Real Analysis

Gerald B. Folland

2024 年 3 月 11 日

序

天道几何，万品流形先自守；

变分无限，孤心测度有同伦。

2024 年 3 月 11 日

长夜伴浪破晓梦，梦晓破浪伴夜长

目录

第零章　课程要求

- **任课教师**：刘小川
- **辅导时间**：希腊奶
- **办公室**：数学楼 206
- *Email*：*liuxiaochuan@mail.xjtu.edu.cn*
- **总评成绩组成**：期末 70% + 平时 30%
- 考试英文题，答题中 / 英

第一章　集合论

1.1　集合列的上下极限

1.1.1　集合族的上下确界

定义　首先，对于任意一族集合 $\{E_n\}_{n\in I}$，我们给出其上界和上确界的定义：

定义 1.1.1. 对于 $\{E_n\}_{n\in I}$，若集合 F 满足 $E_n \subseteq F, \forall n \in I$，则称 F 为集合族 $\{E_n\}_{n\in I}$ 的<u>上界</u>

定义 1.1.2. $\{E_n\}_{n\in I}$ 的上界的交成为 $\{E_n\}_{n\in I}$ 的<u>上确界</u>，即

$$\sup_{n\in I} E_n = \bigcup_{n\in I} E_n \tag{1.1}$$

类似的可给出下界及下确界的定义.

性质　下面给出两条关于上下确界的显然的性质：

命题 1.1.1. 若指标集 $I_1 \supseteq I_2$，则：

$$\sup_{n\in I_1} E_n \supseteq \sup_{n\in I_2} E_n \tag{1.2}$$

$$\inf_{n\in I_1} E_n \subseteq \inf_{n\in I_2} E_n \tag{1.3}$$

1.1.2　集合列的上下极限

定义　我们取

$$I_k \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\} \tag{1.4}$$

则 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单调，从而根据命题1.1.1可知，集合列 $\{\sup_{n\in I_k} E_n\}_{k=1}^{\infty}, \{\inf_{n\in I_k} E_n\}_{k=1}^{\infty}$ 也单调 (前者递减，后者递增)，从而可定义任一集合列的上下极限：

定义 1.1.3.

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n \coloneqq \lim_{k\to\infty} \sup_{n\in I_k} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \tag{1.5}$$

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} E_n \coloneqq \lim_{k\to\infty} \inf_{n\in I_k} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n \tag{1.6}$$

性质　下面给出集合列的上下极限的性质，也可视作等价定义 / 不同观点

命题 1.1.2.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \{x \mid x \in E_n\text{对无穷多个 } n \text{ 成立}\} \tag{1.7}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \{x \mid x \in E_n\text{对除有限个 } n \text{ 成立}\} \tag{1.8}$$

根据 *Demorgan* 定律可得，

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n = (\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n^c)^c$$

1.2　*Descartes* 积的推广

引入　首先我们回忆两个 (有限个) 集合的 *Descartes* 积的定义

$$A \times B \coloneqq \{(x, y) \mid x \in A,\ \ y \in B\} \tag{1.9}$$

此处定义的 *Descartes* 积与普通的集合的一个显著的区别就是他是**有序的**，这里的**“有序对”** (x, y) 与 (y, x) 并不相同，这就引出了几个问题：

- 什么是 (x, y)，即“有序对”的定义是什么？
- x, y 的顺序是否重要？
  或者对于更一般的一族集合的 *Descartes* 积是否仍可定义**“顺序”**?

在解答这些问题之前，我们先来引入一个函数

$$f : \{1, 2\} \longrightarrow A \cup B \tag{1.10}$$

$$1 \longmapsto x \in A \tag{1.11}$$

$$2 \longmapsto y \in B \tag{1.12}$$

则此时函数 f 已经给出了我们上面所需的**“序关系”**，即可用以表示 (x, y)
但这时又冒出了几个新的疑惑：

- 指标集 $\{1,2\}$ 的选取是否重要？

  注. 此处的回答显然为否，即我们选取指标集时不应牵扯到角标，比如此处可用 $\{1,2\}$，也可用 $\{3,4\}$，或是 $\{c,d\}$，即只需指标集中**“元素的个数”**相同，而无需考虑具体形式

