Real Analysis

Modern Techniques and Their Applications[1]

−TW−

2024 年 6 月 13 日

[1]参考书籍：

《*Real Analysis− −Modern Techniques and Their Applications*》— *Gerald B. Folland*

序

天道几何，万品流形先自守；

变分无限，孤心测度有同伦。

2024 年 6 月 13 日

长夜伴浪破晓梦，梦晓破浪伴夜长

目录

第负一章　课程要求

- **任课教师：**刘小川
- **辅导时间：**希腊奶
- **办公室：**数学楼 206
- *Email*：*liuxiaochuan@mail.xjtu.edu.cn*
- **总评成绩组成：**期末 70% + 平时 30%
- 考试英文题，答题中 / 英

第零章　集合论

0.1　集合列的上下极限

0.1.1　集合族的上下确界

定义　首先，对于任意一族集合 $\{E_n\}_{n\in I}$，我们给出其上界和上确界的定义：

定义 0.1.1. 对于 $\{E_n\}_{n\in I}$，若集合 F 满足 $E_n \subseteq F, \forall n \in I$，则称 F 为集合族 $\{E_n\}_{n\in I}$ 的<u>上界</u>

定义 0.1.2. $\{E_n\}_{n\in I}$ 的上界的交成为 $\{E_n\}_{n\in I}$ 的<u>上确界</u>，即

$$\sup_{n\in I} E_n = \bigcup_{n\in I} E_n \tag{1}$$

类似的可给出下界及下确界的定义.

性质　下面给出两条关于上下确界的显然的性质：

命题 0.1.1. 若指标集 $I_1 \supseteq I_2$，则：

$$\sup_{n\in I_1} E_n \supseteq \sup_{n\in I_2} E_n \tag{2}$$

$$\inf_{n\in I_1} E_n \subseteq \inf_{n\in I_2} E_n \tag{3}$$

0.1.2　集合列的上下极限

定义　我们取

$$I_k \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\} \tag{4}$$

则 $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ 单调，从而根据命题0.1.1可知，集合列 $\{\sup_{n\in I_k} E_n\}_{k=1}^{\infty}, \{\inf_{n\in I_k} E_n\}_{k=1}^{\infty}$ 也单调 (前者递减，后者递增)，从而可定义任一集合列的上下极限：

定义 0.1.3.

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} E_n \coloneqq \lim_{k\to\infty} \sup_{n\in I_k} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \tag{5}$$

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} E_n \coloneqq \lim_{k\to\infty} \inf_{n\in I_k} E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty} E_n \tag{6}$$

性质 下面给出集合列的上下极限的性质，也可视作等价定义 / 不同观点

命题 0.1.2.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \{x \mid x \in E_n\text{对无穷多个 } n \text{ 成立}\} \tag{7}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n = \{x \mid x \in E_n\text{对除有限个 } n \text{ 成立}\} \tag{8}$$

根据 *Demorgan* 定律可得，

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n = (\overline{\lim_{n\to\infty}} E_n^c)^c$$

0.2 *Descartes* 积的推广

引入 首先我们回忆两个 (有限个) 集合的 *Descartes* 积的定义

$$A \times B \coloneqq \{(x, y) \mid x \in A,\ \ y \in B\} \tag{9}$$

此处定义的 *Descartes* 积与普通的集合的一个显著的区别就是他是**有序的**，这里的**“有序对”** (x, y) 与 (y, x) 并不相同，这就引出了几个问题：

- 什么是 (x, y)，即“有序对”的定义是什么？
- x, y 的顺序是否重要？
  或者对于更一般的一族集合的 *Descartes* 积是否仍可定义**“顺序”**?

在解答这些问题之前，我们先来引入一个函数

$$f : \{1, 2\} \longrightarrow A \cup B \tag{10}$$

$$1 \longmapsto x \in A \tag{11}$$

$$2 \longmapsto y \in B \tag{12}$$

则此时函数 f 已经给出了我们上面所需的**“序关系”**，即可用以表示 (x, y)
但这时又冒出了几个新的疑惑：

- 指标集 $\{1,2\}$ 的选取是否重要？

  注. 此处的回答显然为否，即我们选取指标集时不应牵扯到角标，比如此处可用 $\{1,2\}$，也可用 $\{3,4\}$，或是 $\{c,d\}$，即只需指标集中**"元素的个数"**相同，而无需考虑具体形式

- 指标集是否必须为**有限集**？或是**可数集**？

定义 为了解答上述疑惑，下面我们给出更一般的 *Descartes* 积的定义：

定义 0.2.1. 设 J 为一个指标集，$\{E_n\}_{n\in J}$ 为一族集合，定义集合 T

$$T := \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup_{n\in J} E_n \;\middle|\; I \approx J \right\} \tag{13}$$

并在集合 T 上定义等价关系 $\sim$：

$$f \sim g \Longleftrightarrow \exists \text{双射} \varphi,\ \text{s.t.} f\circ\varphi = g \tag{14}$$

在此基础上，定义集合族 $\{E_n\}_{n\in J}$ 的<u>*Descartes* 积</u>：

$$\prod_{n\in J} E_n := \left\{ \overline{f} \;\middle|\; f : J \longrightarrow \bigcup_{n\in J} E_n,\ \forall n\in J,\ f(n)\in E_n \right\} \tag{15}$$

注.
- $I \approx J$ 表示集合 I 与 J 等势，即存在 I 到 J 的双射
- $\overline{f}$ 表示 f 在集合 T 上的等价类，注意此处 *Descartes* 积中的 $\overline{f}$ 剔除了 f 在 T 的等价类中不满足条件"$\forall n\in J,\ f(n)\in E_n$"的部分函数
- 此定义可理解为：
  从每个 E_n 中各选一者一一置于一些**不记次序**的空位中，即构成一个**多重集**
- 这里 T 上的等价关系 $\sim$ 保证了 *Descartes* 积中函数 f 指标集的选取只需考虑**集合的势**相等，即**元素的个数**相同

推广 事实上，推广后的定义已不包含集合的序概念，此时再将推广后的 *Descartes* 积与传统意义上在**可列集 (有限 / 可数)** 上定义的 *Descartes* 积进行对比：
设 J 是可列的，可先将 J 中元素排序为 j_1，j_2，$j_3,\cdots$，由此回到"传统的"*Descartes* 积：

$$E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3}\times\cdots \tag{16}$$

事实上，该定义即为定义0.2.1中 $\prod_{n\in J} E_n$ 的一个代表元集
同时，在此基础上，我们还可将传统的**二元关系**拓展为**多元关系 (即为 *Descartes* 积的子集)**

0.3 序关系

0.3.1 偏序，全序，预序

首先回顾关系 (二元关系) 的概念：

定义 0.3.1. 设 X, Y 是两个集合，如果集合 R 是 X 与 Y 的 *Descartes* 积的子集，即

$$R \subseteq X \times Y \tag{17}$$

则称 R 是从 X 到 Y 的一个二元关系 (一般称作关系).
于是，若 $(x, y) \in R$，我们称 x 与 y 是 $R-$ 相关的，记作 xRy.

偏序 此时便能给出偏序的定义：

定义 0.3.2. 设 X 为一个集合,满足如下三条公理的关系 $R \subseteq X \times X$ 称作 X 上的一个偏序关系：

1. *if* xRy, $yRz \Rightarrow xRz$ (传递性)
2. *if* xRy, $yRx \Rightarrow x = y$ (反对称性)
3. xRx, $\forall x \in X$ (自反性)

例 0.3.1. 常见的偏序关系有：$\leq$, $\geq$, $\subseteq$, $\supseteq$，通常把一般的偏序关系记作小于等于 $\leq$，上述定义是对常见的偏序关系的推广.

注. **偏序关系**是由**等价关系**所衍生出来的，即先有了相等的概念后才能定义偏序关系. 每一个等价关系可以衍生出很多偏序关系，实际上由同一个等价关系所衍生出的偏序关系并不是完全独立的，而是成对出现的 (类似于 $\subseteq$ 与 $\supseteq$).

