

# 基礎資料結構與演算法

TYIC 桃高資訊社

# 資料結構與演算法

資料結構與演算法

(Data Structure & Algorithm, 簡稱 DSA)

在程式設計中有著非常重要的地位

使用好的資料結構和演算法

可能會使程式的執行速度變得更快

而使用不妥當的資料結構和演算法

則可能會使程式的執行速度變得緩慢

# 串列與鏈結串列

串列(**list**)是一種資料結構，可以像陣列一樣儲存元素  
但是儲存容量可以動態增長，也就是說元素的數量可以不固定

鏈結串列(**linked list**)是一種資料結構  
鏈結是指使用指標來紀錄上一個和下一個元素的記憶體位址  
只紀錄上一個或下一個元素的串列  
稱為「單向鏈結串列(**singly linked list**)」  
同時紀錄上一個和下一個元素的串列  
稱為「雙向鏈結串列(**doubly linked list**)」

# 陣列與鏈結串列

串列的好處在於增刪元素比較快，但壞處就是存取元素慢  
在插入元素時

陣列須將插入目標索引值的元素和所有後方的元素向後移動  
而鏈結串列只需要修改鏈結就可以了

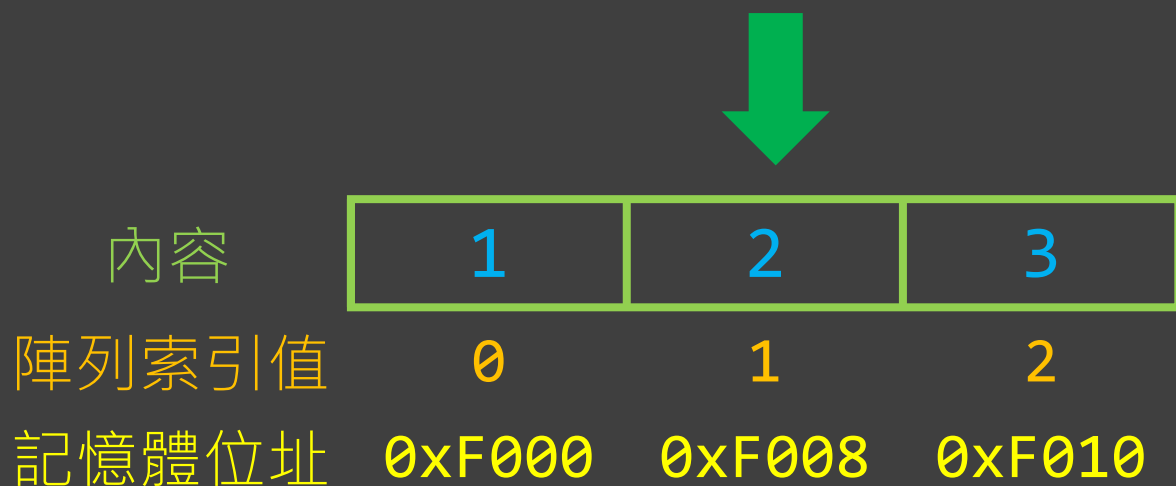
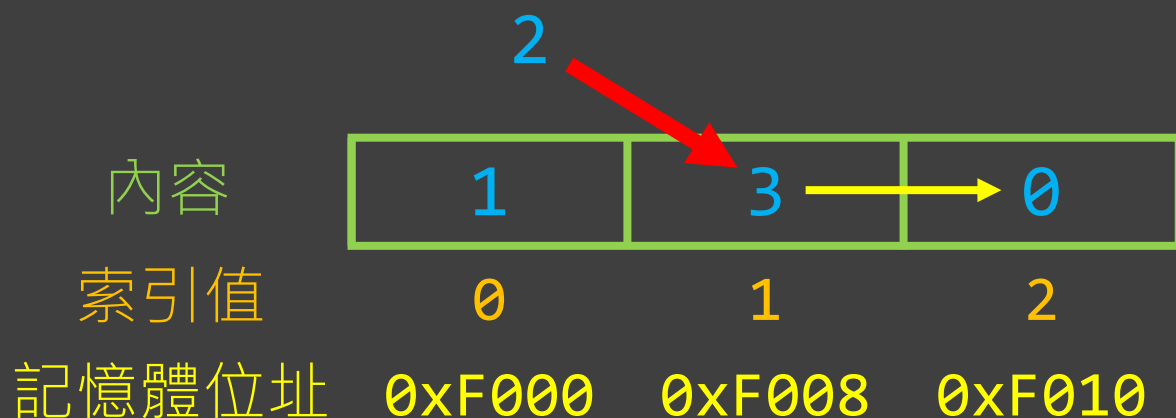
但在存取元素時

陣列只需進行記憶體位址的簡單數學運算

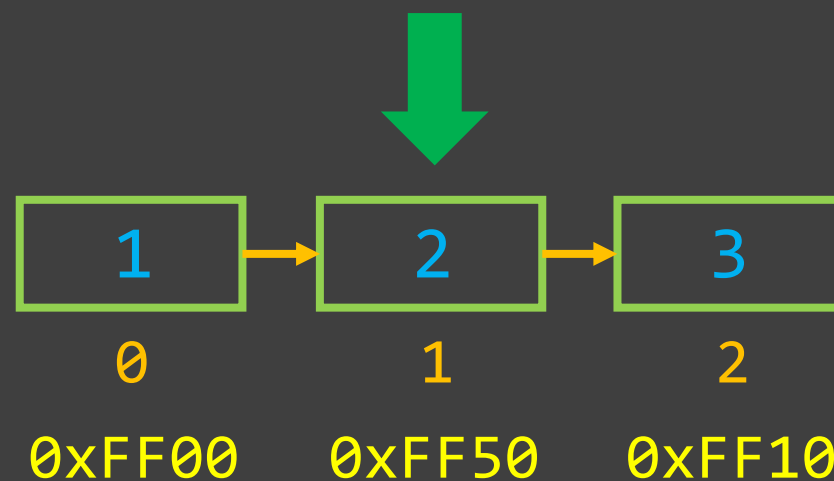
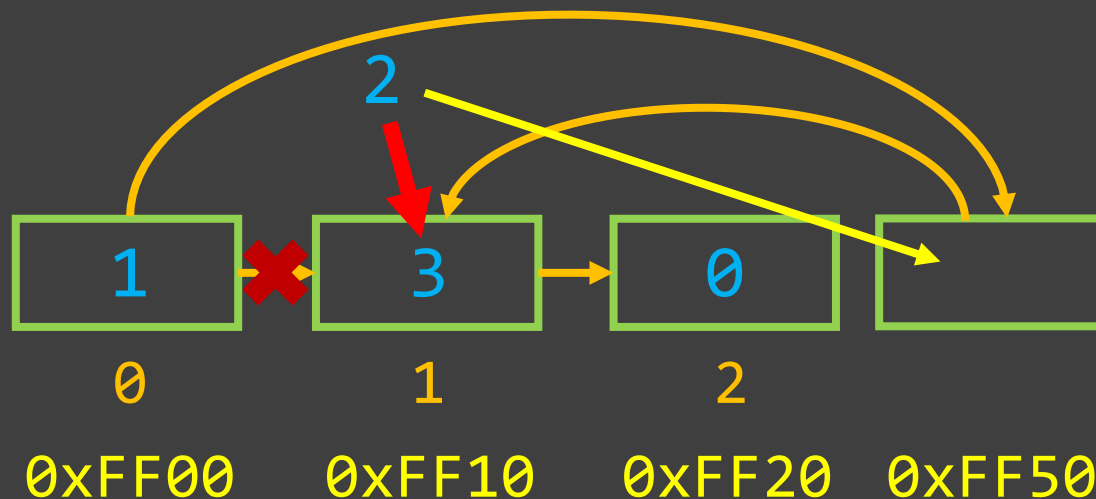
而鏈結串列需要用索引值 0 元素的鏈結尋找索引值 1 的元素  
用索引值 2 元素的鏈結尋找索引值 3 的元素  
持續下去直到找到指定索引值的元素