- 指标集是否必须为**有限集**？或是**可数集**？

定义　为了解答上述疑惑，下面我们给出更一般的 *Descartes* 积的定义：

定义 1.2.1. 设 J 为一个指标集，$\{E_n\}_{n\in J}$ 为一族集合，定义集合 T

$$T := \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup_{n\in J} E_n \;\middle|\; I \approx J \right\} \tag{1.13}$$

并在集合 T 上定义等价关系 $\sim$：

$$f \sim g \Longleftrightarrow \exists \text{双射}\varphi,\ \mathrm{s.t.}\, f\circ\varphi = g \tag{1.14}$$

在此基础上，定义集合族 $\{E_n\}_{n\in J}$ 的<u>*Descartes* 积</u>：

$$\prod_{n\in J} E_n := \left\{ \overline{f} \;\middle|\; f : J \longrightarrow \bigcup_{n\in J} E_n,\ \forall n\in J,\ f(n)\in E_n \right\} \tag{1.15}$$

注.

- $I \approx J$ 表示集合 I 与 J 等势，即存在 I 到 J 的双射
- $\overline{f}$ 表示 f 在集合 T 上的等价类，注意此处 *Descartes* 积中的 $\overline{f}$ 剔除了 f 在 T 的等价类中不满足条件“$\forall n\in J,\ f(n)\in E_n$”的部分函数
- 此定义可理解为：
  从每个 E_n 中各选一者一一置于一些**不记次序**的空位中，即构成一个**多重集**
- 这里 T 上的等价关系 $\sim$ 保证了 *Descartes* 积中函数 f 指标集的选取只需考虑**集合的势**相等，即**元素的个数**相同

推广　事实上，推广后的定义已不包含集合的序概念，此时再将推广后的 *Descartes* 积与传统意义上在**可列集** (**有限** / **可数**) 上定义的 *Descartes* 积进行对比：
设 J 是可列的，可先将 J 中元素排序为 $j_1, j_2, j_3, \cdots$，由此回到“传统的”*Descartes* 积：

$$E_{j_1} \times E_{j_2} \times E_{j_3} \times \cdots \tag{1.16}$$

事实上，该定义即为定义1.2.1中 $\prod_{n\in J} E_n$ 的一个代表元集
同时，在此基础上，我们还可将传统的**二元关系**拓展为**多元关系** (**即为 *Descartes* 积的子集**)

1.3 序关系

1.3.1 偏序，全序，预序

首先回顾关系 (二元关系) 的概念：

定义 1.3.1. 设 X, Y 是两个集合，如果集合 R 是 X 与 Y 的 *Descartes* 积的子集，即

$$R \subseteq X \times Y \tag{1.17}$$

则称 R 是从 X 到 Y 的一个**二元关系 (一般称作关系)**.
于是，若 $(x, y) \in R$，我们称 x 与 y 是 $R-$ 相关的，记作 xRy.

偏序 此时便能给出偏序的定义：

定义 1.3.2. 设 X 为一个集合，满足如下三条公理的关系 $R \subseteq X \times X$ 称作 X 上的一个**偏序关系**：

1. *if* xRy, $yRz \Rightarrow xRz$ (传递性)
2. *if* xRy, $yRx \Rightarrow x = y$ (反对称性)
3. xRx, $\forall x \in X$ (自反性)

例 1.3.1. 常见的偏序关系有：$\leq$, $\geq$, $\subseteq$, $\supseteq$，通常把一般的偏序关系记作小于等于 $\leq$，上述定义是对常见的偏序关系的推广.

注. **偏序关系**是由**等价关系**所衍生出来的，即先有了相等的概念后才能定义偏序关系. 每一个等价关系可以衍生出很多偏序关系，实际上由同一个等价关系所衍生出的偏序关系并不是完全独立的，而是成对出现的 (类似于 $\subseteq$ 与 $\supseteq$).

