组合数学

冯巾松
fengjinsong@tongji.edu.cn

第2章：递推关系与母函数

2.1 递推关系
2.2 母函数(生成函数)
2.3 Fibonacci数列
2.4 优选法与Fibonacci序列的应用
2.5 母函数的性质
2.6 线性常系数齐次递推关系
2.7 关于常系数非齐次递推关系
2.8 整数的拆分
2.9 ferrers图像
2.10 拆分数估计
2.11 指数型母函数
2.12 广义二项式定理
2.13 应用举例
2.14 非线性递推关系举例
2.15 递推关系解法的补充

2.1 递推关系

- 等差数列：

  第n项的递推关系：$a_n = a_{n-1}+d$

  第n项的一般表达式： $a_n = a_1+(n-1)d$

  前n项和的递推关系：$S_n = S_{n-1}+a_n$

  前n项和的一般表达式： $S_n = \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$

- 等比数列：

  第n项的递推关系：$a_n = a_{n-1}q$

  第n项的一般表达式： $a_n = a_1q^{n-1}$

  前n项和的公式：$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q\neq1)$

2.1 递推关系

- 例2-1：Hanoi塔问题：n个半径各不相同的圆盘，三根圆柱A, B, C；所有圆盘从A柱移到C柱，共需移动多少次?
- 算法：
  - n=1时，移一次。直接把A柱的盘移到C上
  - n>1时，$h_n = 2h_{n-1}+1$ ←----- 递推关系
  - 先把A柱最上面的n-1张盘通过C柱移到B柱上；
    - 然后再将A柱上最上面的盘移动C柱上；
    - 最后将B柱上的盘通过A盘移到C柱上。

2.1 递推关系

- 递推关系的定义：对于数列$a_1, a_2, \ldots, a_n$，除了前面的若干数外，其余各项a_n与它前面的若干个数关联起来的方法叫做递推关系。
- 初始条件（边界条件）：在求解递推关系时，前面必须知道若干个数，这若干个已知的数成为初始条件，或边界条件。
- 递推算法是一种简单的算法，即通过已知条件，利用特定关系得出中间推论，直至得到结果的算法。

2.1 递推关系

- 用迭代法求解Hanoi塔问题

$h_1 = 1$

$h_2 = 2h_1+1 = 2 + 1 = 2^2-1$

$h_3 = 2h_2+1 = 2(2^2-1)+1 = 2^3-1$

…

$h_{n-1} = 2(2^{n-2}-1)+1 = 2^{n-1}-1$

$h_n = 2h_{n-1}+1 = 2(2^{n-1}-1)+1$

$= 2^n-1$ ←---------- 通项表达式

时间复杂度： $O(2^n)$

2.1 递推关系

求解盘片为n的hanoi的算法如下：

```
void hanoi (char A, char B, char C, int n)
{
    if (n==1)
            printf ("move disk %d from A to C\n", n);
    else
        hanoi (A,C,B,n-1);        //把n-1个盘从A移到B
        printf ("move disk %d from %c to %c\n", n, A, C);
        hanoi (B,A,C,n-1); );     //把n-1个盘从B移到C
}
```

2.1 递推关系

- 例2-2 **意大利数学家Fibonacci在13世纪初提出过一个有趣问题：**设有初生的雌、雄小兔一对，二个月后便每月繁殖雌、雄小兔一对，问n个月后有几对兔子？

- 设满n个月的兔子对数为Fn
  - Fn = 当月新出生兔子数+上月留下兔子数F_{n-1}
  - 因为第n-2个月的兔子到第n个月都有繁殖能力，所以当月新出生兔子数=第n-2个月的兔子数
  - 则$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ←---------- 递推关系

2.1 递推关系

- 算法

```
int fibonacci (int n)
{
    if (n==1 || n==2)
        return (1);
    else
        return (fibonacci (n-1) + fibonacci (n-2));
}
```

2.2 母函数

- 例2-3：有两个相同红球，白球、黄球各一个，试问有多少种不同的取球组合方案？
- 解一：用组合方法

  一个都不选：1种方案

  选1个球：3种方案 (红，白，黄)

  选2个球：4种方案(红白，红黄，红红，白黄)

  选3个球：3种方案(红白黄，红红黄，红红白)

  选4个球：1种方案(都取出)

共有1+3+4+3+1 = 12种组合方案

2.2 母函数

- 解二：用函数方法

设r, w, y分别代表红球，白球，黄球；

单独红球的组合方式为

取0个,取1个,取2个　　构造函数$r^0+r^1+r^2$

单独白球的组合方式为:

取0个,取1个　　　　构造函数w^0+w^1

单独黄球的组合方式为:

取0个,取1个　　　　构造函数y^0+y^1

2.2 母函数

$(1+r+r^2)(1+w)(1+y)$

$=1+(r+w+y)+(r^2+rw+ry+wy)+(r^2w+r^2y+rwy)+r^2wy$

把r,w,y都用x来表示，可得：

$(1+x+x^2)(1+x)(1+x)=(1+x+x^2)(1+2x+x^2)$

$=1+3x+4x^2+3x^3+1\bullet x^4$

这个函数的系数正好与取不同球数的组合数相等，这就是母函数的方法。

2.2 母函数

- 定义：对于序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$，构造函数：
  $G(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$，
  称函数$G(x)$是序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$的母函数。

- 若已知序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$，则母函数$G(x)$便确定
- 反之，若已知母函数$G(x)$，则序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$也就确定了

2.2 母函数

- $(1+a_1x)(1+a_2x)\ldots(1+a_nx)$

$=1+(a_1+a_2+\ldots+a_n)x$

$+(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)x^2$

$+\cdots+a_1a_2\ldots a_nx^n$

- 如果令$a_1=a_2=\ldots=a_n=1$

$(1+x)^n=C(n,0)+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\cdots+C(n,n)x^n$

$(1+x)^n$是序列$C(n,0),C(n,1),C(n,2),\cdots,C(n,n)$的母函数，序列长度可能是有限的，也可能是无限的。

2.2 母函数

- 几个基本的母函数

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots+x^k+\ldots$$

$$\frac{1}{1-nx} = 1+nx+(nx)^2+(nx)^3+\ldots+(nx)^k+\ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+(k+1)x^k+\ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\ldots+C(n+k-1,k)x^k+\ldots$$

2.2 母函数

- 几个基本的母函数

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

$$e^{kx} = 1 + kx + \frac{(kx)^2}{2!} + \frac{(kx)^3}{3!} + \ldots + \frac{(kx)^n}{n!} + \ldots$$

$$\sin x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

2.2 母函数

- 例：求由20个水果组成一袋的可能组合数。水果有苹果、香蕉、橙子和梨。其中要求每袋苹果数是偶数，香蕉数是5的倍数，橙子数最多是4，梨的个数是0或1。
- 解：单独是苹果序列构成的母函数

$$1+x^2+x^4+\ldots = \frac{1}{1-x^2}$$

单独是香蕉序列构成的母函数

$$1+x^5+x^{10}+\ldots = \frac{1}{1-x^5}$$

2.2 母函数

- 单独是橙子序列构成的母函数

$$1+x+x^2+x^3+x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$$

- 单独是梨子序列构成的母函数

$$1+x$$

$$G(x)=\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)(1+x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

有20个水果组成一袋的可能组合数是21种

2.2 母函数

- 以汉若塔为例，用递推关系求母函数

$h_n = 2h_{n-1}+1$

假设$h_1, h_2, \ldots, h_n$的母函数为：

$G(x) = h_0+h_1x+h_2x^2+h_3x^3+\ldots$

x项系数：$h_1 = 2h_0+1$

x^2项系数：$h_2=2h_1+1$

x^3项系数：$h_3=2h_2+1$

+）……………………………………………

$h_1x+h_2x^2+\ldots=2xG(x)+x+x^2+\ldots$

$G(x) = 2xG(x)+x/(1-x)$ $\Rightarrow$ $G(x) = x/[(1-x)(1-2x)]$

2.2 母函数

$$G(x)=\frac{x}{(1-x)(1-2x)}=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{1-x}$$

$$=\frac{A(1-x)+B(1-2x)}{(1-x)(1-2x)}=\frac{(A+B)-(A+2B)x}{(1-x)(1-2x)}$$

解方程组$\begin{cases} A+B=0 \\ A+2B=-1 \end{cases}$ 得$A=1, B=-1$

所以，$G(x)=\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=(1+2x+2^2x^2+\ldots)-(1+x+x^2+\ldots)$

$=(1-1)+(2-1)x+(2^2-1)x^2+(2^3-1)x^3+\ldots$

因此， $H_n=2^n-1, n=1,2,3,\ldots$ ←---- 通项表达式

2.2 母函数

举例：已知母函数，如何构造序列

例：已知母函数为$G(x)=(x^4+x^5+x^6+\ldots)^6$，求相应序列$a_0,a_1,a_2\ldots$

解：由于$G(x)=[x^4(1+x+x^2+x^3+\ldots)]^6=\frac{x^{24}}{(1-x)^6}=$
$x^{24}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+5}{5}x^i=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+5}{5}x^{24+i}$

知：$a_0=a_1=a_2=\ldots=a_{23}=0$, $a_{24}=1$, $a_{25}=C(6,5)$, $a_{26}=C(7,5),\ldots$, $a_i=C(i-19,5)$