# 陣列與鏈結串列

## 陣列



## 鏈結串列



# 佇列、堆疊、雙端佇列

佇列(**queue**)是一種資料結構  
元素從尾部(**tail**)進入並從頭部(**head**)出來  
為先進先出(**FIFO**，**first-in-first-out**)

堆疊(**stack**)與佇列類似，但元素只能從頭部進出  
為後進先出(**LIFO**，**last-in-first-out**)  
元素進入稱為**推入(push)**、出來稱為**彈出(pop)**

雙端佇列(**deque**)是同時具有佇列和堆疊性質的資料結構  
元素可以從頭部或尾部進出

# 佇列、堆疊、雙端佇列

尾部(tail)

佇列

頭部(head)



堆疊



雙端佇列



# O (大 O 符號)

$O(x)$  是用來表示一個函數趨近的上界，其定義為：

若有一個足夠大的正實數  $x_0$  和兩個  $x$  的函數  $f(x)$  和  $g(x)$

且  $(\forall x \geq x_0) (\exists M > 0) (|f(x)| \leq M|g(x)|)$

則  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} O(g(x))$

又常將  $\lim_{x \rightarrow \infty}$  省略，故簡寫為  $f(x) = O(g(x))$

舉例：若有一演算法，資料量對時間函數為  $T(n) = 3n^2 + 10n + 2$

可取  $M = 15$ ，則  $T(n) = O(n^2)$

$f(x) = O(g(x))$  的最小  $g(x)$  快速判別法： $g(x)$  為  $f(x)$  只保留最高次項，並捨棄係數

如  $T(n) = 3n^2 + 10n + 2$ ，只保留最高次項  $3n^2$ ，並捨棄係數變為  $n^2$ ，故  $T(n) = O(n^2)$



# $\Omega$ (大 $\Omega$ 符號)

與  $O(x)$  相似， $\Omega(x)$  是用來表示一個函數趨近的下界，其定義為：  
若有一個足夠大的正實數  $x_0$  和兩個  $x$  的函數  $f(x)$  和  $g(x)$

且  $(\forall x \geq x_0) (\exists M > 0) (|f(x)| \geq M|g(x)|)$

則  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \Omega(g(x))$

又常將  $\lim_{x \rightarrow \infty}$  省略，故簡寫為  $f(x) = \Omega(g(x))$

舉例：若有一演算法，資料量對時間函數為  $T(n) = 3n^2 + 10n + 2$

可取  $M = 3$ ，則  $T(n) = \Omega(n^2)$

# $\Theta$ (大 $\Theta$ 符號)

$\Theta(x)$  是在函數的趨近上下界相等時  
用來表示函數的趨近界線

即若  $f(x) = O(g(x)) = \Omega(g(x))$ ，則  $f(x) = \Theta(g(x))$

舉例：若有一演算法，資料量對時間函數為  $T(n) = 3n^2 + 10n + 2$

已知  $T(n) = O(n^2) = \Omega(n^2)$ ，則  $T(n) = \Theta(n^2)$

## 時間複雜度(time complexity)

是用於描述某一演算法

資料量與執行時間的關係

常用大  $O$  符號或大  $\Theta$  符號來表示

常見的時間複雜度有：

常數時間  $O(1)$ 、對數時間  $O(\log n)$

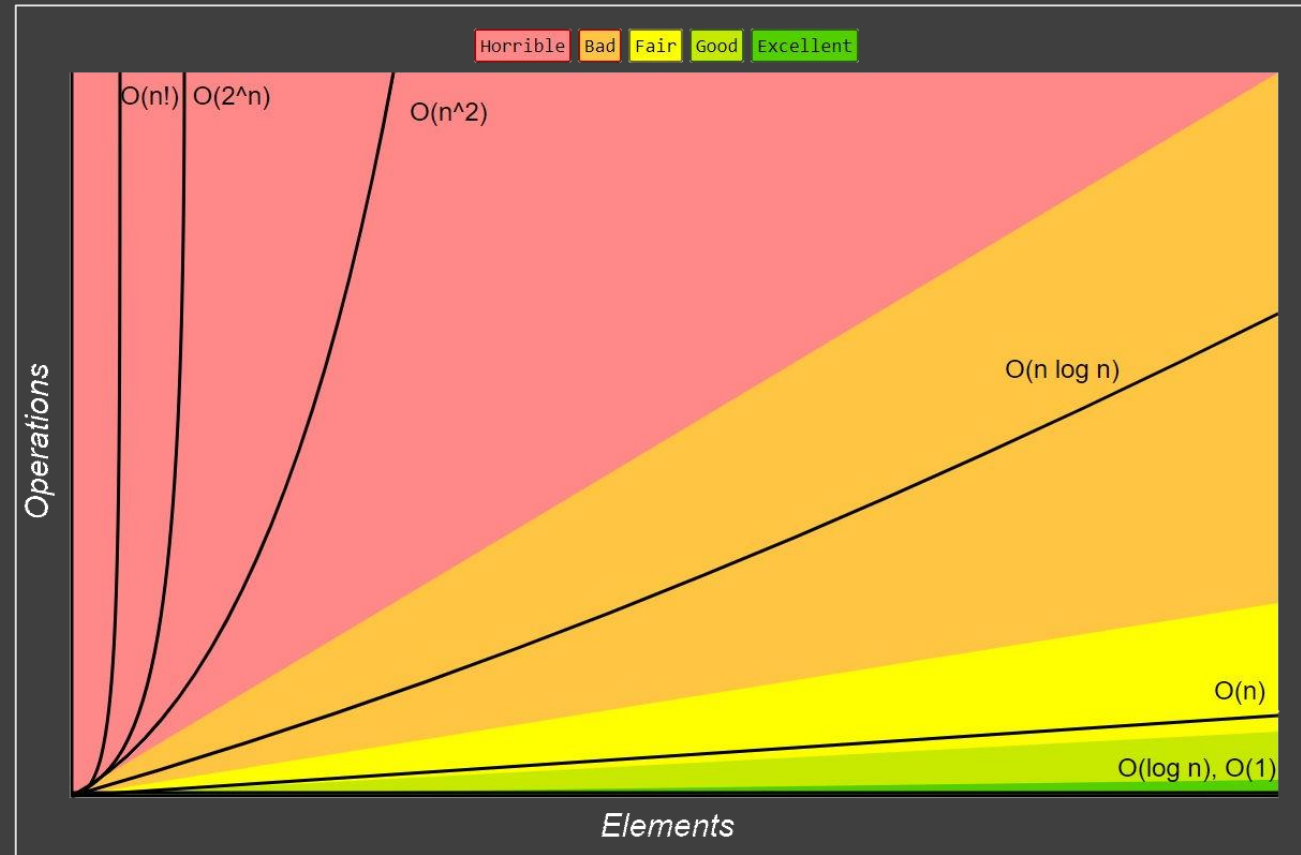
線性時間  $O(n)$ 、二次時間  $O(n^2)$

線性對數時間  $O(n \log n)$

需注意，因為  $n$  不可能趨近無限大  
故各時間複雜度大小之排序

不一定為真實執行時間多寡之排序

## 時間複雜度



# 空間複雜度

空間複雜度(space complexity)