例 1.3.2. 由上述定义的偏序关系 R 可得到一个对偶的偏序关系 R'，其有如下的关系：

$$xRy \Leftrightarrow yR'x \tag{1.18}$$

下面给出一个偏序集的例子

例 1.3.3. 记全体复数构成集合 $\mathbb{C}$，则 $(\mathbb{C}, \leq)$ 是偏序集

注. 在例1.3.3中，我们不能说形如 $a + bi(b \neq 0)$ 的元素之间不满足传递性/反对称性，因为形如 $a + bi(b \neq 0)$ 两个元素之间没有序关系，此处实际只需考虑 $\mathbb{C}$ 中实数之间的序关系 (之所以称偏序集中要求部分元素之间存在序关系，是因为除了反身性以外，其前提均要求选取的对象之间存在序关系。)

全序 在偏序的基础上，可再进一步地给出全序的概念：

定义 1.3.3. 设 X 为一个集合，R 为 X 上的一个偏序关系，如果 R 再同时满足以下性质：

$$\forall x,\ y \in X,\ \text{s.t.}\, xRy\ or\ yRx \tag{1.19}$$

则称 R 为集合 X 上的一个<u>全序关系</u>

注. 通俗地讲，若 X 中任意两个元素之间都满足关系 R，即任意两个元素之间都可比较，则 (X, R) 为一个全序集

下面给出一个全序集的例子

例 1.3.4. 设集合 $P = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$，则 $(P, \subseteq)$ 构成全序集

预序

定义 1.3.4. 设 X 为一个集合，R 为 X 上的一个二元关系，若 R 只满足自反性和传递性，即

1. $xRx,\ \forall x \in X$ (自反性)
2. $if\ xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$ (传递性)

则称 R 为集合 X 上的一个<u>预序关系</u>

注. 由定义可知，**全序集**一定是**偏序集**，**偏序集**一定是**预序集**

1.3.2 极大元/极小元，上界/下界，良序

极大元/极小元 下面给出偏序集上极小元的定义

定义 1.3.5. 设 X 为一个集合，$\prec$ 为 X 上的一个偏序关系，如果存在 $x \in X$, s.t.

$$\forall y \in X,\ if\ y \preceq x,\ then\ y = x \tag{1.20}$$

则称 x 为 X 的一个<u>极小元</u>

注. 1. 极小元即表示集合中小于或等于它的元素只有它本身，以下为一个等价定义：

$$\nexists y \in X,\ y \neq x,\ \text{s.t.}\, y \prec x \tag{1.21}$$

2. 并不一定 X 中所有的元素都可与 x 进行比较，即可以有很多元素与 x 没有关系 (不可比较大小)
3. 对于任一偏序集 $(X, \prec)$，极小元的存在性和唯一性都不一定成立

同理可给出极大元的定义.

上界/下界 下面给出下界的定义

定义 1.3.6. 设 X 为一个集合，$\prec$ 为 X 上的一个偏序关系，子集 $E \subseteq X$，如果存在 $x \in X,$ s.t.

$$x \preceq y,\ \forall y \in E \tag{1.22}$$

则称 E (在 X 中) 有下界，x 称为 E 的一个下界

注. 集合 E 中的每一个元素 y 都与下界 x 有关系 (与极小元的区别)

同理可给出上界的定义.

良序 在定义了极小元的基础上，可以进一步来给出良序的定义.

定义 1.3.7. 设 $(X, \prec)$ 为全序集，如果对于 $\forall Y \subseteq X,\ Y \neq \varnothing$，$Y$ 有极小元，则称 $\prec$ 为 X 上的一个良序关系

1.3.3 保序同构，序型

1.4 *Hausdorff* 极大原理，*Zorn* 引理

注意这两个都是**公理**性质，是无法被证明的，只能互相推导

Hausdorff 极大原理 下面给出 *Hausdorff* 极大原理的叙述.

定理 1.4.1. 任一偏序集都有极大的全序子集.

注. 此处的**“极大”**指的是，对于集合 {该偏序集的所有全序子集}，在包含 $\subseteq$ 的偏序关系下的极大元

Zorn 引理 下面给出 *Zorn* 引理的叙述.

定理 1.4.2. 若偏序集 X 的每个全序子集都有上界，则 X 有极大元.

注. 此处的上界只需满足存在性，而无需满足唯一性.

相互推导 事实上，*Hausdorff* 极大原理和 *Zorn* 引理是等价的.

证明.

“$\Rightarrow$”: 设 $(X, \prec)$ 为一个偏序集，

根据 *Hausdorff* 极大原理，在包含关系 $\subseteq$ 下，得到极大全序子集 Y.

