

進階資料結構與演算法

TYIC 桃高資訊社

樹與二元樹

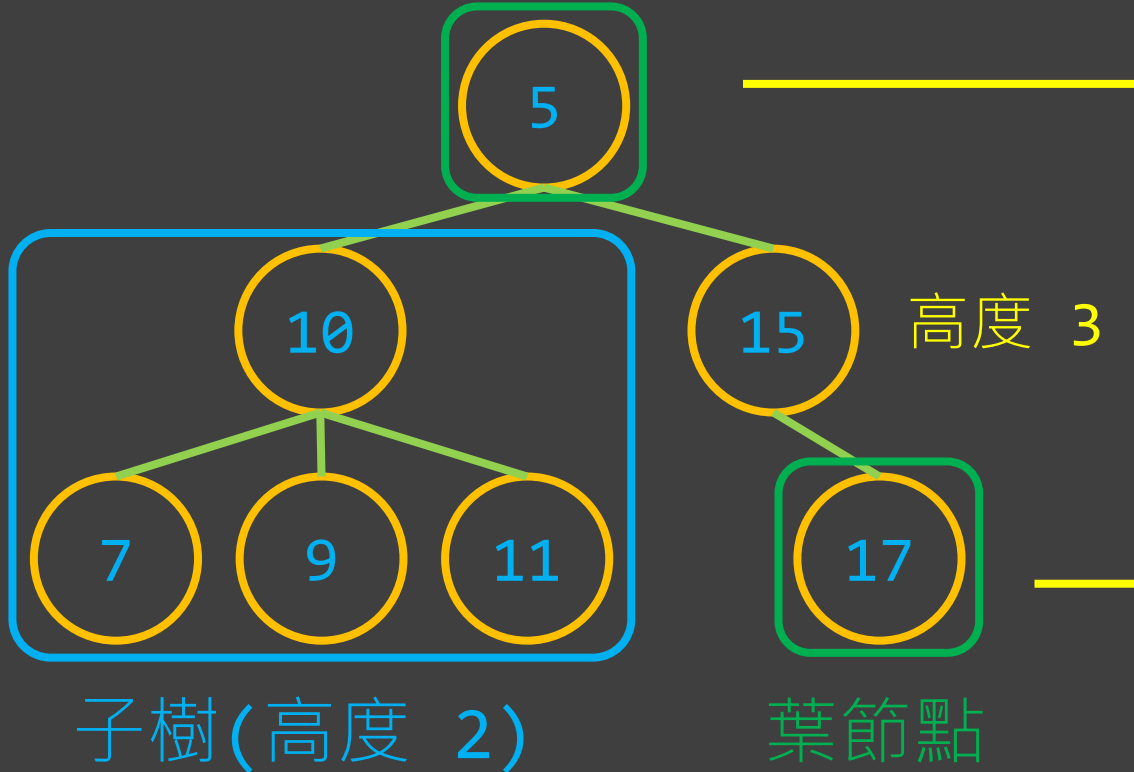
樹(**tree**)是一種資料結構，樹中的每個資料稱為節點(**node**)
樹中的資料(節點)不可重複，且節點會連結其他的節點
連結的節點之間會形成父子關係，但連結不可成環
每個節點只有一個父節點，但可以有很多個子節點
相同父節點的節點為兄弟節點，父節點的兄弟節點為叔伯節點
父節點的父節點為祖父節點，父節點為兄弟節點的節點為堂兄弟節點
樹中的首個資料為根節點(**root**)，無子節點的資料為葉節點(**leave**)
從任一葉節點到根節點的最大節點數為該樹的高度(**height**)