例 0.3.2. 由上述定义的偏序关系 R 可得到一个对偶的偏序关系 R'，其有如下的关系：

$$xRy \Leftrightarrow yR'x \tag{18}$$

下面给出一个偏序集的例子

例 0.3.3. 记全体复数构成集合 $\mathbb{C}$，则 $(\mathbb{C}, \leq)$ 是偏序集

注. 在例0.3.3中，我们不能说形如 $a + bi(b \neq 0)$ 的元素之间不满足传递性/反对称性，因为形如 $a + bi(b \neq 0)$ 两个元素之间没有序关系，此处实际只需考虑 $\mathbb{C}$ 中实数之间的序关系 (之所以称偏序集中要求部分元素之间存在序关系，是因为除了反身性以外，其前提均要求选取的对象之间存在序关系。)

全序 在偏序的基础上，可再进一步地给出全序的概念：

定义 0.3.3. 设 X 为一个集合，R 为 X 上的一个偏序关系，如果 R 再同时满足以下性质：

$$\forall x,\ y \in X,\ \text{s.t.}\ xRy\ or\ yRx \tag{19}$$

则称 R 为集合 X 上的一个<u>全序关系</u>

注. 通俗地讲，若 X 中任意两个元素之间都满足关系 R，即任意两个元素之间都可比较，则 (X, R) 为一个全序集

下面给出一个全序集的例子

例 0.3.4. 设集合 $P = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$，则 $(P, \subseteq)$ 构成全序集

预序

定义 0.3.4. 设 X 为一个集合，R 为 X 上的一个二元关系，若 R 只满足自反性和传递性，即

1. $xRx,\ \forall x \in X$ (自反性)
2. $if\ xRy,\ yRz \Rightarrow xRz$ (传递性)

则称 R 为集合 X 上的一个<u>预序关系</u>

注. 由定义可知，**全序集**一定是**偏序集**，**偏序集**一定是**预序集**

0.3.2 极大元/极小元，上界/下界，良序

极大元/极小元 下面给出偏序集上极小元的定义

定义 0.3.5. 设 X 为一个集合，$\prec$ 为 X 上的一个偏序关系，如果存在 $x \in X,\ \text{s.t.}$

$$\forall y \in X,\ if\ y \preceq x,\ then\ y = x \tag{20}$$

则称 x 为 X 的一个<u>极小元</u>

注. 1. 极小元即表示集合中小于或等于它的元素只有它本身，以下为一个等价定义：

$$\nexists y \in X,\ y \neq x,\ \text{s.t.}\ y \prec x \tag{21}$$

2. 并不一定 X 中所有的元素都可与 x 进行比较，即可以有很多元素与 x 没有关系 (不可比较大小)
3. 对于任一偏序集 $(X, \prec)$，极小元的存在性和唯一性都不一定成立

同理可给出极大元的定义.

上界/下界 下面给出下界的定义

定义 0.3.6. 设 X 为一个集合，$\prec$ 为 X 上的一个偏序关系，子集 $E \subseteq X$，如果存在 $x \in X$, s.t.

$$x \preceq y,\ \forall y \in E \tag{22}$$

则称 E (在 X 中) 有下界，x 称为 E 的一个<u>下界</u>

注. 集合 E 中的每一个元素 y 都与下界 x 有关系 (与极小元的区别)

同理可给出上界的定义.

良序 在定义了极小元的基础上，可以进一步来给出良序的定义.

定义 0.3.7. 设 $(X, \prec)$ 为全序集，如果对于 $\forall Y \subseteq X,\ Y \neq \varnothing$，$Y$ 有极小元，则称 $\prec$ 为 X 上的一个<u>良序关系</u>

0.3.3 保序同构，序型

0.4 *Hausdorff* 极大原理，*Zorn* 引理

注意这两个都是**公理**性质，是无法被证明的，只能互相推导

***Hausdorff* 极大原理** 下面给出 *Hausdorff* 极大原理的叙述.

定理 0.4.1. 任一偏序集都有极大的全序子集.

注. 此处的“**极大**”指的是，对于集合 {该偏序集的所有全序子集}，在包含 $\subseteq$ 的偏序关系下的极大元

***Zorn* 引理** 下面给出 *Zorn* 引理的叙述.

定理 0.4.2. 若偏序集 X 的每个全序子集都有上界，则 X 有极大元.

注. 此处的上界只需满足存在性，而无需满足唯一性.

相互推导 事实上，*Hausdorff* 极大原理和 *Zorn* 引理是等价的.

证明.

“$\Rightarrow$”: 设 $(X, \prec)$ 为一个偏序集，

根据 *Hausdorff* 极大原理，在包含关系 $\subseteq$ 下，得到极大全序子集 Y.

根据 *Zorn* 引理的假设，$Y \subseteq X$ 存在上界 x，则 $x \in Y$

(否则 $Y \cup \{x\}$ 构成的全序子集与 Y 的极大性矛盾)

从而 x 即为 X 的极大元.(否则若存在更大的 y，则同理 $Y \cup \{y\}$ 与 Y 极大性矛盾)

“$\Leftarrow$”: 设 $(X, \prec)$ 为一个偏序集，下面证明 X 有极大的全序子集：

记集合 Z

$$Z = \{X\text{的所有全序子集}\} \tag{23}$$

从而集合 Z 与包含关系 $\subseteq$ 构成了一个偏序集. 令

$$A = \bigcup_{U \in Z} U \tag{24}$$

从而 $A \subseteq X$ 即为 Z 中所有元素的上界.

根据 *Zorn* 引理，Z 在偏序关系 $\subseteq$ 下有极大元，也就说明了 X 有极大的偏序子集.

□

0.5 良序原理，选择公理

对这两个**公理**的证明需要首先承认 *Hausdorff* 极大原理 / *Zorn* 引理

0.5.1 良序原理

下面给出良序原理的叙述.

定理 0.5.1. 任一非空集必为良序集.(任一非空集存在良序)

证明. 设 X 是个非空集，考虑 X 的所有子集的良序构成的集合 W.
注意到 W 中的每个元素，即为各良序关系 $\prec_1$，$\prec_2$，都附着着其对应的 X 的子集 E_1，E_2
(因为对于不同的子集 E_1，E_2，即使在相同的位置其良序关系相同 (即 $x_1 \prec_1 x_2$ && $x_1 \prec_2 x_2$)，但其在整个子集上的良序关系还是不同的)
因此 W 中的元素应当表述为各良序关系 (主体) 与其对应的子集构成的有序对 $(\prec, E)$
在 W 中引入这样的偏序关系，记作 $\leq$:

$$(\prec_1, E_1) \leq (\prec_2, E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} E_1 \subseteq E_2 \\ \prec_2|_{E_1} = \prec_1 \\ \forall x \in E_2 \backslash E_1,\ y \in E_1,\ y \prec_2 x \end{cases} \tag{25}$$

也就是说，$\prec_2$ 是 $\prec_1$ 的延拓，$\prec_1$ 是 $\prec_2$ 在 E_1 上的限制，同时 E_2 超出 E_1 的部分在 $\prec_2$ 的意义下总是比 E_1 中的元素更大.
下面我们尝试运用 *Zorn* 引理 (定理0.4.2) 来证明. 任取 W 的全序子集 Y，记

$$Y = \{\prec_a\}_{a \in I} \tag{26}$$

令

$$E_Y = \bigcup_{a \in I} E_a \tag{27}$$

同理可得到该 X 的子集 E_Y 下的良序关系 $\prec_Y$，此 $\prec_Y$ 即为 W 的全序子集 Y 的上界.
根据 *Zorn* 引理 (定理0.4.2)，W 中有极大元 $(\prec, E)$.
事实上，此处 $E = X$，$\prec$ 即为 X 上的一个良序关系.
(反证法. 假设 $E \neq X$，设 $x \in X \backslash E$，此时可定义 $x \prec y,\ \forall y \in E$，则 $E \cup \{x\}$ 即可得到 X 的一个全序子集，$E \cup \{x\} \in W$，这与 E 的极大性矛盾.) □

0.5.2 选择公理

下面给出选择公理的叙述.

定理 0.5.2. 非空的非空集族的 *Descartes* 积非空.

注. • **"非空的非空集族"**就是指有一族非空集，其中这一族非空集的个数至少为 1

- "*Descartes* 积非空"大致上说的是可以不计次序从每个非空集中取出一个元素，构成一个多重集 (具体可见定义0.2.1)

下面我们利用良序原理来对选择公理进行证明.