根据 *Zorn* 引理的假设，$Y \subseteq X$ 存在上界 x，则 $x \in Y$

(否则 $Y \cup \{x\}$ 构成的全序子集与 Y 的极大性矛盾)

从而 x 即为 X 的极大元.(否则若存在更大的 y，则同理 $Y \cup \{y\}$ 与 Y 极大性矛盾)

“$\Leftarrow$”: 设 $(X, \prec)$ 为一个偏序集，下面证明 X 有极大的全序子集：

记集合 Z

$$Z = \{X\text{的所有全序子集}\} \tag{1.23}$$

从而集合 Z 与包含关系 $\subseteq$ 构成了一个偏序集. 令

$$A = \bigcup_{U \in Z} U \tag{1.24}$$

从而 $A \subseteq X$ 即为 Z 中所有元素的上界.

根据 *Zorn* 引理，Z 在偏序关系 $\subseteq$ 下有极大元，也就说明了 X 有极大的偏序子集.

□

1.5 良序原理，选择公理

对这两个**公理**的证明需要首先承认 *Hausdorff* 极大原理 / *Zorn* 引理

1.5.1 良序原理

下面给出良序原理的叙述.

定理 1.5.1. 任一非空集必为良序集.(任一非空集存在良序)

证明. 设 X 是个非空集，考虑 X 的所有子集的良序构成的集合 W.
注意到 W 中的每个元素，即为各良序关系 $\prec_1$，$\prec_2$，都附着着其对应的 X 的子集 E_1，E_2
(因为对于不同的子集 E_1，E_2，即使在相同的位置其良序关系相同 (即 $x_1 \prec_1 x_2$ && $x_1 \prec_2 x_2$)，但其在整个子集上的良序关系还是不同的)
因此 W 中的元素应当表述为各良序关系 (主体) 与其对应的子集构成的有序对 $(\prec, E)$
在 W 中引入这样的偏序关系，记作 $\leq$：

$$(\prec_1, E_1) \leq (\prec_2, E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} E_1 \subseteq E_2 \\ \prec_2|_{E_1} = \prec_1 \\ \forall x \in E_2 \backslash E_1,\ y \in E_1,\ y \prec_2 x \end{cases} \tag{1.25}$$

也就是说，$\prec_2$ 是 $\prec_1$ 的延拓，$\prec_1$ 是 $\prec_2$ 在 E_1 上的限制，同时 E_2 超出 E_1 的部分在 $\prec_2$ 的意义下总是比 E_1 中的元素更大.
下面我们尝试运用 *Zorn* 引理 (定理1.4.2) 来证明. 任取 W 的全序子集 Y，记

$$Y = \{\prec_a\}_{a \in I} \tag{1.26}$$

令

$$E_Y = \bigcup_{a \in I} E_a \tag{1.27}$$

同理可得到该 X 的子集 E_Y 下的良序关系 $\prec_Y$，此 $\prec_Y$ 即为 W 的全序子集 Y 的上界.
根据 *Zorn* 引理 (定理1.4.2)，W 中有极大元 $(\prec, E)$.
事实上，此处 $E = X$，$\prec$ 即为 X 上的一个良序关系.
(反证法. 假设 $E \neq X$，设 $x \in X \backslash E$，此时可定义 $x \prec y$, $\forall y \in E$，则 $E \cup \{x\}$ 即可得到 X 的一个全序子集，$E \cup \{x\} \in W$，这与 E 的极大性矛盾.) □

1.5.2 选择公理

下面给出选择公理的叙述.

定理 1.5.2. 非空的非空集族的 *Descartes* 积非空.

注. • **“非空的非空集族”**就是指有一族非空集，其中这一族非空集的个数至少为 1

- **“*Descartes* 积非空”**大致上说的是可以不计次序从每个非空集中取出一个元素，构成一个多重集 (具体可见定义1.2.1)

下面我们利用良序原理来对选择公理进行证明.