是用於描述某一演算法資料量與所需儲存空間的關係

常用大  $O$  符號或大  $\Theta$  符號來表示

常見的空間複雜度有： $O(1)$ 、 $O(\log n)$ 、 $O(n)$ 、 $O(n^2)$ 、 $O(n \log n)$

同樣的，因為  $n$  不可能趨近無限大

故各空間複雜度大小之排序不一定為真實使用空間多寡之排序

通常在研究演算法時，時間複雜度的重要性會大於空間複雜度

# 尋找最大、最小值

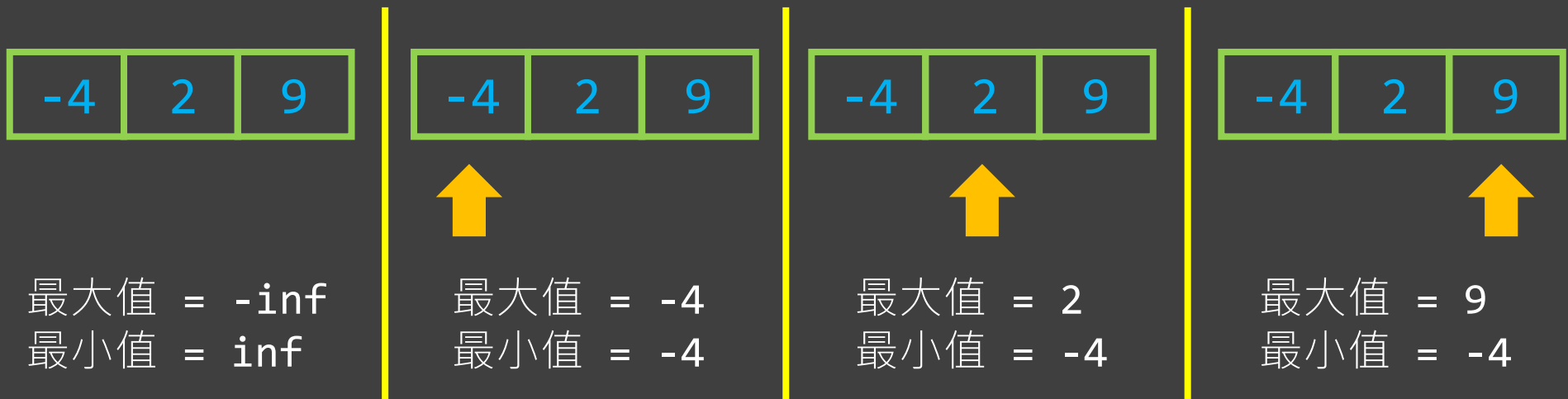
對於多個值，想要找尋最大值、最小值

除了對資料排序外，也可利用以下方法，時間複雜度為  $O(n)$ ：

依序讀取每個值，若較當前的最大值大或最小值小  
則將最大值或最小值變為該值

特別注意，最大值須初始化成比所有可能值小的數

最小值須初始化成比所有可能值大的數



# 尋找最大、最小值

```
import java.util.Scanner;
```

```
public class Main1 {
```

```
    public static void main(String[] args) {  
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
```

```
        int n = scanner.nextInt();
```

```
        int max = -2147483648, min = 2147483647;
```

```
        for (int i = 0; i < n; i++) {
```

```
            int p = scanner.nextInt();
```

```
            if (p > max) max = p;
```

```
            if (p < min) min = p;
```

```
        }
```

```
        System.out.printf("max = %d, min = %d", max, min);
```

```
    }
```

```
}
```

```
10
```

```
-1 5 -9 8 1000 2 -1999 2 0 1
```

```
max = 1000, min = -1999
```

```
console
```



```
java
```

# 循序搜尋法

循序搜尋法(線性搜尋法, **Linear Search**)是一種常見的搜尋法  
其為依序**比對**每一個**資料**直到找到正確的**資料**, 時間複雜度為  $O(n)$

```
import java.util.Scanner;

public class Main2 {
    public static void main(String[] args) {
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
        int n = scanner.nextInt(); // 獲取資料個數
        int[] arr = new int[n];
        for (int i = 0; i < n; i++) arr[i] = scanner.nextInt(); // 讀入資料
        int target = scanner.nextInt(); // 讀入目標資料
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            if (arr[i] == target) {
                System.out.println(i + 1);
                return;
            }
        }
        System.out.println("Not found.");
    }
}
```



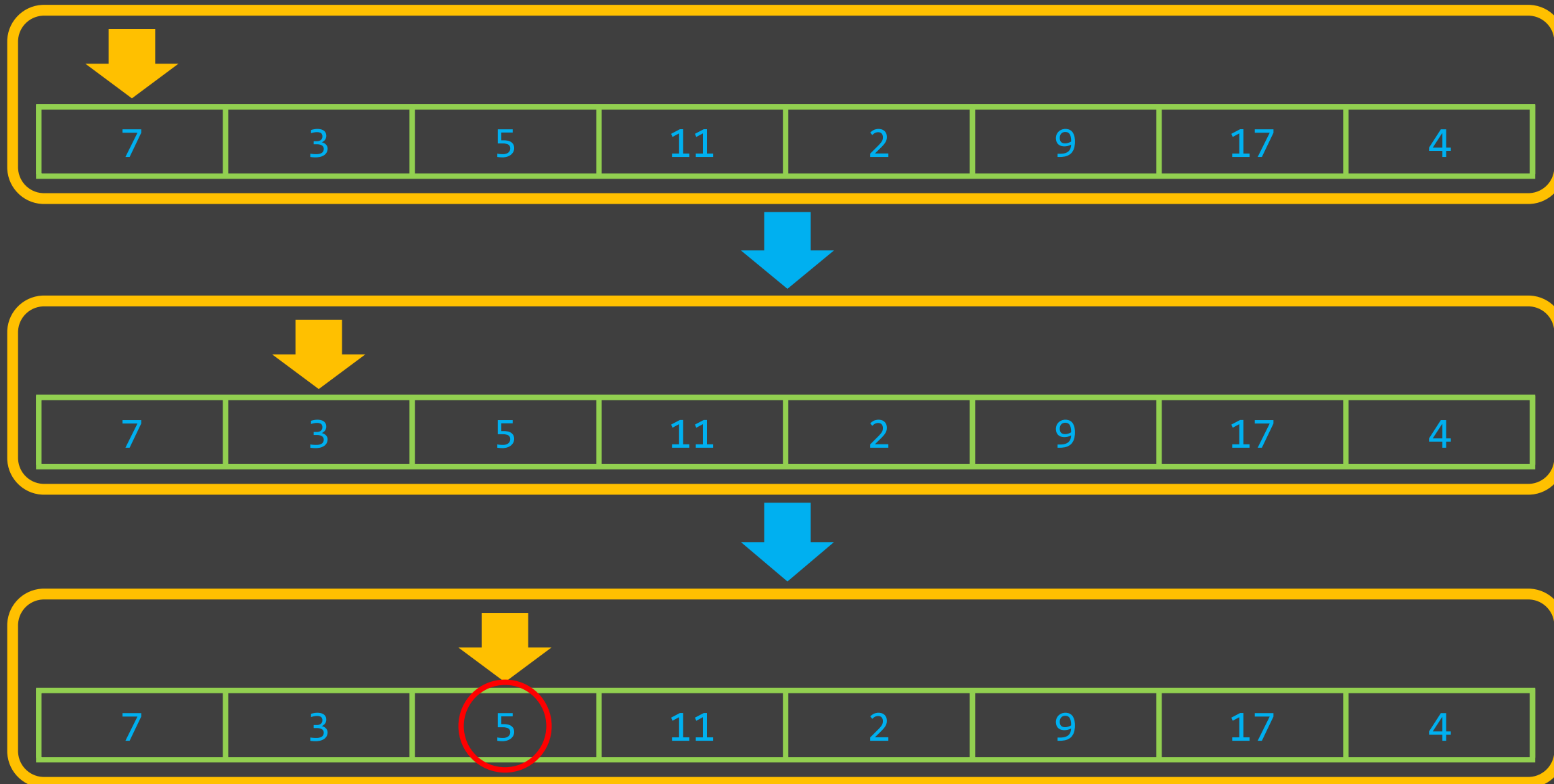
java

```
10
-2 5 9 10 22 33 44 89 101 777
101
9                                     console
```

```
10
-2 5 9 10 22 33 44 89 101 777
102
Not found.                           console
```

