Partial Differential Equations[1]

–TW–

2024 年 11 月 28 日

[1]参考书籍：

《Partial Differential Equations》– Lawrence C. Evans

《Partial Differential Equations》– Fritz John

《数学物理方程讲义 (第二版)》– 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐

序

天道几何，万品流形先自守；

变分无限，孤心测度有同伦。

2024 年 11 月 28 日

长夜伴浪破晓梦，梦晓破浪伴夜长

目录

第一章　The Single First-Order Equation

1.1　一阶线性方程的特征线解法

对于**波动方程**来说，经典的解题方法有两类：**分离变量法 & 特征线法**. 这两类方法也可以应用于除波动方程外的很多 PDE. 这一节我们以**一阶线性方程**为例，引出**特征线**的概念.

1.1.1　一阶常系数线性方程

首先先来考虑最简单的情形：在区域 $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ 上求解 Cauchy 问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+a\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=0 \\ \rho(x,0)=\rho_0(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

对于该问题，给出**特征线**的定义.

定义 1.1.1. 我们称下列 ODE 初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=a \\ x(0)=c \end{cases}$$

的解 $x(t,c)=at+c$ 为方程 (1.1) 的<u>特征线</u>，其中 $c\in\mathbb{R}$ 为常数.

注. “**特征线**”的含义如下：

沿着特征线 $x=x(t,c)$，待求函数表达式为 $\rho=\rho\big(x(t,c),t\big)$，s. t.

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}=\rho_t+a\rho_x=0$$

即 $\rho(x,t)$ 在特征线 $x=x(t,c)$ 上恒为常数.

故只需知道特征线上一点取值即可得到整条线上的函数值. 而在特征线的起点 $x=c,\ t=0$ 处，

$$\rho\big(x(0,c),0\big)=\rho(c,0)=\rho_0(c)$$

于是在特征线 $x = x(t, c)$ 上,

$$\rho\big(x(t,c),t\big) = \rho(at+c, c) = \rho_0(c)$$

根据 $x = at + c$, 解得 $c = x - at$, 代入上式, 得到 $\rho(x,t)$ 的解

$$\rho(x,t) = \rho_0(x-at),\ \ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

1.1.2 一阶变系数线性方程

更一般地, 我们考虑变系数方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(v(x)\cdot\rho\big) = 0 \tag{1.2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v(x)\frac{\partial \rho}{\partial x} + v^{'}(x)\rho = 0 \tag{1.3}$$

类似地, 对于该变系数问题, 同样给出**特征线**的定义.

定义 1.1.2. 设曲线 $x = x(t,c)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v\big(x(t)\big) \\ x(0) = c \end{cases}$$

这条积分曲线 $x = x(t,c)$ 称为方程 (1.3) 的特征线, 其中 $c \in \mathbb{R}$ 为常数. 沿着特征线 $x = x(t,c)$, 待求函数 $\rho = \rho\big(x(t,c),t\big)$ 满足:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = -v^{'}\big(x(t,c)\big)\cdot\rho \\ \rho\big(x(0,c),0\big) = \rho(c,0) = \rho_0(c) \end{cases} \tag{1.4}$$

注. 事实上, 此处我们已经将 PDE 问题 (1.3) 转化为了求解 ODE 问题 (1.4). 但在处理积分时要留意, 方程 (1.4) 中等号右端函数 $v^{'}$ 的自变量为 $x(t,c)$ 而非 t, 因此要进行变量替换, 即

$$\frac{d\rho}{\rho} = -v^{'}\big(x(t,c)\big)dt$$

$$\begin{aligned} \ln\rho\big(x(t,c),t\big) - \ln\rho_0(c) &= \int_0^t -v^{'}\big(x(\tau,c)\big)\,d\tau \\ &= \int_c^{x(t,c)} -v^{'}\big(x(t,c)\big)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{d\tau}}\cdot dx \end{aligned}$$

由于特征线方程满足

$$\frac{dx}{dt} = v\big(x(t,c)\big)$$

因此

$$\begin{aligned}
\ln\rho\big(x(t,c),t\big) - \ln\rho_0(c) &= \int_c^{x(t,c)} -v'\big(x(t,c)\big)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{d\tau}}\cdot dx \\
&= \int_c^{x(t,c)} \frac{-v'\big(x(t,c)\big)}{v\big(x(t,c)\big)}\,dx \\
&= -\ln v\big(x(t,c)\big) + \ln v(c)
\end{aligned}$$

从而容易得到特征线 $x = x(t,c)$ 上函数 $\rho = \rho\big(x(t,c),t\big)$ 为

$$\rho\big(x(t,c),c\big) = \rho_0(c)\cdot\frac{v(c)}{v\big(x(t,c)\big)}$$

从特征线方程 $x = x(t,c)$ 中解出 $c = \varphi(x,t)$, 代入上式, 解得

$$\rho(x,t) = \rho_0\big(\varphi(x,t)\big)\cdot\frac{v\big(\varphi(x,t)\big)}{v(x)}$$

可以验证, 上述表达式确实是方程 (1.3) 的解.

1.1.3 一阶线性方程的特征线解法

下面对前两个小节所给出的**特征线法**进行总结归纳, 大致分为以下步骤:

1. 求特征线 $x = x(t, c)$.

2. 沿特征线 $x = x(t, c)$, 将原方程化为关于 $\rho = \rho\big(x(t, c), t\big)$ 的 ODE 方程 (其中 $c \in \mathbb{R}$ 为参数), 并求出 $\rho = u(t, c)$.

3. 从特征线方程 $x = x(t, c)$ 中解出 $c = \varphi(x, t)$, 代入 $\rho = u(t, c)$ 中, 解得 $\rho(x, t) = u\big(t, \varphi(x, t)\big)$.

下面给出一个实例.

例 1.1.1. 求下列 Cauchy 问题的解.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (x+t)\dfrac{\partial u}{\partial x} + u = x, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x, 0) = x \end{cases}$$

解.

Step 1 . 求特征线. 特征方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + t \\ x(0) = c \end{cases}$$

的解为

$$x = x(t) = e^t(1+c) - (1+t)$$

Step 2 . 令 $U(t) = u\big(x(t), t\big)$, then

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = x(t) - u\big(x(t), t\big) = -U(t) + e^t(1+c) - (1+t) \\ U(0) = u\big(x(0), 0\big) = u(c, 0) = c \end{cases}$$

解得

$$U(t) = u\big(x(t), t\big) = \frac{1}{2}(c+1)e^t + \frac{1}{2}(c-1)e^{-t} - t$$

Step 3 . 从特征线方程 $x = e^t(1 + c) - (1 + t)$ 中, 解得

$$c = (x + t + 1)e^{-t} - 1$$

代入 $u\big(x(t), t\big)$ 中, 得到

$$u(x, t) = \frac{1}{2}e^{-2t}(x + t + 1) - e^{-t} + \frac{1}{2}(x - t + 1)$$

$\square$

1.2 Quasi-Linear Equations

这一节我们将会把**线性方程**中的**特征线法**拓展到更一般的 **Quasi-Linear** 方程中, 并将给出 **Integral Surfaces (积分曲面)** 等概念. 此处我们为了简化问题, 均讨论**含 2 个自变量的一阶 Quasi-Linear 方程**, 即

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \tag{1.5}$$

1.2.1 Integral Surfaces

为了直观地理解方程 (1.5), 我们不妨令 $z = u(x, y)$ 代表 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面, 方程 (1.5) 可化为

$$(a, b, c) \cdot (u_x, u_y, -1) = 0$$

根据**外法向的定义 (B.1.1)**, $(u_x, u_y, -1)$ 即为曲面 $z = u(x, y)$ 在各点处的外法向. 于是对于 $\mathbb{R}^3$ 中向量场 (a, b, c), 其与曲面 $z = u(x, y)$ 在各点处的法向量垂直.

从而我们的问题可由 "**求解方程 (1.5)**", 转化为:

对于 $\mathbb{R}^3$ 中的向量场 (a, b, c), 我们要找到一个曲面 $z = u(x, y)$,
s. t. 曲面上每个点的切线均平行于 (a, b, c).

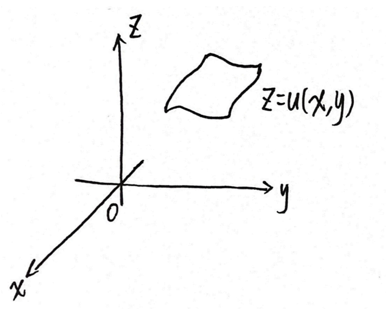

图 1.1: 曲面 $z = u(x, y)$

由此, 引出 **Integral Surfaces** 的概念.

定义 1.2.1. Surfaces corresponding to solutions of a P.D.E. are called **integral surfaces** of the P.D.E.

1.2.2 Characteristic Curves

为了求解 **Quasi-Linear Equations**, 我们来拓展 **Def 1.1.1**及 **Def 1.1.2** 中关于**特征线**的概念. Assume $a, b, c \in C^1(\Omega)$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ is a bounded region. 对于方程 (1.5),

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

我们给出**特征线**的定义.

定义 1.2.2. 设曲线 $\gamma : (x(t), y(t), z(t)) \subset \mathbb{R}^3$. 若曲线 γ 满足 ODE 方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x, y, z) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = b(x, y, z) \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = c(x, y, z) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

则称这条积分曲线 $\gamma : (x(t), y(t), z(t))$ 为方程 (1.5) 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的特征线.

注.

- 由于 $a, b, c \in C^1(\Omega)$, 因此 a, b, c Lipschitz 连续, 根据 **ODE 解的存在唯一性定理 (Thm B.2.1)**, 对于给定的初值点 $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, 该特征线**存在且唯一**.

- 此处仅为**含 2 个自变量的 1 阶 Quasi-Linear Equation** 的特征线, 事实上, 对于 n 维可类似推广, 即对于**含 n 个自变量的 1 阶 Quasi-Linear Equation**

$$a_1(x_1, \cdots, x_n, u)u_{x_1} + \cdots + a_n(x_1, \cdots, x_n, u)u_{x_n} = a_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, u)$$

对于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的曲线 $\gamma : (x_1(t), \cdots, x_n(t), x_{n+1}(t))$, 若 γ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \\ \cdots \\ \dfrac{dx_{n+1}}{dt} = a_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \\ x_1(0) = x_0^1, \cdots, x_{n+1}(0) = x_0^{n+1} \end{cases}$$

则称 $\gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 为上述含 n 个自变量的 1 阶 Quasi-Linear Equation 的特征线.

下面我们将说明, **若已知所求曲面 $z = u(x, y)$ 上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则该点处的特征线就落在所求曲面 $z = u(x, y)$ 上**. 这一结论将直接提供利用**特征线法**解决 **Quasi-Linear Equation** 的理论依据, 即只要我们知道了所求曲面 $z = u(x, y)$ 上一条曲线的方程, 则沿着这条曲线上, 求出每个点所在的特征线, 再将所有特征线 “拼” 在一起, 即得到了所求曲面 $z = u(x, y)$.

定理 1.2.1. [Characteristic Curve].
Suppose $P(x_0, y_0, z_0) \in S = \Big\{(x, y, z) \mid z = u(x, y)\Big\}$. $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ 为点 P 所在特征线, i.e.

$$P(x_0, y_0, z_0) \in \gamma = \Big\{\Big(x(t), y(t), z(t)\Big) \mid t \in [a, b]\Big\}$$

Then $\gamma \subset S$.

证明. Define $U(t) = z(t) - u\Big(x(t), y(t)\Big),\ \ t \in [a, b]$. WTS：$U \equiv 0$ on $[a, b]$.
Since $P \in \gamma$, then $\exists t_0 \in [a, b]$, s. t.

$$\Big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\Big) = (x_0, y_0, z_0)$$

Since $P \in S$, then

$$z_0 = u(x_0, y_0) \ \Rightarrow\ U(t_0) = z_0 - u(x_0, y_0) = 0$$

Hence 根据特征线所满足方程 (1.6),

$$\begin{aligned}\frac{dU(t)}{dt} &= \frac{dz}{dt} - u_x\frac{dx}{dt} - u_y\frac{dy}{dt}\\ &= c\Big(x(t), y(t), z(t)\Big) - u_x \cdot a\Big(x(t), y(t), z(t)\Big) - u_y \cdot b\Big(x(t), y(t), z(t)\Big)\end{aligned}$$

由于 $z(t) = U(t) + u\Big(x(t), y(t)\Big)$, 因此 (下面将等式右侧 t 略去),

$$\begin{cases}\dfrac{dU(t)}{dt} = c\Big(x, y, U + u(x, y)\Big) - u_x \cdot a\Big(x, y, U + u(x, y)\Big) - u_y \cdot c\Big(x, y, U + u(x, y)\Big)\\ U(t_0) = 0\end{cases} \tag{1.7}$$

Since $a, b, c \in C^1(\Omega)$, then a, b, c are Lipschitz continuous.
By **ODE 解的存在唯一性定理 (Thm B.2.1)**, the above-mentioned problem 1.7 has a unique solution.
又因为 $U(t_0) = 0$, $U = 0$ 是方程 (1.7) 的一个解, 所以解得

$$U \equiv 0 \text{ on } [a, b]$$

i.e. 对于方程1.6所求得特征线 $\gamma : \Big(x(t), y(t), z(t)\Big)$, s. t.

$$z(t) = u\Big(x(t), y(t)\Big),\ \ \forall t \in [a, b]$$

Therefore, $\gamma \subset S$. □

1.3 The Cauchy Problem for the Quasi-Linear Equation

这一节我们将延续上一节对 **1 阶 Quasi-Linear Equation** 的特征线的讨论, 来给出有关 Quasi-Linear 方程的 **Cauchy 问题的解法**, 并给出其**解存在的充分条件** (当已知曲线非特征线时为**充要条件**).

