$p \longmapsto n(p) = n_p \quad (\text{B.4})$$

称  $n$  为  $\partial\Omega$  的 单位外法向. 因为  $\partial\Omega \in C^k$ ,  $k \geq 1$ , 所以  $n \in C(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ .

## B.2 ODE 解的存在唯一性定理

定理 B.2.1. [ODE 解的存在唯一性].

**定理 1.1(存在惟一性定理)** 考虑 Cauchy 问题<sup>①</sup>:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x^0, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

其中  $x$  为  $R^n$  中的向量,  $f$  是实变量  $t$  和  $n$  维向量  $x$  的  $n$  维向量值函数. 若  $f(t, x)$  在开区域  $G \subseteq R \times R^n$  中满足下列条件:

- 1)  $f$  在  $G$  内连续, 简记为  $f \in C(G)$ ;
- 2)  $f$  关于  $x$  满足局部 Lipschitz 条件, 即对于点  $P_0(t_0, x^0) \in G$ , 存在

$$G_0 = \{(t, x) \mid |t - t_0| \leq a, \|x - x^0\| \leq b\} \subset G$$

和依赖于  $P_0$  点的常数  $L_{P_0}$ , 使得  $\forall (t, x^1), (t, x^2) \in G_0$  有不等式

$$\|f(t, x^1) - f(t, x^2)\| \leq L_{P_0} \|x^1 - x^2\| \quad (1.1.2)$$

成立, 其中  $\|\cdot\|$  表示欧氏范数.

则 Cauchy 问题(1.1.1) 在区间  $|t - t_0| \leq h^*$  上存在惟一的解. 其中

$$\begin{aligned} 0 < h^* &< \min\left(h, \frac{1}{L_{P_0}}\right), \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \\ M &= \max_{(t, x) \in G_0} \|f(t, x)\|. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

图 B.2: ODE 解的存在唯一性

## B.3 反函数定理

**定理 B.3.1.** [反函数定理].

Suppose  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  open,  $x_0 \in \Omega$ . If  $Df|_{x_0}$  可逆, then  $\exists x_0$  的邻域  $U \subset \Omega$ , s. t.

$f(U) \subset \mathbb{R}^n$  open, and

$$f : U \longrightarrow f(U) \text{ 为 } C^1\text{-微分同胚}$$

## B.4 Gauss-Green 公式

首先回顾一下外法向向量及(外)法向方向导数的记号.

- Suppose  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . If  $\partial\Omega \in C^1$ , then along  $\partial\Omega$  is defined the outward pointing unit normal vector field.<sup>1</sup>

$$\vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n), \quad \vec{\gamma}(x^0) = \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

**注.** 我们总是将向量值函数的分量写作上标, 在具体某点的取值(一般向量)写作下标.

- Let  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ . We call  $\frac{\partial u}{\partial \gamma} := \vec{\gamma} \cdot Du$  the (outward) normal derivative of  $u$ .

下面我们给出多元微积分中十分重要的 **Gauss-Green 公式**, 又称散度定理.

**定理 B.4.1. [Gauss-Green Theorem].**

Suppose  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  is open and bounded,  $\partial\Omega \in C^1$ .

(i) If  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ , then

$$\int_U u_{x_i} = \int_{\partial U} u \gamma^i, \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad (\text{B.5})$$

(ii)  $\forall$  vector field  $\vec{u} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ ,

$$\int_U \operatorname{div} \vec{u} = \int_{\partial U} \vec{u} \cdot \vec{\gamma} \quad (\text{B.6})$$

**注.** • (ii) 即为 **Gauss-Green 公式 (Gauss 公式)**, 说明了对于  $\mathbb{R}^n$  中任一有界区域  $\Omega$  中的向量场  $\vec{u}$ , 其散度  $\operatorname{div} \vec{u}$  在整个区域上的积分 = 其在整个边界  $\partial\Omega$  上的通量.

而散度作为描述向量场中某个点向外发散程度的标量, 原式可理解为:

向量场  $\vec{u}$  在区域  $\Omega$  中每个点发散程度的积累, 经过内部每个点散度相互抵消后, 最终等于其在边界  $\partial\Omega$  处向外通量的总和.