二元樹(**binary tree**)是一種樹，但每個節點最多只有兩個子節點

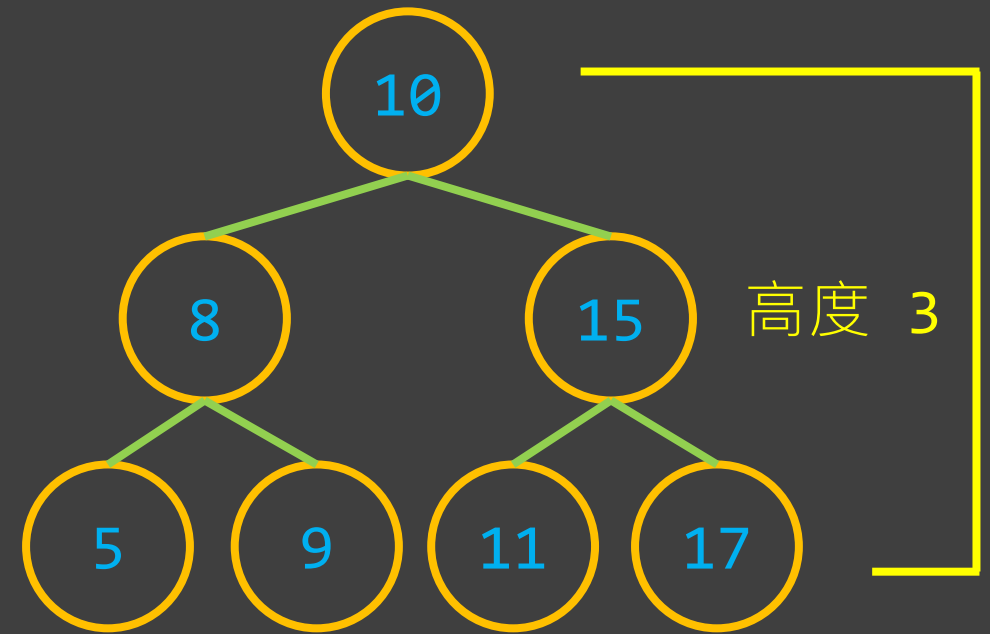
樹與二元樹

樹

根節點



二元樹



二元搜尋樹

二元搜尋樹(binary search tree)是一種特殊的二元樹

在二元搜尋樹中，比根節點小的資料會放到左子樹中

比根節點大的資料會放到右子樹中

這樣使用二分搜尋法就會非常快速

所以其存取(access)效率較鏈結串列高、較陣列低

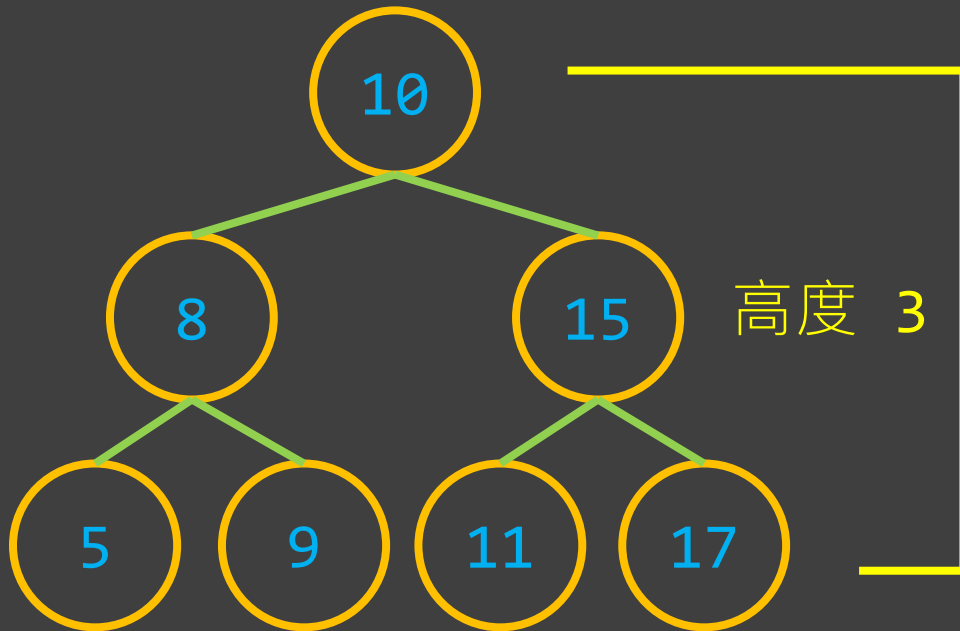
搜尋(search)效率較陣列和鏈結串列高

插入(insert)、刪除(delete)效率較陣列高、較鏈結串列低

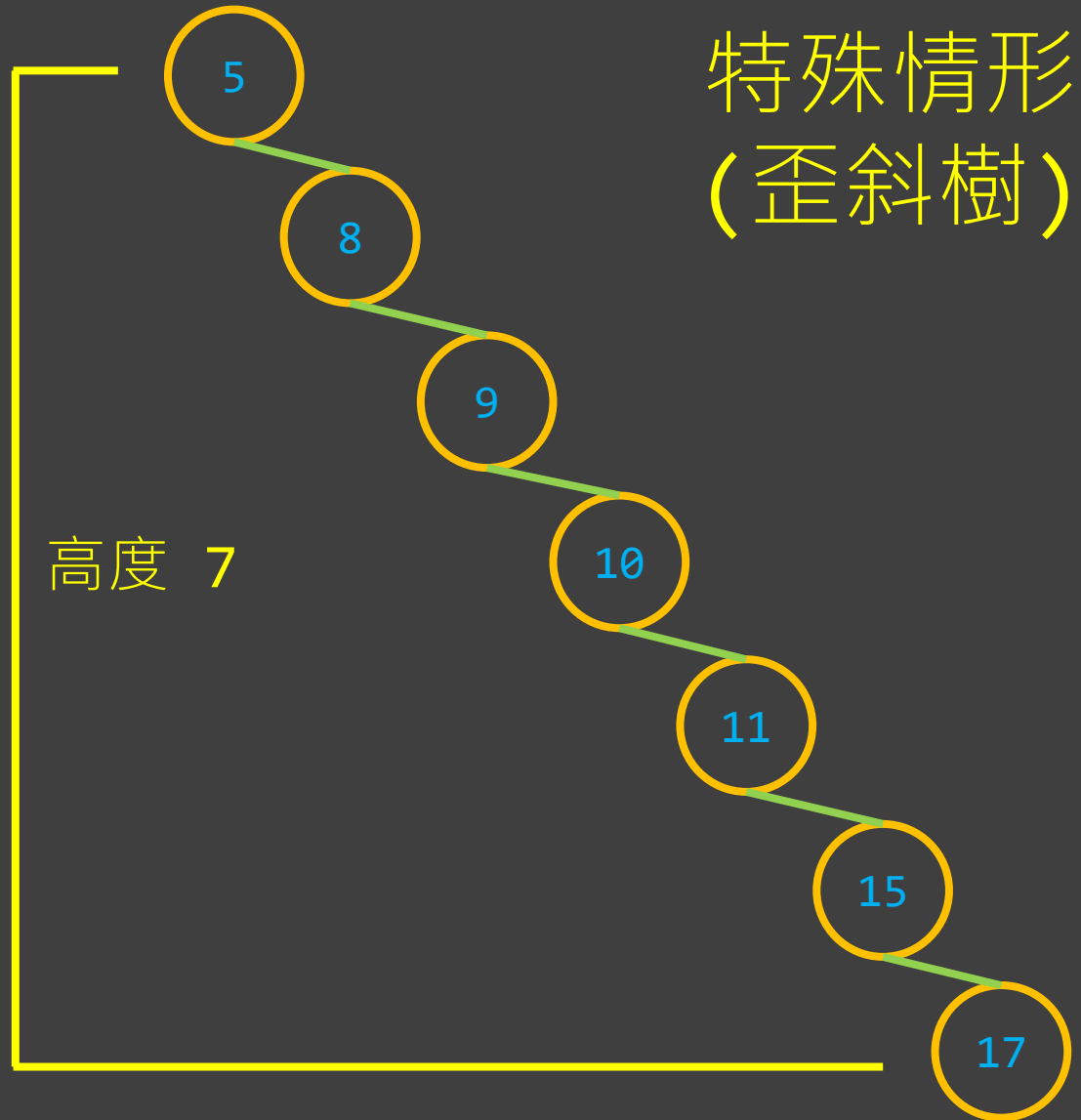
若資料已排序，則放入二元搜尋樹後會變為歪斜樹(skewed tree)