对于 **2 维 1 阶 Quasi-Linear Equation**, $a, b, c \in C^1$ near P_0,

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

在上一节的讨论中我们已经将"**求解该方程**" 转化为了"**求曲面** $z = u(x, y)$". 现在对于所求曲面 $z = u(x, y)$, 已知其上一条曲线 Γ 的参数方程及其上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, i.e.

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases}, \quad P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \big(f(s_0), g(s_0), h(s_0)\big) \in \Gamma$$

where $f, g, h \in C^1$ near s_0, $s_0 \in [a, b]$.

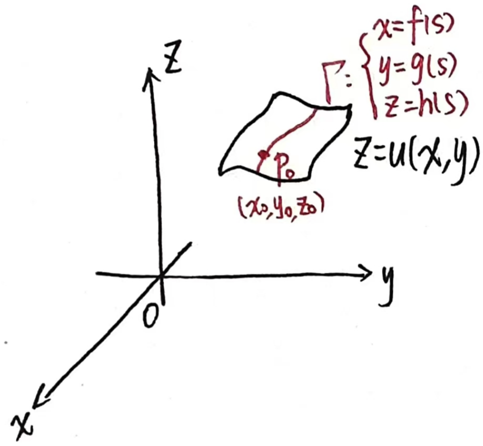

图 1.2: Cauchy Problelm for Quasi-Linear Equation

下面给出该 Cauchy 问题解存在的**充分条件**, 并将说明当已知曲线 Γ 并非点 P_0 处特征线时, 该条件为**充要条件**. 证明过程也即给出了运用**特征线法**求解 **Quasi-Linear 方程的 Cauchy** 问题的方法.

定理 1.3.1. [Cauchy Problem for Quasi-Linear Equation].

考虑如下 Cauchy 问题. Assume $a, b, c \in C^1$ near P_0. For the Quasi-Linear Equation

$$\begin{cases} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \\ x = f(s),\ \ y = g(s),\ \ z = h(s) \\ h(s) = u\big(f(s), g(s)\big) \\ (x_0, y_0, z_0) = \big(f(s_0), g(s_0), h(s_0)\big) \end{cases}$$

即已知 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 $z = u(x,y)$ 上的一条曲线 Γ 及其上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 其中 Γ 的参数方程可表示为

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases},\quad P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \big(f(s_0), g(s_0), h(s_0)\big) \in \Gamma$$

其中 $f, g, h \in C^1$ near s_0, $s_0 \in [a, b]$. 则该 Cauchy 问题在 P_0 附近有解的**充分条件**为：

$$J = \begin{vmatrix} f^{'}(s_0) & g^{'}(s_0) \\ a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

特别地, 当 Γ 不是点 P_0 处的特征线时, 该条件为**充要条件**.

证明.

- **充分性 (一般情形)**：Suppose $a, b, c \in C^1(\Omega)$ and $f, g, h \in C^1[a_0, b_0]$.
  Fix $s \in [a_0, b_0]$. 对于每个 $s \in [a_0, b_0]$, 考虑如下 ODE(**特征线**)

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = a\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = b\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = c\big(x(t), y(t), z(t)\big) \\ x(0) = f(s),\ \ y(0) = g(s),\ \ z(0) = h(s) \end{cases}$$

  Since $a, b, c \in C^1(\Omega)$, $f, g, h \in C^1[a_0, b_0]$, then by **ODE 解的存在唯一性定理 (Thm B.2.1)**, 对于每个 $s \in [a_0, b_0]$, 上述 ODE 均有唯一解, 即对于每个 $s \in [a_0, b_0]$, 在点 $P = \big(f(s), g(s), h(s)\big)$ 处均可解出唯一的一条特征线.

设所求曲面 $z=u(x,y)$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = X(s,t) \\ y = Y(s,t) \\ z = Z(s,t) \end{cases}$$

则将上述对于所有 fixed $s \in [a_0, b_0]$ 的 ODE 方程合在一起, 等价于下述 ODE 方程组：

$$\begin{cases} X_t(s,t) = a\big(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t)\big) \\ Y_t(s,t) = b\big(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t)\big) \\ Z_t(s,t) = c\big(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t)\big) \\ X(s,0) = f(s),\ \ Y(s,0) = g(s),\ \ Z(s,0) = h(s) \end{cases}$$

根据 **ODE 解的存在唯一性定理 (Thm B.2.1)**, 上述 ODE 解存在且唯一, i.e.
$\exists X, Y, Z \in C^1$ near $(s_0, 0)$, s. t. 曲面 $z = u(x,y)$ 在 P_0 附近参数方程为

$$\begin{cases} x = X(s,t) \\ y = Y(s,t) \\ z = Z(s,t) \end{cases}$$

下面我们来解出曲面 $z = u(x,y)$ 的表达式, 即原 Quasi-Linear Equation 的解：
我们已知在 $(s_0, 0)$ 点附近,

$$\begin{cases} x = X(s,t) \\ y = Y(s,t) \end{cases}$$

因为

$$\begin{vmatrix} X_s & X_t \\ Y_s & Y_t \end{vmatrix}(s_0,0) = \begin{vmatrix} f'(s_0) & a\big(f(s_0), g(s_0), h(s_0)\big) \\ g'(s_0) & b\big(f(s_0), g(s_0), h(s_0)\big) \end{vmatrix} = J \neq 0$$

所以根据**反函数定理 (Thm B.3.1)**, $\exists F, G \in C^1$ near P_0 为 $x = X(s,t),\ y = Y(s,t)$ 的反函数, s. t.

$$\begin{cases} s = F(x,y) \\ t = G(x,y) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = Z(s,t) = Z\big(F(x,y), G(x,y)\big)$$

Let

$$z = Z\big(F(x,y), G(x,y)\big) = u(x,y)$$

即得到了曲面 $z = u(x,y)$ 的方程, 也即求得了原方程的解.

- **必要性 (若 Γ 并非点 P_0 处的特征线)**：反证法. Assume $J = 0$. Then

$$J = b(P_0)f'(s_0) - a(P_0)g'(s_0) = 0$$

Since $h(s) = u\big(f(s), g(s)\big)$ in Γ, then

$$h'(s_0) = f'(s_0)u_x + g'(s_0)u_y$$

根据原 Quasi-Linear 方程, 还可得到关系：

$$c = au_x + bu_y$$

于是, at $s = s_0$, $x = f(s_0)$, $y = g(s_0)$, we have three relations

$$bf' - ag' = 0 \qquad\qquad h' = f'u_x + g'u_y \qquad\qquad c = au_x + bu_y$$

These imply that[1]

$$bh' - cg' = 0 \text{ and } ah' - cf' = 0$$

Therefore, 在 P_0 点, (f', g', h') 与 (a, b, c) 成比例, i.e.
曲线 Γ 在点 P_0 处的切线方向即为 (a, b, c) $\Rightarrow$ Γ 满足在 P_0 点处的特征线 ODE 方程.

由**充分性**证明过程, 根据 **ODE 解的存在唯一性定理 (Thm B.2.1)**, Γ 即为点 P_0 处的特征线, 这与假设条件"**Γ 并非点 P_0 处的特征线**"矛盾.

Therefore, we have proved the necessity.

$\square$

注. 可以容易地推广至**含 n 个自变量的 1 阶 Quasi-Linear Equation**.

[1]在等式 $h' = f'u_x + g'u_y$ 两侧乘 b, 在 $c = au_x + bu_y$ 两侧乘 g', 分别得到 $bh' = bf'u_x + bg'u_y$, $cg' = ag'u_x + bg'u_y$. 两个等式相减即得到 $bh' - cg' = 0$. 同理可得到 $ah' - cf' = 0$.

第二章　Second-Order Equations : Hyperbolic Equations for Functions of Two Variables

这一章我们来讨论**含 2 个自变量的 2 阶 PDE**, 首先将**特征线**的推广至 2 阶 Quasi-Linear Equation 上, 并利用特征线来对 **2 阶 Linear Equation** 进行化简分类, 而后我们将重点讨论**一维波动方程**, 介绍其两种不同的解法.

2.1　Characteristics for Quasi-Linear Second-Order Equations

这一节我们将讨论一般的**含 2 个自变量的 2 阶 Quasi-Linear Equation 的 Cauchy 问题**, 讨论其解的存在性问题, 并引出**特征线**的拓展定义, 为后续 **Linear Equation** 的化简分类工作做好铺垫.

Consider the general Quasi-Linear Equation

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d \tag{2.1}$$

where a, b, c, d depend on (x, y, u, u_x, u_y). 与 §1.2 & §1.3 中的讨论类似 (**Def 1.2.1**), 此处将**求解方程 (2.1)** 等价视作**求解 $\mathbb{R}^3$ 中的积分曲面 $z = u(x, y)$**.

对于 Cauchy 问题, 即已知积分曲面 $z = u(x, y)$ 在 xOy 平面上投影区域 Ω 中的一条曲线 γ, 及 γ 所对应积分曲面的曲线上 u, u_x, u_y 的表达式, 其中 γ 的参数方程及上述 Cauchy data 为

$$\gamma : \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} u\big|_\gamma = u\big(f(s), g(s)\big) = h(s) \\ u_x\big|_\gamma = \varphi(s) \\ u_y\big|_\gamma = \psi(s) \end{cases} \tag{2.2}$$

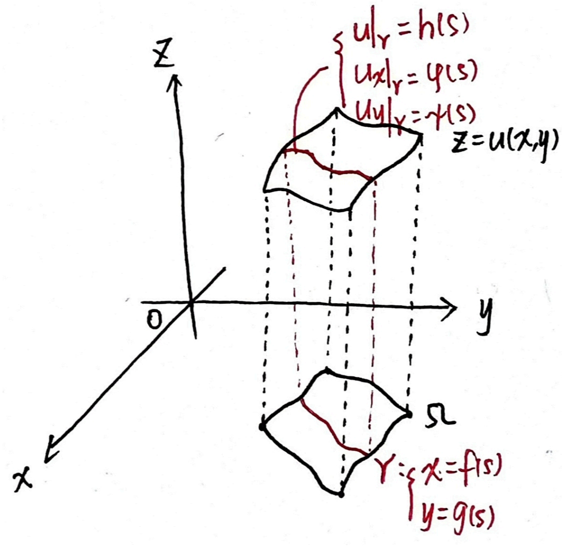

图 2.1: Cauchy Problelm for Quasi-Linear Second-Order Equation

对 (2.2) 中 Cauchy data 等式左右两侧对 s 求导, 同时结合原方程 (2.1), 可得到在 γ 所对应的积分曲面区域上, 有关系式

$$\begin{cases} f' u_{xx} + g' u_{xy} = \varphi' \\ f' u_{xy} + g' u_{yy} = \psi' \\ a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = d \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \\ a & 2b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' \\ \psi' \\ d \end{pmatrix}$$

考虑系数矩阵行列式

$$\widetilde{\Delta} = \begin{vmatrix} f' & g' & 0 \\ 0 & f' & g' \\ a & 2b & c \end{vmatrix} = a(g')^2 - 2bf'g' + c(f')^2$$

Fix $P_0 = (f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \in Graph(\varphi|_\gamma)$,

下面根据 Δ 是否为零可给出该 Cauchy 问题解的存在性讨论：

- 若 $\widetilde{\Delta}|_{P_0} \neq 0$, then

  By **Cramer's Rule**, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} can be uniquely determined near P_0.

  而我们已知 γ 上 u 及一阶导数 u_x, u_y 解析式 $\Rightarrow$ u 的各阶导数可确定 (u 足够光滑).

  If u analytic, then u 在 P_0 附近的解析式可被唯一确定. 从而此时可得到 P_0 附近 u 的解.

- $\widetilde{\Delta}|_{P_0} = 0$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ a\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2b\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right) + c\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0 \ &\Leftrightarrow\ a(dy)^2 - 2b(dx)(dy) + c(dx)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow\ a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0 \\
&\Leftrightarrow\ \frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}
\end{aligned}$$

  不难得到此时 P_0 在平面 xOy 上的投影落在满足方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ 的曲线上.

基于上述讨论, 我们给出**含 2 个自变量的 2 阶 Quasi-Linear Equation** 的**特征方程**、**特征线**等概念, 并给出 **2 阶 Quasi-Linear Equation** 的分类.