证明. 设 $\{X_a\}_{a\in I}$ 为一族非空集，其中 $X_a \neq \varnothing$，$I \neq \varnothing$.
根据良序原理 (定理0.5.1)，集合 $\bigcup\limits_{a\in I} X_a$ 存在一个良序关系 $\prec$
由于 $(\bigcup\limits_{a\in I} X_a, \prec)$ 为良序集，因此其非空子集 $X_a \subseteq \bigcup\limits_{a\in I} X_a$ 均有极小元. 定义映射 f

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{a\in I} X_a \tag{28}$$

$$a \longmapsto \min_{\prec} X_a \tag{29}$$

从而

$$\bar{f} \in \prod_{a\in I} X_a,\ \prod_{a\in I} X_a \neq \varnothing \tag{30}$$

□

0.6 集合的势 *Cardinality*

引入 为了更好地理解势的概念，我们先给出势的比较关系. 对于非空集 X, Y，我们定义.

$$\begin{cases} card\,(X) \leqslant card\,(Y) \\ card\,(X) = card\,(Y) \\ card\,(X) \geqslant card\,(Y) \end{cases} \tag{31}$$

分别表示存在从 X 到 Y 的**单射**、**双射**、**满射**. 这与常规下集合元素个数的比较是吻合的.

定义 此时再去赋予势 $card$ 的意义.

定义 0.6.1. 设 X 为一个集合，定义 X 的**势** (*Cardinality*).

$$card(X) := \{Y\text{为集合} \mid \text{存在由 } X \text{ 到 } Y \text{ 的单射}\} \tag{32}$$

记 S 为全体集合构成的真类，S^* 为全体非空集合构成的真类. 在 S^* 上定义等价关系 R:

$$xRy \Leftrightarrow \text{存在由 } X \text{ 到 } Y \text{ 的双射} \tag{33}$$

则势的概念自然即为 X 在关系 R 下的等价类，即

$$card(X) = \overline{X} \tag{34}$$

注. 规定 $card(\varnothing) < card(X)$, $card(X) > card(\varnothing)$, $\forall X \neq \varnothing$，进而定义中的 S^* 可修正为 S. 其中 $card(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

严格证明 在大致给出了集合的势的概念后，下面对其中的一些概念进行严格的定义和证明. 对于最开始在全集合类 S 中引入的关系 $\leq$，下面证明其为 S 上的一个偏序关系.
事实上，我们还会证明 $\leq$ 是 S 上的全序关系，即任意两个集合的势都可比较.

对偏序关系的三条公理进行一一验证. 即**传递性**、**自反性**、**反对称性**. 同时证明 $\leq$ **与** $\geq$ **互为逆关系**，$\leq$ 同时为**全序关系**.

自反性、传递性 事实上自反性和传递性的证明是显然的.

逆关系 下面的引理证明了 $\leq$ 与 $\geq$ 互为逆关系.

引理 0.6.1. 设 $X,\ Y \in S^*$，则

$$card(X) \leq card(Y) \Leftrightarrow card(Y) \geq card(X) \tag{35}$$

证明. 即证：存在 X 到 Y 的单射 f $\Leftrightarrow$ 存在 Y 到 X 的满射 g.

$\Rightarrow$: 由于 f 为单设，因此 $\forall y \in f(X)$, $\exists$ 唯一的 $x \in X$, s. t. $y = f(x)$.
于是可构造

$$g : Y \longrightarrow X \tag{36}$$

$$y \longmapsto \begin{cases} x,\ y = f(x) & y \in f(X) \\ x_0,\ \forall x_0 \in X & y \notin f(X) \end{cases} \tag{37}$$

从而 g 即为 Y 到 X 的满射.

$\Leftarrow$: 由于 g 为 Y 到 X 的满射，因此对于 $\forall x \in X,\ g^{-1}(x) \subseteq Y$ 为 Y 的一个非空子集.
记 Y 的子集族 Z 为

$$Z = \{g^{-1}(x) \mid x \in X\} = \{g^{-1}(x)\}_{x\in X} \tag{38}$$

由于 $X,\ Y \in S^*$ 非空，因此 Z 为非空的非空集族.
根据选择公理 (定理0.5.2)，Z 的 *Descartes* 积非空，
即存在一个由指标集 X 到 $\bigcup\limits_{x\in X} g^{-1}(x)$ 的单射 f

$$f : X \longrightarrow \bigcup_{x\in X} g^{-1}(x) \subseteq Y \tag{39}$$

$$x \longmapsto f(x) \tag{40}$$

此选择映射 f 即为所求单射.

□

全序关系 下面的引理说明了 $\leq$ 实际上还是 S 上的一个全序关系，其证明具有一定技巧性.

引理 0.6.2. $\forall X,\ Y \in S$

$$card(X) \leq card(Y) \text{ 或 } card(Y) \leq card(X) \tag{41}$$

证明. 不妨设 $X,\ Y \in S^*$.(映射实际上为特殊的二元关系). 令

$$\mathcal{I} = \{f : X_0 \longrightarrow Y \mid X_0 \subseteq X,\ f\text{为单射}\} \subseteq X \times Y \tag{42}$$

类比良序原理 (定理0.5.1) 的证明，在集合 $\mathcal{I}$ 上定义偏序 $\subseteq$.

$$f \subseteq g \Leftrightarrow \begin{cases} X_f \subseteq X_g \\ g\Big|_{X_f} = f \end{cases} \tag{43}$$

从而对于 $\mathcal{I}$ 的每个全序子集 E，取 $X_E = \bigcup\limits_{f\in E} X_f$，其对应的映射 f_E 即为 E 的上界.
于是偏序集 $(\mathcal{I}, \subseteq)$ 满足 *Zorn* 引理 (定理0.4.2) 的条件，存在极大元 $f : X_0 \longrightarrow Y$.
假设 $X_0 \neq X$ 且 $f(X_0) \neq Y$，则 $\exists x \in X \backslash X_0$，$y \in Y \backslash f(X)$，此时令

$$f' \mid_{X_0} = f \tag{44}$$

$$f' : x \longmapsto y \tag{45}$$

从而得到单射 $f' \in I$，且 $f \subseteq f'$，这与 f 的极大性矛盾.
综上，$X_0 = X$ 或 $f(X_0) = Y$，即必定存在 X 到 Y 的单射或满射. □

反对称性 (*Schröder − Bernstein* 定理) 下面的定理说明了 $\leq$ 具有反对称性. 其证明技巧性比较强.

定理 0.6.3. (*Schröder − Bernstein* 定理)
设 $X,\ Y \in S$，若 $card(X) \leq card(Y)$ 且 $card(Y) \leq card(X)$，则

$$card(X) = card(Y) \tag{46}$$

证明. 即已知存在单射 $f : X \longrightarrow Y,\ g : Y \longrightarrow X$，证明 X 与 Y 之间存在双射：
考虑 $X,\ Y$ 的如下划分：
$\forall x \in X$，构造序列

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x,\ g^{-1}(x),\ (f^{-1} \circ g^{-1})(x),\ (g^{-1} \circ f^{-1} \circ g^{-1})(x), \cdots\} \tag{47}$$

则称

$$\begin{cases} x \in X_\infty : x_n \neq \varnothing, \forall n \in \mathbb{N} \\ x \in X_X : x_{n_0} \in X \\ x \in X_Y : x_{n_0} \in Y \end{cases}, \quad n_0 := \max_{x_n \neq \varnothing} n \tag{48}$$

类似的，也有 Y_∞，Y_X，Y_Y. 容易证明

$$f(X_\infty) = Y_\infty，f(X_X) = Y_X，f(X_Y) = Y_Y \tag{49}$$

从而 X, Y 的三个部分分别可以建立双射，最终 X, Y 之间存在双射. □

0.7 幂集的势，可数

0.7.1 幂集的势

通过比较任一集合与其幂集的势，可以得到全集合类 S 上的势关系 $\leq$ 不存在极大元，即不存在某个集合的势最大.

命题 0.7.1. $\forall X \in S^{*}$,

$$card(X) < card(2^{X}) \tag{50}$$

证明.

- 首先，$card(X) \leq card(2^{X})$. 存在 X 到 2^{X} 的映射 f，

$$f : X \longrightarrow 2^{X} \tag{51}$$

$$x \longmapsto \{x\} \tag{52}$$

  从而 f 为单射，$card(X) \leq card(2^{X})$.

