组合数学

冯巾松
fengjinsong@tongji.edu.cn

第2章 递推关系与母函数

2.1 递推关系
2.2 母函数(生成函数)
2.3 Fibonacci数列
✖ 2.4 优选法与Fibonacci序列的应用
2.5 母函数的性质
2.6 线性常系数齐次递推关系
2.7 关于常系数非齐次递推关系
2.8 整数的拆分
2.9 ferrers图像
✖ 2.10 拆分数估计
2.11 指数型母函数
2.12 广义二项式定理
2.13 应用举例
2.14 非线性递推关系举例
2.15 递推关系解法的补充

2.8：整数的拆分

1、拆分的概念

2、拆分的模型

3、拆分算法:递归实现

4、用母函数讨论拆分数

2.8：整数的拆分

1、拆分的概念

所谓整数的拆分，是指把一个正整数拆分成若干正整数的和。

不同的拆分法的数目称为拆分数。

例如：考虑正整数4的拆分数：

4=4，4=3+1，4=2+2，4=2+1+1，4=1+1+1+1

通常用p(n)表示整数n拆分成若干正整数的和的拆分数，也可说成方案数。

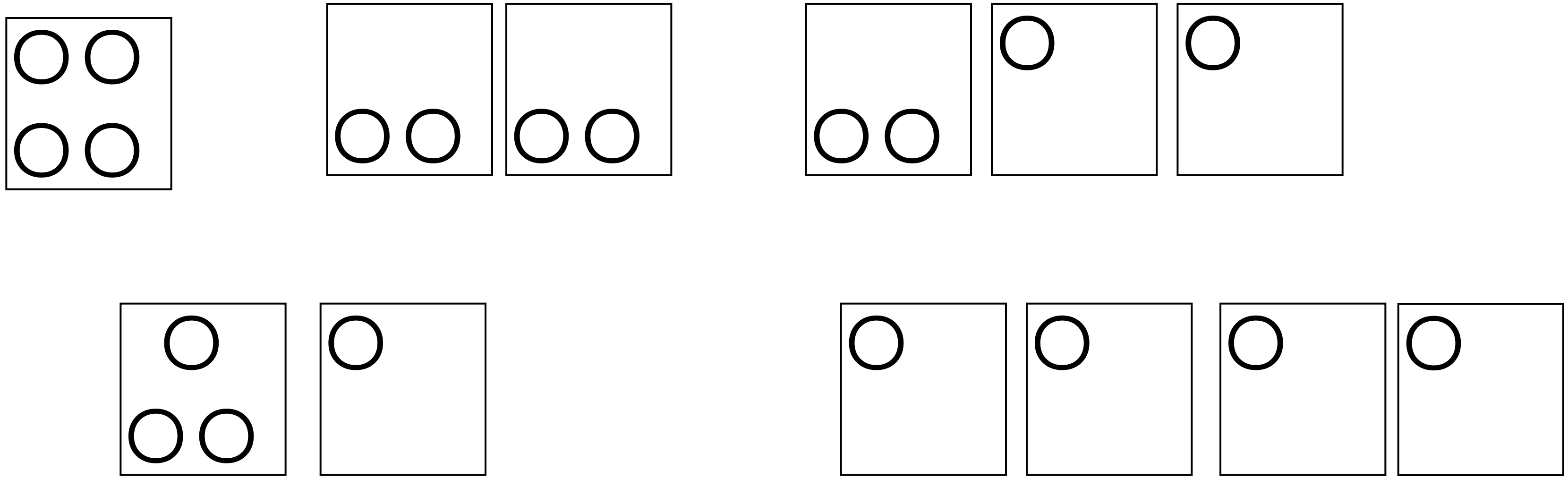
例如p(4)=5。

2.8：整数的拆分

正整数n的拆分，相当于把n个无区别的球放进n个无区别的盒子，盒子中允许放一个以上的球，也允许空着。其每一种方案就是一种拆分

以正整数4为例，球的放法如下：

4=4，4=3+1， 4=2+2， 4=2+1+1，   4=1+1+1+1



2.8：整数的拆分

2、拆分的模型

（1）从n个不同的球中取出r个，放进r个相同的盒子中，不许空盒，有多少种放法？

$C(n, r)$

（2）从n个不同的球中取出r个，放进r个不相同的盒子中，不许空盒，有多少种放法？

$P(n, r)$

(3)、从n个不同元素中取r个允许重复的组合

$C(n+r-1, r)$

2.8：整数的拆分

3、拆分算法:递归实现

定义一个函数Q(n, m)：表示整数n的所有加数都不超过m的拆分数。

(1) n=m，Q(n, n)=1+Q(n, n-1)