定义 2.1.1. 对于含 2 个自变量的 2 阶 Quasi-Linear Equation,

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = d \tag{2.3}$$

where a, b, c, d depend on (x, y, u, u_x, u_y). 我们称方程

$$a(dy)^2 - 2b(dx)(dy) + c(dx)^2 = 0 \tag{2.4}$$

为该 Quasi-Linear Equation 的特征方程. 称 xOy 平面上满足方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{2.5}$$

的曲线称为该 Quasi-Linear Equation 的特征线. 并对方程 (2.3) 给出如下分类：

- $\Delta = b^2 - ac < 0 \Rightarrow$ **elliptic (椭圆方程)**
- $\Delta = b^2 - ac > 0 \Rightarrow$ **hyperbolic (双曲方程)**
- $\Delta = b^2 - ac = 0 \Rightarrow$ **parabolic (抛物方程)**

注. • 不难理解, 该分类为**局部概念**, 即在积分曲面 $z = u(x, y)$ 的不同区域上, 方程的分类可能有所不同.

• 对于 **Linear Equation**, 还可定义**特征曲面**、**特征方向**等**特征理论**, 详情可见书[1].

• Fix $P_0 \in \gamma$. 对于**椭圆方程 (elliptic)**, 其在 P_0 附近不存在实特征线; 对于**双曲方程 (hyperbolic)**, 其在 P_0 附近存在两族不同的实特征线; 对于**抛物方程 (parabolic)**, 其在 P_0 点附近存在一族实特征线.

• 设 $\varphi(x, y) = C$ 为一族特征线, 即满足特征方程 (2.4), i.e.

$$a\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0$$

由于 $\varphi(x, y) = C$, 因此 $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$, thus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \ \Rightarrow\ a\Big(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\Big)^2 + 2b\frac{\varphi_x}{\varphi_y} + c = 0$$

i.e.

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$$

根据前面的讨论, 对于方程 (2.3) 在曲线 γ 上一点 P_0, 若 $\widetilde{\Delta}|_{P_0} \neq 0$ 且 u 解析, 则 u 在 P_0 附近可由幂级数展开式唯一确定. 基于此, 对于 **Hyperbolic Equation (双曲方程)**, 给出如下命题.

命题 2.1.1. [Propagation of Singularity].

对于 Hyperbolic 情形, 解本身或其导数的间断 (不连续) 等奇异情况只会发生在特征线上.

证明. 在特征线外, $\Delta \neq 0$, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} 可解.

(此处命题和证明都只给出了大致的叙述, 详细严谨的讨论可参见书籍[2])

□

[1]参考书籍:《数学物理方程讲义 (第二版)》– 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐 – 第 5 章

[2]参考书籍:《**Partial Differential Equations**》– **Fritz John** – §2.2 **Propagation of Singularities**.

2.2 The Linear Second-Order Equation

这一节我们主要来对一般的**含 2 个自变量的 2 阶 Linear Equation** 进行化简分类, 即

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + 2d u_x + 2e u_y + f u = 0 \tag{2.6}$$

where coefficients a, b, c, d, e, f depend on (x, y).

2.2.1 含 2 个自变量的 2 阶 Linear Equation 的标准型

首先先来给出**标准型**的概念.

定义 2.2.1. 对于如下 3 种形式的方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f & \text{(波动方程)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f & \text{(热传导方程)} \\ -\Delta u = f & \text{(位势方程)} \end{cases} \tag{2.7}$$

上述三个方程分别称为**双曲型 (Hyperbolic)**、**抛物型 (Parabolic)** 和**椭圆型 (Elliptic) 的标准型**.

注. 对**含 2 个自变量的 2 阶 Linear Equation** 进行化简分类的工作, 即将方程 (2.6) 经过变量代换后 (线性 / 非线性), 其**二阶项**被化为标准型. 而对于**含 2 个自变量**的情形, 上述标准型可简化表达为

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f \\ u_t - a^2 u_{xx} = f \\ -u_{xx} = f \end{cases}$$

2.2.2 含 2 个自变量的 2 阶 Linear Equation 的化简

Suppose $\Omega \subset xOy$ 为积分曲面 $z = u(x, y)$ 在平面 xOy 上的投影区域. Fix $P_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. 下面对方程 (2.6) 在 P_0 点附近的区域化简为**标准型 (Def 2.2.1)**.

下面针对方程 (2.6) 在点 P_0 附近的类型, 分为 3 种情况进行讨论:

1. **Hyperbolic ($\Delta = b^2 - ac > 0$, 双曲方程)**:

   根据 §2.1 节的讨论 (**Def 2.1.1**), 通过求解特征方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

   可得到两族实特征线 $\varphi(x, y) = C$ 与 $\psi(x, y) = C$. 令

$$\xi = \varphi(x, y), \ \ \eta = \psi(x, y) \tag{2.8}$$

   不难证明上述变换可逆[3], 即

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

   经计算,

$$\begin{cases} u_x = u_\xi \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + u_\eta \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \\ u_y = u_\xi \cdot \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + u_\eta \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{cases}, \quad \begin{cases} u_{xx} = \cdots \\ u_{xy} = \cdots \\ u_{yy} = \cdots \end{cases}$$

   代入原方程 (2.6), 得到

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \cdots = 0 \tag{2.9}$$

   where

$$\begin{cases} A = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 \\ B = a\varphi_x\psi_x + b\Big(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x\Big) + c\varphi_y\psi_y \\ C = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \end{cases}$$

---

[3]由于 $\varphi(x, y) = C$, 因此 $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$. 因为 φ 满足特征方程 (2.4), 所以 $-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$ 为方程 $a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0$ 的解. 同理可说明 $-\dfrac{\psi_x}{\psi_y}$ 为该方程两个不同的实根, 从而 $-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y} \neq -\dfrac{\psi_x}{\psi_y} \ \Rightarrow \ J \neq 0$.

Since $\varphi(x, y) = C$ and $\psi(x, y) = C$ 为方程 (2.6) 的两族特征线, then by **特征线方程所满足的关系 (Def 2.1.1)**,

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0 \quad \text{and} \quad a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 = 0$$

i.e. $A = C = 0$. 可以计算证明 $B \neq 0$, 等式 (2.9) 两侧除去 $2B$, 得到

$$u_{\xi\eta} + 2Du_\xi + 2Eu_\eta + Fu = 0$$

为了消去交叉项 $u_{\xi\eta}$, 此时再进行一次变量代换

$$x^{'} = \xi + \eta, \ y^{'} = \xi - \eta$$

可将方程化简为

$$u_{y'y'} - u_{x'x'} + 2D^{'}u_{x'} + 2E^{'}u_{y'} + F^{'}u = 0$$

此即得到了二次项化简为**双曲标准型 (Def 2.2.1)** 的结果.

2. **Parabolic** ($\Delta = b^2 - ac = 0$**, 抛物方程**):

由于 $\Delta = b^2 - ac = 0$, 因此求解特征方程可得到一族特征曲线 $\varphi(x, y) = C$. 此时任取函数 $\psi(x, y) = C$, s. t. φ 与 ψ 线性无关, 令

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

同理, 可通过计算得到

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \cdots = 0$$

where

$$\begin{cases} A = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 \\ B = a\varphi_x\psi_x + b\Big(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x\Big) + c\varphi_y\psi_y \\ C = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \end{cases}$$

Similarly, since $\varphi(x, y) = C$ 为特征线, then by **特征线方程所满足的关系 (Def 2.1.1)**,

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$$

Thus $A = 0$.

Since $\Delta = b^2 - ac = 0$, then $b = \pm\sqrt{ac}$. 不妨设 $a, b, c \geq 0$, then

$$\begin{aligned} B &= a\varphi_x\psi_x + b\Big(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x\Big) + c\varphi_y\psi_y \\ &= \Big(\sqrt{a}\varphi_x + \sqrt{c}\varphi_y\Big)\Big(\sqrt{a}\psi_x + \sqrt{c}\psi_y\Big) \end{aligned}$$

Since $a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$, $b = \sqrt{ac}$, then

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = \Big(\sqrt{a}\varphi_x + \sqrt{c}\varphi_y\Big)^2 = 0$$

Hence $A = B = 0$. 方程可化为

$$u_{\eta\eta} + 2Du_\xi + 2Eu_\eta + Fu = 0$$

对比**抛物方程的标准型 (Def 2.2.1)**, 为了消去 u_η, 再令

$$v = ue^{\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} 2E(\xi,\tau)\,d\tau}$$

从而可得到二次项化为**抛物方程的标准型 (Def 2.2.1)** 的结果

$$v_{\eta\eta} + 2D'v_\xi + F'v = 0$$

3. **Elliptic ($\Delta = b^2 - ac < 0$, 椭圆方程)**：

对于实数域 $\mathbb{R}$ 上的情形[4], 我们先引入变量替换, 而后再给出所需条件求解该替换方程, i.e.

$$\xi = \varphi(x, y), \ \ \eta = \psi(x, y)$$

同理可得到

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + \cdots = 0$$

where

$$\begin{cases} A = a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 \\ B = a\varphi_x\psi_x + b\Big(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x\Big) + c\varphi_y\psi_y \\ C = a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2 \end{cases}$$

参考**椭圆方程的标准型 (Def 2.2.1)**, 我们要化简的目标形式应为

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2Du_\xi + 2Eu_\eta + Fu = 0$$

可以验证的是, 当 φ 与 ψ 满足下述条件时,

$$\begin{cases} \varphi_x = \dfrac{b\psi_x + c\psi_y}{W} \\ \varphi_y = -\dfrac{a\psi_x + b\psi_y}{W} \end{cases}, \ W = \sqrt{ac - b^2}$$

此时可得到 $A = C, B = 0$. 从而即可得到目标形式.
而上述条件所需的必要条件为求解下述方程 (**Beltrami Equation**)

$$\Big(\frac{b\psi_x + c\psi_y}{W}\Big)_y + \Big(\frac{a\psi_x + b\psi_y}{W}\Big)_x = 0$$

[4]若放宽至复数域 $\mathbb{C}$ 上进行化简, 则过程将是 Trivial 的, 详情可见书籍：《**数学物理方程讲义 (第二版)**》**– 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐** – 第五章 §2 第 253 页.

下面给出一个例子.

例 2.2.1. **[The Tricomi Equation]**.

$$u_{yy} - yu_{xx} = 0$$

解. 在一般形式下

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = d$$

$a = -y,\ b = 0,\ c = 1$. 计算得到 $\Delta = b^2 - ac = y$. 于是方程可分类为:

$$\begin{cases} y > 0,\ \text{Hyperbolic (双曲方程)} \\ y = 0,\ \text{Parabolilc (抛物方程)} \\ y < 0,\ \text{Elliptic (椭圆方程)} \end{cases}$$

For $y > 0$, calculate the characteristic equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \pm\frac{1}{\sqrt{y}}$$

i.e. 特征曲线为

$$3x \pm 2y^{\frac{3}{2}} = C$$

Let

$$\xi = 3x - 2y^{\frac{3}{2}},\ \eta = 3x + 2y^{\frac{3}{2}}$$

得到

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6}\frac{u_\xi - u_\eta}{\xi - \eta} = 0$$

为了消去交叉项 $u_{\xi\eta}$, let

$$x' = \xi + \eta,\ y' = \xi - \eta$$

Then

$$u_\xi = u_{x'}\frac{\partial x'}{\partial \xi} + u_{y'}\frac{\partial y'}{\partial \xi} = u_{x'} + u_{y'} \quad , \quad u_\eta = u_{x'}\frac{\partial x'}{\partial \eta} + u_{y'}\frac{\partial y'}{\partial \eta} = u_{x'} - u_{y'}$$

And

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} = \left(u_\xi\right)_\eta = \left(u_\xi\right)_{x'}\frac{\partial x'}{\partial \eta} + \left(u_\xi\right)_{y'}\frac{\partial y'}{\partial \eta} &= \left(u_\xi\right)_{x'} - \left(u_\xi\right)_{y'} \\ &= \left(u_{x'x'} + u_{x'y'}\right) - \left(u_{x'y'} + u_{y'y'}\right) = u_{x'x'} - u_{y'y'} \end{aligned}$$

代入可解得

$$u_{x'x'} - u_{y'y'} + \frac{1}{3y'}u_{y'} = 0,\ \text{when } y > 0$$

□

2.3 The One-Dimensional Wave Equation

这一节我们将在两种不同的边界条件上, 给出**一维波动方程**的两种不同解法 (**特征线法**和**分离变量法**), 并将给出其**解的存在唯一性**讨论.

2.3.1 一维齐次波动方程的特征线法 (上半空间, D'Alembert, 能量不等式)

对于在上半空间 $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ 上考虑一般的一维波动方程的初值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ \ x\in\mathbb{R},t>0 \\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x) \\ u_t\Big|_{t=0}=\psi(x) \end{cases} \tag{2.10}$$

根据**线性 PDE 的叠加原理 (Thm A.2.1)**, 该方程的解可写为如下两个子问题的解的和:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ \ x\in\mathbb{R},t>0 \\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x) \\ u_t\Big|_{t=0}=\psi(x) \end{cases},\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ \ x\in\mathbb{R},t>0 \\ u\Big|_{t=0}=0 \\ u_t\Big|_{t=0}=0 \end{cases}$$

又根据**一维波动方程的齐次性原理 (Thm A.3.1)**, 事实上只需求解第一个**齐次初值问题**的解, 在后面我们也将给出有关**解的存在唯一性**的严谨讨论.