证明. 设 $\{X_a\}_{a\in I}$ 为一族非空集，其中 $X_a \neq \varnothing$，$I \neq \varnothing$.
根据良序原理 (定理1.5.1)，集合 $\bigcup\limits_{a\in I} X_a$ 存在一个良序关系 $\prec$
由于 $(\bigcup\limits_{a\in I} X_a, \prec)$ 为良序集，因此其非空子集 $X_a \subseteq \bigcup\limits_{a\in I} X_a$ 均有极小元. 定义映射 f

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{a\in I} X_a \tag{1.28}$$

$$a \longmapsto \min_{\prec} X_a \tag{1.29}$$

从而

$$\bar{f} \in \prod_{a\in I} X_a, \ \prod_{a\in I} X_a \neq \varnothing \tag{1.30}$$

□

1.6 集合的势 *Cardinality*

引入 为了更好地理解势的概念，我们先给出势的比较关系. 对于非空集 X, Y，我们定义.

$$\begin{cases} card\,(X) \leqslant card\,(Y) \\ card\,(X) = card\,(Y) \\ card\,(X) \geqslant card\,(Y) \end{cases} \tag{1.31}$$

分别表示存在从 X 到 Y 的**单射**、**双射**、**满射**. 这与常规下集合元素个数的比较是吻合的.

定义 此时再去赋予势 $card$ 的意义.

定义 1.6.1. 设 X 为一个集合，定义 X 的**势** (*Cardinality*).

$$card(X) := \{Y\text{为集合} \mid \text{存在由 } X \text{ 到 } Y \text{ 的单射}\} \tag{1.32}$$

记 S 为全体集合构成的真类，S^* 为全体非空集合构成的真类. 在 S^* 上定义等价关系 R:

$$xRy \Leftrightarrow \text{存在由 } X \text{ 到 } Y \text{ 的双射} \tag{1.33}$$

则势的概念自然即为 X 在关系 R 下的等价类，即

$$card(X) = \overline{X} \tag{1.34}$$

注. 规定 $card(\varnothing) < card(X)$, $card(X) > card(\varnothing)$, $\forall X \neq \varnothing$，进而定义中的 S^* 可修正为 S. 其中 $card(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

严格证明 在大致给出了集合的势的概念后，下面对其中的一些概念进行严格的定义和证明. 对于最开始在全集合类 S 中引入的关系 $\leq$，下面证明其为 S 上的一个偏序关系.
事实上，我们还会证明 $\leq$ 是 S 上的全序关系，即任意两个集合的势都可比较.

对偏序关系的三条公理进行一一验证. 即**传递性**、**自反性**、**反对称性**. 同时证明 $\leq$ **与** $\geq$ **互为逆关系**，$\leq$ 同时为**全序关系**.

自反性、传递性 事实上自反性和传递性的证明是显然的.

逆关系 下面的引理证明了 $\leq$ 与 $\geq$ 互为逆关系.

引理 1.6.1. 设 $X,\ Y \in S^*$，则

$$card(X) \leq card(Y) \Leftrightarrow card(Y) \geq card(X) \tag{1.35}$$

证明. 即证：存在 X 到 Y 的单射 f $\Leftrightarrow$ 存在 Y 到 X 的满射 g.

$\Rightarrow$: 由于 f 为单设，因此 $\forall y \in f(X),\ \exists$ 唯一的 $x \in X,\ \text{s.t.}\ y = f(x)$.
于是可构造

$$g : Y \longrightarrow X \tag{1.36}$$

$$y \longmapsto \begin{cases} x,\ y = f(x) & y \in f(X) \\ x_0,\ \forall x_0 \in X & y \notin f(X) \end{cases} \tag{1.37}$$

从而 g 即为 Y 到 X 的满射.

$\Leftarrow$: 由于 g 为 Y 到 X 的满射，因此对于 $\forall x \in X,\ g^{-1}(x) \subseteq Y$ 为 Y 的一个非空子集.
记 Y 的子集族 Z 为

$$Z = \{g^{-1}(x) \mid x \in X\} = \{g^{-1}(x)\}_{x \in X} \tag{1.38}$$

由于 $X,\ Y \in S^*$ 非空，因此 Z 为非空的非空集族.
根据选择公理 (定理1.5.2)，Z 的 *Descartes* 积非空，
即存在一个由指标集 X 到 $\bigcup\limits_{x \in X} g^{-1}(x)$ 的单射 f

$$f : X \longrightarrow \bigcup_{x \in X} g^{-1}(x) \subseteq Y \tag{1.39}$$

$$x \longmapsto f(x) \tag{1.40}$$

此选择映射 f 即为所求单射.