# 循序搜尋法

找 5





# 二分搜尋法

二分搜尋法(binary search)是一種常見的搜尋法

在使用二分搜尋法前須將資料由小到大排序

其原理為：每次只會搜尋可能區間中間的資料

若在搜尋到較目標大的資料時，下次搜尋只會搜尋較小的資料

若在搜尋到較目標小的資料時，下次搜尋只會搜尋較大的資料

重複直到搜尋到目標資料，或是可能區間無效，即找不到目標資料

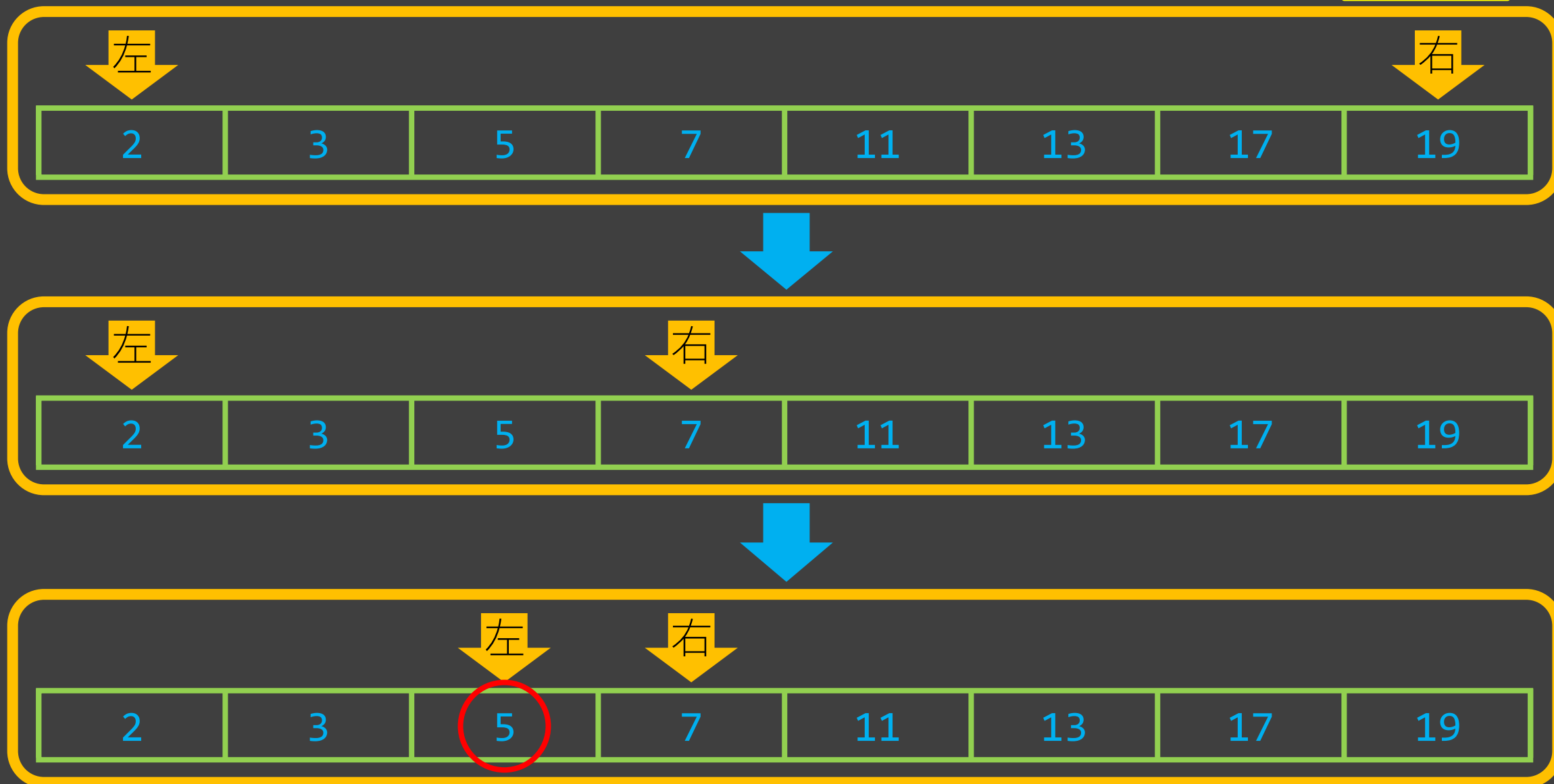
程式上實現，會使用兩個變數來紀錄可能區間的左邊界與右邊界

由於二分搜尋法一次就可以排除一半的可能

故時間複雜度為  $O(\log n)$ ，效率較循序搜尋法較高

# 二分搜尋法

找 5



# 二分搜尋法



```
import java.util.Scanner;

public class Main3 {
    public static void main(String[] args) {
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
        int n = scanner.nextInt(); // 獲取資料個數
        int[] arr = new int[n];
        for (int i = 0; i < n; i++) arr[i] = scanner.nextInt(); // 讀入資料
        int target = scanner.nextInt(); // 讀入目標資料

        int l = 0; // 左邊界，目標的最小可能索引值
        int r = n - 1; // 右邊界，目標的最大可能索引值
        while (l <= r) {
            int mid = l + (r - l) / 2; // 取中間的資料
            if (arr[mid] == target) {
                System.out.println("Target Index: " + mid);
                return;
            }
            if (arr[mid] > target) r = mid - 1;
            else l = mid + 1;
        }
        System.out.println("Target Not found.");
    }
}
```

```
10
-2 5 9 10 22 33 44 89 101 777
101
Target Index: 8           console
```

```
10
-2 5 9 10 22 33 44 89 101 777
102
Target Not found.        console
```