对于一维齐次波动方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ \ x\in\mathbb{R},t>0 \\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x) \\ u_t\Big|_{t=0}=\psi(x) \end{cases} \tag{2.11}$$

解的存在唯一性问题, 下面给出定理.

定理 2.3.1. [一维齐次波动方程, D'Alembert, 能量不等式].
If $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, then for the problem (2.11)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

It has a unique solution $u \in C^2\Big(\mathbb{R} \times (0, \infty)\Big) \cap C^1\Big(\mathbb{R} \times [0, \infty)\Big)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)\,d\xi \tag{2.12}$$

which is called the **D'Alembert Formula**.

注. $\forall$ fixed $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, by **D'Alembert Formula**, 解 $u(x,t)$ 在该点处取值

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x_0 + ct_0) + \varphi(x_0 - ct_0)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \psi(\xi)\,d\xi$$

故 u 在点 (x_0, t_0) 处取值只与 φ 在 $x_0 - ct_0, x_0 + ct_0$ 两点处的取值, 以及 ψ 在区间 $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ 上的取值有关. 基于此, 下面我们给出**依赖区间、决定区域、影响区域**等概念.

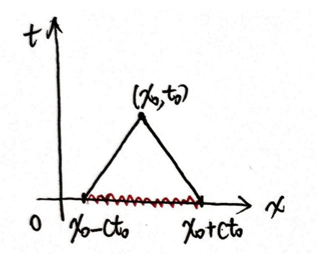

图 2.2: 点 (x_0, t_0) 的依赖区间

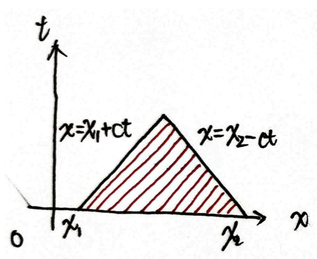

图 2.3: 区间 $[x_1, x_2]$ 的决定区域

定义 2.3.1. [依赖区间, 决定区域, 影响区域][5].
对于初值问题 (2.11), 称 x 轴上的区间 $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ 为点 (x_0, t_0) 的依赖区间, 表示解 $u(x,t)$ 在点 (x_0, t_0) 处取值只与 φ 在 $x_0 - ct_0, x_0 + ct_0$ 两点处的取值, 以及 ψ 在区间 $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ 上的取值有关, 而与其他点上的初始条件无关.

[5]详细论述可参考:《数学物理方程讲义 (第二版)》– 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐 – §2.2.3 依赖区间、决定区域和影响区域.

对于 x 轴上任一区间 $[x_1, x_2]$, 直线 $x = x_1 + ct$ 与 $x = x_2 - ct$ 一起围成一个三角形区域, 解 $u(x,t)$ 在此三角形区域中任一点 (x_0, t_0) 的依赖区间都完全落在 $[x_1, x_2]$ 中, 而与此区间外的初始条件无关, 这个区域称为区间 $[x_1, x_2]$ 的决定区域.

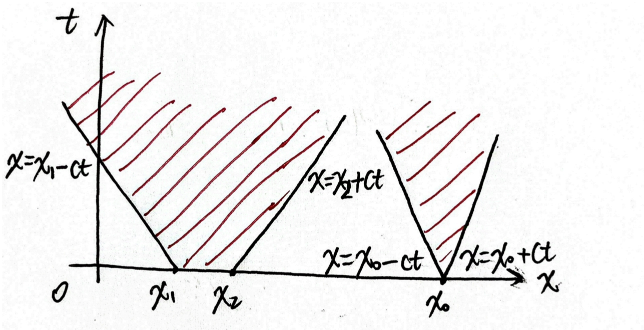

图 2.4: 区间 $[x_1, x_2]$ 及点 x_0 的影响区域

对于 x 轴上任一区间 $[x_1, x_2]$, 区域

$$E = \left\{(x,t) \;\middle|\; x_1 - ct \leq x \leq x_2 + ct,\ \ t > 0\right\}$$

中每一点的依赖区间都与 $[x_1, x_2]$ 有交集, 即解 $u(x,t)$ 在其中任一点的取值都要受到区间 $[x_1, x_2]$ 上某些点处初始条件的影响, 称平面区域 E 为区间 $[x_1, x_2]$ 的影响区域. 特别地, 当 $x_1 = x_2 = x_0$ 时, 我们可以得到一个点 x_0 的影响区域, 即定义域中函数值能被 x_0 处初始条件影响的范围.

证明.

- 存在性:

  [思路：先证明若有解, 则解满足上述形式；再将上述 u 回代至原问题, 证明它是解].

假设原问题有解. 对于 Hyperbolic Equation

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

其特征方程为

$$(dx)^2 - c^2(dt)^2 = 0$$

得到两族实特征线 $x \pm ct = C$. 下面进行可逆坐标变换 (合理性可见 (2.8)), 令

$$\xi = x + ct,\ \ \eta = x - ct$$

经过计算, 原波动方程等价于

$$u_{\xi\eta} = 0$$

由此可知 u 中不含 ξ 与 η 的交叉项, 即可表示为

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

i.e.

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct),\ \ x \in \mathbb{R}, t > 0$$

对于原初值问题 (2.11) 的边界条件, 可转化为

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ cF^{'}(x) - cG^{'}(x) = \psi(x) \end{cases}$$

Since $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, then

$$F^{'}(x) = \frac{1}{2c}\Big(c\varphi(x) + \psi(x)\Big),\ \ G^{'}(x) = \frac{1}{2c}\Big(c\varphi(x) - \psi(x)\Big)$$

对 x 积分, 结合 $F(x) + G(x) = \varphi(x)$, 可得

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{2c}\Big(c\varphi(x) + \int_{x_0}^{x} \psi(s)\, ds\Big) + \alpha \\ G(x) = \dfrac{1}{2c}\Big(c\varphi(x) - \int_{x_0}^{x} \psi(s)\, ds\Big) + \beta \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

从而若原问题有解, 则解 u 可表达为

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x + ct) + G(x - ct) \\ &= \frac{1}{2c}\Big[c\varphi(x + ct) + \int_{x_0}^{x+ct} \psi(s)\, ds\Big] + \frac{1}{2c}\Big[c\varphi(x - ct) - \int_{x_0}^{x-ct} \psi(s)\, ds\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds \end{aligned}$$

将上述函数 $u(x, t)$ 回代至原问题 (2.11), 不难证明其就是原问题的一个解.

- 唯一性：[利用 能量不等式 进行证明].

  $\forall$ fixed $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, 根据 **Def 2.3.1**, 我们可得到其依赖区间为 $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ 及该区间的决定区域. 对于 $\forall \tau \in [0, t_0]$, 定义区域 K_τ 如下

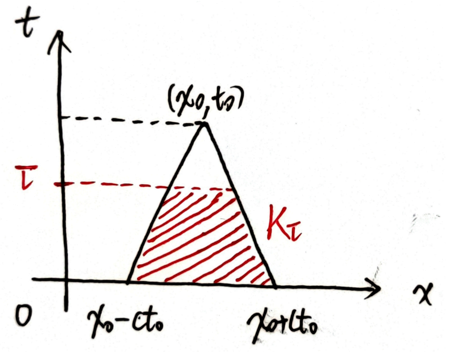

图 2.5: 依赖区间及区域 K_τ 的定义

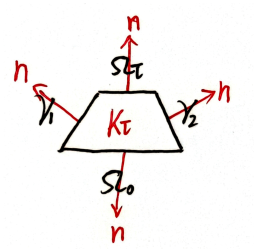

图 2.6: 区域 K_τ 各边记号及法向

经过简单的计算, 可得到各边法向 $\vec{n} = (n_x, n_t)$ 为：

$$\begin{cases} \Omega_\tau : n_x = 0,\ n_t = 1 \\ \Omega_0 : n_x = 0,\ n_t = -1 \\ \gamma_1 : n_x = \dfrac{-1}{\sqrt{1+c^2}},\ n_t = \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \\ \gamma_2 : n_x = \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}},\ n_t = \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \end{cases}$$

下面来构造能量不等式：

Since $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ on $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, then

$$\int_{K_\tau} u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = 0$$

Since

$$\begin{cases} u_t \cdot u_{tt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t} u_t^2 \\ u_t \cdot u_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}(u_t \cdot u_x) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t} u_x^2 \end{cases}$$

Hence by **Gauss-Green Theorem (Thm B.4.1)**,

$$0 = \int_{K_\tau} \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[u_t^2 + c^2 u_x^2] - c^2 \frac{\partial}{\partial x}(u_t \cdot u_x) \right\} = \int_{\partial K_\tau} \left\{ \frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2) \cdot n_t - c^2 u_t u_x \cdot n_x \right\}$$

$$= \int_{\Omega_\tau} \frac{1}{2}[u_t^2 + c^2 u_x^2] + \int_{\Omega_0} -\frac{1}{2}[u_t^2 + c^2 u_x^2] + \int_{\gamma_1} \left\{ \frac{1}{2}[u_t^2 + c^2 u_x^2] \cdot \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - c^2 u_t u_x \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1+c^2}} \right) \right\} +$$

$$\int_{\gamma_2} \left\{ \frac{1}{2}[u_t^2 + c^2 u_x^2] \cdot \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - c^2 u_t u_x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right\}$$

对于上述等式, 将 Ω_0 上的积分移至等号另一侧, 等式两边乘 2.

Since $\Omega_0 \subset \mathbb{R} \times \{t=0\}$, then

$$\int_{\Omega_0} [u_t^2 + c^2 u_x^2] = \int_{\Omega_0} [\psi^2 + c^2 \varphi_x^2]$$

At the same time,

$$\int_{\gamma_1} \left\{ \frac{1}{2}[u_t^2 + c^2 u_x^2] \cdot \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - c^2 u_t u_x \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1+c^2}}\right) \right\} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \cdot \int_{\gamma_1} (u_t + c u_x)^2$$

Similarly,

$$\int_{\gamma_2} \left\{ \frac{1}{2}[u_t^2 + c^2 u_x^2] \cdot \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} - c^2 u_t u_x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \right\} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \cdot \int_{\gamma_2} (u_t - c u_x)^2$$

故进行上述移项操作后, 可得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} [\psi^2 + c^2 \varphi_x^2] &= \int_{\Omega_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2] + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \cdot \int_{\gamma_1} (u_t + c u_x)^2 + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \cdot \int_{\gamma_2} (u_t - c u_x)^2 \\ &\geq \int_{\Omega_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \end{aligned}$$

i.e.

$$\int_{\Omega_0} [\psi^2 + c^2 \varphi_x^2] \geq \int_{\Omega_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2], \ \forall \tau \in [0, t_0], \ \forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \tag{2.13}$$

此即为**一维齐次波动方程的能量不等式**[6], 积分 $\int_{\Omega_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2]$ 称为能量积分, 表示弦振动问题中弦段 Ω_τ 在 t 时刻的总能量. 下面利用该不等式来证明解的唯一性:

Suppose both u_1 & u_2 are solutions. Then

$$\begin{cases} (u_1 - u_2)_{tt} - c^2 (u_1 - u_2)_{xx} = 0, \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ (u_1 - u_2)\Big|_{t=0} = 0 \\ (u_1 - u_2)_t\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Then by **Energe Inequality**,

$$0 \geq \int_{\Omega_\tau} (u_1 - u_2)_t^2 + c^2 (u_1 - u_2)_x^2, \ \forall \tau \in [0, t_0], \ \forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

Thus

$$(u_1 - u_2)_t \equiv (u_1 - u_2)_x \equiv 0 \text{ on } \mathbb{R} \times [0, \infty)$$

Hence

$$u_1 - u_2 \equiv C \text{ for some } C \in \mathbb{R}$$

Since $(u_1 - u_2)\Big|_{t=0} = 0$, then $C = 0$. Therefore, $u_1 = u_2$.

□

[6]对于一般的一维波动方程的**能量不等式**, 可见附录**A - Thm A.4.1**.

2.3.2 一维波动方程的特征线法 (上半空间)

根据**一维齐次波动方程的解 (Thm 2.3.1)**, 可得到齐次波动方程的解为

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\Big[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\Big]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)\,d\xi$$

令 $\varphi=0$, 得到定解问题 (A.2) 的解为

$$M_\psi=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)\,d\xi$$

从而对于非齐次问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ \ x\in\mathbb{R},t>0\\ u\Big|_{t=0}=0\\ u_t\Big|_{t=0}=0\end{cases}$$

根据**一维波动方程的 Duhamel 原理 (齐次化原理, Thm A.3.1)**, 得到其解为

$$\begin{aligned}u(x,t)=\int_0^t M_{f_\tau}(x,t-\tau)\,d\tau&=\frac{1}{2c}\int_0^t\Big(\int_{x-c\tau}^{x+c\tau}f(\xi,t-\tau)\,d\xi\Big)\,d\tau\\&=\frac{1}{2c}\int_0^t\Big(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi\Big)\,d\tau\end{aligned}$$

where $f_\tau=f(x,\tau)$. 根据**线性 PDE 的叠加原理 (Thm A.2.1)**, 可得到上半空间 $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ 上一般的一维波动方程的初值问题的解, 即下面给出的定理.