$\square$

全序关系 下面的引理说明了 $\leq$ 实际上还是 S 上的一个全序关系，其证明具有一定技巧性.

引理 1.6.2. $\forall X,\ Y \in S$

$$card(X) \leq card(Y) \text{ 或 } card(Y) \leq card(X) \tag{1.41}$$

证明. 不妨设 $X,\ Y \in S^*$.(映射实际上为特殊的二元关系). 令

$$\mathcal{I} = \{f : X_0 \longrightarrow Y \mid X_0 \subseteq X,\ f\text{为单射}\} \subseteq X \times Y \tag{1.42}$$

类比良序原理 (定理1.5.1) 的证明，在集合 $\mathcal{I}$ 上定义偏序 $\subseteq$.

$$f \subseteq g \Leftrightarrow \begin{cases} X_f \subseteq X_g \\ g\Big|_{X_f} = f \end{cases} \tag{1.43}$$

从而对于 $\mathcal{I}$ 的每个全序子集 E，取 $X_E = \bigcup\limits_{f\in E} X_f$，其对应的映射 f_E 即为 E 的上界.
于是偏序集 $(\mathcal{I},\subseteq)$ 满足 *Zorn* 引理 (定理1.4.2) 的条件，存在极大元 $f : X_0 \longrightarrow Y$.
假设 $X_0 \neq X$ 且 $f(X_0) \neq Y$，则 $\exists x \in X\backslash X_0$，$y \in Y\backslash f(X)$，此时令

$$f^{'}|_{X_0} = f \tag{1.44}$$

$$f^{'} : x \longmapsto y \tag{1.45}$$

从而得到单射 $f^{'} \in I$，且 $f \subseteq f^{'}$，这与 f 的极大性矛盾.
综上，$X_0 = X$ 或 $f(X_0) = Y$，即必定存在 X 到 Y 的单射或满射. □

反对称性 (*Schröder – Bernstein* **定理**) 下面的定理说明了 $\leq$ 具有反对称性. 其证明技巧性比较强.

定理 1.6.3. (*Schröder – Bernstein* 定理)
设 $X,\ Y \in S$，若 $card(X) \leq card(Y)$ 且 $card(Y) \leq card(X)$，则

$$card(X) = card(Y) \tag{1.46}$$

证明. 即已知存在单射 $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow X$，证明 X 与 Y 之间存在双射：
考虑 $X,\ Y$ 的如下划分：
$\forall x \in X$，构造序列

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x,\ g^{-1}(x),\ (f^{-1} \circ g^{-1})(x),\ (g^{-1} \circ f^{-1} \circ g^{-1})(x), \cdots\} \tag{1.47}$$

则称

$$\begin{cases} x \in X_\infty : x_n \neq \varnothing, \forall n \in \mathbb{N} \\ x \in X_X : x_{n_0} \in X \\ x \in X_Y : x_{n_0} \in Y \end{cases}, \quad n_0 \coloneqq \max_{x_n \neq \varnothing} n \tag{1.48}$$

类似的，也有 Y_∞，Y_X，Y_Y. 容易证明

$$f(X_\infty) = Y_\infty,\ f(X_X) = Y_X,\ f(X_Y) = Y_Y \tag{1.49}$$

从而 X, Y 的三个部分分别可以建立双射，最终 X, Y 之间存在双射. □

1.7 幂集的势，可数

1.7.1 幂集的势

通过比较任一集合与其幂集的势，可以得到全集合类 S 上的势关系 $\leq$ 不存在极大元，即**不存在某个集合的势最大**.

命题 1.7.1. $\forall X \in S^*$,

$$card(X) < card(2^X) \tag{1.50}$$

证明.

- 首先，$card(X) \leq card(2^X)$. 存在 X 到 2^X 的映射 f，

$$f : X \longrightarrow 2^X \tag{1.51}$$

$$x \longmapsto \{x\} \tag{1.52}$$

  从而 f 为单射，$card(X) \leq card(2^X)$.

- 其次，不存在 X 到 2^X 的满射.$\forall g : X \longrightarrow 2^X$，令

$$Y := \{x \in X \mid x \notin g(x)\} \tag{1.53}$$

  下面证明：$\nexists y \in X,\ \text{s.t.}\ g(y) = Y \in 2^X$.