java


# 二分搜尋法的衍伸應用

二分搜尋法在找不到目標時  
可以找大於目標的最小索引值  
也就是若要將目標插入資料時  
要插入到的索引值

```
5
1 2 3 4 5
0
Target Insert Index: 0      console
```

```
10
-2 5 9 10 22 33 44 89 101 777
102
Target Insert Index: 9      console
```

```
5
6 7 8 9 10
100
Target Insert Index: 5      console
```



```
import java.util.Scanner;

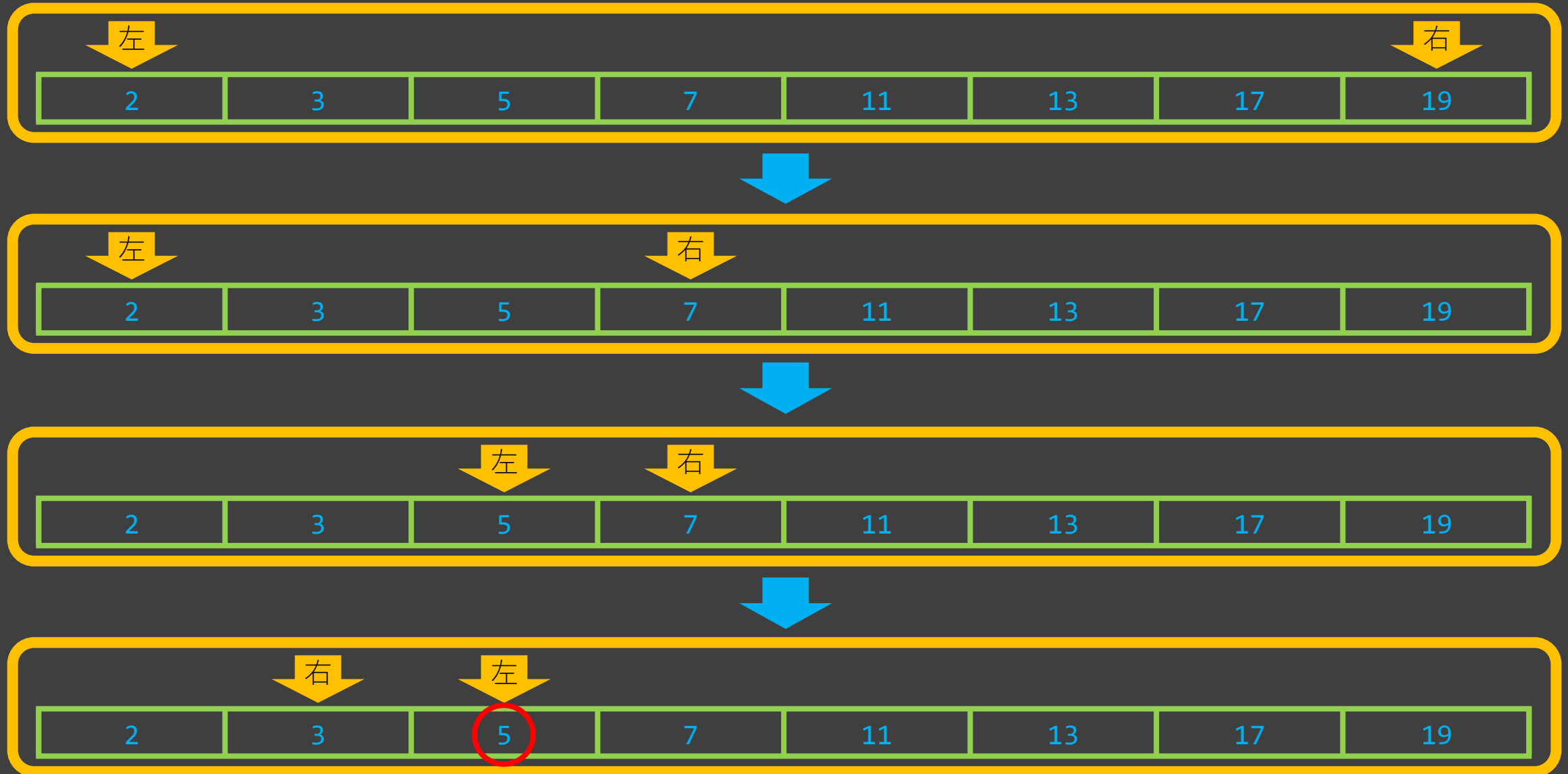
public class Main4 {
    public static void main(String[] args) {
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
        int n = scanner.nextInt(); // 獲取資料個數
        int[] arr = new int[n];
        for (int i = 0; i < n; i++) arr[i] = scanner.nextInt(); // 讀入資料
        int target = scanner.nextInt(); // 讀入目標資料

        int l = 0; // 左邊界，目標的最小可能索引值
        int r = n - 1; // 右邊界，目標的最大可能索引值
        while (l <= r) {
            int mid = l + (r - l) / 2; // 取中間的資料
            if (arr[mid] == target) {
                System.out.println("Target Index: " + mid);
                return;
            }
            if (arr[mid] > target) r = mid - 1;
            else l = mid + 1;
        }
        System.out.println("Target Insert Index: " + l);
        // 資料應插入的索引值即為左邊界
    }
}
```

java

# 二分搜尋法的衍生應用

找 4



# 最大公因數

最大公因數(greatest common divisor, 簡稱 gcd)

程式實現常使用程式碼簡潔的

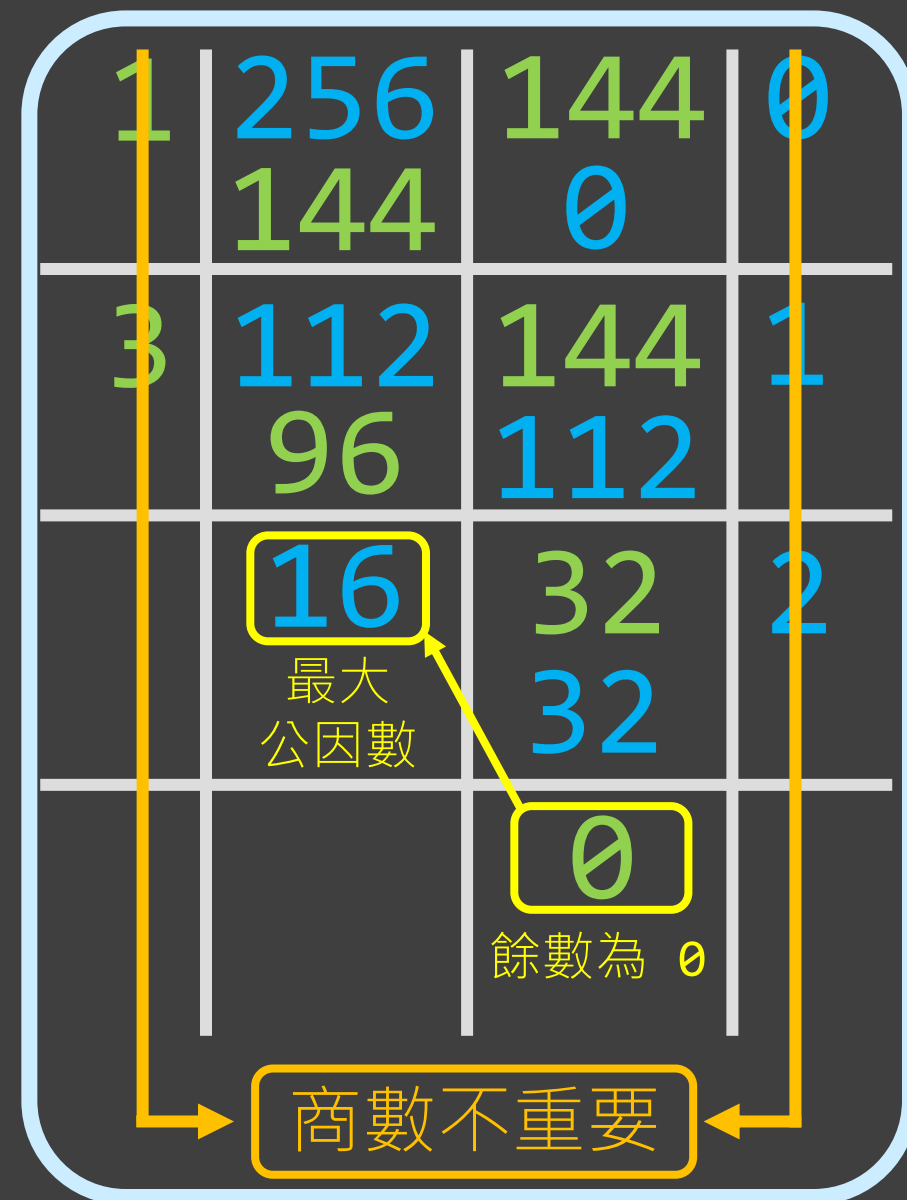
輾轉相除法(歐幾里得算法, Euclidean algorithm)