- 其次，不存在 X 到 2^{X} 的满射.$\forall g : X \longrightarrow 2^{X}$，令

$$Y := \{x \in X \mid x \notin g(x)\} \tag{53}$$

  下面证明：$\nexists y \in X,\ \text{s. t.}\ g(y) = Y \in 2^{X}$.

  反证法. 假设 $\exists x_0 \in X,\ \text{s. t.}\ g(x_0) = Y$，则

  i. 若 $x_0 \in Y$，则根据 Y 的定义，$x_0 \notin g(x_0) = Y$，这与 $x_0 \in Y$ 矛盾.

  ii. 若 $x_0 \notin Y$，则 $x_0 \notin g(x_0) = Y$，根据 Y 的定义，$x_0 \in Y$，矛盾.

  综上，不存在 X 到 2^{X} 的满射.

Therefore,

$$card(X) < card(2^{X}) \tag{54}$$

□

0.7.2 可数

定义

定义 0.7.1. 设 X 为一个集合，则称

$$X \text{ 可数} \Leftrightarrow card(X) \leq card(\mathbb{N}) \tag{55}$$

注. 常将上述定义的集合称为**至多可数**，即包含**有限**和**无限可数**两种情况.

性质 下面是可数集的两条重要的性质.

命题 0.7.2. (i) **(可数个可数集的并集是可数集)**

若 $\{X_a\}_{a\in I}$ 满足 $\begin{cases} I \text{ 可数} \\ \forall a \in I,\ X_a \text{ 可数} \end{cases}$，则 $\bigcup\limits_{a\in I} X_a$ 可数.

(ii) **(无限可数集与自然数集 $\mathbb{N}$ 等势)**

若 X 可数且 X 为无限集，则 $card(X) = card(\mathbb{N})$.

例 0.7.1. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 是可数集.

0.8 可数集的幂集，连续统

定义 下面给出连续统的定义.

定义 0.8.1. 设 $X \in S$，则

$$X\text{为}\underline{\text{连续统}} \Leftrightarrow card(X) = card(\mathbb{R}) := c \tag{56}$$

注. 提及连续统，就不得不谈到**连续统假设** (*Continuum Hypothesis*，简记 *CH*).

定理 0.8.1 (连续统假设 *CH*). $\nexists X \subseteq \mathbb{R}$，s. t.

$$card(\mathbb{N}) < card(X) < card(\mathbb{R}) \tag{57}$$

而对于康托尔提出的这样一个假设，美国数学家科恩在 1963 年证明：

在 *ZFC* 公理系统上，*CH* 既不可被证明，也不可被证伪.

连续统的势 下面给出有关连续统的一个重要的命题，它刻画了连续统与可数集的幂集之间的关系.

命题 0.8.1.

$$card(2^{\mathbb{N}}) = card(\mathbb{R}) = c \tag{58}$$

证明. 具体证明过程见视频可数集的幂集与连续统. □

由此可得到推论.

推论 0.8.2. 设 $X \in S$，若 $card(X) \geq c$，则 X 不可数.

性质

命题 0.8.2. 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 满足

$$\begin{cases} card\,(I) = card\,(\mathbb{R}) \ \ (\leq) \\ \forall \alpha \in I,\ card\,(X_\alpha) = card\,(\mathbb{R}) \ \ (\leq) \end{cases} \tag{59}$$

则

$$card\left(\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha\right) = card(\mathbb{R}) \ (\leq) \tag{60}$$

在进行证明之前，先证明以下引理.

引理 0.8.3. 若 $card(X) \leq card(\mathbb{R})$，$card(Y) \leq card(\mathbb{R})$，则 $card(X \times Y) \leq card(\mathbb{R})$

证明. 由于 $card(X \times Y) \leq card(X \times \mathbb{R}) \leq card(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$，因此
即证 $card(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = card(\mathbb{R})$. 由于可列集的幂集与连续统等势 (命题0.8.1)，因此
即证 $card(2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}) = card(2^{\mathbb{N}})$. 下面分别构造 $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ 到 $2^{\mathbb{N}}$ 的单射和满射：

- 令

$$f : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}} \tag{61}$$

$$A \times B \longmapsto C \tag{62}$$

其中

$$C \coloneqq \left\{ c \;\middle|\; c = \begin{cases} 2a+1, & \forall a \in A \\ 2b, & \forall b \in B \end{cases} \right\} \tag{63}$$

从而得到了单射 $f : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$.

- 令

$$g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}} \tag{64}$$

$$A \times B \longmapsto C \tag{65}$$

其中

$$A \coloneqq \{a \mid a = \frac{c+1}{2},\ \forall c \in C \text{ 为奇数}\} \tag{66}$$

$$B \coloneqq \{b \mid b = \frac{c}{2},\ \forall c \in C \text{ 为偶数}\} \tag{67}$$

容易证明，$g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ 为满射，从而得证.

□

下面对命题0.8.2进行证明.

证明. 由于 $\forall a \in I,\ card\,(X_a) \leq card\,(\mathbb{R})$，因此存在满射 $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow X_a$.
令

$$f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \bigcup_{a \in I} X_a \tag{68}$$

$$(a, r) \longmapsto f_a(r) \tag{69}$$

由于 f_a 为满射，因此 $f: I\times\mathbb{R}\longrightarrow\bigcup\limits_{a\in I}X_a$ 为满射，从而根据引理0.8.3

$$card(\bigcup_{a\in I}X_a)\leq card(I\times\mathbb{R})\leq card(\mathbb{R}) \tag{70}$$

□

0.9 理想实数系及上面的求和

0.9.1 实数系的推广

定义 0.9.1. 理想实数系 $\overline{\mathbb{R}}$ 是对实数系的推广.

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \tag{71}$$

其中我们规定实数系 $\mathbb{R}$ 中，

$$-\infty < x < +\infty, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{72}$$

这样我们便可自然地将 $\mathbb{R}$ 上的偏序关系延拓到 $\overline{\mathbb{R}}$ 中.

0.9.2 $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 中的和

引入 在实数系 $\mathbb{R}$ 中，我们所定义的级数求和 $\sum$ 都是建立在**至多可数项**的基础之上，并且它对于**求和顺序**大多时候是有关系的.
而对于任意一族数，我们就会面临以下的问题：

- 这族数能否求和？
- 若能求和，则其结果是否与求和顺序有关？

定义 为了解决上述问题，我们在对实数系 $\mathbb{R}$ 进行延拓后，在理想实数系 $\overline{\mathbb{R}}$ 上对求和 $\sum$ 进行推广.
首先考虑非负理想实数系 $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 中的和.(排除了**求和顺序**的考虑)

定义 0.9.2. $\forall I \in S^*$, $f : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. 定义 f 的和 $\sum_f$ 是这样一个映射.

$$\sum_f : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \tag{73}$$

$$X \longmapsto \sum_{x \in X} f(x) := \sup_{F \subseteq X,\ F\text{有限}} \left(\sum_{x \in F} f(x) \right) \tag{74}$$

注. 1. 当 I 为可数集时，映射 $f : I \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 可视作非负数列，而此处定义的 $\sum\limits_{x \in X} f(x)$ 与正项级数的定义吻合.

2. 此处对于任意一族数的和 $\sum\limits_{x \in X} f(x)$ 的定义事实上与 *Lesbesgue* 积分的定义是吻和的.

性质 下面给出 $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 中的和的几条重要的性质.

命题 0.9.1. *Let* $X \in S^*$，$\forall f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$，若集合 $A \coloneqq \{x \mid f(x) > 0\}$ 为不可数集，则

$$\sum_{x\in X} f(x) = +\infty \tag{75}$$

证明. 反证法. 假设 $\sum\limits_{x\in X} f(x) = \sum\limits_{x\in A} f(x) = M < +\infty$，记

$$A_n \coloneqq \{x \in X \mid f(x) \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})\} \tag{76}$$

由于 $\sum\limits_{x\in A} f(x) = M$ 有界，因此

$$A \backslash \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in X \mid f(x) \geq 1\} \preceq \mathbb{N} \tag{77}$$

$$A_n \preceq \mathbb{N} \tag{78}$$

从而

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \preceq \mathbb{N} \tag{79}$$

$$A = \left(A \backslash \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \preceq \mathbb{N} \tag{80}$$

而这与 A 不可数矛盾. □

下面的这个命题是对**正项级数的可交换性**在理想实数系 $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ 上的推广形式.