  反证法. 假设 $\exists x_0 \in X,\ \text{s.t.}\ g(x_0) = Y$，则

  i. 若 $x_0 \in Y$，则根据 Y 的定义，$x_0 \notin g(x_0) = Y$，这与 $x_0 \in Y$ 矛盾.

  ii. 若 $x_0 \notin Y$，则 $x_0 \notin g(x_0) = Y$，根据 Y 的定义，$x_0 \in Y$，矛盾.

  综上，不存在 X 到 2^X 的满射.

Therefore,

$$card(X) < card(2^X) \tag{1.54}$$

□

1.7.2 可数

定义

定义 1.7.1. 设 X 为一个集合，则称

$$X \text{ 可数} \Leftrightarrow card(X) \leq card(\mathbb{N}) \tag{1.55}$$

注. 常将上述定义的集合称为**至多可数**，即包含**有限**和**无限可数**两种情况.

性质 下面是可数集的两条重要的性质.

命题 1.7.2. (i) (**可数个可数集的并集是可数集**)

若 $\{X_a\}_{a\in I}$ 满足 $\begin{cases} I \text{ 可数} \\ \forall a \in I,\ X_a \text{ 可数} \end{cases}$，则 $\bigcup\limits_{a\in I} X_a$ 可数.

(ii) (**无限可数集与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势**)

若 X 可数且 X 为无限集，则 $card(X) = card(\mathbb{N})$.

例 1.7.1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 是可数集.

1.8 可数集的幂集，连续统

定义 下面给出连续统的定义.

定义 1.8.1. 设 $X \in S$，则

$$X\text{为}\underline{\text{连续统}} \Leftrightarrow card(X) = card(\mathbb{R}) := c \tag{1.56}$$

注. 提及连续统，就不得不谈到**连续统假设** (*Continuum Hypothesis*，简记 *CH*).

定理 1.8.1 (连续统假设 *CH*). $\nexists X \subseteq \mathbb{R}$, s. t.

$$card(\mathbb{N}) < card(X) < card(\mathbb{R}) \tag{1.57}$$

而对于康托尔提出的这样一个假设，美国数学家科恩在 1963 年证明：

在 *ZFC* 公理系统上，*CH* 既不可被证明，也不可被证伪.

连续统的势 下面给出有关连续统的一个重要的命题，它刻画了连续统与可数集的幂集之间的关系.

命题 1.8.1.

$$card(2^{\mathbb{N}}) = card(\mathbb{R}) = c \tag{1.58}$$

证明. 具体证明过程见视频可数集的幂集与连续统. □

由此可得到推论.

推论 1.8.2. 设 $X \in S$，若 $card(X) \geq c$，则 X 不可数.

性质

命题 1.8.2. 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 满足

$$\begin{cases} card\,(I) = card\,(\mathbb{R})\ \ (\leq) \\ \forall \alpha \in I,\ \ card\,(X_\alpha) = card\,(\mathbb{R})\ \ (\leq) \end{cases} \tag{1.59}$$

则

$$card\left(\bigcup_{\alpha\in I} X_\alpha\right) = card(\mathbb{R})\ (\leq) \tag{1.60}$$

在进行证明之前，先证明以下引理.

引理 1.8.3. 若 $card(X) \leq card(\mathbb{R})$，$card(Y) \leq card(\mathbb{R})$，则 $card(X \times Y) \leq card(\mathbb{R})$

证明. 由于 $card(X \times Y) \leq card(X \times \mathbb{R}) \leq card(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$，因此
即证 $card(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = card(\mathbb{R})$. 由于可列集的幂集与连续统等势 (命题1.8.1)，因此
即证 $card(2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}) = card(2^{\mathbb{N}})$. 下面分别构造 $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ 到 $2^{\mathbb{N}}$ 的单射和满射：

- 令

$$f : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}} \tag{1.61}$$

$$A \times B \longmapsto C \tag{1.62}$$

  其中

$$C := \left\{ c \,\middle|\, c = \begin{cases} 2a + 1, & \forall a \in A \\ 2b, & \forall b \in B \end{cases} \right\} \tag{1.63}$$

  从而得到了单射 $f : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$.

