Partial Differential Equations[1]

−*TW*−

2024 年 9 月 2 日

[1]参考书籍：

《Partial Differential Equations》– Lawrence C. Evans

《Partial Differential Equations》– Fritz John

序

天道几何，万品流形先自守；

变分无限，孤心测度有同伦。

2024 年 9 月 2 日

长夜伴浪破晓梦，梦晓破浪伴夜长

目录

第一章　Prologue

1.1　Partial Differential Equations

下面我们给出**偏微分方程 (PDE)** 的定义.

定义 1.1.1. An expression of the form

$$F(D^k u, D^{k-1}u, \cdots, Du, u, x) = 0,\ \ x \in U \subset \mathbb{R}^n$$

is called a **k^{th}-order partial differential equation**, where

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

and

$$u : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

注.
- 此处的函数 u 未必 k 阶连续可微, 因此其 k 阶偏导的偏导算子不一定能交换次序, 故符号 $D^k u$ 中包含了 n^k 种 k 阶偏导.

- **[高阶偏导数计数问题]**. 对于 $u \in C^k$, 此时 k 阶偏导算子可任意交换次序, 则对于符号 $D^k u$, 其代表了几种 k 阶偏导数?

  解. 即考虑 $D^\alpha u(|\alpha| = k)$ 的种数. 可转化为求非负数不定方程

  $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k$$

  的解的个数的问题, 其中 a_i 表示 u 对自变量 x 的第 i 个分量所求偏导阶数, 即 $(\frac{\partial}{\partial x_i})^{a_i}$. 利用**插板法**, 往 k 个球插入 $n-1$ 个板即可得到 n 份, 球和板共 $k+n-1$ 个, 即可视作往

$k+n-1$ 个空位中任意排列 k 个球和 $n-1$ 个板, 即有

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1} \text{种}$$

□

下面给出**偏微分方程 (PDE)** 的一些**线性**的概念.

定义 1.1.2.

- The PDE is called **linear** if it has the form

$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

for given a_α and f. Moreover, it is called **homogenuous (齐次)** if $f \equiv 0$.

- The PDE is **semilinear** if it has the form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \cdots, Du, u, x) = 0$$

- The PDE is **quasilinear** if it has the form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \cdots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \cdots, Du, u, x) = 0$$

- The PDE is **fully nonlinear** if it depends nonlinearly upon the highest order derivatives.

注. 上述几种**线性**的概念为逐层宽泛的, 即存在如下的包含关系:

$$\textbf{homogenuous} \subset \textbf{linear} \subset \textbf{semilinear} \subset \textbf{quasilinear}$$

同理, 对于**偏微分方程组 (System of PDEs)**, 可给出如下定义.

定义 1.1.3. An expression of the form

$$\vec{F}(D^k\vec{u},\cdots,D\vec{u},\vec{u},x)=\vec{0},\ \ x\in U$$

is called a **k^{th}-order system of PDEs**, where

$$\vec{F}:\mathbb{R}^{m\cdot n^k}\times\mathbb{R}^{m\cdot n^{k-1}}\times\cdots\times\mathbb{R}^{mn}\times\mathbb{R}^m\times U\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

and

$$\vec{u}:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m,\ \ \vec{u}=(u^1,u^2,\cdots,u^m)$$

注. 对于符号 $D^\alpha\vec{u}$, 其表达的意思即为对 $\vec{u}$ 的每个分量 u^i 做相同的偏微分算子运算, 从而得到新的向量, 即

$$D^\alpha\vec{u}=(D^\alpha u^1,\cdots,D^\alpha u^m)$$

1.2 多项式定理

下面我们用多重指标的形式给出**多项式定理**.

定理 1.2.1. [Multinomial Theorem].

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{|\alpha|}{\alpha} x^\alpha \tag{1.1}$$

where

$$\binom{|\alpha|}{\alpha} := \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \quad , \quad \begin{cases} \alpha! := \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n! \\ x^\alpha := x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} \end{cases} \tag{1.2}$$

证明.