(2) n<m, 不可能出现负数，因此就相当于Q(n, n)

(3) n>m，Q(n, m)=Q(n, m-1)+Q(n-m, m)

停止条件：

(1) m=1，Q(n, 1)=1

(2) n=1，Q(1, m)=1

2.8：整数的拆分

```
int divinteger(int n, int m)
{    if (n<1||m<1)
      printf("error");
      else if(n=1||m=1)
          return(1);
          else if(n<m)
             return divinteger(n,n)
            else if(n=m)
              return(1+divinter(n,n-1));
               else
return(divinteger(n,m-1)+divinteger(n-m,m));
}
```

2.8：整数的拆分

4、用母函数讨论拆分数

整数n拆分成1, 2，…，m的和，并允许重复，其母函数为

拆分成1的 $1+x+x^2+\ldots$

… 2 $1+x^2+x^4+\ldots$

… 3 $1+x^3+x^6+\ldots$

… ……………………

… m $1+x^m+x^{2m}+\cdots$

母函数中x^n的系数就是所求的拆分数

$$G(x)=\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{1-x^3}\times\ldots\times\frac{1}{1-x^m}$$

2.8：整数的拆分

例2-22　求1角、2角、3角的邮票可贴出的邮资及其方案数。

解：因为同样面值邮票的使用是可以重复的

单独用1角的母函数为$1+x+x^2+x^3+\ldots$

单独用2角邮票的母函数为
$1+x^2+x^4+x^6+\ldots$

单独用3角邮票的母函数为
$1+x^3+x^6+x^9+\cdots$

2.8：整数的拆分

$$G(x)=(1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+\ldots$$

母函数展开项中**x^k**的系数就是贴出**k**角邮资的方案数。

2.8：整数的拆分

例2-24　求正整数n拆分成1, 2, ...m的和，并允许重复。若其中m至少出现一次，试求它的方案数及其母函数。

解：m至少出现一次, 就是其对应的母函数第一项是x^m, 而不是x。

$$G(x)=(1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\ldots(x^m+x^{2m}+\ldots)$$

$$=\frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{1-x^m}-1\right)$$

$$=\frac{1-(1-x^m)}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$$

2.8：整数的拆分

$$= \frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)} - \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{m-1})}$$

所以：整数n拆分成1到m之和的拆分数减去拆分成1到m-1之和的拆分数，即为至少出现一个m的拆分数。

2.8：整数的拆分

例2-23： 用1克砝码3枚、2克砝码4枚、4克砝码2枚，问能称出几种可能的重量？各有几种方案数？

解：计算拆分数的母函数：

$$G(x) = (1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1+x^4+x^8)$$

$$= 1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7+5x^8+5x^9+5x^{10}+5x^{11}+4x^{12}+4x^{13}+3x^{14}+3x^{15}+2x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{19}$$

2.8：整数的拆分

定理2-2　正整数n拆分成不重复的不同正整数之和的拆分数p(n)，等于拆分成可重复的奇正整数之和的拆分数

举例：对比整数7的两种拆分数。

7拆分成不重复的不同正整数和的所有形式如下：

7，6+1，5+2，4+3，4+2+1共5种

7拆分成重复的奇数之和的所有形式如下：

7，5+1+1，3+3+1，3+1+1+1+1，

1+1+1+1+1+1+1也是5种

2.8：整数的拆分

证：首先构造n拆分成不重复的不同正整数之和的拆分序列的母函数：

$$G(x)=(1+x)\,(1+x^2)\,(1+x^3)\,(1+x^4)\,\ldots$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots}$$