- 令

$$g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}} \tag{1.64}$$

$$A \times B \longmapsto C \tag{1.65}$$

  其中

$$A := \{a \mid a = \frac{c+1}{2}, \ \forall c \in C \text{ 为奇数}\} \tag{1.66}$$

$$B := \{b \mid b = \frac{c}{2}, \ \forall c \in C \text{ 为偶数}\} \tag{1.67}$$

  容易证明，$g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ 为满射，从而得证.

□

下面对命题1.8.2进行证明.

证明. 由于 $\forall a \in I, \ card\,(X_a) \leq card\,(\mathbb{R})$，因此存在满射 $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow X_a$.
令

$$f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \bigcup_{a \in I} X_a \tag{1.68}$$

$$(a, r) \longmapsto f_a(r) \tag{1.69}$$

由于 f_a 为满射，因此 $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \bigcup\limits_{a \in I} X_a$ 为满射，从而根据引理1.8.3

$$card(\bigcup_{a \in I} X_a) \leq card(I \times \mathbb{R}) \leq card(\mathbb{R}) \tag{1.70}$$

□

1.9 理想实数系及上面的求和

1.9.1 实数系的推广

定义 1.9.1. 理想实数系 $\overline{\mathbb{R}}$ 是对实数系的推广.

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \tag{1.71}$$

其中我们规定实数系 $\mathbb{R}$ 中，

$$-\infty < x < +\infty,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.72}$$

这样我们便可自然地将 $\mathbb{R}$ 上的偏序关系延拓到 $\overline{\mathbb{R}}$ 中.

1.9.2 $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 中的和

引入 在实数系 $\mathbb{R}$ 中，我们所定义的级数求和 $\sum$ 都是建立在**至多可数项**的基础之上，并且它对于**求和顺序**大多时候是有关系的.

而对于任意一族数，我们就会面临以下的问题：

- 这族数能否求和？
- 若能求和，则其结果是否与求和顺序有关？

定义 为了解决上述问题，我们在对实数系 $\mathbb{R}$ 进行延拓后，在理想实数系 $\overline{\mathbb{R}}$ 上对求和 $\sum$ 进行推广.

首先考虑非负理想实数系 $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 中的和.(排除了**求和顺序**的考虑)

定义 1.9.2. $\forall I \in S^*$, $f : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. 定义 f 的和 $\sum_f$ 是这样一个映射.

$$\sum_f : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \tag{1.73}$$

$$X \longmapsto \sum_{x \in X} f(x) := \sup_{F \subseteq X,\ F\text{有限}} \left(\sum_{x \in F} f(x) \right) \tag{1.74}$$

注. 1. 当 I 为可数集时，映射 $f : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 可视作非负数列，而此处定义的 $\sum\limits_{x \in X} f(x)$ 与正项级数的定义吻合.

2. 此处对于任意一族数的和 $\sum\limits_{x \in X} f(x)$ 的定义事实上与 *Lesbesgue* 积分的定义是吻和的.

性质　下面给出 $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 中的和的几条重要的性质.

命题 1.9.1. *Let* $X \in S^*$，$\forall f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$，若集合 $A := \{x \mid f(x) > 0\}$ 为不可数集，则

$$\sum_{x \in X} f(x) = +\infty \tag{1.75}$$

证明. 反证法. 假设 $\sum\limits_{x \in X} f(x) = \sum\limits_{x \in A} f(x) = M < +\infty$，记

$$A_n := \{x \in X \mid f(x) \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})\} \tag{1.76}$$

由于 $\sum\limits_{x \in A} f(x) = M$ 有界，因此

$$A \backslash \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq 1\} \preceq \mathbb{N} \tag{1.77}$$

$$A_n \preceq \mathbb{N} \tag{1.78}$$

从而

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \preceq \mathbb{N} \tag{1.79}$$

$$A = \left(A \backslash \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \preceq \mathbb{N} \tag{1.80}$$

而这与 A 不可数矛盾. □

下面的这个命题是对**正项级数的可交换性**在理想实数系 $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 上的推广形式.

命题 1.9.2. *Let* $X \in S^*$，$\forall f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$，若集合 $A := \{x \mid f(x) > 0\}$ 无穷可数，则

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f \circ g(n) \tag{1.81}$$

其中 $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ 为双射.

证明. 易证. □