二元搜尋樹

正常情形



特殊情形
(歪斜樹)



紅黑樹

紅黑樹(**red-black tree**)是一種二元搜尋樹

紅黑樹會自平衡(**self-balancing**)，避免出現剛剛的特殊情形

紅黑樹的葉節點皆為空資料(**null** 或 **nil**)，並定義了幾條規則：

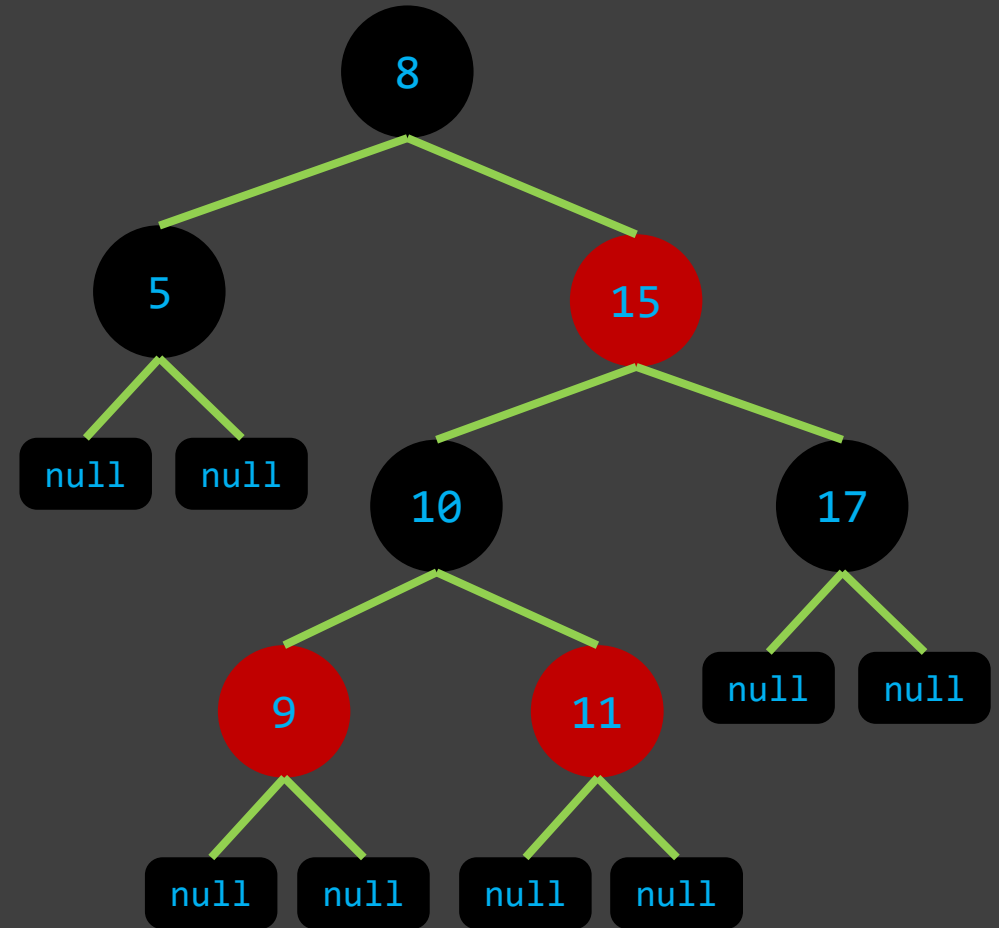
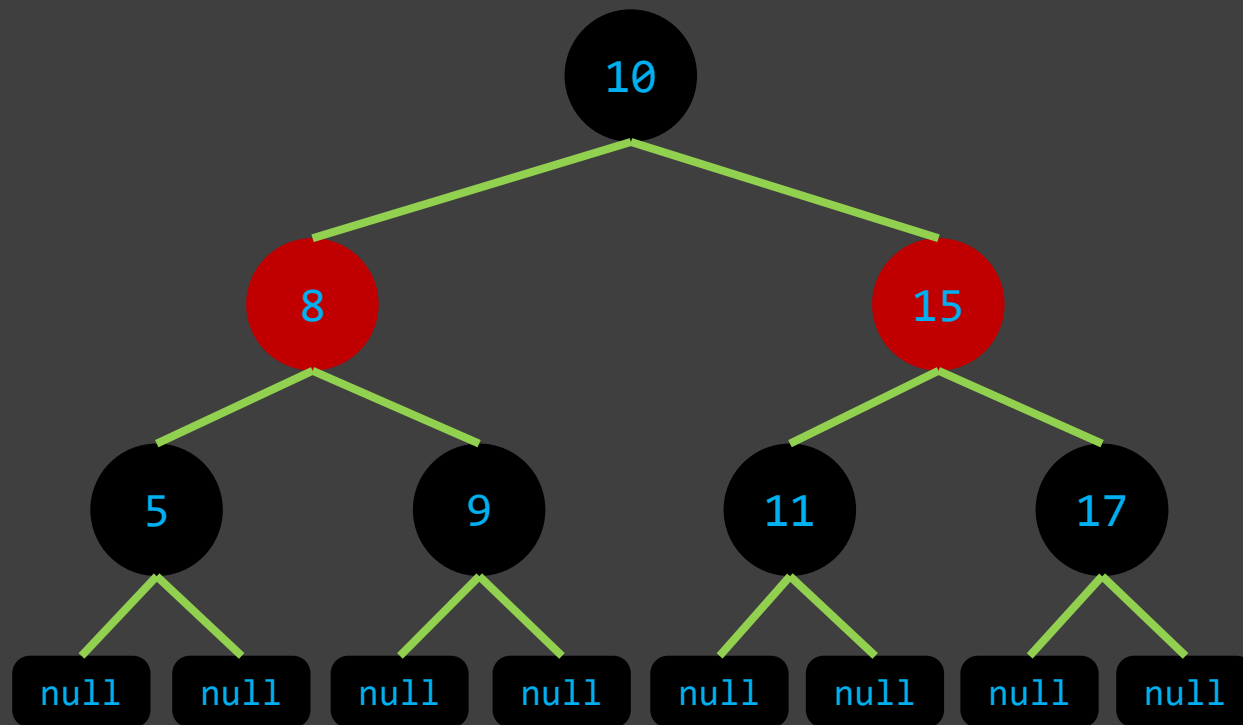
1. 節點是紅色或黑色
2. 根節點是黑色
3. 所有的葉節點都是黑色
4. 相接節點不能皆為紅色
5. 從根節點到任一葉節點的黑色節點數量皆相同