命题 0.9.2. *Let* $X \in S^*$，$\forall f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$，若集合 $A \coloneqq \{x \mid f(x) > 0\}$ 无穷可数，则

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f \circ g(n) \tag{81}$$

其中 $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ 为双射.

证明. 易证. □

第一章　*Measures*

1.4 *Outer Measures*

命题 **1.4.1.** Let $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ and $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ be such that $\varnothing \in \mathcal{E}$, $X \in \mathcal{E}$ and $\rho(\varnothing) = 0$. For any $A \subset X$, define

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) \mid E_j \in \mathcal{E} \text{ and } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right\} \tag{1.1}$$

Then μ^* is an outer measure.

定理 **1.4.1. Carathéodory's Theorem**.

If μ^* is an outer measure on X, the collection $\mathcal{M}$ of μ^*-measurable sets is a σ-algebra, and the restriction of μ^* to $\mathcal{M}$ is a complete measure.

命题 **1.4.2.** If μ_0 is a premeasure on $\mathcal{A}$ and μ^* is an outer measure defined by

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \rho(A_j) \mid A_j \in \mathcal{A} \text{ and } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right\} \tag{1.2}$$

then

a. $\mu^* |_{\mathcal{A}} = \mu_0$;

b. Every set in $\mathcal{A}$ is μ^*-measurable.

定理 1.4.2. Let $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ be an algebra, μ_0 a premeasure on $\mathcal{A}$, and $\mathcal{M}$ the σ-algebra generated by $\mathcal{A}$. There exists a measure μ on $\mathcal{M}$ whose restriction to $\mathcal{A}$ is μ_0 – namely, $\mu = \mu^* \mid_{\mathcal{M}}$ where μ^* is given by

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \rho(A_j) \mid A_j \in \mathcal{A} \ and \ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right\} \tag{1.3}$$

If υ is another measure on $\mathcal{M}$ that extends μ_0, then

$$\upsilon(E) \leq \mu(E), \ \forall E \in \mathcal{M} \tag{1.4}$$

with equality when $\mu(E) < \infty$.

If μ_0 is σ-finite, then μ is the unique extension of μ_0 to a measure on $\mathcal{M}$.

1.5 *Borel Measures on the Real Line*

命题 **1.5.1.** Let $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be increasing and right continuous. If $(a_j,b_j], j=1\sim n$ are disjoint h-intervals, let

$$\mu_0(\bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j])=\sum_{j=1}^{n}\left[F(b_j)-F(a_j)\right] \tag{1.5}$$

and let $\mu_0(\varnothing)=0$. Then μ_0 is a premeasure on the algebra $\mathcal{A}$, where

$$\mathcal{A}=\{\mathit{finite\ disjoint\ unions\ of\ h-intervals}\} \tag{1.6}$$

定理 **1.5.1.** If $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ is any increasing, right continuous function, there is a unique Borel measure μ_F on $\mathbb{R}$ such that

$$\mu_F((a,b])=F(b)-F(a),\ \forall a,b \tag{1.7}$$

If G is another such function, we have

$$\mu_F=\mu_G \iff F-G \text{ is constant}$$

Conversely, if μ is a Borel measure on $\mathbb{R}$ that is finite on all bounded Borel sets and we define

$$F(x)=\begin{cases}\mu((0,x]),\ \mathit{if}\ x>0\\ 0,\ \mathit{if}\ x=0\\ -\mu((x,0]),\ \mathit{if}\ x<0\end{cases} \tag{1.8}$$

then F is increasing and right continuous, and $\mu=\mu_F$.

引理 1.5.2. Fix a complete Lebesgue-Stieltjes measure μ on $\mathbb{R}$ associated to the increasing, right continuous function F, and we denote by $\mathcal{M}_\mu$ the domain of μ ($\mathcal{M}_\mu$ is always strictly larger than $\mathcal{B}_\mathbb{R}$). Then for any $E \in \mathcal{M}_\mu$,

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left[F(b_j) - F(a_j)\right] \mid E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j]\right\} \tag{1.9}$$

$$= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu((a_j, b_j]) \mid E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j]\right\} \tag{1.10}$$

$$= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu((a_j, b_j)) \mid E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\right\} \tag{1.11}$$

定理 1.5.3. If $E \in \mathcal{M}_\mu$, then

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid E \subset U \textit{ and } U \textit{ is open}\} \tag{1.12}$$

$$= \sup\{\mu(K) \mid K \subset E \textit{ and } K \textit{ is compact}\} \tag{1.13}$$

定理 1.5.4. 正则性.

If $E \subset \mathbb{R}$, the followings are equivalent:

a. $E \in \mathcal{M}_\mu$.

b. $E = V \backslash N_1$ where V is a G_δ set and $\mu(N_1) = 0$.

c. $E = H \cup N_2$ where H is an F_σ det and $\mu(N_2) = 0$.

命题 1.5.2. If $E \in \mathcal{M}_\mu$ and $\mu(E) < \infty$, then $\forall \epsilon > 0$, $\exists A =$ finite disjoint union of open intervals, s. t.

$$\mu(E \triangle A) < \epsilon \tag{1.14}$$

定理 1.5.5. If $E \in \mathcal{L}$, then

$$E + s \in \mathcal{L} \text{ and } rE \in \mathcal{L}, \ \forall s, r \in \mathbb{R} \tag{1.15}$$

Moreover,

$$m(E + s) = m(E) \text{ and } m(rE) = |r|\, m(E) \tag{1.16}$$

命题 1.5.3. Let C be the Cantor set.

a. C is compact, nowhere dense, and totally disconnected.

(i.e. the only connected subset of C are single points)

Moreover, C has no isolated points.

b. $m(C) = 0$.

c. $card(C) = \aleph$.

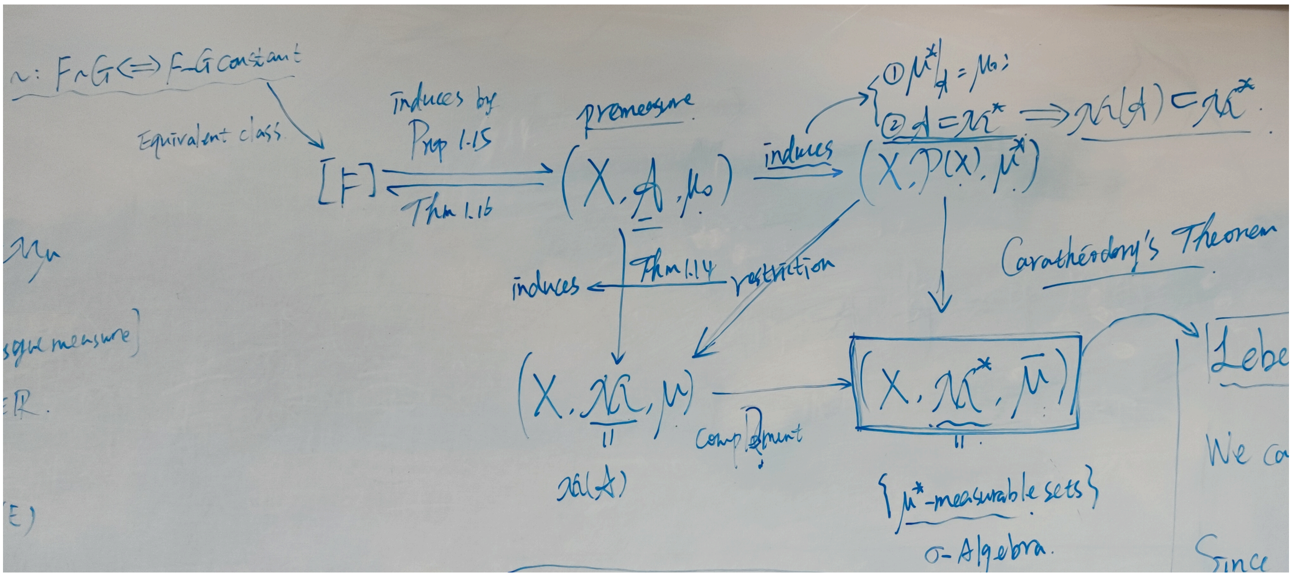

图 1.1: Measure Theory

第二章 *Integration*

2.1 *Measurable Functions*

命题 **2.1.1.** If $\mathcal{N}$ is generated by $\mathcal{E}$, then

$$f : X \to Y \text{ is } (\mathcal{M}, \mathcal{N})\text{-measurable} \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(E) \in \mathcal{M} \text{ for all } E \in \mathcal{M}$$

推论 **2.1.1.** If X and Y are metric (or topological) spaces, every continuous $f : X \to Y$ is $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$-measurable.