$$=(1+x+x^2+\ldots)(1+x^3+x^6\ldots)\ldots$$

就是n拆分成奇数1, 3, 5, …之和，但允许重复的拆分数的母函数

2.8：整数的拆分

定理2-3　n拆分成重复数不超过2的数之和的拆分数。等于它拆分成不被3除尽的数之和的拆分数。

举例，考虑n=5的情况

5的所有拆分情况如下：5，4+1，3+2，3+1+1，2+2+1，2+1+1+1，1+1+1+1+1

重复数不超过2的数之和的拆分数有：5，4+1，3+2，3+1+1，2+2+1

拆分成不被3除尽的数之和的拆分数有：5，4+1，2+2+1，2+1+1+1，1+1+1+1+1

2.8：整数的拆分

证明：n拆分成重复数不超过2的数之和的拆分数，其母函数为：

$$G(x)=(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1+x^3+x^6)(1+x^4+x^8)\ldots$$

$$(1-x^3)=(1-x)(1+x+x^2)$$

$$G(x)=\frac{1-x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^9}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^{12}}{1-x^4}\ldots$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)\ldots}$$

就是不被3除尽的数之和的拆分数

2.8：整数的拆分

例2-25　n个完全相同的球放到m个无区别的盒子，不允许空盒，问共有多少种不同的方案？其中m≤n。

解：从n中取m个球一个盒子放一个。

整数n-m用不超过m的数来拆分的拆分数。

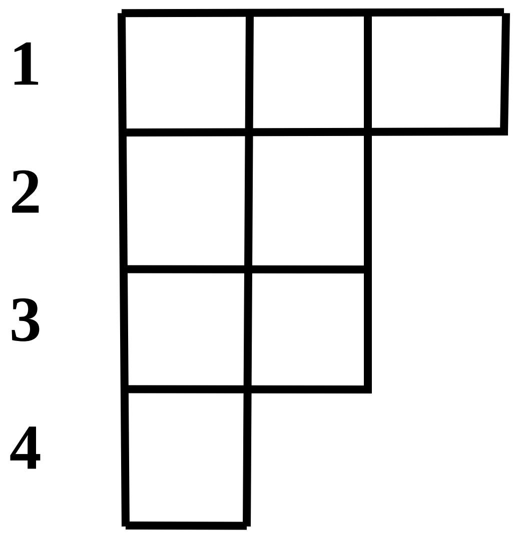
$$G(x) = (x + x^2 + \ldots)(x + x^2 + \ldots)\ldots(x + x^2 + \ldots)$$

$$= \frac{x^m}{(1-x)^m}$$

展开式中x^{n-m}项的系数C(n-1,m-1)