這樣的規則使得最長路徑長度不超過最短路徑長度的兩倍



紅黑樹線上模擬器

紅黑樹



分治法

分治法(divide and conquer)

是指將解決問題分為三部分：

分：將大問題拆解成多個相似且獨立的小問題

治：分別解決小問題

若小問題也不好解決

可再次分治直到小問題可以解決

合：將小問題的答案合併成大問題的答案

通常分治法會以遞迴實現

分治法找最大、最小值

找最大、最小值除了可以用時間複雜度為 $O(n)$ 迴圈法外
也可以使用分治法來解決，時間複雜度為 $O(\log n)$ ：

分：將資料拆分為兩組

治：找出拆分資料的最大、最小值

若只有一個資料，則該資料即為最大、最小值

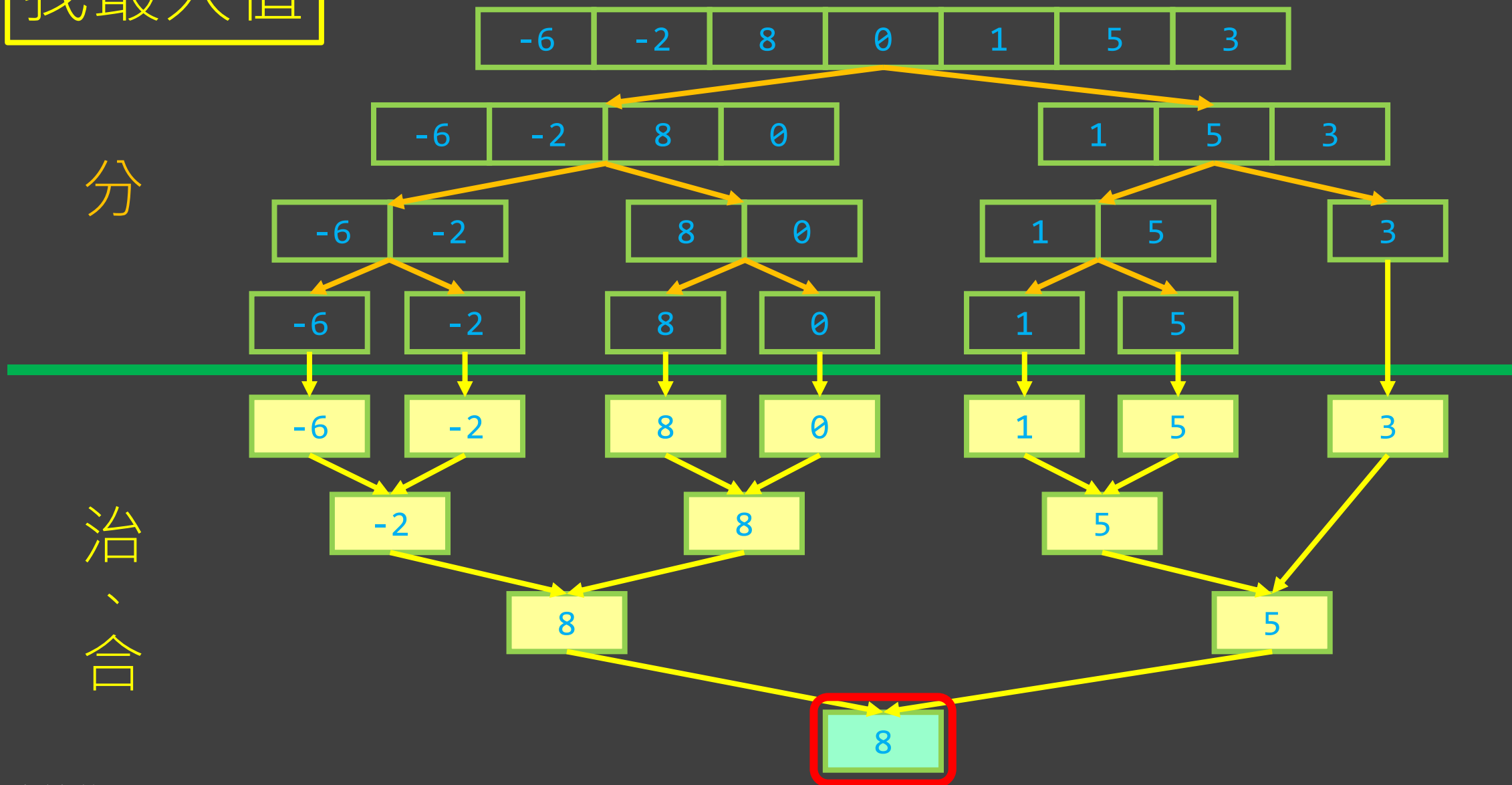
否則繼續分治，直到可以找出最大、最小值

合：比較兩組資料的最大、最小值

得出原資料的最大、最小值

找最大值

分治法找最大、最小值



分治法找最大、最小值



```
import java.util.Scanner;

public class Main1 {
    // 回傳陣列為 [最大值, 最小值]
    public static int[] search(int[] arr, int start, int end) {
        // 治：若只有一個資料，則該資料即為最大、最小值
        if (start == end) return new int[]{arr[start], arr[start]};
        // 分：將資料分成兩組；治：找出拆分資料的最大、最小值
        int mid = start - (start - end) / 2;
        int[] left = search(arr, start, mid);
        int[] right = search(arr, mid + 1, end);
        // 合：比較兩組資料的最大、最小值，得出原資料的最大、最小值
        return new int[]{Math.max(left[0], right[0]), Math.min(left[1], right[1])};
    }

    public static void main(String[] args) {
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
        int n = scanner.nextInt(); // 獲取資料個數
        int[] arr = new int[n];
        for (int i = 0; i < n; i++) arr[i] = scanner.nextInt(); // 讀入資料
        int[] result = search(arr, 0, arr.length - 1);
        System.out.printf("max = %d, min = %d", result[0], result[1]);
    }
}
```

```
7
-2 -6 8 0 1 5 3
max = 8, min = -6      console
```