命题 **2.1.2.** If $(X, \mathcal{M})$ is a measurable space and $f : X \to \mathbb{R}$, **TFAE**:

a. f is $\mathcal{M}$-measurable.

b. $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M}$ for all $a \in \mathbb{R}$

c. $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{M}$ for all $a \in \mathbb{R}$

d. $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{M}$ for all $a \in \mathbb{R}$

e. $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M}$ for all $a \in \mathbb{R}$

命题 **2.1.3.** 乘积空间上的可测映射.

Let $(X, \mathcal{M})$ and $(Y_a, \mathcal{N}_a)$, $a \in \mathcal{A}$ be measurable spaces, $Y = \prod_{a\in\mathcal{A}} Y_a$, $\mathcal{N} = \bigotimes_{a\in\mathcal{A}} \mathcal{N}_a$, and $\pi_a : Y \to Y_a$ the coordinate maps. Then

$$f : X \to Y \text{ is } (\mathcal{M}, \mathcal{N})\text{-measurable} \;\Leftrightarrow\; f_a = \pi_a \circ f \text{ is } (\mathcal{M}, \mathcal{N}_a)\text{-measurable}$$

推论 **2.1.2.** A funciton $f : X \to \mathbb{C}$ is $\mathcal{M}$-measurable $\Leftrightarrow$ Ref and Imf are $\mathcal{M}$-measurable.

命题 **2.1.4.** If $f, g : X \to \mathbb{C}$ are $\mathcal{M}$-measurable, then so are $f + g$ and fg.

命题 **2.1.5.** If $\{f_j\}$ is a sequence of $\overline{\mathbb{R}}$-valued measurable functions on $(X, \mathcal{M})$, then the functions

$$g_1(x) = \sup_j f_j(x), \;\; g_2(x) = \inf_j f_j(x) \tag{2.1}$$

$$g_3(x) = \limsup_{j\to\infty} f_j(x), \;\; g_4(x) = \liminf_{j\to\infty} f_j(x) \tag{2.2}$$

are all measurable.

$$\text{If } f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x) \text{ for } \forall x \in X, \text{ then } f \text{ is measurable.}$$

推论 **2.1.3.** If $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ are measurable, then so are $\max(f, g)$ and $\min(f, g)$.

推论 **2.1.4.** If $\{f_j\}$ is a sequence of complex-valued measurable functions and $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ for $\forall x \in X$, then f is measurable.

定理 2.1.5. 简单函数逼近可测函数.

Let $(X, \mathcal{M})$ be a measurable space.

a. If $f : X \to [0, \infty]$ is measurable, then $\exists$ a sequence $\{\varphi_n\}$ of simple functions, s. t.

- $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \cdots \le f$
- $\varphi_n \to f$ pointwise
- $\varphi_n \rightrightarrows f$ uniformly on ant set on which f is bounded

b. If $f : X \to \mathbb{C}$ is measurable, then $\exists$ a sequence $\{\varphi_n\}$ of simple functions, s. t.

- $0 \le |\varphi_1| \le |\varphi_2| \le \cdots \le |f|$
- $\varphi_n \to f$ pointwise
- $\varphi_n \rightrightarrows f$ uniformly on ant set on which f is bounded

命题 2.1.6. a. 测度完备性与几乎处处相等意义下可测性的传递.

$$\begin{aligned} &\text{The measure } \mu \text{ is complete} \\ \Leftrightarrow\ &\text{If } f \text{ is measurable and } f = g \ \mu\text{-a.e., then } g \text{ is measurable} \end{aligned}$$

b. 测度完备性与几乎处处收敛意义下可测性的传递.

$$\begin{aligned} &\text{The measure } \mu \text{ is complete} \\ \Leftrightarrow\ &\text{If } f_n \text{ is measurable for } n \in \mathbb{N} \text{ and } f_n \to f \ \mu\text{-a.e., then } f \text{ is measurable.} \end{aligned}$$

命题 2.1.7. Let $(X, \mathcal{M}, \mu)$ be a measure space and let $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ be its completion. If f is an $\overline{\mathcal{M}}$-measurable function on X, then $\exists$ an $\mathcal{M}$-measurable function g, s. t.

$$f = g \quad \overline{\mu}\text{-a.e.} \tag{2.3}$$

附录 A　命题证明

A.5　§1.5

1. **Prop 1.5.1.** 半区间基本集族生成代数上的预测度.

证明. 首先证明 μ_0 是良定义的，此处省略 (比较 Trivial).

下面证明 μ_0 is a premeasure on algebra $\mathcal{A}$.

Suppose $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ disjoint with $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$. WTS

$$\mu_0(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j) \tag{A.1}$$

Since $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$, there $\exists$ disjoint h-intervals B_k, $k = 1 \sim n$, s. t.

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigsqcup_{k=1}^{n} B_k,\ \ \mu_0(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{k=1}^{n} \mu_0(B_k) \tag{A.2}$$

$\Rightarrow$

$$B_k = \bigcup_{j \in \mathcal{I}_k} A_j,\ \ k = 1 \sim n \tag{A.3}$$

$$\bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{I}_k = \mathbb{N} \tag{A.4}$$

$\Rightarrow$ It suffices to show that $\mu_0(B_k) = \sum\limits_{j \in \mathcal{I}_k} \mu_0(A_j)$. i.e.

$\forall$ h-interval $I = (a, b]$, $I = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j$, $I_j = (a_j, b_j]$ disjoint intervals, s. t.

$$\mu_0(I) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) \tag{A.5}$$

下面分两个方向来证明.

(a) $\mu_0(I) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j)$:

Since

$$I \backslash \bigcup_{j=1}^{n} I_j = I \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} I_j \right)^c \in \mathcal{A} \tag{A.6}$$

Then

$$\mu_0(I) = \mu_0(\bigcup_{j=1}^{n} I_j) + \mu_0(I \backslash \bigcup_{j=1}^{n} I_j) \tag{A.7}$$

$$\geq \mu_0(\bigcup_{j=1}^{n} I_j) \tag{A.8}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu_0(I_j) \tag{A.9}$$

Letting $n \to \infty$, we get $\mu_0(I) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j)$.

(b) $\mu_0(I) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j)$: 利用**有限覆盖定理** (将无限变有限). $I = (a, b]$, $I_j = (a_j, b_j]$.

i. a, b finite. Fix $\epsilon > 0$.

Since F is right continuous, $\exists \delta, \delta_j > 0$, s. t.

$$F(a + \delta) - F(a) \leq \epsilon \tag{A.10}$$

$$F(b_j + \delta_j) - F(b_j) \leq \frac{\epsilon}{2^j} \tag{A.11}$$

下面对紧集 $[a + \delta, b]$ 利用**有限覆盖定理**,

$$(a, b] = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \ \Rightarrow \ [a + \delta, b] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j + \delta_j) \tag{A.12}$$

$$\Rightarrow \ [a + \delta, b] \subset \bigcup_{j=1}^{N} (a_j, b_j + \delta_j) \tag{A.13}$$

(此处不妨设 $(a_j, b_j + \delta_j), j = 1 \sim N$ 按照 a_j 大小从小到大排序)

Then

$$\mu_0((a,b]) = F(b) - F(a) \le F(b_N + \delta_N) - F(a) \tag{A.14}$$

$$\le F(b_N + \delta_N) - F(a+\delta) + \epsilon \tag{A.15}$$

$$\le F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \epsilon \tag{A.16}$$

$$\le \sum_{j=1}^{N} \left[F(b_j + \delta_j) - F(a_j)\right] + \epsilon \tag{A.17}$$

$$\le \sum_{j=1}^{N} \left[F(b_j) - \frac{\epsilon}{2^j} - F(a_j)\right] + \epsilon \tag{A.18}$$

$$\le \sum_{j=1}^{N} \mu_0((a_j, b_j]) + 2\epsilon \tag{A.19}$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(a_j, b_j] + 2\epsilon \tag{A.20}$$

i.e.

$$\mu_0(I) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon \tag{A.21}$$

Letting $\epsilon \to 0^+$, we get $\mu_0(I) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j)$.

ii. $a = -\infty$, $I = (-\infty, b]$.