其說明：若  $a = bq + r$ ，則  $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$

```
static int gcd(int a, int b) {  
    if (b == 0) return a;  
    return gcd(b, a % b);  
}
```

```
static int gcd(int a, int b, int c) {  
    return gcd(gcd(a, b), c);  
}
```

java



# 補充：輾轉相除法證明

1. 已知  $a = bq + r$  ( $a, b, r \in \mathbb{N}$ )，設  $\gcd(a, b) = g$  ( $g \in \mathbb{N}$ )

則  $a = mg$ ,  $b = ng$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ )，且  $\gcd(m, n) = 1$

故  $r = a - bq = mg - nqg = g(m - nq)$  必有因數  $g$

2. 設  $\gcd(b, r) = pg$  ( $p \in \mathbb{N}$ )

則  $n = pu$ ,  $(m - nq) = pv = m - puq$  ( $u, v \in \mathbb{N}$ )

得  $m = pv + puq = p(v + uq)$  必有因數  $p$

$\gcd(m, n) = p = 1$ ，故  $\gcd(b, r) = g$

3. 當  $r = 0$  時  $a = bq$ ，則  $\gcd(a, b) = b = g$

1	256	144	0
	144	0	
3	112	144	1
	96	112	
	16	32	2
		32	
		0	

最大公因數

餘數為 0

# 最小公倍數

最小公倍數(least common multiple, 簡稱 lcm)

程式實現常使用數學性質  $\text{lcm}(a, b) = \frac{|ab|}{\text{gcd}(a, b)}$

先求出最大公因數，再求出最小公倍數

```
static int gcd(int a, int b) {  
    if (b == 0) return a;  
    return gcd(b, a % b);  
}
```

```
static int lcm(int a, int b) {  
    return a * b / gcd(a, b);  
}
```

```
static int lcm(int a, int b, int c) {  
    return lcm(lcm(a, b), c);  
}
```

java



# 獲取一正整數位數

若一正整數  $n$  滿足  $10^n \leq x = a \times 10^n < 10^{n+1}$  ( $1 \leq a < 10$ )

則  $\log(10^n) = n \leq \log(x) = n + \log(a) < \log(10^{n+1}) = n + 1$

又  $0 \leq \log(a) < 1$ ，得  $[\log(x)] = n$  (註： $[m]$  為下取整函數，如  $[2.7] = 2$ )

又已知  $10^n$  為  $n + 1$  位數，故  $x$  為  $n + 1 = [\log(x)] + 1$  位數

```
import java.util.Scanner;

public class Main1 {
    public static void main(String[] args) {
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
        int n = scanner.nextInt();
        System.out.printf("%d has %d digit(s).", n, (int) Math.Log10(n) + 1);
    }
}
```

```
900999
900999 has 6 digit(s).    console
```

```
123
123 has 3 digit(s).       console
```



java

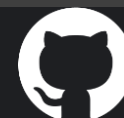
# 獲取一正整數之每一位數

末位數字即為該正整數除以 **10** 的餘數

該正整數除以 **10** 的商即為去除末位數字後的其他位數字

```
import java.util.Scanner;

public class Main2 {
    public static void main(String[] args) {
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
        int n = scanner.nextInt();
        while (n != 0) {
            System.out.println(n % 10);
            n /= 10;
        }
    }
}
```

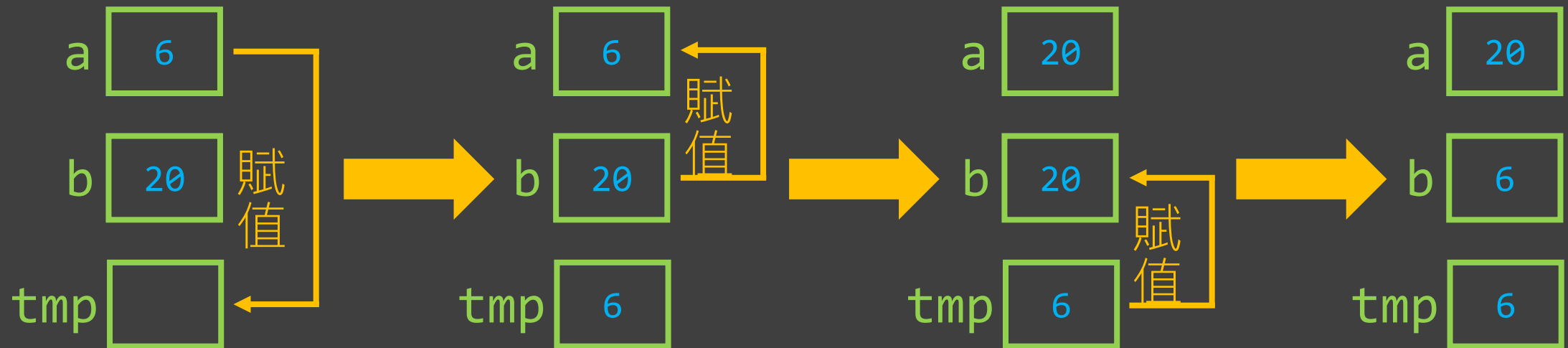


12345		114514	
5		4	
4		1	
3		5	
2		4	
1		1	
1	console	1	console

java

# 交換

在許多演算法中，會需要將兩個變數 **a**、**b** 的資料交換(**swap**)  
若直接將變數 **b** 賦值給變數 **a**，會導致變數 **a** 的資料遺失  
故應先將變數 **a** 賦值給另一個變數 **tmp**，避免資料遺失  
再將變數 **b** 賦值給變數 **a**，最後將變數 **tmp** 賦值給變數 **b**



# 交換



```
import java.util.Scanner;

public class Main3 {
    public static void main(String[] args) {
        // 將資料讀入變數 a, b
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
        int a = scanner.nextInt(), b = scanner.nextInt();
        System.out.printf("BEFORE swap: a = %d, b = %d %n", a, b);
        // 交換資料
        int tmp = a;
        a = b;
        b = tmp;
        System.out.printf("AFTER swap: a = %d, b = %d %n", a, b);
    }
}
```

```
6 8
BEFORE swap: a = 6, b = 8
AFTER swap: a = 8, b = 6      console
```

java

# 排序

排序是一個非常常見、重要的問題

排序主要分為比較排序和非比較排序

常見的比較排序：

氣泡排序(bubble sort)、選擇排序(selection sort)

插入排序(insertion sort)、合併排序(merge sort)

快速排序(quick sort)、Tim 排序(Timsort)

常見的非比較排序：基數排序(radix sort)

因非比較排序對資料類型限制較多，故比較排序較常使用

因要讀取每筆資料，大部分排序的時間複雜度不可能小於  $O(n)$

# 排序

排序演算法還有穩定性(**stability**)的問題

穩定性是指對於相同的資料是否會改變他們之間的前後順序

穩定排序(**stable sort**)不會改變相同資料的順序

而不穩定排序(**non-stable sort**)則會

常見的穩定排序：

氣泡排序、選擇排序(插入)、插入排序、合併排序、快速排序(插入)

**Tim** 排序、基數排序

常見的不穩定排序：選擇排序(交換)、快速排序(交換)