java

合併排序法

合併排序法(merge sort)是一種較為高效的排序演算法

時間複雜度為 $\Theta(n \log n)$ ，其使用了分治法：

分：將資料拆分為兩組

治：分別排序兩組資料

若只有一個資料則為排序完成，否則繼續分治直到可以排序

合：合併兩組有序資料

其中合併兩組有序資料的做法為：

比較兩組資料的最小值，將較小的放入新陣列

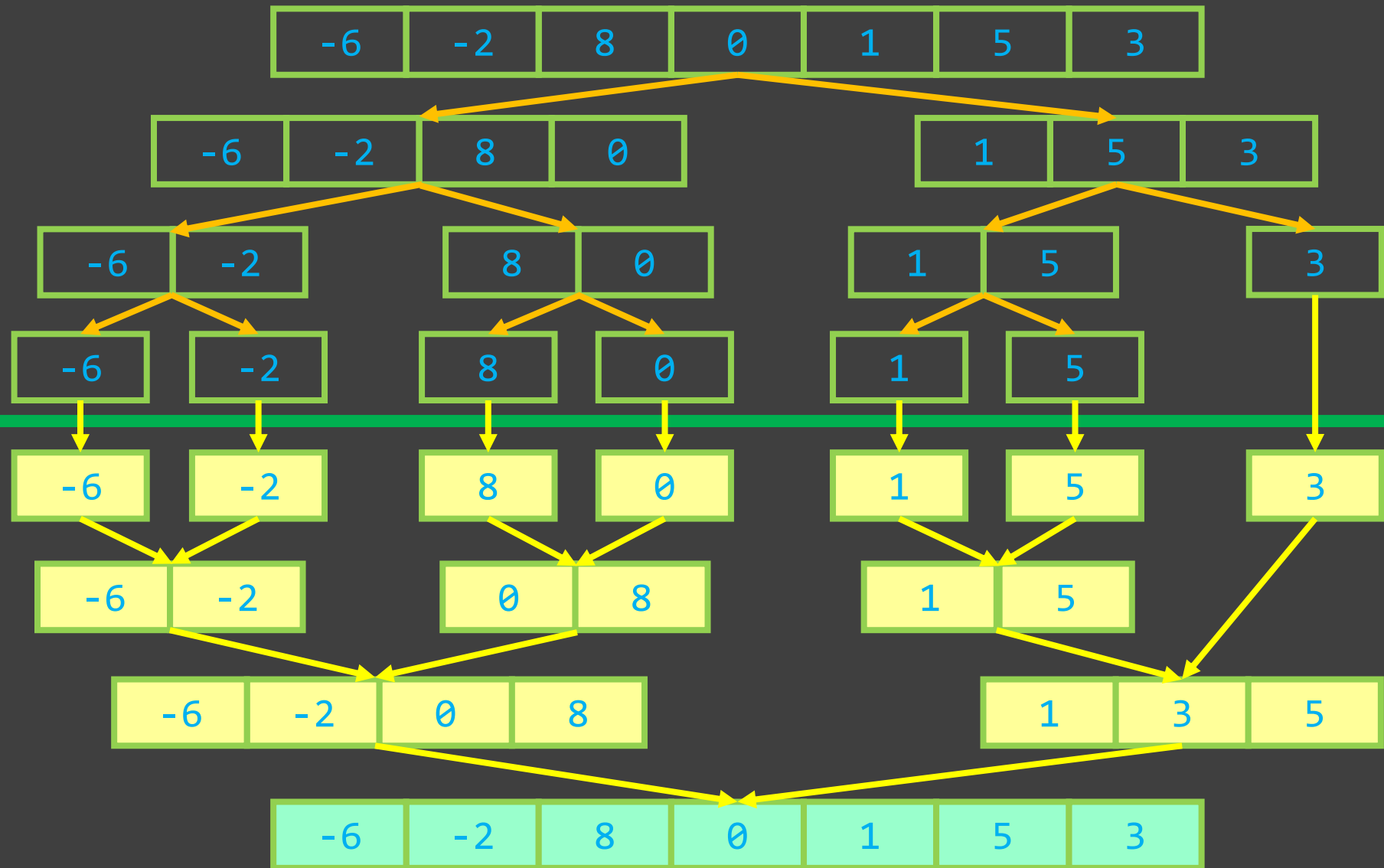
重複直到兩組資料皆被放入新陣列

需注意，此排序法空間複雜度為 $O(n)$ ，較其他常見排序法高

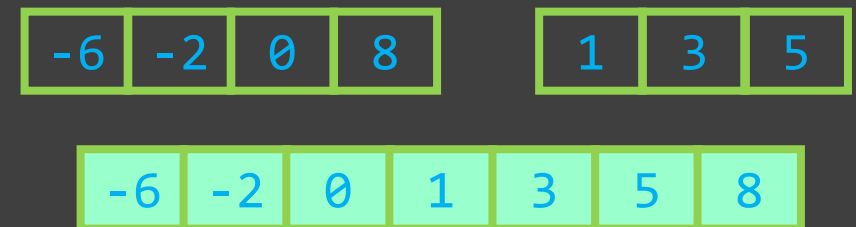
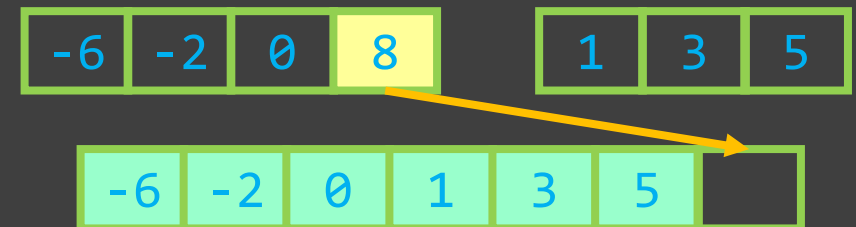
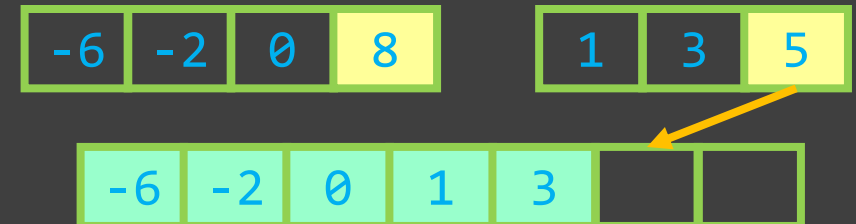
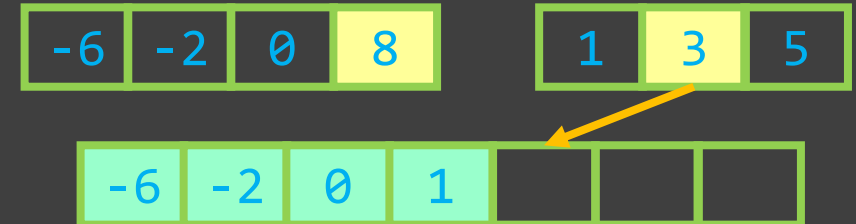
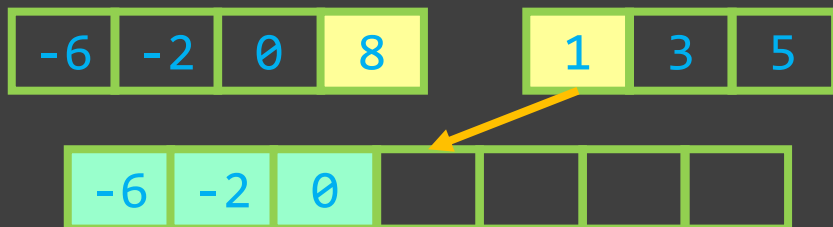
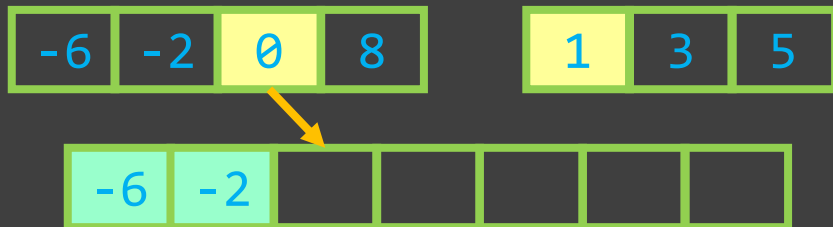
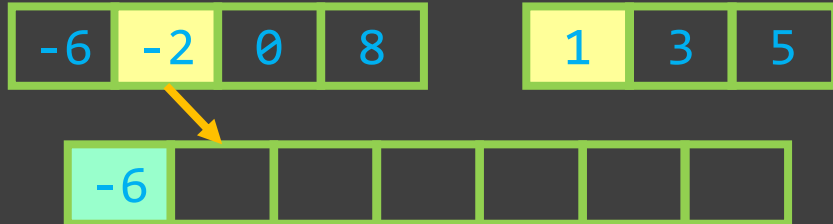
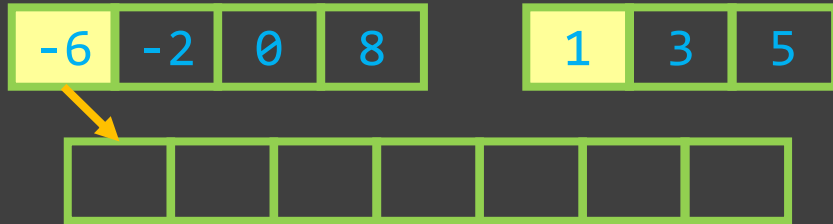
合併排序法

分

治、合



合併兩組有序資料



合併排序法



```
import java.util.Arrays;
import java.util.Scanner;

public class Main1 {
    // 合併排序法
    private static void mergeSort(int[] arr, int start, int end) {
        if (start == end) return; // 治：若只有一個資料則為排序完成
        // 分：將資料拆分為兩組；治：分別排序兩組資料
        int mid = start + (start - end) / 2;
        mergeSort(arr, start, mid);
        mergeSort(arr, mid + 1, end);