2.3斐波那契(Fibonacci)数列

月	1	2	3	4	5	6	….
对	1	1	2	3	5	8	…

- 设n个月后的兔子对数为F_n，当月出生N_n对，n-1个月留下兔子F_{n-1}
  - 则$F_n = N_n + F_{n-1}$， $N_n = F_{n-2}$
  - 初始条件： $F_1 = F_2 = 1$
  - 递推关系： $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

求解： $G(x) = F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \ldots$

2.3 Fibonacci数列

$\{Fn\}$的母函数为$G(x) = F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + \ldots$

$F_3=F_2+F_1$ 等式两边同乘以X^3 → $X^3 F_3 = X^3 F_2 + X^3 F_1$

$F_4=F_3+F_2$ 等式两边同乘以X^4 → $X^4 F_4 = X^4 F_3 + X^4 F_2$

$F_5=F_4+F_3$ 等式两边同乘以X^5 → $X^5 F_5 = X^5 F_4 + X^5 F_3$

… … +)……

$$G(x)-x-x^2 = x(G(x)-x)+x^2G(x)$$

所以：$G(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$

2.3 Fibonacci数列

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

$$= \frac{x}{(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x)(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x)} = \frac{A}{(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x)} + \frac{B}{(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x)}$$

$$令\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\mathbf{G(x)} = [(A+B) + (A\alpha + B\beta)x + (A\alpha^2 + B\beta^2)x^2 + \ldots]$$

$$F_n = (A\alpha^n + B\beta^n)$$

2.3 Fibonacci数列

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A\alpha+B\beta=1 \end{cases}$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}},\ B=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$F_n=(A\alpha^n+B\beta^n)$$

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

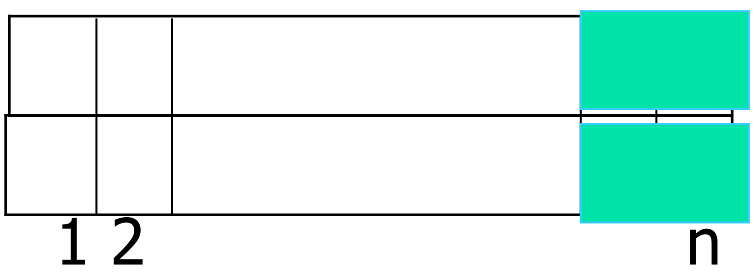
2.3 Fibonacci数列

- 例：用1x2的骨牌去完全覆盖一个2xN的棋盘，有多少种覆盖方法？

h_{n-1}

初值：$h_1=1$

$h_2=2$



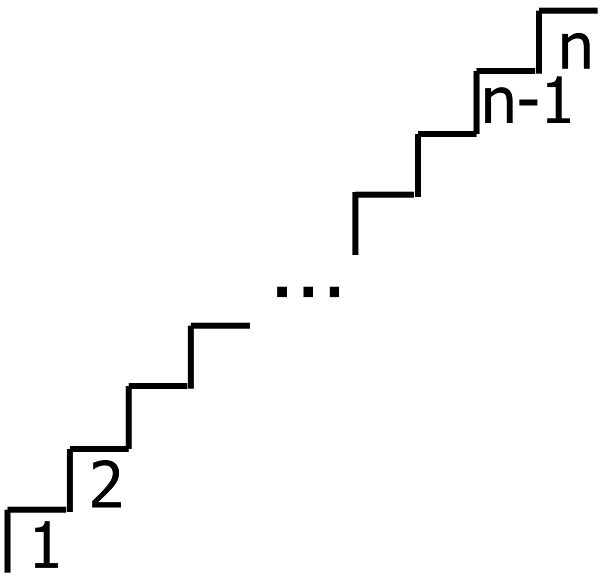
h_{n-2}

总的覆盖方法数$h_n=h_{n-1}+h_{n-2}$

公式似成相识？

2.3 Fibonacci数列

- 例：有N级台阶，某小朋友每次上一阶或上两阶，问有多少种上台阶方法？



初值：$g_1=1$

$g_2=2$

总的上台阶方法数$g_n=g_{n-1}+g_{n-2}$

公式似成相识？

2.3 Fibonacci数列

- 例：任两个1都不相邻的长为n的0,1序列有多少？

解： n=1时，序列就是0和1，所以有2种

n=2时，序列有00,01,10,11，其中11不满足，所以是3种

n=3时，序列有000,001,010,011,100,101,110,111，其中011,110,111不满足，所以是5种

第n位是0时：_ _ _ …_ _ _ 0 -> h_{n-1}

第n位是1时：_ _ _ …_ _ 0 1 -> h_{n-2}

递推关系：$h_n = h_{n-1} + h_{n-2}$

初值：$h_1 = 2$，$h_2 = 3$ 公式似成相识？

2.3 Fibonacci数列

- 例：无101，也无010的长为n的0,1序列有多少？

解：末位是0的，记成h_{n0}，末位是1的，记成h_{n1}，

则$h_n=h_{n0}+h_{n1}$ （n是长度，0,1代表最后一位的值）

末位是0的，分成两情况

$\_\ \_\ \_\ \cdots\_\ \_\ \underline{0}\ \underline{0}\ \ \to\ \ h_{(n-1)0}$

$\_\ \_\ \_\ \cdots\_\ \underline{1}\ \underline{1}\ \underline{0}\ \ \to\ \ h_{(n-2)1}$ $\qquad h_{n0}=h_{(n-1)0}+h_{(n-2)1}$