定理 2.3.2. [一维波动方程解的存在唯一性, 上半空间, D'Alembert, 能量不等式].
If $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1\big(\mathbb{R} \times [0,\infty)\big)$, then for the Cauchy Problem (2.10)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

It has a unique solution $u \in C^2\big(\mathbb{R} \times (0,\infty)\big) \cap C^1\big(\mathbb{R} \times [0,\infty)\big)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2c}\int_0^t \Big(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\, d\xi\Big)\, d\tau \tag{2.14}$$

which is called the **D'Alembert Formula**.

注. • 对于解的**存在性**, 可根据**一维齐次波动方程解的存在唯一性 (Thm 2.3.1)** 与**线性 PDE 的叠加原理 (Thm A.2.1)**, 得到解的形式的推导过程. 再代入原问题证明其是原方程的解.

• 对于解的**唯一性**, 可根据**一维波动方程的能量不等式 (Thm A.4.1)**, 类比**一维齐次波动方程解的存在唯一性 (Thm 2.3.1)** 中唯一性的证明得到.

2.3.3 一维波动方程的特征线法 (半无界问题)

对于半无界区域 $[0,\infty)\times[0,\infty)$ 上考虑一般的一维波动方程的初值问题, 对于 $x=0$ 处所给的初值条件, 一般有以下两种:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & x>0, t>0\\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x)\\ u_t\Big|_{t=0}=\psi(x)\\ u\Big|_{x=0}=g(t)\end{cases},\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & x>0, t>0\\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x)\\ u_t\Big|_{t=0}=\psi(x)\\ u_x\Big|_{x=0}=g(t)\end{cases}$$

上述两个问题分别称为第一类边界问题和第二类边界问题. 对于这两种问题的一般形式, 分别作变换

$$v(x,t)=u(x,t)-g(t)\quad,\quad v(x,t)=u(x,t)-x\cdot g(t)$$

可将各自在 $x=0$ 处的边值条件变为 0, 即 $u\Big|_{x=0}=0$ 及 $u_x\Big|_{x=0}=0$. 故只需考虑如下齐次边界问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & x>0, t>0\\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x)\\ u_t\Big|_{t=0}=\psi(x)\\ u\Big|_{x=0}=0\end{cases},\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), & x>0, t>0\\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x)\\ u_t\Big|_{t=0}=\psi(x)\\ u_x\Big|_{x=0}=0\end{cases}$$

对于一维实轴 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 $h(x)$, 若 h 为奇函数, 则有 $h\Big|_{x=0}=0$; 若 h 为偶函数, 则 $h_x\Big|_{x=0}=0$. 基于该想法, 我们对上述两种边界问题, 分别采用奇延拓和偶延拓的方法进行求解, 即将 f,φ,ψ 延拓至整个上半空间 (f 为 $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, φ,ψ 为 $\mathbb{R}$) 上, 使得 f,φ,ψ 均关于 x 称为奇 (偶) 函数.

定理 2.3.3. [一维波动方程解的存在唯一性, 半无界问题, D'Alembert, 第一类边界]. If $\varphi \in C^2[0,\infty)$, $\psi \in C^1[0,\infty]$, $f \in C^1\big([0,\infty)\times[0,\infty)\big)$, then for the Cauchy Problem (2.10)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \;\; x>0, t>0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u\Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

此时可对 f, φ, ψ 进行奇延拓:

$$\overline{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), \;\; x\ge 0, t\ge 0 \\ -f(-x,t), \;\; x<0, t\ge 0 \end{cases}, \quad \overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), \;\; x\ge 0 \\ -\varphi(-x), \;\; x<0 \end{cases}, \quad \overline{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), \;\; x\ge 0 \\ -\psi(-x), \;\; x<0 \end{cases}$$

Then for the new Cauchy Problem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \overline{f}(x,t), \;\; x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u\Big|_{t=0} = \overline{\varphi}(x) \\ u_t\Big|_{t=0} = \overline{\psi}(x) \\ u\Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

It has a unique solution $\overline{u} \in C^2\big(\mathbb{R}\times(0,\infty)\big)\cap C^1\big(\mathbb{R}\times[0,\infty)\big)$:

$$\overline{u}(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\overline{\varphi}(x+ct)+\overline{\varphi}(x-ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\overline{\psi}(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2c}\int_0^t\Big(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\overline{f}(\xi,\tau)\,d\xi\Big)\,d\tau \tag{2.15}$$

which is called the **D'Alembert Formula**. In response to the origin problem, it has the unique solution $u \in C^2\big((0,\infty)\times(0,\infty)\big)\cap C^1\big([0,\infty)\times[0,\infty)\big)$, which can be represented by:

When $x > ct$,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2c}\int_0^t\Big(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\Big)\,d\tau$$

When $x < ct$,

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}\Big[\varphi(x+ct)-\varphi(ct-x)\Big] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(\xi)\,d\xi \\ &+\frac{1}{2c}\left[\int_{t-\frac{x}{c}}^{t}\Big(\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\Big)\,d\tau + \int_0^{t-\frac{x}{c}}\Big(\int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\Big)\,d\tau\right] \end{aligned}$$

注. • 解的**存在唯一性**可类似 **Thm 2.3.2** 得到, 其中**唯一性**可在半无界区域上利用能量不等式证明[7].

• 对于**第二类边界问题**, 将 f, φ, ψ 进行**偶延拓**,

$$\overline{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x \geq 0, t \geq 0 \\ f(-x,t), & x < 0, t \geq 0 \end{cases}, \quad \overline{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \quad \overline{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ \psi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

可类似得到**解的存在唯一性**.

[7]详细论述可参考:《**数学物理方程讲义 (第二版)**》– 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐 – §2.2.5 半无界问题.

2.3.4 Sturm-Liouville Problem

这一小节我们将对于**二阶常微分方程**

$$X'' + \lambda X = 0,\ x \in (0, l)$$

的 **Sturm-Liouville 问题**给出相关结论. 这是下一节**分离变量法**的理论基础. 首先给出一些基础概念的定义.

定义 2.3.2. 对于 ODE 齐次边值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0,\ x \in (0, l) \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0 \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 \end{cases},\ \alpha_i, \beta_i \geq 0,\ \alpha_i + \beta_i \neq 0,\ \forall i = 1, 2 \tag{2.16}$$

使其具有非零解的 λ 称为该边值问题的**特征值**, 对应的非零解 $X(x)$ 称为这个特征值对应的**特征函数**. 而寻求方程 (2.16) 的所有特征值和特征函数的问题称为**Sturm-Liouville 问题** 或**特征值问题**.

下面我们不加证明地给出有关二阶 ODE 的 **Sturm-Liouville 问题**的相关结论.

定理 2.3.4. [Sturm-Liouville][8].

考虑 $[0,l]$ 上的 Sturm-Liouville 问题 (2.16)

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \ x \in (0,l) \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0 \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 \end{cases}, \ \alpha_i, \beta_i \geq 0, \ \alpha_i + \beta_i \neq 0, \ \forall i = 1, 2$$

其具有如下性质：

(i) 其有可数个非负实特征值, 每个特征值单重, 特别当 $\beta_1 + \beta_2 > 0$ 时, 所有特征值均为正数.

(ii) 所有特征值组成一个严格单调递增、以无穷远点为聚点的序列 (无有限聚点)：

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

(iii) 对于所有的特征值 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 对应的特征函数 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其构成了 Hilbert 空间 $L^2[0,l]$ 上的一组完备正交系[9], 即

$$\int_0^l X_k(x) X_l(x)\, dx = 0, \ \forall k \neq l$$

且对于 $\forall f \in L^2[0,l]$, $\exists C_n \in \mathbb{R}$, s. t.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x)$$

where

$$C_n = \frac{(f, X_n)}{(X_n, X_n)} = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x)\, dx}{\int_0^l X_n^2(x)\, dx}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

[8]定理的部分证明可参考：《数学物理方程讲义 (第二版)》– 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐 – §2.4 定理 4.1.

[9]在《泛函分析讲义》– 张恭庆、林源渠一书中称为封闭的正交规范集.

2.3.5 一维齐次波动方程的分离变量法 (混合问题)

在**混合区域** $[0,l]\times[0,\infty)$ 上考虑一维齐次波动方程的初值问题：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ \ x\in(0,l), t>0 \\
u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \\
u_t\Big|_{t=0} = \psi(x) \\
u(0,t) = u(l,t) = 0
\end{cases}
\tag{2.17}
$$

我们既可以类似 §2.3 节 **Thm 2.3.3**, 将 u 延拓为整个上半空间的函数, 再利用 **D'Alembert 公式 (Thm 2.3.2)** 求解 (在 **Thm 2.3.5** 注解中会讨论)；但也可通过下面介绍的**分离变量法**进行求解. 且该方法还可推广至**热方程 (Heat Equation) 的混合问题**等问题的求解中.

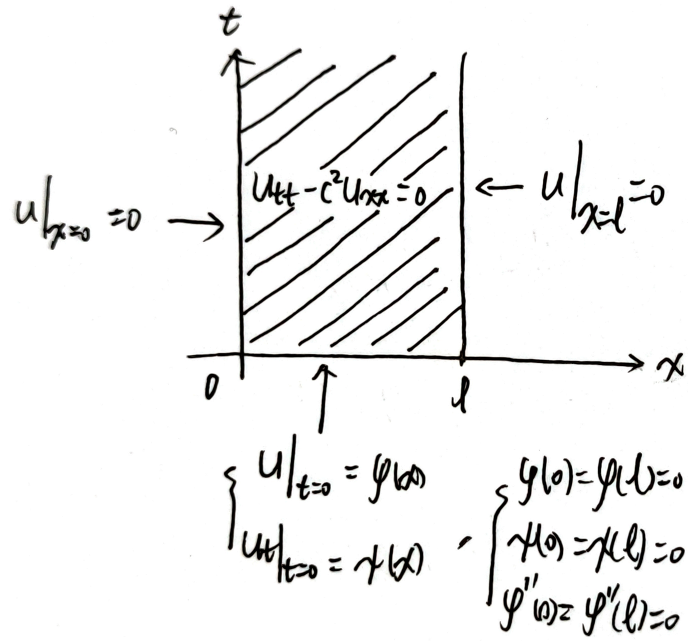

图 2.7: 一维齐次波动方程的混合问题

下面给出**分离变量法**求解一维齐次波动方程混合问题的**解的存在唯一性**讨论.

定理 2.3.5. [一维齐次波动方程, 混合问题, 分离变量法].
Suppose $\varphi \in C^3[0,l]$, $\psi \in C^2[0,l]$, 且 $\varphi(x), \psi(x)$ 满足相容性条件:

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi(l) = 0 \\ \psi(0) = \psi(l) = 0 \\ \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0 \end{cases}$$

Then for the homogenuous problem (2.17)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \ x \in (0,l), t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

The formula

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{cn\pi}{l} t + B_n \cos \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{2.18}$$

where

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{2}{cn\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \\ B_n = \dfrac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \end{cases}, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.19}$$

defines a function $u \in C^2\big([0,l] \times [0,\infty)\big)$ and gives the unique solution of (2.17) in $C^2\big([0,l] \times [0,\infty)\big)$.

注. 事实上, 对于问题 (2.17), 我们可以采取与 **Thm 2.3.2** 类似的**对称开拓法**, 并结合 **D'Alembert 公式**求解. 根据 **Thm 2.3.2**, 此方法关于 φ, ψ 的光滑性可进一步减弱为

$$\varphi \in C^2[0,l], \ \ \psi \in C^1[0,l]$$

对称开拓法即定义周期为 $2l$ 的周期奇函数 Φ, Ψ, 使其分别成为 φ, ψ 的延拓, 具体为

$$\begin{cases} \Phi(x) = -\Phi(-x), \ \ \Phi(x) = \Phi(x+2l), \ \ x \in \mathbb{R} \\ \Phi(x) = \varphi(x), \ \ x \in [0,l] \end{cases}, \quad \begin{cases} \Psi(x) = -\Psi(-x), \ \ \Psi(x) = \Psi(x+2l), \ \ x \in \mathbb{R} \\ \Psi(x) = \psi(x), \ \ x \in [0,l] \end{cases}$$

可以证明, 在 $\varphi \in C^3, \psi \in C^2$ 的条件下, 这两种方法得到的 u 相等.

证明.

- 存在性：[分离变量法求解过程]

[思路：先证明若有特解可满足变量分离, 则解满足上述形式；(**Step 1**：**P38 - 40**)
再将该特解 u 回代至原问题, 证明它是解 (**Step 2**：**P40 - 44**)].

Step 1 . 先证明若有特解可满足变量分离, 则解满足上述形式：

假设非零特解 $u(x,t) \in C^2\Big([0,l]\times[0,\infty)\Big)$ 具有变量分离形式, i.e. $\exists X(x), T(t)$, s. t.