- **[法一]**: 对于等式左侧 k 项因子

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{1.3}$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{1.4}$$

$$\cdots \tag{1.5}$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \tag{1.6}$$

在其中任取 α_1 项作为 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ 中 x_1 的来源. 再在剩下的 $k-\alpha_1$ 项中任取 α_2 项作为 x_2 的来源, 以此类推, 最终可得到 x_α 的个数为：

$$\binom{k}{\alpha_1}\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\binom{k-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \tag{1.7}$$

$$= \frac{k!}{\alpha_1!(k-\alpha_1)!} \cdot \frac{(k-\alpha_1)!}{\alpha_2!(k-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdots \frac{(k-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{n-1})!}{\alpha_n!0!} \tag{1.8}$$

$$= \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!} \tag{1.9}$$

$$= \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \tag{1.10}$$

$$= \binom{|\alpha|}{\alpha} \tag{1.11}$$

- **[法二]**: 原式左侧 k 项因子可看作 k 个空位, 这 k 个空位已经按顺序划分成了 n 个区域, 即

$$(\quad a_1 \quad)(a_2)\cdots(\quad a_n \quad)$$

现在有 k 个人入座, 在同一区域内的人我们不考虑其排列问题, 比如人员 A 与人员 B 均坐在区域 1 中, 则不考虑 A, B 的前后顺序. 那么我们可得到总共的排列种数为:

$$\frac{k!}{a_1!a_2!\cdots a_n!} = \binom{|a|}{a}$$

此即为右式中各项的系数.

$\square$

1.3 Leibniz 公式 – 高阶偏导版本

先来回顾以下数学分析中学到的一维实值函数的 **Leibniz 公式**:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}, \ \forall u, v \in C^n$$

与之相对应的, 我们来给出**高阶偏导版本的 Leibniz 公式**.

定理 1.3.1. [Leibniz's Formula].

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u \ D^{\alpha-\beta} v \tag{1.12}$$

where $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \qquad \text{and} \qquad \beta \le \alpha \text{ means } \beta_i \le \alpha_i, \ \forall i = 1 \sim n$$

证明. 先给出几个记号方便下述证明:

- u_i 表示 u 对自变量 x 的第 i 个分量求一阶偏导, 即 $\dfrac{\partial}{\partial x_i} u$.
- u_i^k 即表示求 k 阶偏导, 即 $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)^k u$.
- $u_i^{k_i} u_j^{k_j}$ 表示 u 先对 x_i 求 k_i 阶偏导后再对 x_j 求 k_j 阶偏导, 即 $\dfrac{\partial^{k_i+k_j}}{\partial x_i^{k_i} \partial x_j^{k_j}} u$.
  (事实上由于此处 $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 因此无需考虑先后顺序)

由于根据**一维实值 Leibniz 公式**, uv 对 x_1 求 α_1 阶偏导可写为如下形式:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} (uv) = \sum_{k_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} u \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1-k_1} v \tag{1.13}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{k_1} u_1^{k_1} v_1^{\alpha_1-k_1} \tag{1.14}$$

$$:= (u_1 + v_1)^{\alpha_1} \tag{1.15}$$

因此, $D^\alpha(uv)$ 可写成 $(u_1+v_1)^{\alpha_1}(u_2+v_2)^{\alpha_2}\cdots(u_n+v_n)^{\alpha_n}$. 从而

$$\begin{aligned}
D^\alpha(uv) &= (u_1+v_1)^{\alpha_1}(u_2+v_2)^{\alpha_2}\cdots(u_n+v_n)^{\alpha_n} && (1.16)\\
&= \sum_{\substack{0\le\beta_i\le\alpha_i\\ 1\le i\le n}}\binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}u_1^{\beta_1}u_2^{\beta_2}\cdots u_n^{\beta_n}v_1^{\alpha_1-\beta_1}v_2^{\alpha_2-\beta_2}\cdots v_n^{\alpha_n-\beta_n} && (1.17)\\
&= \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta u\ D^{\alpha-\beta}v && (1.18)
\end{aligned}$$

□

1.4 Taylor 公式 – 多元版本

先来回顾一元实解析函数在原点处的 **Taylor 公式**:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+O(|x|^{n+1})\ \text{as}\ x\to 0$$

下面给出**多元 (实解析) 函数的 Taylor 公式**, 此处为讨论方便直接假设 f 光滑.

定理 1.4.1. [Taylor's Formula].

Assume that $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ is smooth. Then

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\le k}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(0)x^\alpha+O(|x|^{k+1})\ \text{as}\ x\to 0,\ \forall k\in\mathbb{N} \tag{1.19}$$

This is Taylor's Formula in multiindex notation.