        // 合：合併兩組有序資料
        int[] tmp = new int[end - start + 1];
        int lIndex = start, rIndex = mid + 1, i = 0;
        while (lIndex <= mid && rIndex <= end) tmp[i++] = arr[lIndex] < arr[rIndex] ? arr[lIndex++] : arr[rIndex++];
        while (lIndex <= mid) tmp[i++] = arr[lIndex++];
        while (rIndex <= end) tmp[i++] = arr[rIndex++];
        for (i = 0; i < tmp.length; i++) arr[start + i] = tmp[i];
    }

    public static void main(String[] args) {
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
        int n = scanner.nextInt(); // 獲取資料個數
        int[] arr = new int[n];
        for (int i = 0; i < n; i++) arr[i] = scanner.nextInt(); // 讀入資料
        mergeSort(arr, 0, arr.length - 1);
        System.out.println(Arrays.toString(arr));
    }
}
```

```
7
-6 -2 8 0 1 5 3
[-6, -2, 0, 1, 3, 5, 8]    console
```

java

快速排序法

快速排序法(**quick sort**)是一種較為高效的排序演算法
許多程式語言的內建函式庫也是使用快速排序法或其變種
平均時間複雜度為 $\Theta(n \log n)$ 、最壞時間複雜度為 $\Theta(n^2)$
快速排序法為不穩定排序

快速排序法

快速排序法使用了分治法：

分：選定一個資料作為基準(**pivot**)