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Since

$$u_{tt} - c^2 u_x x = 0 \quad \text{and} \quad u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0$$

Then

$$XT^{''} - c^2 X^{''} T = 0 \quad \text{and} \quad X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0,\ \forall t > 0$$

i.e.

$$\frac{X^{''}}{X} = \frac{T^{''}}{c^2 T}$$

由于等式左侧仅为 x 的函数, 右侧为 t 的函数, 因此该等式恒为定值, 记为 $-\lambda$, 则有

$$T^{''} + c^2 \lambda T = 0,\ \ t > 0$$

$$X^{''} + \lambda X = 0,\ \ x \in (0,l)$$

由于 $u(x,t)$ 为非零特解, $X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0$, 因此 $X(0) = X(l) = 0$. 从而 X 满足

$$\begin{cases} X^{''} + \lambda X = 0,\ \ x \in (0,l) \\ X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

故根据 **Def 2.3.2**, 求解 $X(x)$ 即为求解上述 **Sturm-Liouville** 问题. 根据**一阶常系数线性 ODE 的求解 (Thm B.5.1)**, 得到上述 ODE 的通解为

$$X(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x$$

结合边界条件 $X(0) = X(l) = 0$, 得到

$$C_2 = 0,\ \ C_1 \sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$$

由于 $u \not\equiv 0, X \not\equiv 0$, 因此 $C_1 \neq 0, \sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$. 从而该 Sturm-Liouville 问题所有可能的特征值为

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \ n = 0, 1, 2, \cdots$$

根据 **Sturm-Liouville 问题的性质 (Thm 2.3.4)**, 结合该方程, 可得到其所有的特征值及对应特征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \ X_n(x) = C\sin\frac{n\pi}{l}x, \ n = 1, 2, \cdots$$

通过求解 ODE

$$T'' + c^2\lambda_n T = 0, \ t > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

得到

$$T_n(t) = A_n \sin\frac{cn\pi}{l}t + B_n\cos\frac{cn\pi}{l}t, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

即可得到满足方程 $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ 与边界条件 $u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=l} = 0$ 的函数 u_n

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n\sin\frac{cn\pi}{l}t + B_n\cos\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Let

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{cn\pi}{l}t + B_n\cos\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

由于我们此时是求形式解, 因此不妨假设求和、求导、极限均可交换次序. 若上述定义的 $u(x,t)$ 为所需特解, 则满足问题 (2.17) 的边界条件, 即

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x)$$

i.e.

$$\varphi(x) = u\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\psi(x) = u_t\Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{cn\pi}{l}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

根据 **Sturm-Liouville 问题的性质 (Thm 2.3.4)**, Sturm-Liouville 问题 (2.20) 的所有特征函数 $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2[0,l]$ 构成了 Hilbert 空间 $L^2[0,l]$ 的一组完备正交系. 又因为 $\varphi \in C^3[0,l], \psi \in C^2[0,l]$ 在 $[0,l]$ 上连续, 所以 $\varphi, \psi \in L^2[0,l]$. Thus

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

where $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n = \frac{(\varphi, X_n)}{(X_n, X_n)} = \frac{\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \, dx} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

$$\psi_n = \frac{(\varphi, X_n)}{(X_n, X_n)} = \frac{\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \, dx} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

Take

$$A_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

因此若满足变量分离的特解存在, 则其形式为 (2.18)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{cn\pi}{l} t + B_n \cos \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

Step 2 . <u>证明上述定义的 $u(x,t)$ 是原问题的解:</u>

要证明上述定义的 $u(x,t)$ 是原问题 (2.17) 的解, 将其代入各条件, 即证

(1). $$L \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} L u_n$$

(2). $$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} u_n, \quad \lim_{x\to l} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to l} u_n$$

(3). $$\lim_{t\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to 0} u_n$$

(4). $$\lim_{t\to 0} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to 0} \frac{\partial}{\partial t} u_n$$

where $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. 而满足上述条件, 只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D^2 u_n$$

一致收敛. 下面分别进行证明.

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **一致收敛**：注意到 $u_n = X_n T_n$.

根据上述讨论,

$$T_n(x) = \frac{l \cdot \psi_n}{cn\pi} \sin \frac{cn\pi}{l} t + \varphi_n \cos \frac{cn\pi}{l} t$$

根据分部积分公式,

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \, dx \\
&= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \left(-\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \right)' \, dx \\
&= \frac{2}{l} \varphi(x) \cdot \left(-\frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \right) \Big|_0^l + \frac{2}{l} \int_0^l \varphi'(x) \cdot \frac{l}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx
\end{aligned}$$

由于 $\varphi \in C^3[0, l]$, 因此对 φ_n 再用两次分部积分公式, 可得

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \frac{2}{n\pi} \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \\
&= \frac{2}{n\pi} \int_0^l \varphi'(x) \left(\frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l} x \right)' \, dx \\
&= -\frac{2l}{(n\pi)^2} \int_0^l \varphi''(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \\
&= -\frac{2l^2}{(n\pi)^3} \int_0^l \varphi'''(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \\
&:= -\frac{2l^2}{(n\pi)^3} a_n
\end{aligned}$$

Similarly, 对 ψ_n 运用两次分部积分公式, 可得

$$\psi_n = -\frac{2l}{(n\pi)^2} \int_0^l \psi''(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx := -\frac{2l}{(n\pi)^2} b_n$$

Therefore,

$$T_n(t) = -\frac{2l^2}{(n\pi)^3} a_n \cdot \cos \frac{cn\pi}{l} t - \frac{2l^2}{c(n\pi)^3} b_n \cdot \sin \frac{cn\pi}{l} t$$

where

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^l \varphi'''(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx \\
b_n &= \int_0^l \psi''(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx
\end{aligned}$$

Since $\varphi \in C^3[0, l]$, $\psi \in C^2[0, l]$, then $\exists M > 0$, s. t.

$$\left| \varphi''' \right|, \left| \psi'' \right|, |a_n|, |b_n| \le M, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Hence $\exists C > 0$ constant, s. t.

$$|T_n(t)| \le C \cdot \frac{1}{n^3},\ \forall t > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Since $X_n = \sin \dfrac{n\pi}{l} x$, and $|X_n(x)| \le 1,\ \forall x \in [0,l], \forall n \in \mathbb{N}$, then

$$|u_n(x,t)| = |T_n(t) \cdot X_n(x)| \le C \cdot \frac{1}{n^3},\ \forall x \in [0,l], t > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Therefore, $\forall x \in [0,l], t > 0$,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) < \infty \text{ 一致收敛}$$

(ii) $\underline{\sum\limits_{n=1}^{\infty} Du_n \text{ 一致收敛}}$：即证

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n^{'}(x),\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{'}(t) X_n(x) \text{ 一致收敛}$$

Since $X_n(x) = \sin \dfrac{n\pi}{l} x$, then $\left|X_n^{'}(x)\right| \le 1$,

$$\left|T_n(t) \cdot X_n^{'}(x)\right| \le |T_n(t)| \le C \cdot \frac{1}{n^3},\ \forall x \in [0,l], t > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

而根据

$$T_n(t) = -\frac{2l^2}{(n\pi)^3} a_n \cdot \cos \frac{cn\pi}{l} t - \frac{2l^2}{c(n\pi)^3} b_n \cdot \sin \frac{cn\pi}{l} t$$

可得到

$$\left|T_n^{'}(t) \cdot X_n(x)\right| \le \left|T_n^{'}(t)\right| \le C \cdot \frac{1}{n^2},\ \forall x \in [0,l], t > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n^{'}(x),\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{'}(t) X_n(x) \text{ 一致收敛}$$

(iii) $\underline{\sum\limits_{n=1}^{\infty} D^2 u_n$ **一致收敛**：即证}

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)X_n'(x),\ \ \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)X_n'(x),\ \ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n''(x),\ \text{一致收敛}$$

根据前面的讨论, 后两者显然一致收敛. 下面证明 $\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)X_n'(x)$ 一致收敛：
Since

$$\left|T_n'' X_n\right| \le C\left(\frac{|a_n|}{n} + \frac{|b_n|}{n}\right)$$

Hence by **比较判别法**, it suffices to show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \text{ converges}$$

By **Cauchy-Schwarz's Inequality**,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{n} \le \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C\cdot\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \ \forall N \in \mathbb{N}$$

where $C = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} < \infty$.

考虑 Hilbert 空间 $\left(L^2[0,l], (\cdot,\cdot)\right)$, 其上定义的内积为：

$$(f,g) := \int_0^l f(x)\overline{g(x)}\,dx,\ \ \forall f,g \in L^2[0,l]$$

Let

$$e_n(x) = \frac{2}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x \in L^2[0,l]$$

不难证明 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^2[0,l]$ 为一组完备的标准正交系.
因为 $\varphi \in C^3[0,l]$, 所以 $\varphi''' \in C[0,l]$, $\varphi''' \in L^2[0,l]$. 于是

$$|a_n|^2 = \left(\int_0^l \varphi'''(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx\right)^2 = \left|\frac{l}{2}(\varphi''', e_n)\right|^2 = \frac{l^2}{4}\left|(\varphi''', e_n)\right|^2,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

根据内积空间的 **Bessel 不等式**,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{l^2}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left|(\varphi''', e_n)\right|^2 \le \frac{l^2}{4}\cdot\|\varphi'''\|_{L^2}^2$$

因为 $\left|\varphi'''\right| \le M,\ \ \forall x \in [0,l]$, 所以

$$\|\varphi'''\|_{L^2}^2 = (\varphi''', \varphi''') = \int_0^l \left|\varphi'''(x)\right|^2\,dx \le M^2 l \le \infty$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 \le \frac{l^2}{4}\|\varphi'''\|_{L^2}^2 \le \frac{M^2 l^3}{4} < \infty \text{ converges}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n} \le C\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \text{ converges}$$

Similarly, we can prove

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{n} < \infty \text{ converges}$$

- **唯一性：[能量不等式]**

  对于 $\forall \tau > 0$, 定义区域 K_τ 及对应边界如下：

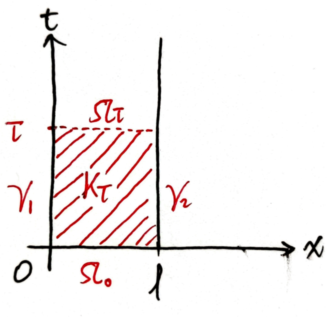

图 2.8: 区域 K_τ 及边界定义

设 $u(x,t)$ 为原问题 (2.17) 的解. Then

$$\iint_{K_\tau} u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = 0$$

Since

$$\begin{aligned} u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2) + \frac{c^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_x^2) - c^2\frac{\partial}{\partial x}(u_t u_x) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2 + c^2 u_x^2) - c^2\frac{\partial}{\partial x}(u_t u_x) \end{aligned}$$

Then by **Gauss-Green Theorem (Thm B.4.1)**,

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{K_\tau} \Big[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2 + c^2 u_x^2) - c^2\frac{\partial}{\partial x}(u_t u_x)\Big] \\ &= \int_{\partial K_\tau} \Big[\frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2)\cdot n_t - c^2(u_t u_x)\cdot n_x\Big] \\ &= \int_{\Omega_0} \Big[-\frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2)\Big] + \int_{\Omega_\tau} \Big[\frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2)\Big] + \int_{\gamma_1} c^2 u_t u_x - \int_{\gamma_2} c^2 u_t u_x \end{aligned}$$

Since $u(0,t) = u(l,t) = 0$, then $u_t\Big|_{x=0} = u_t\Big|_{x=l} = 0$. Thus

$$\int_{\Omega_0} \Big[-\frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2)\Big] + \int_{\Omega_\tau} \Big[\frac{1}{2}(u_t^2 + c^2 u_x^2)\Big] = 0$$

i.e.

$$\int_{\Omega_\tau} (u_t^2 + c^2 u_x^2) = \int_{\Omega_0} (\psi^2 + c^2 \varphi_x^2), \ \ \forall \tau > 0$$

Suppose $u_1 \& u_2$ are both solutions of Problem (2.17). Then

$$\begin{cases} (u_1-u_2)_{tt} - c^2(u_1-u_2)_{xx} = 0, \ \ x \in (0,l), t > 0 \\ (u_1-u_2)\Big|_{t=0} = 0 \\ (u_1-u_2)_t\Big|_{t=0} = 0 \\ (u_1-u_2)(0,t) = (u_1-u_2)(l,t) = 0 \end{cases}$$

故 $u_1 - u_2$ 为上述混合问题的解, 其中 $\varphi = \psi = 0$. 根据混合问题的**能量不等式**,

$$\int_{\Omega_\tau} ((u_1-u_2)_t^2 + c^2(u_1-u_2)_x^2) = \int_{\Omega_0} (\psi^2 + c^2\varphi_x^2) = 0, \ \ \forall \tau > 0$$

Thus

$$(u_1-u_2)_t \equiv (u_1-u_2)_x \equiv 0 \text{ on } [0,l] \times [0,\infty)$$

Hence

$$u_1 - u_2 \equiv C \text{ for some } C \in \mathbb{R}$$

Since $(u_1-u_2)\Big|_{t=0} = 0$, then $C = 0$. Therefore, $u_1 = u_2$.