末位是1的，分成两情况

$\_\ \_\ \_\ \cdots\_\ \underline{0}\ \underline{0}\ \underline{1}\ \ \to\ \ h_{(n-2)0}$

$\_\ \_\ \_\ \cdots\_\ \_\ \underline{1}\ \underline{1}\ \ \to\ \ h_{(n-1)1}$ $\qquad h_{n1}=h_{(n-2)0}+h_{(n-1)1}$

总数$h_n=h_{n0}+h_{n1}=h_{(n-1)0}+h_{(n-2)1}+h_{(n-2)0}+h_{(n-1)1}=h_{n-1}+h_{n-2}$

初始值$h_1=2 \quad h_2=4$

2.3 Fibonacci数列

- 杨辉三角形

n\k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1
6	1	6	15	20	15	6
	1					

虚线上的所有数相加，即

$$Y_n=\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\ \dots\ +\binom{n-k}{k-1}$$

$$k=\frac{n+1}{2}\text{取整}$$

这是Fibonacci数列？

想证明上述猜想只需要证明2点：

1，初值相同$Y_1= F_1$, $Y_2= F_2$

2，递推关系相同$Y_n= Y_{n-1}+ Y_{n-2}$

2.3 Fibonacci数列

- 初值：$Y_1=1=F_1$, $Y_2= 1=F_2$
- 递推关系

$$Y_{n-1}=\binom{n-2}{0}+\binom{n-3}{1}+\binom{n-4}{2}+\ \dots\ +\binom{0}{n-2}$$

$$+)Y_{n-2}=\qquad\binom{n-3}{0}+\binom{n-4}{1}+\binom{n-5}{2}+\ \dots\ +\binom{0}{n-3}$$

$$=\binom{n-2}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\dots+\binom{1}{n-2}+\binom{0}{n-3}$$

$$=\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\dots+\binom{1}{n-2}+\binom{0}{n-1}$$

$$=Y_n$$

得证。

2.3 Fibonacci数列

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Fn	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

- 数列的特性
  - 奇偶性　Fn整除2 $\xleftrightarrow{\text{充分必要条件}}$ n整除3
  - 整除性　Fn整除3 $\xleftrightarrow{\text{充分必要条件}}$ n整除4

    Fn整除5 $\xleftrightarrow{\text{充分必要条件}}$ n整除5
  - 其他　任何相邻两个数间是互质的

如何证明呢？

2.3 Fibonacci数列

如果两个数的最大公约数是1，那么这两个数就是互质的。

方法：求(a,b)的最大公约数，不断的用两个数中大的减小的，小的数字不动。如果最后出现数字1，则1就是a和b的最大公约数。如果最后出现2个相等的数字，则该数字就是a和b的最大公约数。

$(F_n,F_{n+1})\text{->}(F_n, F_n+F_{n-1})\text{->}(F_n, F_{n-1})\text{->}(F_{n-2}, F_{n-1})\text{->}\ldots\text{->}(F_2, F_1)\text{->}(1,1)\text{->}$

1是最大公约数

2.3 Fibonacci数列

- 若干等式(1)

$F_1+F_2+\ldots+F_n=?$

$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$

$$F_1+F_2+\ldots+F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)-\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta+\beta^2+\cdots+\beta^n)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}$$

因为$x^2-x-1=0$, 得出$\alpha\beta=-1$， $\alpha+\beta=1$， 所以$\alpha=-1/\beta$, 代入上式，得

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\alpha^{n+1}}{\beta}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\beta^{n+1}}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-\alpha+\alpha^{n+2}+\beta-\beta^{n+2})=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})-(\alpha-\beta)]=F_{n+2}-1$$