- If $\exists j_0$, s. t. $a_{j_0} = -\infty$, then

$$I = I_{j_0} \cup \bigsqcup_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{\infty} I_j \tag{A.22}$$

Let

$$I^{'} = \bigsqcup_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{\infty} I_j = (b_{j_0}, b] \tag{A.23}$$

Then $I^{'}$ bounded. By **Case (a)**,

$$\mu_0(I^{'}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{\infty} \mu_0(I_j) \tag{A.24}$$

$$\mu_0(I) = \mu_0(I_{j_0}) + \mu_0(I^{'}) = \mu_0(I_{j_0}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{\infty} \mu_0(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) \tag{A.25}$$

- $a_j \neq -\infty, \forall j$. Then for $\forall M > 0$, by **Case (a)**,

$$\mu_0((-M, b]) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) + 2\epsilon \tag{A.26}$$

  Letting $M \to +\infty$, we get

$$\mu_0((-\infty, b]) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(I_j) \tag{A.27}$$

iii. $b = \infty$, Similarly.

□

A.5.1 *Lebesgue − Stieltjes* 测度的性质

2. **Thm 1.5.4. Lebesgue-Stieltjes** 测度的正则性.

证明. 首先由于 Borel-algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}_\mu$, 且 L-S 测度 μ 为**完备测度**
因此 $(b) \Rightarrow (a)$ 与 $(c) \Rightarrow (a)$ Obvious.
下面证明 $(a) \Rightarrow (b)$ && (c):

- If $\mu(E) < \infty$. By **Thm 1.5.3**, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists U_n$ open and K_n compact, s. t.

$$K_n \subset E \subset U_n \tag{A.28}$$

$$\mu(U_n) - \frac{1}{n} \leq \mu(E) \leq \mu(K_n) + \frac{1}{n} \tag{A.29}$$

Let $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \in G_\delta$, $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \in F_\sigma$, then

$$F \subset E \subset G \tag{A.30}$$

$$\mu(G) \leq \mu(E) \leq \mu(F) \tag{A.31}$$

$\Rightarrow \mu(G) = \mu(E) = \mu(F) < \infty$. Thus

$$\mu(G \backslash E) = \mu(E \backslash F) = 0 \tag{A.32}$$

- If $\mu(E) = \infty$. Let $E_j = E \cap (j, j+1]$. Then by the case $\mu(E_j) < \infty$,
$\exists G_j \in G_\delta$, $F_j \in F_\sigma$, s. t.

$$F_j \subset E_j \subset G_j \tag{A.33}$$

$$\mu(G_j) = \mu(E_j) = \mu(F_j) \tag{A.34}$$

(a) Proof $E = F \cup N$ with $\mu(N) = 0$.

Since

$$F_j = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} K_j^k \tag{A.35}$$

Let

$$F = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} K_j^k \in F_\sigma \ with \ F \subset E \tag{A.36}$$

Then

$$\mu(F) = \mu(\bigsqcup_{j=-\infty}^{\infty} F_j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu(F_j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu(E_j) = \mu(E) \tag{A.37}$$

and

$$\mu(E \backslash F) = \mu(\bigsqcup_{j=\infty}^{\infty} (E_j \backslash F_j)) = 0 \tag{A.38}$$

Therefore, $E = F \cup N$, with $F \in F_\sigma$ and $\mu(N) = 0$.

(b) Proof $E = G \backslash N$ with $\mu(N) = 0$.

Since

$$E \in \mathcal{M}_\mu \ \Rightarrow \ E^c \in \mathcal{M}_\mu \tag{A.39}$$

Then by the case we've just discussed, $\exists F \in F_\sigma$, $\mu(N) = 0$, s. t.

$$E^c = F \cup N \ \Rightarrow \ E = F^c \cap N^c = G \cap N^c = G \backslash N \tag{A.40}$$

where $G = F^c \in G_\delta$, $\mu(N) = 0$.

$\square$

3. **Prop 1.4.2.** 用简单开集在对称差的测度意义下逼近 **L-S** 可测集.

证明. By **Lemma 1.5.2**,

$\forall \epsilon > 0$, $\exists$ open intervals $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$, $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} I_j$, s. t.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) \leq \mu(E) + \epsilon < \infty \ converges \tag{A.41}$$

Thus for $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \mu(I_j) < \epsilon \tag{A.42}$$

Let

$$G = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j,\ G_1 = \bigcup_{j=1}^{N} I_j,\ G_2 = \bigcup_{j=N+1}^{\infty} I_j \tag{A.43}$$

Then $G = G_1 \cup G_2$, and

$$\mu(G) \leq \mu(E) + \epsilon,\ \mu(G_2) < \epsilon \tag{A.44}$$

Since $E \backslash G_1 \subset G_2$ and $G_1 \backslash E \subset G \backslash E$, then

$$\mu(E \triangle G_1) = \mu(E \backslash G_1) + \mu(G_1 \backslash E) \tag{A.45}$$

$$\leq \mu(G_2) + \mu(G \backslash E) \tag{A.46}$$

$$\leq \epsilon + \mu(G) - \mu(E) \tag{A.47}$$

$$\leq 2\epsilon \tag{A.48}$$

有限个开区间的并 G_1 即为所求.

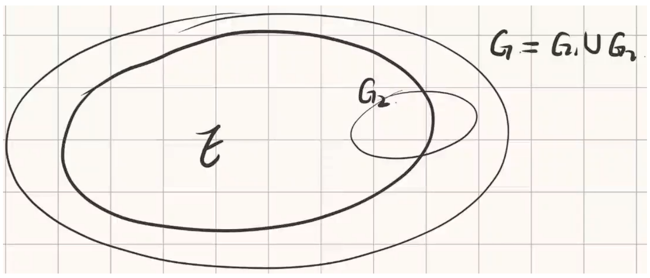

图 A.1: Prop 1.5.2

□

A.5.2 *Cantor* 集的性质

先来 *Cantor* 集的一些**刻画**.

- *Cantor* 集的直接定义：

$$C = [0,1] \backslash \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{a_i\{0,2\} \\ 1\leq i\leq k}} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}}, \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{2}{3^{k+1}} \right) \tag{A.49}$$

- *Cantor* 集的**三进制表示**：

$$x \in C \iff x \ has\ a\ representation\ x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k},\ a_k = 0\ or\ 2 \tag{A.50}$$

即

$$C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k} \mid a_k = 0\ or\ 2,\ k = 1,2,\cdots \right\} \tag{A.51}$$

注. 此处我们约定，若 $x \in C$ 同时还存在有限表示形式，则我们取其**无穷表示**作为其**三进制表示**.

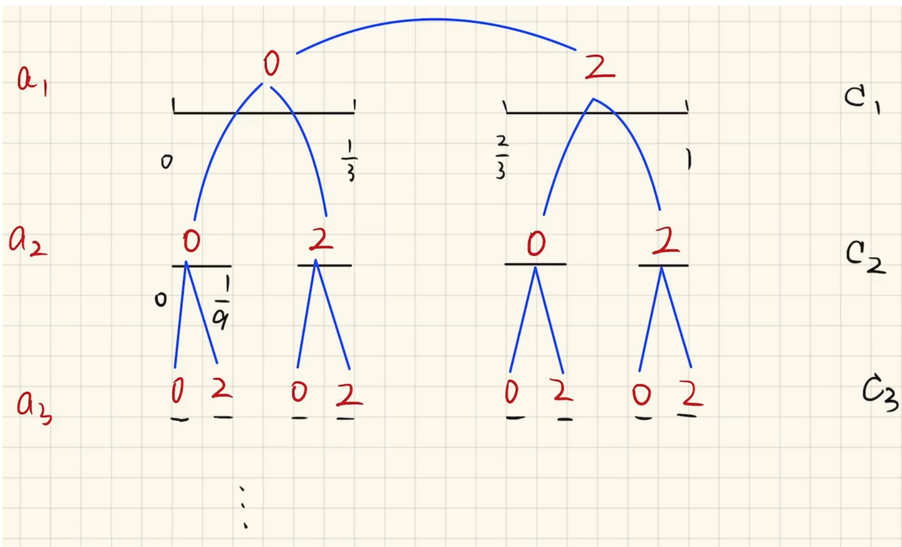

图 A.2: *Cantor* 集的三进制表示

4. **Prop 1.5.3. Cantor 集的性质.**

证明.