將比基準小的資料分為一組，基準外的其餘資料分為另一組

治：分別排序兩組資料

若只有一個資料則為排序完成，否則繼續分治直到可以排序

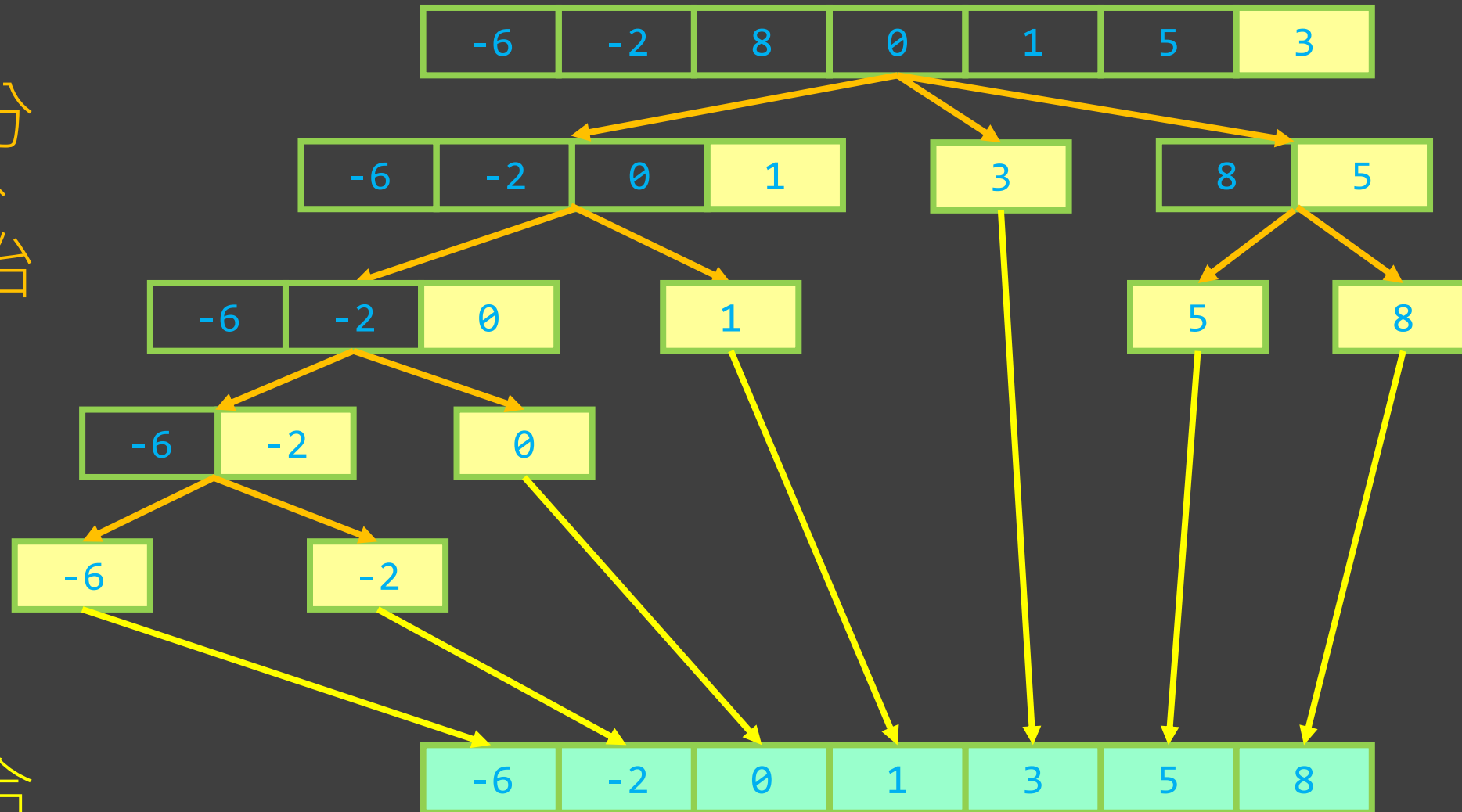
合：將比基準小的資料、基準、其餘資料依序連接在一起

在就地將資料分組時會進行以下步驟：

1. 若基準不是陣列的最後一個資料，將兩者交換
2. 將所有小於基準的資料與前方的資料交換

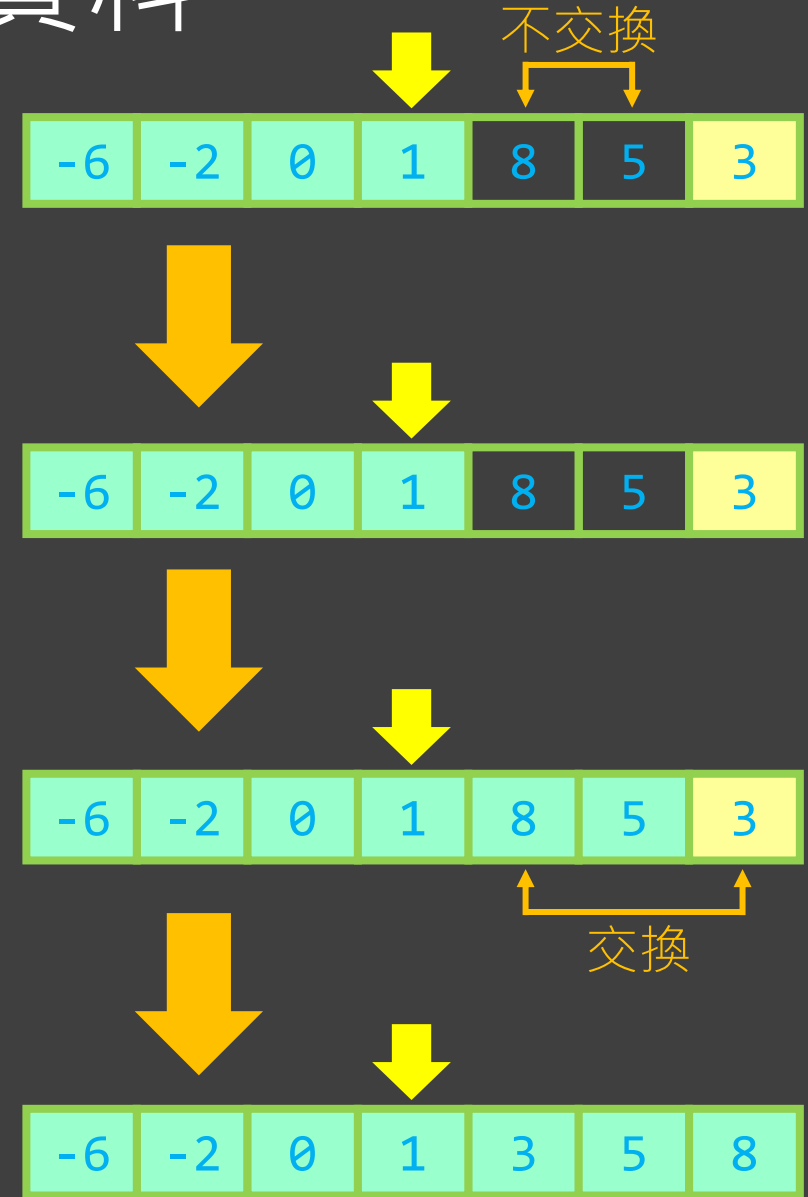
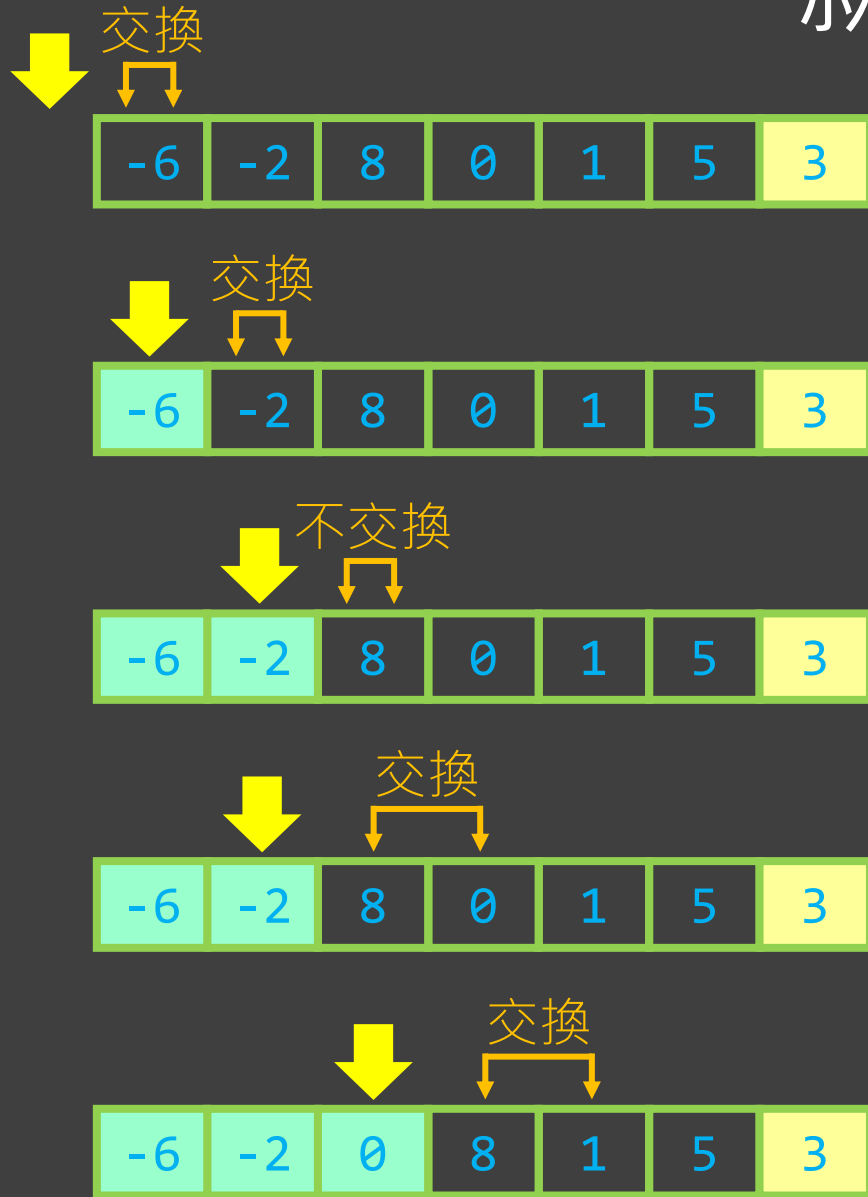
快速排序法

分、治



合

就地分組資料



快速排序法



```
import java.util.Arrays;
import java.util.Scanner;

public class Main2 {
    // 快速排序法
    private static void quickSort(int[] arr, int start, int end) {
        if (start >= end) return; // 治：若只有一個資料或沒有資料則為排序完成
        // 分：選定一個資料作為基準，將比基準小的資料分為一組，基準外的其餘資料分為另一組
        int pivot = arr[end];
        // 將所有小於基準的資料與前方的資料交換
        int lesserIndex = start - 1;
        for (int i = start; i <= end - 1; i++) {
            if (arr[i] < pivot) {
                lesserIndex++;
                int tmp = arr[lesserIndex];
                arr[lesserIndex] = arr[i];
                arr[i] = tmp;
            }
        }
        // 治：分別排序兩組資料；合：將比基準小的資料、基準、其餘資料依序連接在一起
        int tmp = arr[lesserIndex + 1];
        arr[lesserIndex + 1] = arr[end];
        arr[end] = tmp;
        quickSort(arr, start, lesserIndex);
        quickSort(arr, lesserIndex + 2, end);
    }

    public static void main(String[] args) {
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
        int n = scanner.nextInt(); // 獲取資料個數
        int[] arr = new int[n];
        for (int i = 0; i < n; i++) arr[i] = scanner.nextInt(); // 讀入資料
        quickSort(arr, 0, arr.length - 1);
        System.out.println(Arrays.toString(arr));
    }
}
```

```
7
-6 -2 8 0 1 5 3
[-6, -2, 0, 1, 3, 5, 8]    console
```

java