基础定义

加法原理

完成一件事情，可以有n类办法，在第一类办法中有m_1种不同的方法，在第二类办法中有m_2种不同的方法，……，在第n类办法中有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法。

例如，从武汉到上海有乘火车、飞机、轮船3种交通方式可供选择，而火车、飞机、轮船分别有k_1，k_2，k_3个班次，那么从武汉到上海共有$k_1 + k_2 + k_3$ 种方式可以到达。

乘法原理

完成一件事情，需要分成n个步骤，做第一步有m_1种不同的方法，做第二步有m_2种不同的方法，……，做第n步有m_n种不同的方法，那么完成这件事有$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法。

例如，在密码学中，一个由数字0 ~ 9组成的四位密码的可能性为$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$ 种，因为每一位都有10种可能（0 ~ 9）。

两个原理的区别：一个与**分类**有关，另一个与**分步**有关。加法原理是"分类完成"，乘法原理是"分步完成"。

容斥原理

容斥原理的基本思想是先不考虑重叠的情况，把包含某内容的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排除，使计算的结果既无遗漏又无重复。这种方法可以使重叠部分不被重复计算，从而得到更准确的结果。

假设一个班级里有50名学生，其中20名学生参加了数学奥赛，30名学生参加了物理奥赛，15名学生同时参加了数学和物理奥赛。我们需要找出这个班级里一共有多少名学生参加了至少一项奥赛。

首先，把参加数学奥赛的学生数（20人）和参加物理奥赛的学生数（30人）加起来，得到50人。但是，这50人中包含了同时参加两项奥赛的15名学生，这部分学生被重复计算了一次。所以需要从总数中减去这15名学生，以消除重复计数。

故最终参加至少一项奥赛的学生数为：
20（参加数学奥赛）$+30$（参加物理奥赛）-15（同时参加两项奥赛）$= 35$人。

容斥原理的集合形式如下：
两个集合：$A \cup B = A + B - A \cap B$
三个集合：$A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - B \cap C - C \cap A + A \cap B \cap C$
N个集合：
$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$

排列数

在 n 个元素集中选 m 个组成一个有序子集，有多少种不同子集？

将这个值记为 A_n^m

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

下面是理论证明

从 n 个元素中选取 m 个元素的方案为

$n*(n-1)...(n - m + 1)$

这里要加一是因为直接 $n - m$ 子集的大小就多了一，所以要加上

$$A_n^m$$

$= n*(n-1)...(n - m + 1)$

$={(n*(n-1)...(n - m + 1) * (n - m) * (n - m - 1)*...1) \over {(n - m) * (n - m - 1)...*1}}$

$= \frac{n!}{(n-m)!}$

证毕

组合数

那么如果这个子集是无序的，子集方案数记为

$C_n^m = \binom{n}{m}$

这里C和大圆括号的n,m上下就是相反的，没打错

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

下面证明

已知 $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ 要把重复集合去掉

对于任意一个元素数量为 m 的集合，期中元素的排列组合数为 $m!$

由于排列数对于任意一个长度为 m 的组合都重复计算了 $m!$ 次，故将 A_n^m 除掉 $m!$ 即可。 故

$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

组合数恒等式

帕斯卡 / 杨辉三角公式

$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

证明

从n个元素的集合S中选m个作为子集，对于 $a \in S$, 有2中情况

1. a 不在子集中，那么方案为

   C_{n-1}^m

   因为不选a，所以集合中有效元素减少为 $n-1$ 个

2. a 在子集中，那么方案为

   C_{n-1}^{m-1}

   因为已经确定1个元素了，那么有效集和子集都各减少了1个名额

   因为

   在n中选$m =$ 选a的情况 $+$ 不选a的情况

   所以

   $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

   证毕

基础问题

盒子与球问题

现在有 n 个球， m 个盒子， 要将球放在盒子中

	盒子	是否可以存在空盒子

	盒子	是否可以存在空盒子
球	相同	不同
盒子	相同	不同
是否可以存在空盒子	可以为空	不可以为空

总共存在 8 种子问题

1. 球相同， 盒子不同， 不能存在空盒子

隔板法， 想象将 n 个球拍成一列， 在每两个球之间的都可以插入一个隔板，总共有$n-1$个缝隙给你插。 隔板就起到了分割球分属不同盒子的作用， 总共插入 $m-1$ 个隔板， 答案就为 C_{n-1}^{m-1}

就像这样

O | O |O O

结论为 C_{n-1}^{m-1}

2. 球相同， 盒子不同， 可以存在空盒子

假设现在每个盒子里放置一个球，一共多放置 m 个球， 现在就等价为情况 1.