(a) (1) C is compact.

Since $C \subset [0,1]$ is bounded and

$$C = [0,1] \backslash \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{a_i\{0,2\} \\ 1\le i\le k}} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}}, \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{2}{3^{k+1}} \right) \ closed \tag{A.52}$$

Then $C \subset \mathbb{R}$ is bounded and closed, i.e. compact.

(2) C is **nowhere dense** in $\mathbb{R}$.

$\forall (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ open.

1° If $(\alpha, \beta) \cap [0,1] = \varnothing$, then $(\alpha, \beta) \cap C = \varnothing$.

2° If $(\alpha, \beta) \cap [0,1] \neq \varnothing$. Since

$$C = [0,1] \backslash \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{a_i\{0,2\} \\ 1\le i\le k}} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}}, \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{2}{3^{k+1}} \right) \tag{A.53}$$

Then $\exists$ 充分大的 k_0 与适当的 $a_j \in \{0,2\}$, $j = 1 \sim k$, s. t.

$$I_n^k = \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{1}{3^{k+1}}, \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{3^j} + \frac{2}{3^{k+1}} \right) \subset C^c \cap (\alpha, \beta) \subset (\alpha, \beta) \tag{A.54}$$

Let $(\alpha', \beta') = I_n^k \subset (\alpha, \beta)$. Then $(\alpha', \beta') \cap C = \varnothing$.

注. **Nowhere dense (无处稠密)** 的定义如下:

定义 A.5.1. 在全集 X 中,$A \subset X$,若 $(\overline{A})^\circ = \varnothing$,则称 A 在 X 中**无处稠密 (nowhere dense)**.

更常使用其**等价定义**:

$$A \subset X \ nowhere\ dense \tag{A.55}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall U \underset{open}{\subset} X,\ \exists O \subset U\ open,\ \text{s. t.}\ \ O \cap A = \varnothing \tag{A.56}$$

即对于 X 中任一开集 U,都存在一个开子集 O,使得 O 与 A 交集为空集.

(3) C is **totally disconnected**. (**连通子集只有单点集，**在 $\mathbb{R}$ 中即等价于不存在区间)

$\forall x, y \in C, x \neq y$, then $\exists \epsilon > 0$, s. t.

$$|x - y| \geq \epsilon > 0 \tag{A.57}$$

记 $C_0 = [0, 1]$, C_k 表示经过 k 次操作后剩下的集合，则 $C_0 \supset C_1 \supset \cdots$, $C = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C_k$, C_k 中每个连通分支的长度为 $\frac{1}{3^k}$.

For $\epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, s. t.

$$\frac{1}{3^n} < \epsilon \tag{A.58}$$

由于 $x, y \in C = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C_k$, 因此 $x, y \in C_n$. 而 $|x - y| \geq \epsilon > \frac{1}{3^n}$

$$\Rightarrow \quad x \text{ 与 } y \text{ 不在 } C_n \text{ 同一道路分支中} \tag{A.59}$$

$$\Rightarrow \quad \text{不妨设 } x < y, \text{ 则 } \exists x < z < y, \text{ s. t. } z \notin C. \tag{A.60}$$

(否则若 $\forall z \in (x, y)$, $z \in C_n$, 则 $[x, y] \subset C_n$, x, y 属于 C_n 同一道路分支. 矛盾)

Therefore, $\forall x, y \in C$, $x < y$, $\exists x < z < y$, s. t. $z \notin C$.

$\Rightarrow$ C is totally disconnected.

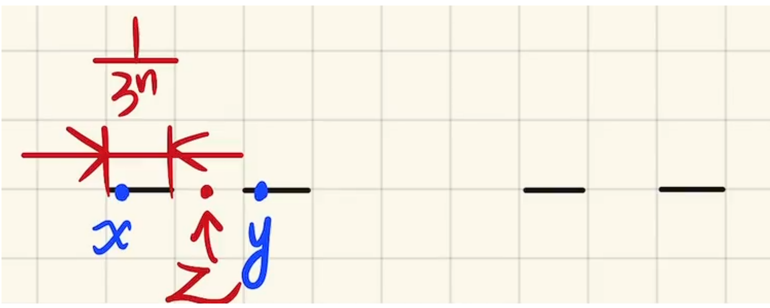

图 A.3: C totally disconnected

(4) C has no isolated points. (C is **perfect**, i.e. closed + no isolated points)

Suppose $x \in C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$, $x \in C_k$, $\forall k$.

In particular, for $n \in \mathbb{N}$, $x \in C_n$

$\Rightarrow$ x 落在 C_n 的某个连通分支中，即某个闭区间中. 记其一个区间端点为 y_n.

则不难证明，$y_n \in C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$, and

$$|x - y_n| \leq \frac{1}{3^n} \tag{A.61}$$

$\Rightarrow$ we get a sequence $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_n \to x$, $y_n \in C$, $\forall n$.

$\Rightarrow$ x is not isolated.

$\Rightarrow$ C is perfect.

$\square$

A.6 §2.1

1. **Thm 2.1.5.** 测度的完备性与几乎处处意义下可测性的传递.

证明.

a. 测度完备性与几乎处处相等意义下可测性的传递.

- 必要性 $\Rightarrow$: 记

$$A = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \tag{A.62}$$

Then $\mu(A) = 0$. Thus

$$g^{-1}((a, \infty]) = (g^{-1}((a, \infty]) \cap A) \bigsqcup (g^{-1}((a, \infty]) \cap A^c) \tag{A.63}$$

Since μ is complete and $f = g$ μ-a.e., then

$$g^{-1}((a, \infty]) \cap A \in \mathcal{M} \tag{A.64}$$

$$g^{-1}((a, \infty]) \cap A^c = f^{-1}((a, \infty]) \cap A^c \in \mathcal{M} \tag{A.65}$$

Therefore, $g^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{M}, \ \forall a \in \mathbb{R}$, g is measurable.

- 充分性 $\Leftarrow$: Suppose $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$. $\forall F \subset N$, WTS: $F \in \mathcal{M}$.

  Suppose $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $R(f) \subset [\alpha, \beta]$, where $0 < \alpha \leq \beta$.

  Let $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \neq g$ only on N, with

$$g|_N = (c \cdot \chi_F)|_N, \ \ c > \beta \tag{A.66}$$

Then $f = g$ μ-a.e., g is measurable. Therefore, $\forall d \in (\beta, c)$,

$$g^{-1}((d, \infty]) = F \in \mathcal{M} \tag{A.67}$$

$\Rightarrow \ \mu$ is complete.

b. 测度完备性与几乎处处收敛意义下可测性的传递.

- 必要性 $\Rightarrow$: 记

$$A = \{x \in X \mid f_n(x) \not\to f(x)\} \tag{A.68}$$

Then $\mu(A) = 0$. Since μ is complete and f_n is measurable, then

$\Rightarrow$ $f_n|_{A^c}$ is $\mathcal{M}_{A^c}$-measurable, and $f_n|_{A^c} \to f|_{A^c}$.

$\Rightarrow$ $f|_{A^c}$ is $\mathcal{M}_{A^c}$-measurable.

$\Rightarrow$ f is measurable.

- 充分性 $\Leftarrow$: Suppose $N \in \mathcal{M}$, $\mu(N) = 0$. $\forall F \subset N$, WTS: $F \in \mathcal{M}$.

Suppose $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ measurable and $R(f_n) \subset [\alpha, \beta]$, where $0 < \alpha \leq \beta$.

Let $f : X \to \overline{\mathbb{R}}, f \neq f_n$ only on N, with

$$f|_N = (c \cdot \chi_F)|_N, \;\; c > \beta \tag{A.69}$$

Then $f_n \to f$ μ-a.e., f is measurable. Therefore, $\forall d \in (\beta, c)$,

$$f^{-1}((d, \infty]) = F \in \mathcal{M} \tag{A.70}$$

$\Rightarrow$ μ is complete.

$\square$