選擇排序演算法時，通常會優先選擇穩定排序

# 氣泡排序法

氣泡排序法(**Bubble Sort**)是一種非常簡單的排序法

其原理為：

由左到右，依序比較兩個相鄰的資料，最後一個元素除外  
若第一個資料比第二個資料大，便交換這兩個資料

重複  $n - 1$  次，其中  $n$  為資料個數

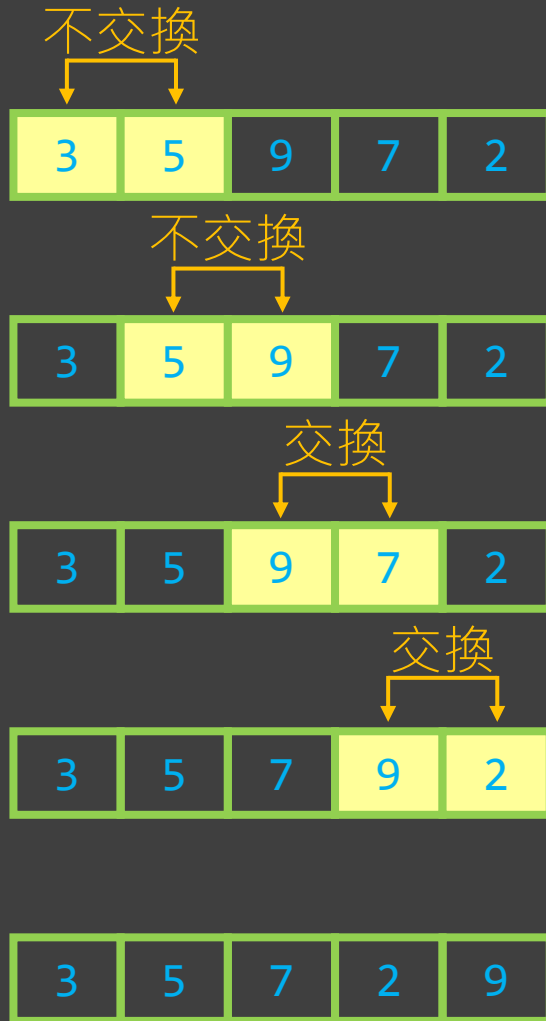
因每輪的最大值都會像氣泡一樣浮上來，被交換到最右邊  
故最終就會將資料由小到大排序完成

總共須比較、交換資料  $n - 1 + n - 2 + \cdots + 1 = \frac{n^2 - n}{2}$  次

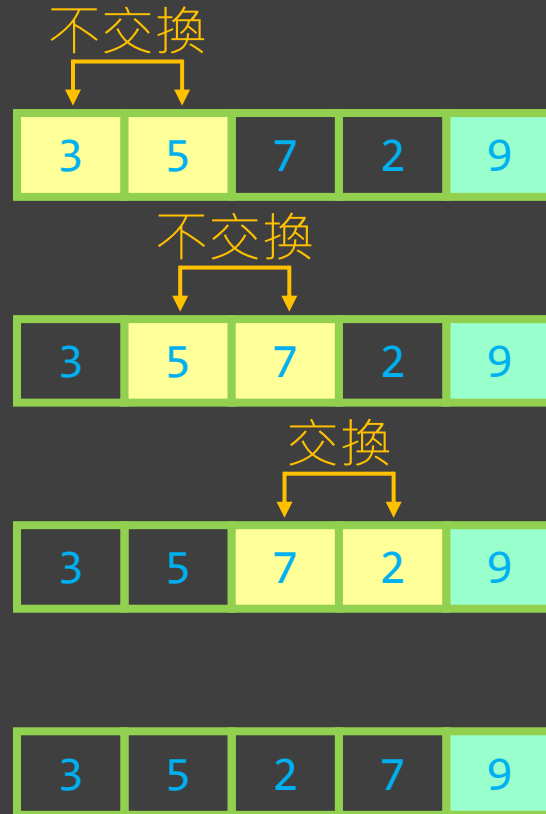
故時間複雜度為  $O(n^2)$

# 氣泡排序法

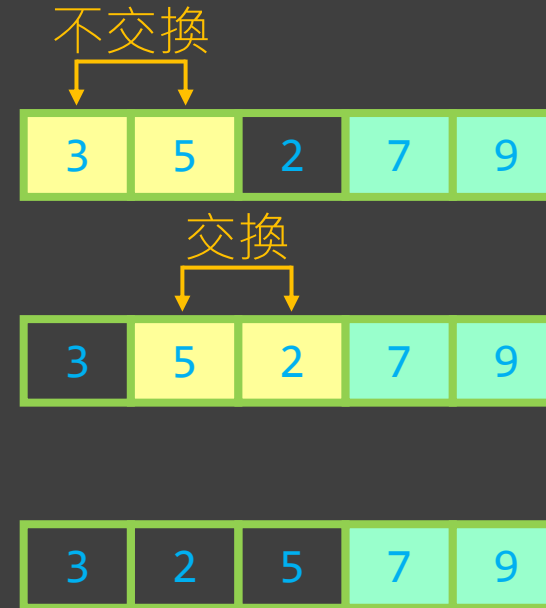
## 第 1 輪



## 第 2 輪



## 第 3 輪



## 第 4 輪





# 氣泡排序法

若整輪皆沒有資料交換  
表示排序已完成  
可提前結束排序

```
5  
6 2 -1 0 7  
[-1, 0, 2, 6, 7]      console
```



```
import java.util.Arrays;  
import java.util.Scanner;  
  
public class Main1 {  
    public static void main(String[] args) {  
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);  
        int n = scanner.nextInt(); // 獲取資料個數  
        int[] arr = new int[n];  
        for (int i = 0; i < n; i++)  
            arr[i] = scanner.nextInt(); // 讀入資料  
        // 氣泡排序  
        for (int i = 0; i < n - 1; i++) {  
            boolean flag = true; // 用於判斷是否要提早結束排序  
            for (int j = 0; j < n - 1 - i; j++) {  
                if (arr[j] > arr[j + 1]) {  
                    // 交換兩個資料  
                    int tmp = arr[j];  
                    arr[j] = arr[j + 1];  
                    arr[j + 1] = tmp;  
                    flag = false; // 有資料交換，表示須繼續排序  
                }  
            }  
            if (flag) break; // 該輪沒有資料交換，表示排序已提前完成  
        }  
        System.out.println(Arrays.toString(arr));  
    }  
}
```

java

# 選擇排序法

選擇排序法也是一種非常簡單的排序法

其原理為：將資料分為左邊的已排序資料及右邊的未排序資料

從右邊的未排序資料找出最小值

插入到左邊的已排序資料最末端(或與未排序資料的最左邊交換)