结论为： C_{n+m-1}^{m-1}

3. 球相同， 盒子相同， 可以存在空盒子

我们设 $f[n][m]$ 为将 n 个球放在 m 个盒子里的方案数

如果 $n<m$, 那么此时必然存在至少 $m-n$ 个空盒子，由于盒子相同，所以可以直接将这些空盒子扔掉， 故 $f[n][m]=f[n][n](n<m)$

如果 $n>=m$，此时可以选择将所以盒子都有球或部分盒子没球

(1) 让部分盒子没球， 那么方案数从 $f[i][j-1]$ 继承

(1) 盒子都有球， 那么方案数从 $f[i-j][j]$ 继承

$f[i][j]=f[i][j-1]+f[i-j][j]$

如果没有球或者只有一个盒子，此时方案数为1，即 $f[i][1]=f[0][j]=1$

```
for(ll i = 0;i <= n;i++){
    for(ll j = 1;j <= m;j++){
        if(j ==  1|| i == 0) {
            f[i][j] = 1;
            continue;
        }
        if(i < j) {
            f[i][j] = f[i][i];
            continue;
        }
        f[i][j] = f[i-j][j]+f[i][j-1];
    }
}
```

4. 球相同， 盒子相同， 不能存在空盒子

先给每个箱子分一个球，总共分 m 个球， 接下来就把剩下的 $n-m$ 个球随便分就行了，就像 (3) 一样

5. 球不同， 盒子不同， 可以存在空盒子

每个球都有 m 个盒子选择，故答案为 m^n

结论为: m^n

6. 球不同，盒子相同，无空盒

这个问题需要拓展第二类斯特林数。

将 $S_2(n,m)$ 读作关于 n,m 的第二类斯特林数。

两种求法：

- **递推**： $S_2(n,m)=S_2(n-1,m-1)+mS_2(n-1,m)$ 单独看第一个球，如果第一个球独立存在于一个盒子里面。那么就是 $S_2(n-1,m-1)$ 。 如果不是如此，那么就是把这个球放在任意的盒子里面。也就是在 $S_2(n-1,m)$ 的情况下，找一个盒子塞进去一个球，因为有 m 个盒子所以就乘 m。
- **容斥**： $S_2(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^kC_m^k(m-k)^n$ （说实话可能需要用到多项式的知识，所以完全不会）

联系问题5，问题6还可以得到一个性质 $n^k=\sum_{i=0}^{k}S_2(k,i)*i!*C_n^i$ 什么意思呢？ 左边指的是，k 个球任意的放在 i 个盒子里(5) 右边，我们枚举有多少个非空的盒子数 i（盒子不同，乘上 $i!$），再乘上我们选盒子的方案数。

```
S[0][0]=1;
for(int i=1;i<=n;i++){
    for(int j=1;j<=i;j++){
        S[i][j]=S[i-1][j-1]+j*S[i-1][j];
    }
}
```

7. 球不同，盒子不同，无空盒

与上面问题6基本相同，只需要乘 $m!$ 即可，结果为 $m!*S_2(n,m)$。

8. 球不同，盒子相同，有空盒

也是对6的拓展，只需要枚举非空盒子的对应的方案数量即可，即 $\sum_{i=1}^{m}S_2(n,i)$。

对于这个问题我们再引入一个数列——**贝尔数。** 贝尔数 B_n 更常见的定义为，将 n 个数的集合所有的划分方式，你可以认为这是问题8在盒子数与球数相同时的解。 它有一个递推公式： $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_k$

证明： 假设，B_{n+1} 是含有 $n+1$ 个元素集合的划分个数。 先单独拿出一个元素。

- 这个元素分为一类，剩下 n 个元素，有 $C_n^nB_n$；
- 这个元素和某1个单独元素分成一类，$C_n^{n-1}B_n$；
- 这个元素和某2个单独元素分成一类，$C_n^{n-2}B_n$； 求和可得。

在关注问题8和贝尔数就可以得到贝尔数和第二类斯特林数的关系： $B_n=\sum_{k=0}^{n}S_2(n,k)$

错位排列问题

现在又一个长度为 n 的序列 A, $A_i=i$

求满足 $A_i'\neq i$ 的 A 的排列的数量

我们记长度为 n 的错位排列数量为 $d(n)$

首先， 数字 n 不可以放在 $A'[n]$

对于剩下 $n-1$ 个数的错位排序

假设第 n 封信 a 占据了 b 的位置，那么此时 b 放在哪个信封分两种情况，b 放在 a 位置，或 b 不放在 a 位置

(1)第一类：第一种情况是 b 放在 a 位置，剩下 n — 2 封信进行错排，方案数是 $d(n-2)$

(2) 第二种情况是 b 没有去 a 的位置，那么 b 可能出现在除 a 之夕卜的可位置， b 有 $n-2$ 个位置可以去，不能去 a, b 位置其余所有元素都有 $n-2$ 个位置可以去 (a, b 已占用位置不能去)，这种情况下相当于除 a 之外的其它元素的错排问题，即 $n-1$ 个元素的错排问题，方案数是 d(n-1)

加法原理， 此时除去第 n 封信， 其他总共有 $d(n-1)+d(n-2)$ 种可能

结论就是 $d(n)=(n-1)*(d(n-1)+d(n-2))$