

# 基础定义

## 加法原理

完成一件事情，可以有 $n$ 类办法，在第一类办法中有 $m_1$ 种不同的方法，在第二类办法中有 $m_2$ 种不同的方法，.....，在第 $n$ 类办法中有 $m_n$ 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$  种不同的方法。

例如，从武汉到上海有乘火车、飞机、轮船3种交通方式可供选择，而火车、飞机、轮船分别有 $k_1, k_2, k_3$ 个班次，那么从武汉到上海共有 $k_1 + k_2 + k_3$  种方式可以到达。

## 乘法原理

完成一件事情，需要分成 $n$ 个步骤，做第一步有 $m_1$ 种不同的方法，做第二步有 $m_2$ 种不同的方法，.....，做第 $n$ 步有 $m_n$ 种不同的方法，那么完成这件事有 $N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$  种不同的方法。

例如，在密码学中，一个由数字0~9组成的四位密码的可能性为 $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$  种，因为每一位都有10种可能（0~9）。

两个原理的区别：一个与**分类**有关，另一个与**分步**有关。加法原理是“分类完成”，乘法原理是“分步完成”。

## 容斥原理

容斥原理的基本思想是先不考虑重叠的情况，把包含某内容的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排除，使计算的结果既无遗漏又无重复。这种方法可以使重叠部分不被重复计算，从而得到更准确的结果。

假设一个班级里有50名学生，其中20名学生参加了数学奥赛，30名学生参加了物理奥赛，15名学生同时参加了数学和物理奥赛。我们需要找出这个班级里一共有多少名学生参加了至少一项奥赛。

首先，把参加数学奥赛的学生数（20人）和参加物理奥赛的学生数（30人）加起来，得到50人。但是，这50人中包含了同时参加两项奥赛的15名学生，这部分学生被重复计算了一次。所以需要从总数中减去这15名学生，以消除重复计数。

故最终参加至少一项奥赛的学生数为：

20（参加数学奥赛）+30（参加物理奥赛）-15（同时参加两项奥赛）= 35人。

容斥原理的集合形式如下：

两个集合： $A \cup B = A + B - A \cap B$

三个集合： $A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - B \cap C - C \cap A + A \cap B \cap C$

$N$ 个集合：

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

## 排列数

在  $n$  个元素集中选  $m$  个组成一个有序子集，有多少种不同子集？

将这个值记为  $A_n^m$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

这个没啥可讲的

## 组合数

那么如果这个子集是无序的，子集方案数记为

$$C_n^m = \binom{n}{m}$$

这里C和大圆括号的 $n, m$ 上下就是相反的，没打错

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

下面证明

已知  $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$  要把重复集合去掉

对于任意一个元素数量为  $m$  的集合，期中元素的排列组合数为  $m!$

由于排列数对于任意一个长度为  $m$  的组合都重复计算了  $m!$  次，故将  $A_n^m$  除掉  $m!$  即可。故

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合数恒等式

帕斯卡 / 杨辉三角公式

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

证明

从  $n$  个元素的集合  $S$  中选  $m$  个作为子集，对于  $a \in S$ , 有2中情况

1.  $a$  不在子集中，那么方案为

$$C_{n-1}^m$$

因为不选  $a$ ，所以集合中有效元素减少为  $n - 1$  个

2.  $a$  在子集中，那么方案为

$$C_{n-1}^{m-1}$$

因为已经确定1个元素了，那么有效集和子集都各减少了1个名额

因为

在  $n$  中选  $m =$  选  $a$  的情况 + 不选  $a$  的情况

所以

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

证毕

# 基础问题

## 盒子与球问题

现在有  $n$  个球，  $m$  个盒子， 要将球放在盒子中

	盒子	是否可以存在空盒子
球	相同	不同
盒子	相同	不同
是否可以存在空盒子	可以为空	不可以为空

总共存在 8 种子问题

1. 球相同， 盒子不同， 不能存在空盒子

隔板法， 想象将  $n$  个球拍成一列， 在每两个球之间的都可以插入一个隔板， 总共有  $n - 1$  个缝隙给你插。 隔板就起到了分割球分属不同盒子的作用， 总共插入  $m - 1$  个隔板， 答案就为  $C_{n-1}^{m-1}$

就像这样

0|0|00

结论为  $C_{n-1}^{m-1}$

## 2. 球相同，盒子不同，可以存在空盒子

假设现在每个盒子里放置一个球，一共多放置  $m$  个球，现在就等价情况 1.