2.3 Fibonacci数列

- 若干等式(1)

$$F_1+F_2+\ldots+F_n=F_{n+2}-1$$

证1：根据递推关系有

$$F_1=F_3-F_2$$

$$F_2=F_4-F_3$$

$$\ldots$$

$$F_{n-1}=F_{n+1}-F_n$$

$$+)\quad F_n=F_{n+2}-F_{n+1}$$

$$F_1+F_2+\ldots+F_n=F_{n+2}-F_2=F_{n+2}-1$$

2.3 Fibonacci数列

- 若干等式(1)

$$F_1+F_2+\ldots+F_n=F_{n+2}-1$$

证2（数学归纳法）：

当n=1时，由递推关系得$F_1=F_3-F_2=F_3-1$

等式成立

设n=k是等式成立，则有

$$F_1+F_2+\ldots+F_k=F_{k+2}-1$$

当n=k+1时，左式= $F_1+F_2+\ldots+F_k+F_{k+1}$

$$=(F_{k+2}-1)+F_{k+1}=(F_{k+2}+F_{k+1})-1=F_{k+3}-1$$

得证。

2.3 Fibonacci数列

- 若干等式(2)

$$F_1+F_3+F_5+\ldots+F_{2n-1}=F_{2n}$$

证： $F_1=F_2$

$F_3=F_4-F_2$

$F_5=F_6-F_4$

…

+) $F_{2n-1}=F_{2n}-F_{2n-2}$

$F_1+F_3+\ldots+F_{2n-1}=F_{2n}$

思考： $F_2+F_4+F_6+\ldots+F_{2n}=?$

2.3 Fibonacci数列

- 若干等式(3)

$$F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2=F_nF_{n+1}$$

证： $F_1^2=F_2F_1$

$$F_2^2=F_2\ (F_3-F_1)=F_2\ F_3-F_2F_1$$

$$\ldots$$

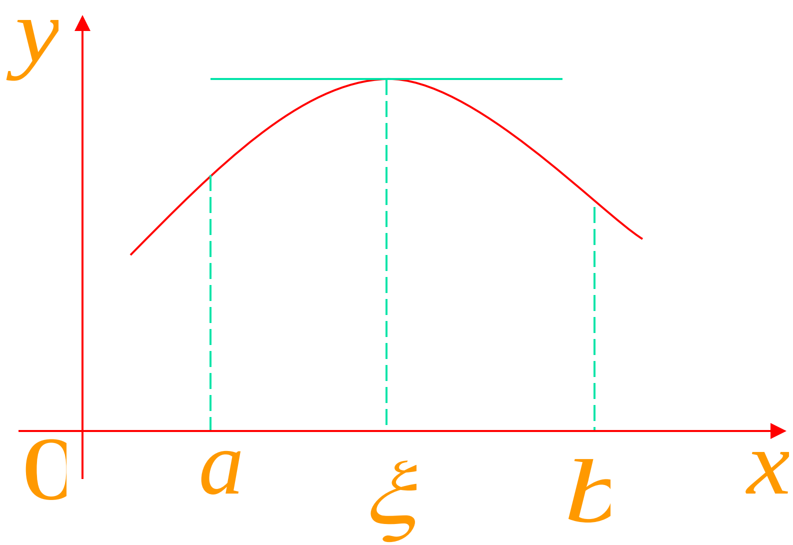
$$+)\quad F_n^2=F_n\ (F_{n+1}-F_{n-1})=F_n\ F_{n+1}-\ F_n\ F_{n-1}$$

$$F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2=F_nF_{n+1}$$

2.4 优选法与Fibonacci序列的应用

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上有一单峰极值点，假定为极大点。

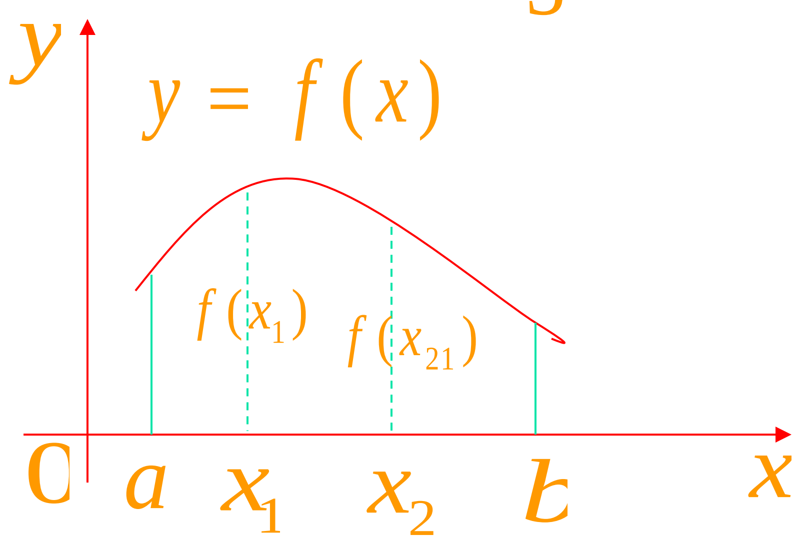
所谓单峰极值，即只有一个极值点 ξ，而且当x与ξ 偏离越大，偏差 $|f(x)-f(\xi)|$ 也越大。