最終就會將資料由小到大排序完成

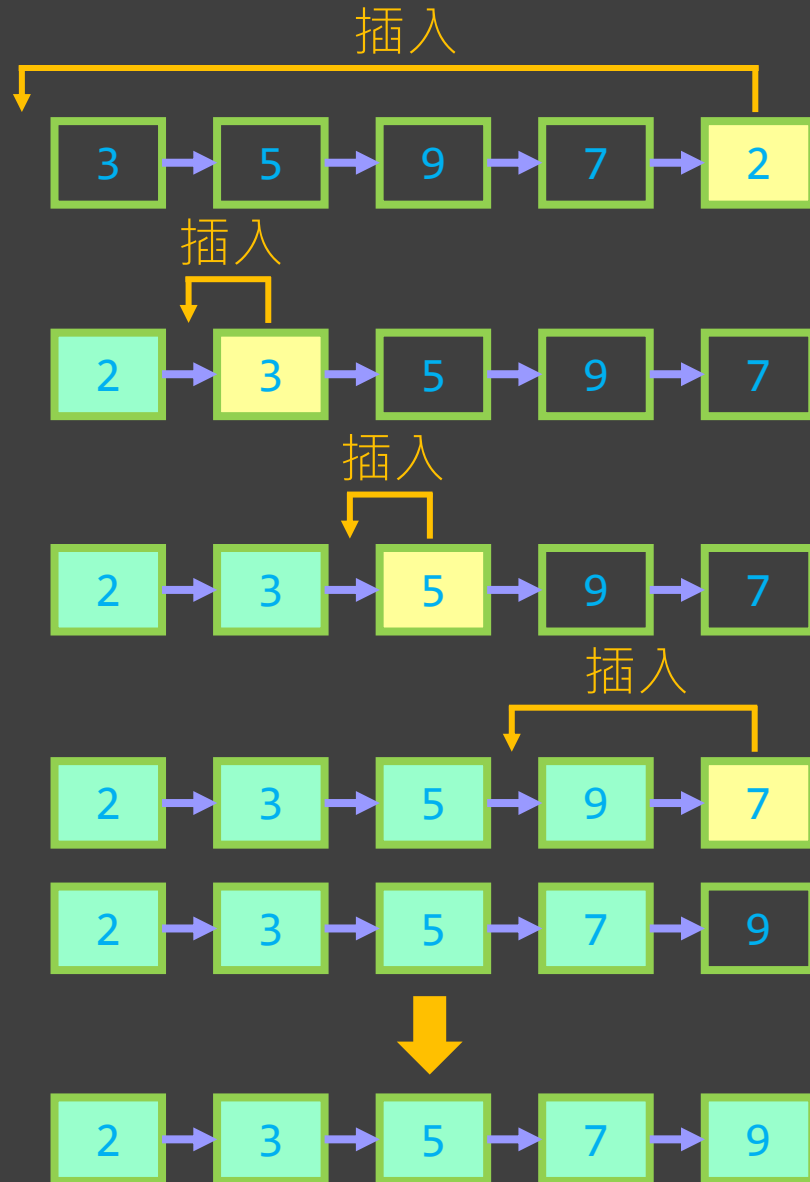
總共須比較資料  $n + n - 1 + \cdots + 2 = \frac{n^2 - n}{2}$  次

但只須插入(或交換)資料  $n - 1$  次，故時間複雜度為  $O(n^2)$

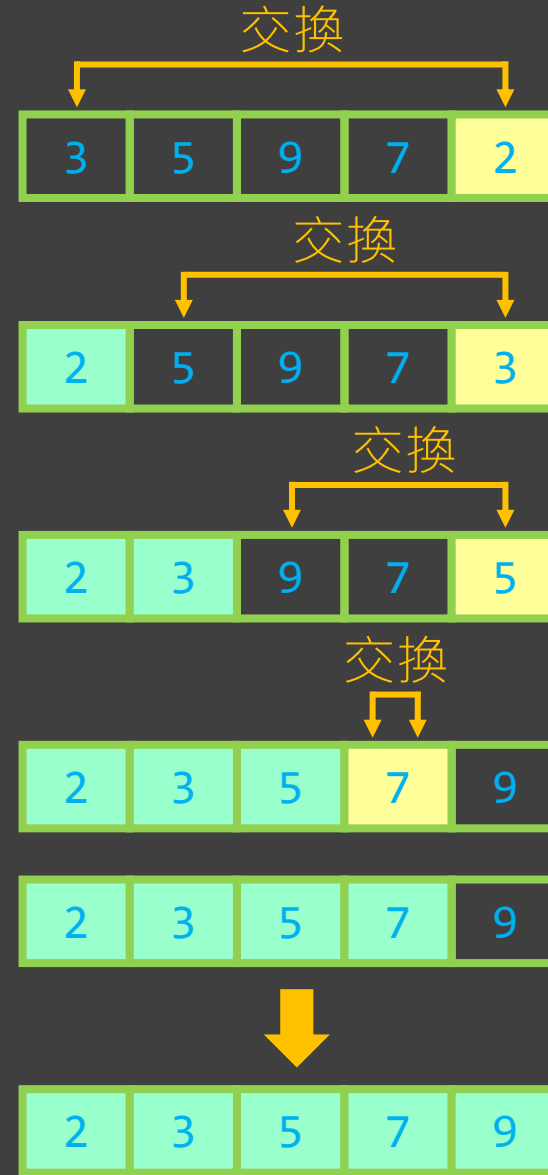
插入常用於鏈結串列，而交換則常用於陣列

# 選擇排序法

插入(穩定排序)



交換(不穩定排序)



# 選擇排序法(插入)

```
public class Main2 {  
    // 定義鏈結串列  
    private static class IntNode {  
        public final int value;  
        public IntNode next;  
        public IntNode previous;  
  
        public IntNode(int value) {  
            this.value = value;  
        }  
  
        public static void linkTwoNodes(IntNode previous, IntNode next) {  
            if (Objects.nonNull(previous)) previous.next = next;  
            if (Objects.nonNull(next)) next.previous = previous;  
        }  
    }  
}
```

```
5  
3 5 9 7 2  
2 3 5 7 9
```

console

```
8  
-1 8 -5 66 7 0 1 2  
-5 -1 0 1 2 7 8 66
```

console



```
public static void main(String[] args) {  
    Scanner scanner = new Scanner(System.in);  
    int n = scanner.nextInt(); // 獲取資料個數  
    // 建立鏈結串列  
    IntNode firstNode = null, currentNode = null;  
    for (int i = 0; i < n; i++) {  
        IntNode newNode = new IntNode(scanner.nextInt());  
        if (Objects.isNull(currentNode)) {  
            currentNode = newNode;  
            firstNode = newNode;  
        } else {  
            IntNode.LinkTwoNodes(currentNode, newNode);  
            currentNode = newNode;  
        }  
    }  
    // 選擇排序  
    IntNode sortLastNode = null;  
    for (int i = 0; i < n - 1; i++) {  
        IntNode minNode = null;  
        currentNode = Objects.isNull(sortLastNode) ? firstNode : sortLastNode.next;  
        for (int j = i; j < n; j++) {  
            if (Objects.isNull(minNode) || currentNode.value < minNode.value)  
                minNode = currentNode;  
            currentNode = currentNode.next;  
        }  
        IntNode.LinkTwoNodes(minNode.previous, minNode.next);  
        if (Objects.isNull(sortLastNode)) {  
            IntNode.LinkTwoNodes(minNode, firstNode);  
            firstNode = minNode;  
        } else {  
            IntNode.LinkTwoNodes(minNode, sortLastNode.next);  
            IntNode.LinkTwoNodes(sortLastNode, minNode);  
        }  
        sortLastNode = minNode;  
    }  
    // 輸出  
    currentNode = firstNode;  
    while (Objects.nonNull(currentNode)) {  
        System.out.print(currentNode.value + " ");  
        currentNode = currentNode.next;  
    }  
}
```

}

# 選擇排序法(交換)

```
import java.util.Arrays;
import java.util.Scanner;

public class Main3 {
    public static void main(String[] args) {
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);
        int n = scanner.nextInt(); // 獲取資料個數
        int[] arr = new int[n];
        for (int i = 0; i < n; i++)
            arr[i] = scanner.nextInt(); // 讀入資料
        for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
            int min = -1, minIndex = -1;
            for (int j = i; j < n; j++) {
                if (minIndex == -1 || arr[j] < min) {
                    min = arr[j];
                    minIndex = j;
                }
            }
            int tmp = arr[i];
            arr[i] = min;
            arr[minIndex] = tmp;
        }
        System.out.println(Arrays.toString(arr));
    }
}
```



java

```
5
3 5 9 7 2
[2, 3, 5, 7, 9] console
```

```
8
-1 8 -5 66 7 0 1 2
[-5, -1, 0, 1, 7, 8, 28, 66] console
```

# 插入排序法