证明. Suppose $f(x)\sim\sum\limits_{|\alpha|\le k}a_\alpha x^\alpha+O(|x|^{k+1})$ as $x\to 0$. Then we'll calculate a_α.
For given α, 对等式左右两侧同时作用 D^α 算子, 对于右式中每一项 $a_\beta x^\beta$

- If $|\beta|<|\alpha|$, then $\exists 1\le i\le n$, s. t.

  $$\beta_i<\alpha_i$$

  那么经过 D^α 算子作用后, $x^\beta=x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$ 中的 x_i 因子将变为 0, 从而 $D^\alpha(a_\beta x^\beta)=0$.

- If $|\beta|>|\alpha|$, then $\exists 1\le j\le n$, s. t.

  $$\beta_j>\alpha_j$$

  那么经过 D^α 算子作用后, $x^\beta=x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$ 中的 x_j 因子将得到保留, 此时再取 $D^\alpha f(x)$ 在原点处的取值, 得到 $D^\alpha(a_\beta x^\beta)(0)=0$.

- If $|\beta|=|\alpha|$ and $\beta\ne\alpha$, then $\exists\beta_i\ne\alpha_i$, 同上可得 $D^\alpha(a_\beta x^\beta)(0)=0$.

综上, 可得到对于给定的 α, 其系数 $a_\alpha=\dfrac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}$. □

1.5 Notations

下面给出一些常用的记号.

1. For $U, V \subset \mathbb{R}^n$, we write $V \subset\subset U$ if $V \subset \overline{V} \subset U$. ($V$ is compactly contained in U)

2.

$$\alpha(n) := \text{volumn of unit ball } B(0,1) \text{ in } \mathbb{R}^n \tag{1.20}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \tag{1.21}$$

$$n\alpha(n)r^{n-1} := \text{surface area of } \partial B(0,r) \text{ in } \mathbb{R}^n \tag{1.22}$$

3. $D^\alpha u := \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$

4. For $k \geq 0$,

$$D^k u := \{D^\alpha u \mid |\alpha| = k\} \tag{1.23}$$

$$\left|D^k u\right| := \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2} \tag{1.24}$$

5.

$$Du = (u_{x_1}, \cdots, u_{x_n}) = \nabla u = grad\, u \tag{1.25}$$

$$D^2 u = \begin{pmatrix} u_{x_1x_1} & \cdots & u_{x_1x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{x_nx_1} & \cdots & u_{x_nx_n} \end{pmatrix} = Hu = Hess\, u \tag{1.26}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_ix_i} = div(grad\, u) = tr(Hess\, u) \tag{1.27}$$

6.

$$C(U) := \{u : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ continuous}\} \tag{1.28}$$

$$C(\overline{U}) := \{u \in C(U) \mid u \text{ is uniformly continuous on all bounded subsets of } \overline{U}\} \tag{1.29}$$

$$C^k(U) := \{u : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ is } k\text{-times continuously differentiable}\} \tag{1.30}$$

$$C^k(\overline{U}) := \{u \in C^k(U) \mid D^\alpha u \text{ is uniformly continuous on all bounded subsets of } \overline{U}, \forall |\alpha| \leq k\} \tag{1.31}$$

$$C^\infty(U) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U) \quad , \quad C^\infty(\overline{U}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{U}) \tag{1.32}$$

$$C_c(U) := \{u \in C(U) \mid u \text{ 有紧支集}\} \tag{1.33}$$

$$C_c^k(U) := \{u \in C^k(U) \mid u \text{ 有紧支集}\} \tag{1.34}$$

7. Given a measurable funciton $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$ess\sup f := \inf\left\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \mid \mu\left(f^{-1}\left((\alpha, \infty)\right)\right) = 0\right\} \tag{1.35}$$

8.

$$L^p(U) := \{u : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ is Lebesgue measurable and } \|u\|_{L^p(U)} < \infty\} \tag{1.36}$$

where

$$\|u\|_{L^p(U)} := \begin{cases} \left(\int_U |u|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \ (1 \leq p < \infty) \\ ess\sup |u| \ (p = \infty) \end{cases} \tag{1.37}$$

9. $L^p_{loc}(U) := \{u : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid u \in L^p(V), \ \forall V \subset\subset U\}$

1.6 PDE 中的微积分 – Gauss-Green 公式, 极坐标换元

1.6.1 Gauss-Green 公式

首先回顾一下**外法向向量**及 **(外) 法向方向导数**的记号.