2.9 费勒斯（Ferrers)图像

1、什么是费勒斯图像



- 一个从上而下的k层格子，上层的格子数不少于下层的格子数时，称为Ferrers图像。

2.9 费勒斯（Ferrers)图像

2、费勒斯（Ferres)图像的性质：

(1)每一层至少有一个格子；

(2)下一层的格数不多于上一层的格子数；

(3)行与列互换，即第1行与第1列互换，第2行与第2列互换，……，也就是沿对角线旋转180°，仍然是费勒斯图像；

后一个费勒斯图像称为前一个费勒斯图像的共轭图像，而且互为共轭。

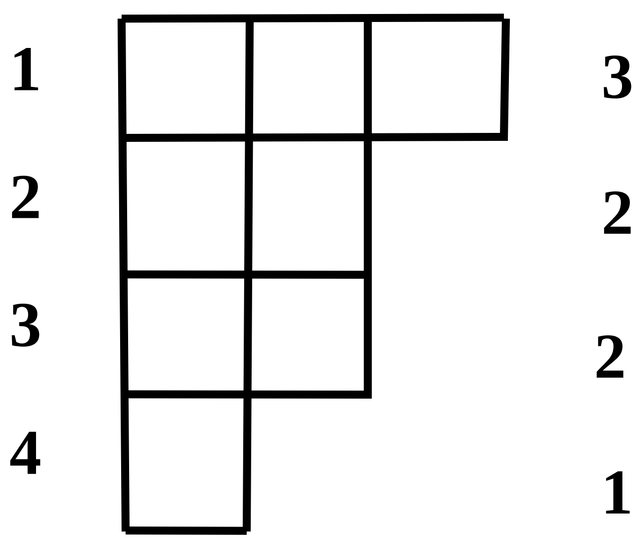
2.9 费勒斯（Ferrers)图像

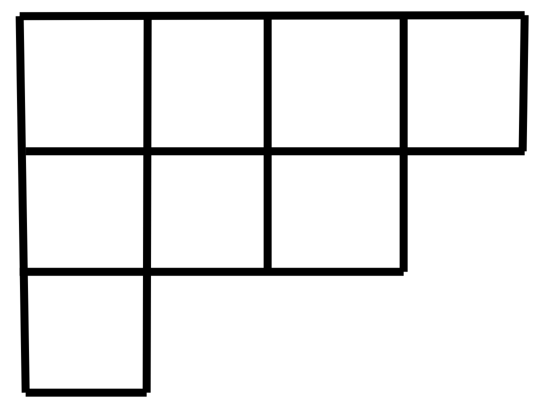
3、费勒斯图像对拆分数的讨论

假设正整数n拆分成k个整数之和$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$。

其中$n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3 \geqslant \ldots \geqslant n_k$。将他们排成阶梯形，左边对齐，第1行$n_1$格，第2行$n_2$格，…, 第k行$n_k$格。

例如：8=3+2+2+1　　　　8=4+3+1





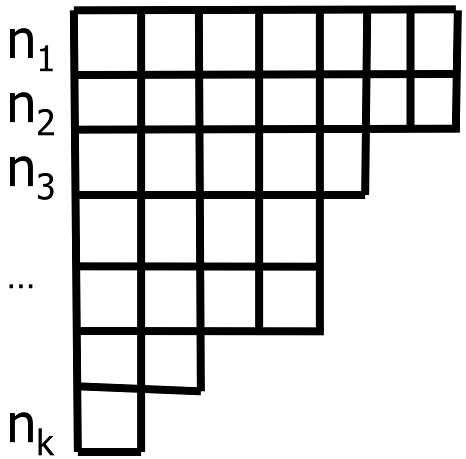
2.9 费勒斯（Ferrers)图像

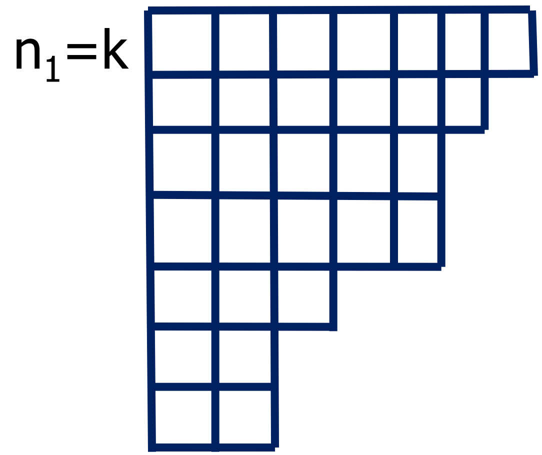
定理　如下两个拆分数是相等的：

(1) 把正整数n拆分成k个整数之和的拆分数，

(2) 把正整数n拆分成最大整数为k的拆分数之和。

2.9 费勒斯（Ferrers)图像





整数n的拆分：k个整数之和

整数n的拆分：最大整数为k的若干整数之和

Ferrers图：k行

共轭Ferrers图：首行k格

2.9 费勒斯（Ferrers)图像

推论:正整数n拆分成最多不超过m个数之和的拆分数，等于将n拆分成最大数不超过m的数的拆分数。

两者的母函数都是：$$\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{1-x^3}\times\ldots\times\frac{1}{1-x^m}$$