□

附录 A　Supplementary Content

A.1　变分原理与最小曲面问题

所谓**变分问题**, 即**求某一特定泛函在定义域内的极值**. 下面要介绍的**最小曲面问题**即为一个典型的变分问题.

A.1.1　Cut-Off Function

先来回顾数分中给出过最常见的 **Cut-Off Function (截断函数)**. 下面以 2 维情况为例.

例 A.1.1. Define

$$\rho(x,y)=\begin{cases} k\,e^{-\frac{1}{1-(x^2+y^2)}},\ x^2+y^2<1 \\ 0,\ x^2+y^2\geq 1 \end{cases}$$

Then $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. We can choose $k\in\mathbb{R}$, s. t.

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\rho(x,y)\,dxdy=1$$

Fix the taken $k\in\mathbb{R}$. 为了方便缩小紧支集的范围, 我们进一步定义

$$\rho_n(x,y)=n^2\rho(nx,ny),\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Then $\rho_n\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ and $\rho_n(x,y)\equiv 0,\ \forall\sqrt{x^2+y^2}\geq\dfrac{1}{n}$.

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\rho_n(x,y)\,dxdy=1,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

下面利用 **Cut-Off Function**, 给出一条引理, 在证明**最小曲面问题的等价问题**时会用到.

此处给出 n 维的一般性结论.

引理 A.1.1. Suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be open and bounded, $f \in C(\Omega)$. If $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, we have

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0$$

Then $f \equiv 0$ on Ω.

证明. 反证法. Assume $\exists x_0 \in \Omega$, s. t. $f(x_0) \neq 0$. 不妨设 $f(x_0) > 0$.
Since $f \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ open, then $\exists \delta > 0$, s. t.

$$f(x) > 0,\ \forall x \in B_\delta(x_0) \subset \Omega$$

Fix $\delta > 0$. Take $N \in \mathbb{N}$ satisfies $\dfrac{1}{N} \leq \delta$. Let

$$\varphi(x) = \rho_N(x - x_0),\ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Then $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ and

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{B_\delta(x_0)} f(x)\rho_N(x - x_0)\,dx > 0$$

which contradicts to $\iint_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.
Therefore, $f \equiv 0$ on Ω. □

A.1.2 极小曲面问题

考虑 $\mathbb{R}^2$ 上有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. **极小曲面问题**即指给定边界 $\partial\Omega$ 上一条闭曲线 l:

$$l : \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ u = \varphi(s) \end{cases}, \quad 0 \le s \le s_0$$

其中 $x = x(s), y = y(s)$ 为平面曲线 $\partial\Omega$ 的方程. 求一张定义在 $\overline{\Omega}$ 上的曲面 S, s. t.

$$S \text{ 以 } l \text{ 为边界, 且表面积最小.}$$

我们定义

$$M_\varphi = \left\{ v \in C^1(\overline{\Omega}) \;\middle|\; v|_{\partial\Omega} = \varphi \right\}$$

上述问题即可表示为下述**变分问题**:

$$u = \operatorname*{argmin}_{v \in M_\varphi} J(v)$$

where

$$\begin{aligned} J : M_\varphi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto J(v) = \iint_\Omega \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2}\, dxdy \end{aligned}$$

下面我们直接给出**极小曲面问题**的解的**必要条件 (需满足的方程)**, 事实上我们将说明, 当要求解满足一定光滑性时 $(C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}))$, 这个条件为**充要条件**.

定理 A.1.2. [Minimal Surface].

Suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded region, $\partial\Omega \in C^\infty$, $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$. Suppose $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ satisfies

$$u\Big|_{\partial\Omega} = \varphi$$

Let

$$M_\varphi = \left\{ v \in C^1(\overline{\Omega}) \;\middle|\; v\big|_{\partial\Omega} = \varphi \right\}$$

Then

$$u = \operatorname*{argmin}_{v \in M_\varphi} J(v) \iff (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y \cdot u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

where

$$J(v) = \iint_\Omega \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2}\, dxdy, \;\; \forall v \in M_\varphi$$

注. 若没有“$u \in C^2(\Omega)$”的光滑性条件, 则结论中的“$\Leftrightarrow$”应当换为“$\Rightarrow$”, 即

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y \cdot u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

是 u 为极小曲面问题的解的**必要条件**.

证明.

- **必要性“$\Rightarrow$”:** Suppose $u = \operatorname*{argmin}_{v \in M_\varphi} J(v)$. 记

$$M_0 = \left\{ v \in C^1(\overline{\Omega}) \;\middle|\; v\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

Then for $\forall v \in M_0$, we have $u + \epsilon v \in M_\varphi, \;\; \forall \epsilon \in \mathbb{R}$. Let

$$\begin{aligned} j : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \epsilon &\longmapsto j(\epsilon) = J(u + \epsilon v) \end{aligned}$$

Then

$$
\begin{aligned}
j^{'}(\epsilon) &= \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \sqrt{1 + (u_x + \epsilon v_x)^2 + (u_y + \epsilon v_y)^2}\, dxdy \\
&= \iint_{\Omega} \frac{v_x(u_x + \epsilon v_x) + v_y(u_y + \epsilon v_y)}{\sqrt{1 + (u_x + \epsilon v_x)^2 + (u_y + \epsilon v_y)^2}}\, dxdy
\end{aligned}
$$

Since $u = \underset{v \in M_{\varphi}}{\operatorname{argmin}}\ J(v)$, then $j(\epsilon)$ achieves its minimum at $\epsilon = 0$. Thus

$$j^{'}(0) = 0$$

i.e.

$$\iint_{\Omega} \Big(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v_x + \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} v_y \Big)\, dxdy = 0,\ \ \forall v \in M_0$$

Let ∇f[1] $= \Big(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}, \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \Big)$, then by 第一 **Green** 恒等式,

$$\iint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla v\, dxdy = -\iint_{\Omega} \Delta f\, v\, dxdy + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial f}{\partial \gamma} v\, dS$$

Since $v \in M_0$, $v \equiv 0$ on $\partial\Omega$, then

$$\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \Big[\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \Big] + \frac{\partial}{\partial y} \Big[\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \Big] \right\} v\, dxdy = 0,\ \ \forall v \in M_0$$

Since $C_0^{\infty}(\Omega) \subset M_0$, then by **Lemma A.1.1**,

$$\frac{\partial}{\partial x} \Big[\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \Big] + \frac{\partial}{\partial y} \Big[\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \Big] \equiv 0 \text{ on } \Omega$$

i.e.

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2 u_x u_y \cdot u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0$$

[1]此处 f 的存在性并未证明, 待修正.

- **充分性“$\Leftarrow$”**：Suppose $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ satisfies

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y \cdot u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} = 0$$

i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\Big] \equiv 0 \text{ on } \Omega$$

Let

$$M_0 = \Big\{ v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \;\Big|\; v\big|_{\partial\Omega} = 0 \Big\}$$

By **Green 第一恒等式 (Thm B.4.3)**, 倒着必要性的证明过程, 不难得到

$$j'(0) = 0, \ \forall v \in M_0$$

Since $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, then calculate

$$j''(\epsilon) = \iint_\Omega \frac{v_x^2 + v_y^2 + \Big[v_y(u_x+\epsilon v_x)_x - v_x(u_y+\epsilon v_y)_y\Big]^2}{\Big[\sqrt{1+(u_x+\epsilon v_x)^2 + (u_y+\epsilon v_y)^2}\Big]^3} dxdy > 0, \ \forall \epsilon \in \mathbb{R}$$

又因为 $j'(0) = 0$, Therefore,

$$u = \underset{v \in M_\varphi}{\operatorname{argmin}} \, J(v)$$

$\square$

A.2 线性 PDE 的叠加原理

定理 A.2.1. [线性 PDE 的叠加原理].
Suppose L be a linear partial differential operator, $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ be the solutions of these equations respectively

$$Lu = f_i, \ \ i = 1, 2, \cdots$$

若 u_i 存在 2 阶偏导数, 且级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i u_i$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i f_i$ 均收敛, 记 $u = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i u_i$. 则 u 为方程

$$Lu = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$$

的解.

注. 事实上该命题是 Trivial 的, 即对于**线性微分算子** L, 其对于任意有限项求和线性. 再根据级数的收敛性可知, L 对于可数项求和线性.

A.3 一维波动方程的 Duhamel 原理 (齐次化原理)

对于**一维波动方程**的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

根据**线性 PDE 的叠加原理 (Thm A.2.1)**, 其解可以表示为

$$u = u_1 + u_2 + u_3$$

其中 u_1, u_2, u_3 分别为下述三个初值问题的解：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \;\; x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u_1\Big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_{1_t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{A.1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \;\; x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u_2\Big|_{t=0} = 0 \\ u_{2_t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \tag{A.2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = f(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u_3\Big|_{t=0} = 0 \\ u_{3_t}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{A.3}$$

下面我们说明, 对于 u_1 与 u_3, 其可由 u_2 表出, 这就是 **Duhamel 原理 (齐次化原理)**.

定理 A.3.1. [一维波动方程的 Duhamel 原理 (齐次化原理)][2].
设 $u_2 = M_\psi(x,t)$ 为定解问题 (A.2) 的解, 此处 M_ψ 表示以 ψ 为初值的定解问题 (A.2) 的解, 则 u_1 和 u_3 可表示为

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial}{\partial t} M_\varphi(x,t) \\ u_3 = \int_0^t M_{f_\tau}(x, t-\tau)\, d\tau \end{cases}$$

where $f_\tau = f(x,\tau)$.

[2]详细证明可参考书籍:《数学物理方程讲义 (第二版)》– 姜礼尚、陈亚浙、刘西垣、易法槐 – §2.2 定理 2.1 .

A.4 一维波动方程的能量不等式

定理 A.4.1. [一维波动方程的能量不等式].

记上半平面 $Q = \mathbb{R} \times (0, \infty)$. 设 $u \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$ 为定解问题 (2.10) 的解, 即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

则对于 $M = e^{t_0} > 0, \forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, s. t.

$$\int_{\Omega_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \le M \left[\int_{\Omega_0} (\psi^2 + c^2 \varphi_x^2) + \iint_{K_\tau} f^2 \right], \ \ \forall \tau \in [0, t_0] \tag{A.4}$$

$$\iint_{K_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \le M \left[\int_{\Omega_0} (\psi^2 + c^2 \varphi_x^2) + \iint_{K\tau} f^2 \right], \ \ \forall \tau \in [0, t_0] \tag{A.5}$$

其中有关区域 K_τ 定义如下 (与 **Thm 2.3.1** 中保持一致)

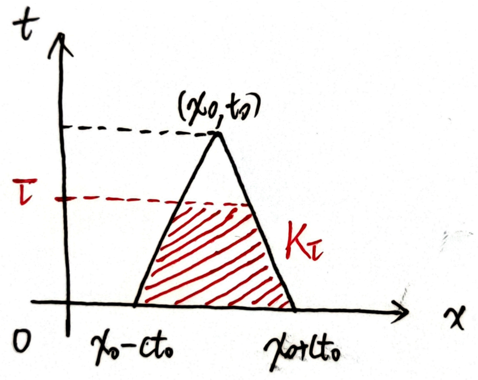

图 A.1: 依赖区间及区域 K_τ 的定义

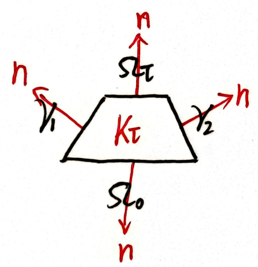

图 A.2: 区域 K_τ 各边记号及法向

在证明**能量不等式 (Thm A.4.1)** 之前, 先给出一个引理.

引理 A.4.2. [Gronwall Inequality].
设非负函数 $G \in C[0,T]$, $G(\tau) \geq 0$. 若 $G(0) = 0$, 且对于 $\forall \tau \in [0,T]$, s. t.

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq C \cdot G(\tau) + F(\tau) \text{ for some } C > 0$$

where $F(\tau)$ 为 $[0,T]$ 上递增的非负可积函数, 则有

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq e^{C\tau} F(\tau),\ \ \forall \tau \in [0,T]$$
$$G(\tau) \leq \frac{e^{C\tau}-1}{C} F(\tau),\ \ \forall \tau \in [0,T]$$

证明. Since $\dfrac{dG(\tau)}{d\tau} \leq C \cdot G(\tau) + F(\tau)$, then 等式两侧同乘 $e^{-C\tau}$, we have

$$\frac{d}{d\tau}\Big[e^{-C\tau} G(\tau)\Big] \leq e^{-C\tau} F(\tau),\ \ \forall \tau \in [0,T]$$

等式两边在 $[0,\tau]$ 上积分, since $F(\tau)$ 在 $[0,T]$ 上递增非负, then

$$e^{-C\tau} G(\tau) \leq \int_0^\tau e^{-Ct} F(t)\, dt \leq F(\tau) \cdot \frac{1-e^{-C\tau}}{C},\ \ \forall \tau \in [0,T]$$

i.e.

$$G(\tau) \leq \frac{e^{C\tau}-1}{C} F(\tau),\ \ \forall \tau \in [0,T]$$

将上述不等式代入 $\dfrac{dG(\tau)}{d\tau} \leq C \cdot G(\tau) + F(\tau)$ 右侧, 即可得到

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \leq e^{C\tau} F(\tau),\ \ \forall \tau \in [0,T]$$

□

证明. 下面开始证明能量不等式:

Since $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$ on $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, then

$$\iint_{K_\tau} u_t(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = \iint_{K_\tau} u_t \cdot f$$

对于等式左边, 与 **Thm 2.3.1-唯一性**证明过程一致 (2.13), 利用 **Gauss-Green 公式 (Thm B.4.1)**, 可得到

$$\int_{\Omega_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \le \int_{\Omega_0} [\psi^2 + c^2 \varphi_x^2] + 2 \iint_{K_\tau} u_t \cdot f$$

根据均值不等式 $2ab \le a^2 + b^2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, then

$$\int_{\Omega_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \le \int_{\Omega_0} [\psi^2 + c^2 \varphi_x^2] + \iint_{K_\tau} u_t^2 + \iint_{K_\tau} f^2$$

Let

$$G(\tau) = \iint_{K_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2] = \int_0^\tau \Big(\int_{\Omega_t} [u_t^2 + c^2 u_x^2]\, dx \Big)\, dt$$

Then $G \in C[0, t_0]$, $G \ge 0$, $G(0) = 0$. 且对于 $\forall \tau \in [0, t_0]$, s. t.