- Suppose $U \subset \mathbb{R}^n$. If $\partial U \in C^1$, then along ∂U is defined the outward pointing unit normal vector field.[1]

$$\vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \cdots, \gamma^n) \qquad , \qquad \vec{\gamma}(x^0) = \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$$

注. 我们总是将向量值函数的分量写作上标, 在具体某点的取值 (一般向量) 写作下标.

- Let $u \in C^1(\overline{U})$. We call $\dfrac{\partial u}{\partial \gamma} := \vec{\gamma} \cdot Du$ the (outward) normal derivative of u.

下面我们给出多元微积分中十分重要的 **Gauss-Green 公式**, 又称**散度定理**.

定理 1.6.1. [Gauss-Green Theorem].
Suppose $U \subset \mathbb{R}^n$ is open and bounded, $\partial U \in C^1$.

(i) If $u \in C^1(\overline{U})$, then

$$\int_U u_{x_i} = \int_{\partial U} u\gamma^i, \ \forall 1 \le i \le n \tag{1.38}$$

(ii) $\forall$ vector field $\vec{u} \in C^1(\overline{U}; \mathbb{R}^n)$,

$$\int_U div\, \vec{u} = \int_{\partial U} \vec{u} \cdot \vec{\gamma} \tag{1.39}$$

注. • (ii) 即为 **Gauss-Green 公式 (Gauss 公式)**, 说明了对于 $\mathbb{R}^n$ 中任一有界区域 U 中的向量场 $\vec{u}$, 其散度 $div\, \vec{u}$ 在整个区域上的积分 = 其在整个边界 ∂U 上的通量.

而散度作为描述向量场中某个点**向外发散程度**的标量, 原式可理解为:

向量场 $\vec{u}$ 在区域 U 中每个点发散程度的积累, 经过内部每个点散度相互抵消后, 最终等于其在边界 ∂U 处向外通量的总和.

[1] 关于区域边界光滑性 $\partial\Omega \in C^k$ 即**单位外法向**的定义, 详见**附录 A-定义 A.1.1**

- **Gauss 公式**事实上为 **Green 公式**在 n 维空间上的推广, 即 **Green 公式**事实上给出了二维空间 $\mathbb{R}^2$ 上的**散度定理**. 在 (ii) 中, 取 $\vec{u} = (P, Q)$, 外法向方向为 $\vec{\gamma} = (-dy, dx)$, 有:
$$\int_U \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \int_{\partial U} -Pdy + Qdx$$
简单地交换 P, Q 顺序即可得到最常见的 **Green 公式**的格式.

- 定理中 (i) 可作为 (ii) 的直接推论. 即可令 $\vec{u}$ 中除第 i 个分量 u^i 外均为 0, 即 $\vec{u} = (0, \cdots, u^i, \cdots, 0)$, then
$$\int_U \frac{\partial u^i}{\partial x_i} = \int_{\partial U} u^i \gamma^i$$
令 $u = u^i \in C^1(\overline{U})$, 即可得到
$$\int_U u_{x_i} = \int_{\partial U} u\gamma^i, \ \forall 1 \leq i \leq n$$

下面给出一系列根据 **Gauss-Green 公式**得到的推论, 在 *PDE* 中经常使用. 首先是所谓的**分部积分公式**.

推论 1.6.2. [Integration by parts formula].
Let $u, v \in C^1(\overline{U})$, then
$$\int_U u_{x_i} v = -\int_U u v_{x_i} + \int_{\partial U} uv\gamma^i \tag{1.40}$$

证明. 在 **Gauss-Green 公式 (Thm 1.6.1 (i))** 中, 将 u 换成 uv, 即可得到
$$\int_U (u_{x_i} v + u v_{x_i}) = \int_{\partial U} uv\gamma^i$$
□

最后再给出三条常用的 **Green 恒等式**, 这也是 **Gauss-Green 公式**的直接推论.

推论 1.6.3. [Green's Formula].

Let $u, v \in C^2(\overline{U})$, then

(i)

$$\int_U \Delta u = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \tag{1.41}$$

(ii)

$$\int_U Du \cdot Dv = -\int_U u\Delta v + \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \gamma} \tag{1.42}$$

(iii)

$$\int_U (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial U} \left(u\frac{\partial v}{\partial \gamma} - v\frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) \tag{1.43}$$

证明.