结论为:  $C_{n+m-1}^{m-1}$

## 3. 球相同，盒子相同，可以存在空盒子

我们设  $f[n][m]$  为将  $n$  个球放在  $m$  个盒子里的方案数

如果  $n < m$ , 那么此时必然存在至少  $m - n$  个空盒子, 由于盒子相同, 所以可以直接将这些空盒子扔掉, 故  $f[n][m] = f[n][n] (n < m)$

如果  $n \geq m$ , 此时可以选择将所以盒子都有球或部分盒子没球

(1) 让部分盒子没球, 那么方案数从  $f[i][j-1]$  继承

(1) 盒子都有球, 那么方案数从  $f[i-j][j]$  继承

$$f[i][j] = f[i][j-1] + f[i-j][j]$$

如果没有球或者只有一个盒子, 此时方案数为1, 即  $f[i][1] = f[0][j] = 1$

```
for(11 i = 0; i <= n; i++){
    for(11 j = 1; j <= m; j++){
        if(j == 1 || i == 0) {
            f[i][j] = 1;
            continue;
        }
        if(i < j) {
            f[i][j] = f[i][i];
            continue;
        }
        f[i][j] = f[i-j][j] + f[i][j-1];
    }
}
```

## 4. 球相同，盒子相同，不能存在空盒子

先给每个箱子分一个球, 总共分  $m$  个球, 接下来就把剩下的  $n - m$  个球随便分就行了, 就像 (3) 一样

## 5. 球不同，盒子不同，可以存在空盒子

每个球都有  $m$  个盒子选择, 故答案为  $m^n$

结论为:  $m^n$

## 6. 球不同，盒子相同，无空盒

这个问题需要拓展第二类斯特林数。

将  $S_2(n, m)$  读作关于  $n, m$  的第二类斯特林数。

两种求法:

- **递推:**  $S_2(n, m) = S_2(n-1, m-1) + mS_2(n-1, m)$  单独看第一个球, 如果第一个球独立存在于一个盒子里面。那么就是  $S_2(n-1, m-1)$ 。如果不是如此, 那么就是把这个球放在任意的盒子里面。也就是在  $S_2(n-1, m)$  的情况下, 找一个盒子塞进去一个球, 因为有  $m$  个盒子所以就乘  $m$ 。

- **容斥**:  $S_2(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k (m-k)^n$  (说实话可能需要用到多项式的知识, 所以完全不会)

联系问题5, 问题6还可以得到一个性质  $n^k = \sum_{i=0}^k S_2(k, i) * i! * C_n^i$  什么意思呢? 左边指的是,  $k$  个球任意的放在  $i$  个盒子里(5) 右边, 我们枚举有多少个非空的盒子数  $i$  (盒子不同, 乘上  $i!$ ), 再乘上我们选盒子的方案数。

```
S[0][0]=1;
for(int i=1;i<=n;i++){
    for(int j=1;j<=i;j++){
        S[i][j]=S[i-1][j-1]+j*S[i-1][j];
    }
}
```

7. 球不同, 盒子不同, 无空盒

与上面问题6基本相同, 只需要乘  $m!$  即可, 结果为  $m! * S_2(n, m)$ 。

8. 球不同, 盒子相同, 有空盒

也是对6的拓展, 只需要枚举非空盒子的对应的方案数量即可, 即  $\sum_{i=1}^m S_2(n, i)$ 。

对于这个问题我们再引入一个数列——**贝尔数**。贝尔数  $B_n$  更常见的定义为, 将  $n$  个数的集合所有的划分方式, 你可以认为这是问题8 在盒子数与球数相同时的解。它有一个递推公式:  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k$

**证明**: 假设,  $B_{n+1}$  是含有  $n+1$  个元素集合的划分个数。先单独拿出一个元素。

- 这个元素分为一类, 剩下  $n$  个元素, 有  $C_n^n B_n$ ;
- 这个元素和某1个单独元素分成一类,  $C_n^{n-1} B_n$ ;
- 这个元素和某2个单独元素分成一类,  $C_n^{n-2} B_n$ ; 求和可得。

在关注问题8和贝尔数就可以得到贝尔数和第二类斯特林数的关系:  $B_n = \sum_{k=0}^n S_2(n, k)$

错位排列问题

现在又一个长度为  $n$  的序列  $A, A_i = i$

求满足  $A'_i \neq i$  的  $A$  的排列的数量

我们记长度为  $n$  的错位排列数量为  $d(n)$

首先, 数字  $n$  不可以放在  $A'[n]$

对于剩下  $n-1$  个数的错位排序

假设第  $n$  封信  $a$  占据了  $b$  的位置, 那么此时  $b$  放在哪个信封分两种情况,  $b$  放在  $a$  位置, 或  $b$  不放在  $a$  位置

(1)第一类: 第一种情况是  $b$  放在  $a$  位置, 剩下  $n-2$  封信进行错排, 方案数是  $d(n-2)$

(2) 第二种情况是  $b$  没有去  $a$  的位置, 那么  $b$  可能出现在除  $a$  之夕卜的可位置,  $b$  有  $n-2$  个位置可以去, 不能去  $a, b$  位置其余所有元素都有  $n-2$  个位置可以去 ( $a, b$  已占用位置不能去), 这种情况下相当于除  $a$  之外的其它元素的错排问题, 即  $n-1$  个元素的错排问题, 方案数是  $d(n-1)$

加法原理, 此时除去第  $n$  封信, 其他总共有  $d(n-1) + d(n-2)$  种可能

结论就是  $d(n) = (n-1) * (d(n-1) + d(n-2))$