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} = \int_{\Omega_0} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \le \iint_{K\tau} u_t^2 + F(\tau) \le G(\tau) + F(\tau)$$

i.e.

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \le G(\tau) + F(\tau), \ \ \forall \tau \in [0, t_0]$$

where

$$F(\tau) = \int_{\Omega_0} [\psi^2 + c^2 \varphi_x^2] + \iint_{K_\tau} f^2 \ge 0 \text{ 在 } [0, t_0] \text{ 上非负递增可积}$$

Thus by **Gronwall Inequality (Lemma A.4.2)**, for $C = 1$,

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} \le e^\tau F(\tau) \le e^{t_0} F(\tau), \ \ \forall \tau \in [0, t_0]$$

$$G(\tau) \le (e^\tau - 1) F(\tau) \le e^{t_0} F(\tau), \ \ \forall \tau \in [0, t_0]$$

i.e.

$$\int_{\Omega_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \le M \left[\int_{\Omega_0} (\psi^2 + c^2 \varphi_x^2) + \iint_{K_\tau} f^2 \right], \ \ \forall \tau \in [0, t_0]$$

and

$$\iint_{K_\tau} [u_t^2 + c^2 u_x^2] \le M \left[\int_{\Omega_0} (\psi^2 + c^2 \varphi_x^2) + \iint_{K\tau} f^2 \right], \ \ \forall \tau \in [0, t_0]$$

where $M = e^{t_0} > 0$. $\square$

附录 B　Fundamental Knowledge

B.1　区域边界的光滑性

下面我们来给出**区域边界的光滑性**的定义.

定义 B.1.1. Suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is open, $\partial\Omega \neq \varnothing$. 如果对于 $\forall p \in \partial\Omega$, $\exists p$ 的邻域 U, s. t. 在适当的空间直角坐标系下,

$$\partial\Omega \cap U = \{(x', x^n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x' \in D,\ x^n = \varphi(x')\} \tag{B.1}$$

$$\Omega \cap U = \{(x', x^n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x' \in D,\ x^n > \varphi(x')\} \cap U \tag{B.2}$$

where $\varphi \in C^k(\Omega)$, $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ open. 我们称$\partial\Omega \in C^k$, 这里 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 或 ∞.

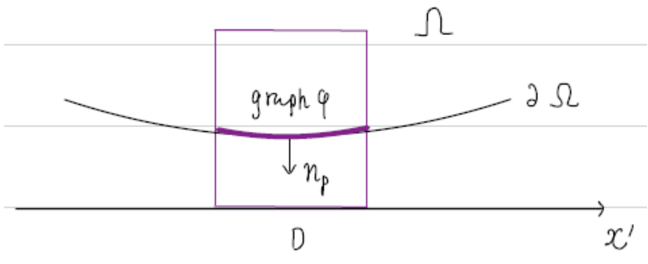

图 B.1: 边界的光滑性

注. 在**定义 B.1.1** 中, 设 $k \leq 1$, $x_0' \in \partial\Omega$, $p = (x_0', \varphi(x_0'))$. 记

$$n_p = \frac{(\nabla\varphi(x_0'), -1)}{\sqrt{1 + \left|\nabla\varphi(x_0')\right|^2}}$$

称 n_p 为 $\partial\Omega$ 在 p 点的单位外法向. n_p 的定义与空间直角坐标系的选择无关. 记

$$n : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{B.3}$$

$$p \longmapsto n(p) = n_p \tag{B.4}$$

称 n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向. 因为 $\partial\Omega \in C^k$, $k \geq 1$, 所以 $n \in C(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$.

B.2 ODE 解的存在唯一性定理

定理 **B.2.1. [ODE 解的存在唯一性]**.

定理 1.1(存在惟一性定理) 考虑 Cauchy 问题①:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 为 R^n 中的向量. $\boldsymbol{f}$ 是实变量 t 和 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的 n 维向量值函数. 若 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ 在开区域 $G \subseteq R \times R^n$ 中满足下列条件:

1) $\boldsymbol{f}$ 在 G 内连续,简记为 $\boldsymbol{f} \in C(G)$;

2) $\boldsymbol{f}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 满足局部 Lipschitz 条件,即对于点 $P_0(t_0,\boldsymbol{x}^0) \in G$, $\exists$

$$G_0 = \{(t,\boldsymbol{x}) \mid |t - t_0| \leqslant a, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0\| \leqslant b\} \subset G$$

和依赖于 P_0 点的常数 L_{P_0},使得 $\forall (t,\boldsymbol{x}^1),(t,\boldsymbol{x}^2) \in G_0$ 有不等式

$$\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^1) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}^2)\| \leqslant L_{P_0} \|\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2\| \tag{1.1.2}$$

成立,其中 $\|\cdot\|$ 表示欧氏范数.

则 Cauchy 问题(1.1.1) 在区间 $|t - t_0| \leqslant h^*$ 上存在惟一的解. 其中

$$\begin{aligned} &0 < h^* < \min\left(h, \frac{1}{L_{P_0}}\right), \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \\ &M = \max_{(t,\boldsymbol{x}) \in G_0} \|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\|. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

图 B.2: ODE 解的存在唯一性

B.3 反函数定理

定理 B.3.1. [反函数定理].

Suppose $f \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ open, $x_0 \in \Omega$. If $Df|_{x_0}$ 可逆, then $\exists x_0$ 的邻域 $U \subset \Omega$, s. t. $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ open, and

$$f: U \longrightarrow f(U) \text{ 为 } C^1\text{-微分同胚}$$

B.4 Gauss-Green 公式

首先回顾一下**外法向向量**及 **(外) 法向方向导数**的记号.

- Suppose $U \subset \mathbb{R}^n$. If $\partial U \in C^1$, then along ∂U is defined the outward pointing unit normal vector field.[1]

$$\vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \cdots, \gamma^n) \qquad , \qquad \vec{\gamma}(x^0) = \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$$

注. 我们总是将向量值函数的分量写作上标, 在具体某点的取值 (一般向量) 写作下标.

- Let $u \in C^1(\overline{U})$. We call $\dfrac{\partial u}{\partial \gamma} := \vec{\gamma} \cdot Du$ the (outward) normal derivative of u.

下面我们给出多元微积分中十分重要的 **Gauss-Green 公式**, 又称**散度定理**.

定理 B.4.1. [Gauss-Green Theorem].
Suppose $U \subset \mathbb{R}^n$ is open and bounded, $\partial U \in C^1$.

(i) If $u \in C^1(\overline{U})$, then

$$\int_U u_{x_i} = \int_{\partial U} u\gamma^i, \ \forall 1 \leq i \leq n \tag{B.5}$$

(ii) $\forall$ vector field $\vec{u} \in C^1(\overline{U}; \mathbb{R}^n)$,

$$\int_U div\, \vec{u} = \int_{\partial U} \vec{u} \cdot \vec{\gamma} \tag{B.6}$$

注. • (ii) 即为 **Gauss-Green 公式 (Gauss 公式)**, 说明了对于 $\mathbb{R}^n$ 中任一有界区域 U 中的向量场 $\vec{u}$, 其散度 $div\, \vec{u}$ 在整个区域上的积分 = 其在整个边界 ∂U 上的通量.

而散度作为描述向量场中某个点**向外发散程度**的标量, 原式可理解为:

向量场 $\vec{u}$ 在区域 U 中每个点发散程度的积累, 经过内部每个点散度相互抵消后, 最终等于其在边界 ∂U 处向外通量的总和.

[1]关于区域边界光滑性 $\partial\Omega \in C^k$ 即**单位外法向**的定义, 详见**附录 B-定义 B.1.1**

- **Gauss 公式**事实上为 **Green 公式**在 n 维空间上的推广, 即 **Green 公式**事实上给出了二维空间 $\mathbb{R}^2$ 上的**散度定理**. 在 (ii) 中, 取 $\vec{u}=(P,Q)$, 外法向方向为 $\vec{\gamma}=(-dy,dx)$, 有:
$$\int_U \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=\int_{\partial U}-Pdy+Qdx$$
简单地交换 P,Q 顺序即可得到最常见的 **Green 公式**的格式.

- 定理中 (i) 可作为 (ii) 的直接推论. 即可令 $\vec{u}$ 中除第 i 个分量 u^i 外均为 0, 即 $\vec{u}=(0,\cdots,u^i,\cdots,0)$, then
$$\int_U \frac{\partial u^i}{\partial x_i}=\int_{\partial U} u^i\gamma^i$$
令 $u=u^i\in C^1(\overline{U})$, 即可得到
$$\int_U u_{x_i}=\int_{\partial U} u\gamma^i,\ \forall 1\le i\le n$$

下面给出一系列根据 **Gauss-Green 公式**得到的推论, 在 *PDE* 中经常使用. 首先是所谓的**分部积分公式**.

推论 B.4.2. [Integration by parts formula].
Let $u,v\in C^1(\overline{U})$, then
$$\int_U u_{x_i}v=-\int_U uv_{x_i}+\int_{\partial U} uv\gamma^i \tag{B.7}$$

证明. 在 **Gauss-Green 公式 (Thm B.4.1 (i))** 中, 将 u 换成 uv, 即可得到
$$\int_U (u_{x_i}v+uv_{x_i})=\int_{\partial U} uv\gamma^i$$
□

最后再给出三条常用的 **Green 恒等式**, 这也是 **Gauss-Green 公式**的直接推论.

推论 B.4.3. [Green's Formula].

Let $u, v \in C^2(\overline{U})$, then

(i)
$$\int_U \Delta u = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \tag{B.8}$$

(ii)
$$\int_U Du \cdot Dv = -\int_U u\Delta v + \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \gamma} \qquad \textbf{(Green 第一恒等式)} \tag{B.9}$$

(iii)
$$\int_U (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial U} \left(u\frac{\partial v}{\partial \gamma} - v\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right) \qquad \textbf{(Green 第二恒等式)} \tag{B.10}$$

证明.

(i) 将 **Gauss-Green 公式 (Thm B.4.1 (ii))** 中的 u 换为 ∇u, 得

$$\int_U \Delta u = \int_{\partial U} \nabla u \cdot \vec{\gamma} = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \gamma}$$

(ii) 将 **Gauss-Green 公式 (Thm B.4.1 (ii))** 中的 u 换为 $u\nabla v$, 由于

$$div(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v = u\Delta v + Du \cdot Dv$$

因此有

$$\int_U (u\Delta v + Du \cdot Dv) = \int_{\partial U} u\nabla v \cdot \vec{\gamma} = \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \gamma}$$

(iii) 由于 (ii) 中左式 u, v 对称, 因此交换 u, v 位置, 可得

$$\int_U Du \cdot Dv = -\int_U u\Delta v + \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \gamma} \tag{B.11}$$
$$\int_U Du \cdot Dv = -\int_U v\Delta u + \int_{\partial U} v\frac{\partial u}{\partial \gamma} \tag{B.12}$$

两式相减即可得证.

□

B.5 一阶常系数线性 ODE 的求解

定理 B.5.1. [一阶常系数线性 ODE].
对于一阶常系数线性 ODE

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = 0$$

其特征方程为

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

对应的特征根 (可相等) 为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. 则方程的通解可写为如下基本解组的线性组合：

(a) 对每个单重实根 λ_k 有解 $e^{\lambda_k t}$.

(b) 对每个 $m > 1$ 重实根 λ_k 有 m 个解

$$e^{\lambda_k t},\ te^{\lambda_k t}, \cdots,\ t^{m-1}e^{\lambda_k t}$$

(c) 对每一对重数为 1 的共轭复根 $\alpha \pm i\beta$, 有 2 个如下形式的解

$$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$$

(d) 对每一对 $m > 1$ 重共轭复根 $\alpha \pm i\beta$, 有 $2m$ 个如下形式的解

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t, \cdots,\ t^{m-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots,\ t^{m-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$