---

<sup>1</sup>关于区域边界光滑性  $\partial\Omega \in C^k$  即单位外法向的定义, 详见附录 B-定义 B.1.1

- **Gauss** 公式事实上为 **Green** 公式在  $n$  维空间上的推广, 即 **Green** 公式事实上给出了二维空间  $\mathbb{R}^2$  上的散度定理. 在 (ii) 中, 取  $\vec{u} = (P, Q)$ , 外法向方向为  $\vec{\gamma} = (-dy, dx)$ , 有:

$$\int_U \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \int_{\partial U} -P dy + Q dx$$

简单地交换  $P, Q$  顺序即可得到最常见的 **Green** 公式的格式.

- 定理中 (i) 可作为 (ii) 的直接推论. 即可令  $\vec{u}$  中除第  $i$  个分量  $u^i$  外均为 0, 即  $\vec{u} = (0, \dots, u^i, \dots, 0)$ , then

$$\int_U \frac{\partial u^i}{\partial x_i} = \int_{\partial U} u^i \gamma^i$$

令  $u = u^i \in C^1(\bar{\Omega})$ , 即可得到

$$\int_U u_{x_i} v = \int_{\partial U} u \gamma^i, \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

下面给出一系列根据 **Gauss-Green** 公式得到的推论, 在 PDE 中经常使用. 首先是所谓的分部积分公式.

#### 推论 B.4.2. [Integration by parts formula].

Let  $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ , then

$$\int_U u_{x_i} v = - \int_U u v_{x_i} + \int_{\partial U} u v \gamma^i \tag{B.7}$$

证明. 在 **Gauss-Green** 公式 (Thm B.4.1 (i)) 中, 将  $u$  换成  $uv$ , 即可得到

$$\int_U (u_{x_i} v + u v_{x_i}) = \int_{\partial U} u v \gamma^i$$

□

最后再给出三条常用的 **Green 恒等式**, 这也是 **Gauss-Green 公式**的直接推论.

**推论 B.4.3. [Green's Formula].**

Let  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ , then

(i)

$$\int_U \Delta u = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \quad (\text{B.8})$$

(ii)

$$\int_U Du \cdot Dv = - \int_U u \Delta v + \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \gamma} \quad (\text{Green 第一恒等式}) \quad (\text{B.9})$$

(iii)

$$\int_U (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial U} \left( u \frac{\partial v}{\partial \gamma} - v \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) \quad (\text{Green 第二恒等式}) \quad (\text{B.10})$$

证明.

(i) 将 **Gauss-Green 公式 (Thm B.4.1 (ii))** 中的  $u$  换为  $\nabla u$ , 得

$$\int_U \Delta u = \int_{\partial U} \nabla u \cdot \vec{\gamma} = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \gamma}$$

(ii) 将 **Gauss-Green 公式 (Thm B.4.1 (ii))** 中的  $u$  换为  $u \nabla v$ , 由于

$$\operatorname{div}(u \nabla v) = u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v = u \Delta v + Du \cdot Dv$$

因此有

$$\int_U (u \Delta v + Du \cdot Dv) = \int_{\partial U} u \nabla v \cdot \vec{\gamma} = \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \gamma}$$

(iii) 由于 (ii) 中左式  $u, v$  对称, 因此交换  $u, v$  位置, 可得

$$\int_U Du \cdot Dv = - \int_U u \Delta v + \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \gamma} \quad (\text{B.11})$$

$$\int_U Du \cdot Dv = - \int_U v \Delta u + \int_{\partial U} v \frac{\partial u}{\partial \gamma} \quad (\text{B.12})$$

两式相减即可得证.

□

## B.5 一阶常系数线性 ODE 的求解

定理 B.5.1. [一阶常系数线性 ODE].

对于一阶常系数线性 ODE

$$\frac{dx}{dt} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0$$

其特征方程为

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

对应的特征根 (可相等) 为  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . 则方程的通解可写为如下基本解组的线性组合:

(a) 对每个单重实根  $\lambda_k$  有解  $e^{\lambda_k t}$ .

(b) 对每个  $m > 1$  重实根  $\lambda_k$  有  $m$  个解

$$e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda_k t}$$

(c) 对每一对重数为 1 的共轭复根  $a \pm i\beta$ , 有 2 个如下形式的解

$$e^{at} \cos \beta t, e^{at} \sin \beta t$$

(d) 对每一对  $m > 1$  重共轭复根  $a \pm i\beta$ , 有  $2m$  个如下形式的解

$$e^{at} \cos \beta t, te^{at} \cos \beta t, \dots, t^{m-1} e^{at} \cos \beta t$$

$$e^{at} \sin \beta t, te^{at} \sin \beta t, \dots, t^{m-1} e^{at} \sin \beta t$$