2.4 优选法与Fibonacci序列的应用

设函数 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 点取得极大值。要求用若干次试验找到 ξ 点准确到一定的程度。最简单的方法，把 (a,b) 三等分，令：

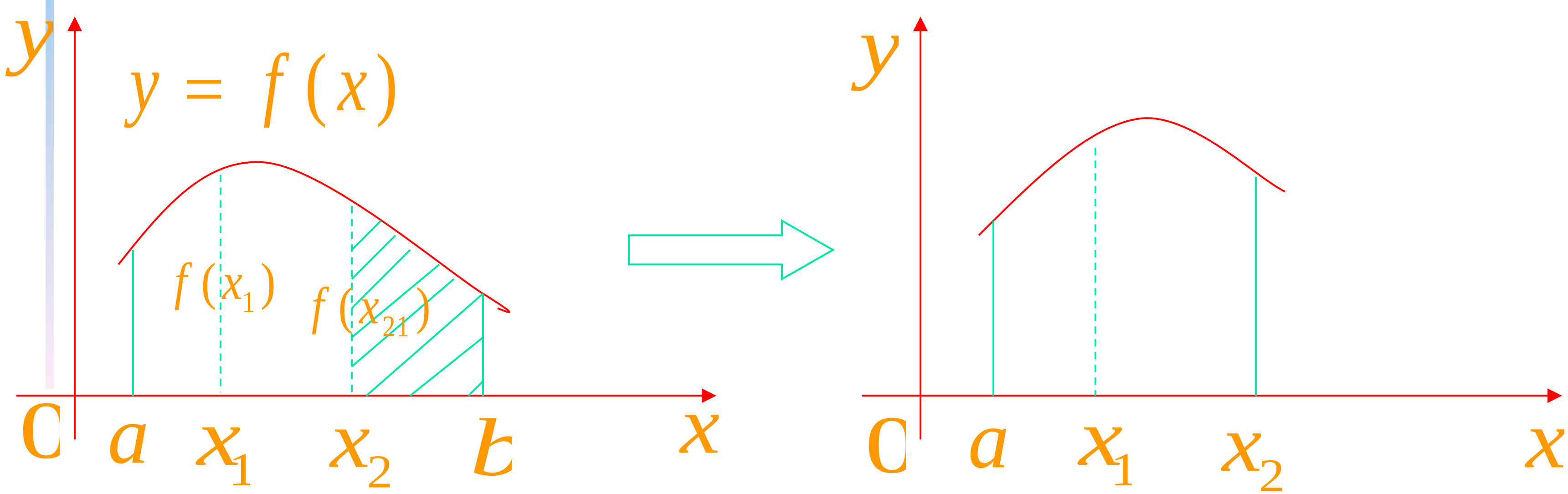
$$x_1 = a + \frac{1}{3}(b-a),\quad x_2 = a + \frac{2}{3}(b-a)$$



2.4 优选法与Fibonacci序列的应用

依据 $f(x_1), f(x_2)$ 的大小分别讨论如下：

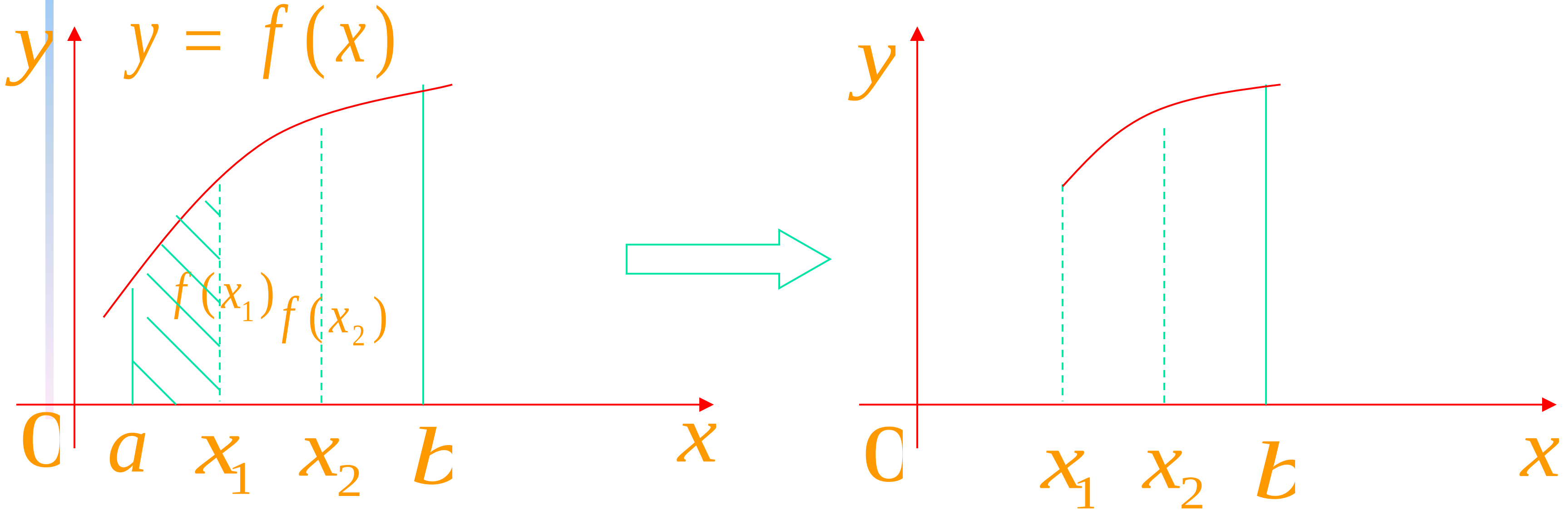
当 $f(x_1) > f(x_2)$，则极大点 ξ 必在 (a, x_2) 区间上，区间 (x_2, b) 可以舍去。