(i) 将 **Gauss-Green 公式 (Thm 1.6.1 (ii))** 中的 u 换为 ∇u, 得

$$\int_U \Delta u = \int_{\partial U} \nabla u \cdot \vec{\gamma} = \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \gamma}$$

(ii) 将 **Gauss-Green 公式 (Thm 1.6.1 (ii))** 中的 u 换为 $u\nabla v$, 由于

$$div(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v = u\Delta v + Du \cdot Dv$$

因此有

$$\int_U (u\Delta v + Du \cdot Dv) = \int_{\partial U} u\nabla v \cdot \vec{\gamma} = \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \gamma}$$

(iii) 由于 (ii) 中左式 u, v 对称, 因此交换 u, v 位置, 可得

$$\int_U Du \cdot Dv = -\int_U u\Delta v + \int_{\partial U} u\frac{\partial v}{\partial \gamma} \tag{1.44}$$

$$\int_U Du \cdot Dv = -\int_U v\Delta u + \int_{\partial U} v\frac{\partial u}{\partial \gamma} \tag{1.45}$$

两式相减即可得证.

□

1.6.2 极坐标换元

极坐标换元是最复杂同时也是最常用的还原方法之一, 下面给出一般的**极坐标换元公式**.

定理 1.6.4. [Polar Coordinate].

Let $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ be continuous and summable[2]. Then

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,dx = \int_0^\infty dr \int_{\partial B(x_0,r)} f\,dS,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1.46}$$

注. 该公式常配合球坐标换元公式使用, 即：(*n* **维球坐标换元公式**)

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\vartheta_1 \\ x_2 = r\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 \\ \cdots \\ x_{n-1} = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\cos\vartheta_{n-1} \\ x_n = r\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdots\sin\vartheta_{n-1} \end{cases},\ \text{with}\ \vartheta_i \in [-\pi,\pi),\ \forall 1 \le i \le n-1 \text{ and } \vartheta_n \in [0,2\pi) \tag{1.47}$$

[2]此处的 **summable** 指的是函数**可和**, 在 *Real Analysis* **笔记-定义 3.1.6** 中对一般可测函数积分的定义中出现, 指 $\int f^+$ 与 $\int f^-$ 二者至少有一者有界, 即可定义积分, 是比**可积**更弱的概念.

附录 A *Supplementary Content*

A.1 区域边界的光滑性

下面我们来给出**区域边界的光滑性**的定义.

定义 A.1.1. Suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is open, $\partial\Omega \neq \varnothing$. 如果对于 $\forall p \in \partial\Omega$, $\exists p$ 的邻域 U, s. t. 在适当的空间直角坐标系下,

$$\partial\Omega \cap U = \{(x', x^n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x' \in D,\ x^n = \varphi(x')\} \tag{A.1}$$

$$\Omega \cap U = \{(x', x^n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x' \in D,\ x^n > \varphi(x')\} \cap U \tag{A.2}$$

where $\varphi \in C^k(\Omega)$, $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ open. 我们称$\partial\Omega \in C^k$, 这里 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 或 ∞.

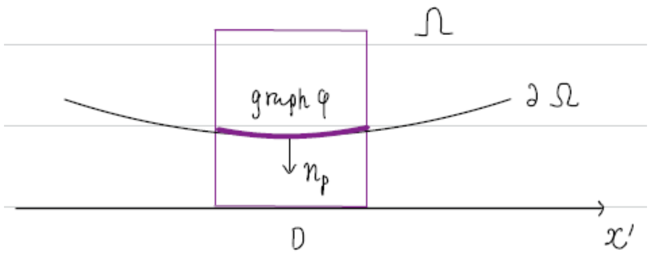

图 A.1: 边界的光滑性

注. 在**定义 A.1.1** 中, 设 $k \leq 1$, $x_0' \in \partial\Omega$, $p = (x_0', \varphi(x_0'))$. 记

$$n_p = \frac{(\nabla\varphi(x_0'), -1)}{\sqrt{1 + \left|\nabla\varphi(x_0')\right|^2}}$$

称 n_p 为 $\partial\Omega$ 在 p 点的单位外法向. n_p 的定义与空间直角坐标系的选择无关. 记

$$n : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{A.3}$$

$$p \longmapsto n(p) = n_p \tag{A.4}$$

称 n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向. 因为 $\partial\Omega \in C^k$, $k \geq 1$, 所以 $n \in C(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$.