整数n的拆分：1个整数之和 **Ferrers图：1行** **共轭Ferrers图：最大的整数为1** 整数n的拆分：最大的整数为1	整数n的拆分：2个整数之和 **Ferrers图：2行** **共轭Ferrers图：最大的整数为2** 整数n的拆分：最大的整数为2	…	整数n的拆分：m个整数之和 **Ferrers图：m行** **共轭Ferrers图：最大的整数为m** 整数n的拆分：最大的整数为m

2.9 费勒斯（Ferrers)图像

拆分成正好m个数的拆分数。

$$\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{1-x^3}\times\dots\times\frac{x^m}{1-x^m}$$

拆分成不超m个数的拆分数。

$$\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{1-x^3}\times\dots\times\frac{1}{1-x^m}$$

拆分成不超m-1个数的拆分数。

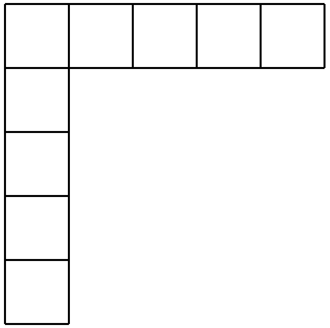
$$\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{1-x^3}\times\dots\times\frac{1}{1-x^{m-1}}$$

2.9 费勒斯（Ferrers)图像

定理　整数n拆分成互不相同的若干奇数和的拆分数，与n拆分成有自共轭费勒斯图像的拆分数相等。

自共轭费勒斯图像是指共轭图像与原图像一致。

任何一个奇数都可表示成 $2n+1$ 这种形式。



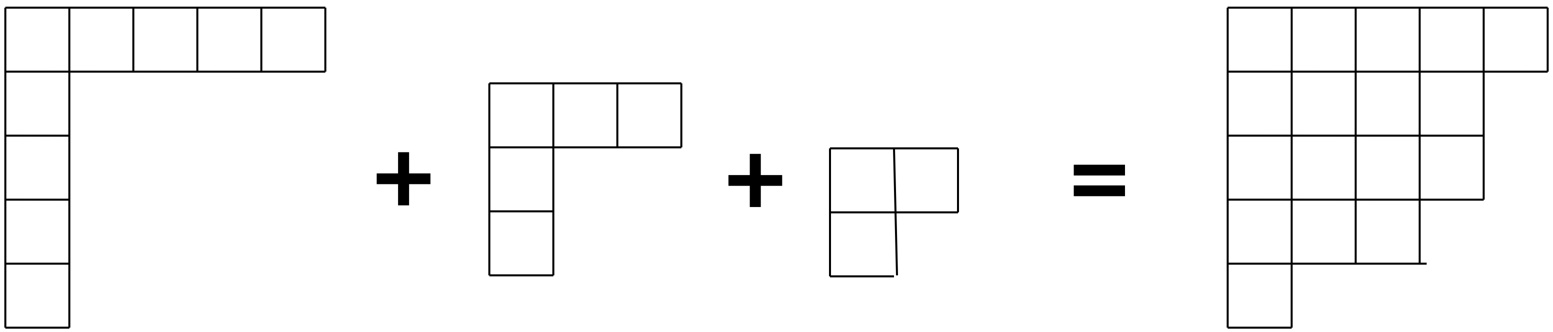
每一个奇数都与右图这样的自共轭费勒斯图像一一对应。

n拆分成若干奇数和可以如下表示：

$$n=(2n_1+1)+(2n_2+1)+\ldots+(2n_k+1)$$

2.9 费勒斯（Ferrers)图像

例如：17=9+5+3，求所对应的自共轭Ferrers图像。



将9写成2×4+1

将5写成2×2+1

将3写成2×1+1

三个图像结合起来就得到了我们所要求的图像。

2.9 费勒斯（Ferrers)图像

n拆分成若干奇数和可以如下表示：

$n=(2n_1+1)+(2n_2+1)+\ldots+(2n_k+1)$

构造一个Ferrers图像，其第一行，第一列都是n_1+1格，对应于$2n_1+1$，

第二行，第二列各n_2+2格，对应于$2n_2+1$。

以此类推。由此得到的Ferres图像是自共轭的。