$$f(x_1) > f(x_2)$$

2.4 优选法与Fibonacci序列的应用

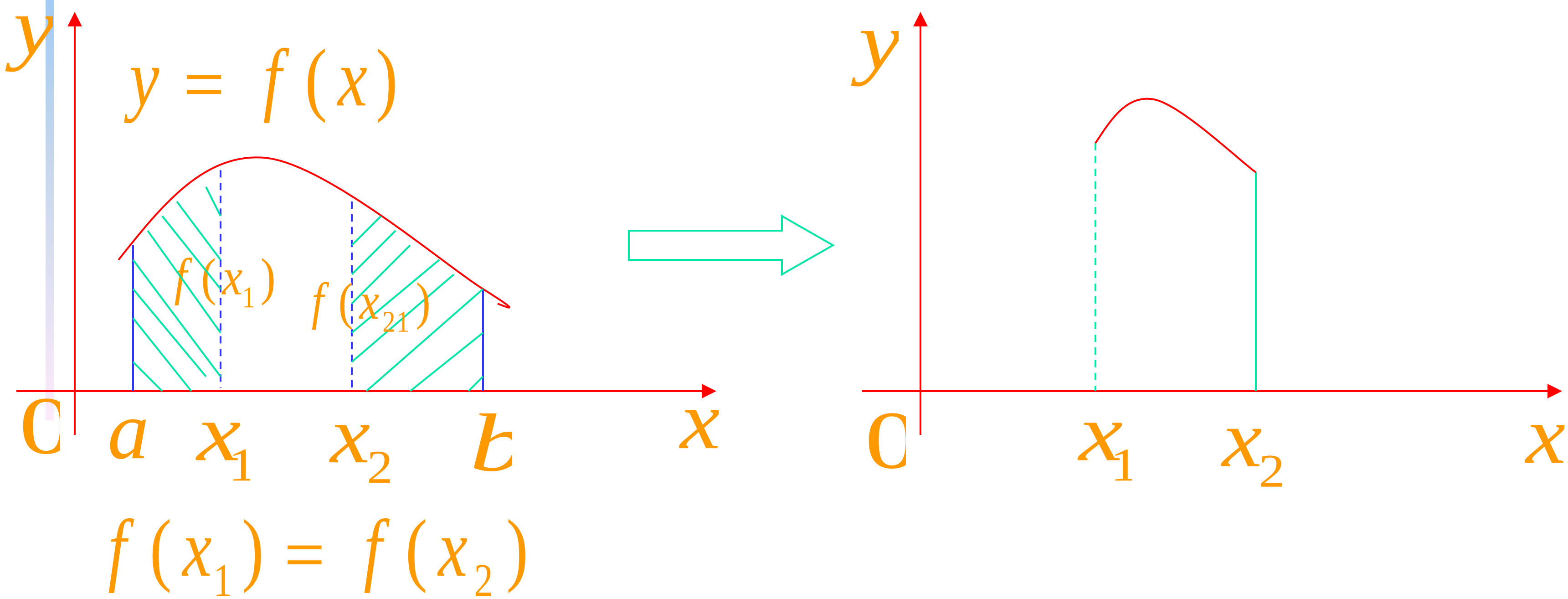
当$f(x_1) < f(x_2)$，则极大点ξ必在(x_1, b)区间上，区间(a, x_1)可以舍去。



$f(x_1) < f(x_2)$

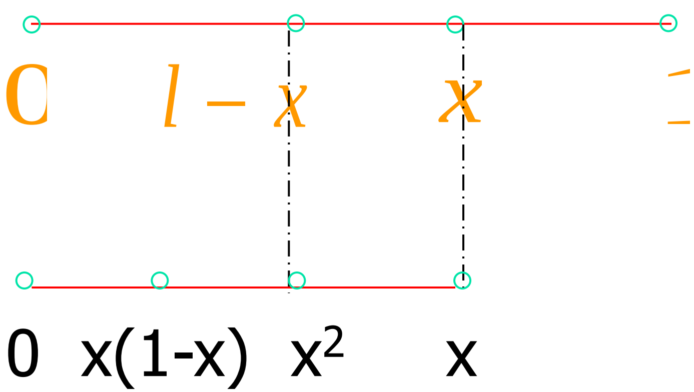
2.4 优选法与Fibonacci序列的应用

当$f(x_1)=f(x_2)$，则极大点ξ必在(x_1,x_2)区间上，区间(a,x_1)和(x_2,b)均可以舍去。



2.4 优选法与Fibonacci序列的应用

可见做两次试验，至少可把区间缩至原来区间的2/3，比如 $f(x_1) > f(x_2)$，进一步在 (a, x_2) 区间上找极值点。若继续用三等分法，将面对着这一实事，即其中 x_1 点的试验没发挥其作用。为此设想在 $(0,1)$ 区间的两个点，即 $x, l-x$，分别做试验。



2.4 优选法与Fibonacci序列的应用

设保留$(0,x)$区间，继续在$(0,x)$区间的选上两个点$x^2,(1-x)x$处做试验，若

$$x^2=(1-x)x \qquad (2\text{-}3\text{-}6)$$

则前一次$1-x$的点的试验，这一次可继续使用可节省一次试验。由(2-3-6)式有

$$x^2+x-1=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.618$$

$0 \qquad 0.382=(0.618)^2 \qquad 0.618 \qquad 1$

2.4 优选法与Fibonacci序列的应用

这就是所谓的0.618优选法。**这个数字正好是建筑、美学等领域的黄金分割位。**即若在 $(0,1)$ 区间上找单峰极大值时，可在

$$x_1 = 0.618, \quad x_2 = 1 - 0,618 = 0.3832$$

点做试验。比如保留区间 $(0,0.618)$，由于 $(0.618)^2 = 0.328$ ，故只要在

$$0.618 \times 0.328 = 0.236$$

点作一次试验。

2.4 优选法与Fibonacci序列的应用

比较这相邻两个斐波那契数的关系有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}}=\frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\alpha}=0.618033....$$

优选法中可利用Fibonacci数列，和0.618法不同之点在于它预先确定试验次数，分两种情况介绍其方法。

(a) 所有可能试验数正好是某个 F_n 。

2.4 优选法与Fibonacci序列的应用

这时两个试验点放在F_{n-1}和F_{n-2}两个分点上，如果F_{n-1}分点比较好，则舍去小于F_{n-2}的部分；如果F_{n-2}点更好，则舍去大于F_{n-1}的部分。在留下的部分共F_{n-1}个分点，其中第F_{n-2}和第F_{n-3}二试验点，恰好有一个是刚才留下来的试验可以利用。

可见在F_n个可能试验中，最多用n-1次试验便可得到所求的极值点

2.4 优选法与Fibonacci序列的应用

(b)利用Fibonacci数列进行优选不同于0.618法之点,还在于它适合于参数只能取整数数值的情况.如若可能试验的数目比F_n小,但比F_{n-1}大时,可以虚加几个点凑成F_n个点，但新增加的点的试验不必真做，可认定比其他点都差的点来处理。

2.5 母函数的性质

已知序列{a_i}的母函数为$A(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$

- 性质1

如果 $b_k=\begin{cases} 0 & k<l \\ a_{k-l} & k\ge l \end{cases}$ 那么$B(x)=x^l A(x)$

$B(x)=a_0x^l+a_1x^{l+1}+\ldots=x^l(a_0+a_1x+\ldots)=x^l A(x)$

- 性质2

如果：$b_k=a_{k+1}$ 那么：$B(x)=[A(x)-\sum_{j=0}^{l-1} a_j x^j]/x^l$

2.5 母函数的性质

- 性质3

如果$b_k=\sum_{i=0}^{k} a_i$　　那么$B(x)=\frac{A(x)}{1-x}$

- 性质4

如果：$\sum_{i=0}^{\infty} a_i$收敛　$b_k=\sum_{j=k}^{\infty} a_j$

那么：　$B(x)=\frac{A(1)-xA(x)}{1-x}$

2.5 母函数的性质

性质5

若$b_k=ka_k$， 则$B(x)=xA'(x)$, 其中$A'(x)=\frac{d}{dx}A(x)$

性质6

若$c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\ldots+a_kb_0=\sum_{h=0}^{k} a_h b_{k-h}$

则$C(x)=A(x)B(x)$

2.5 母函数的性质

- 性质7

如果: $b_k = \dfrac{a_k}{1+k}$

那么: $B(x) = \dfrac{1}{x}\int_0^x A(x)dx$