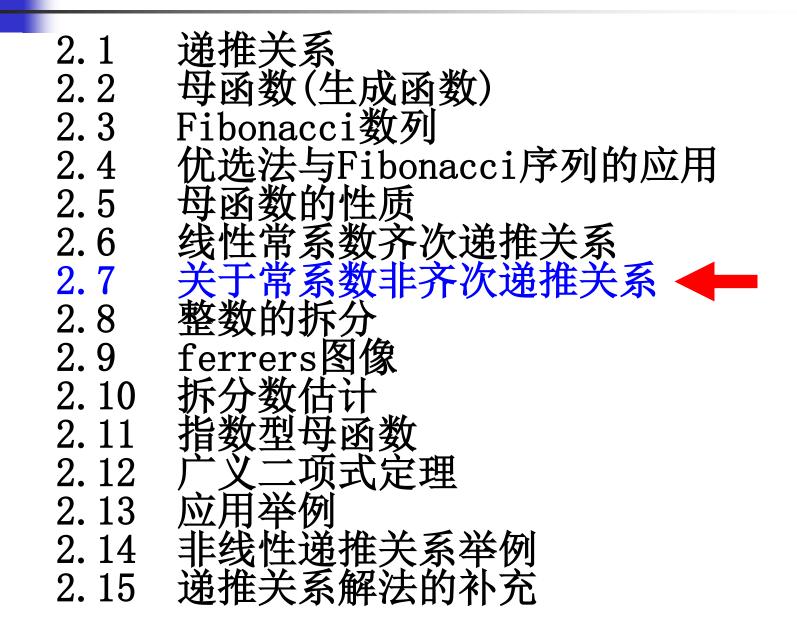


冯巾松 fengjinsong@tongji.edu.cn

第2章 递推关系与母函数



有如下的递推关系:

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = b_n$$

称为k阶线性递推关系,其中若 $c_1,c_2,...,c_k$ 都是常数,则称为常系数线性递推关系,若 $b_n \neq 0$,则称为是非齐次的。

2.10任意阶齐次递推关系

设r1,r2,...,r。是线性常系数齐次递推关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = 0$$

的不同的特征根,并设 h_i 是 r_i 的重根数,i=1,2,3,...,s。则

$$a_{n} = (A_{0} + A_{1}n + \dots + A_{h_{1}-1}n^{h_{1}-1})r_{1}^{n}$$

$$+ (B_{0} + B_{1}n + \dots + B_{h_{2}-1}n^{h_{2}-1})r_{2}^{n} + \dots$$

$$+ (T_{0} + T_{1}n + \dots + T_{h-1}n^{h_{s}-1})r_{s}^{n}$$



$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = b_n$$

对应的齐次递推关系。

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = 0$$

如果序列xn和yn满足非齐次递推关系,

则序列zn=xn-yn满足其对应的齐次递推关系。

证明:略

定理1 若 f_n 是线性常系数非齐次递推关系 a_n 的特解,则这个线性常系数非齐次递推关系 a_n 的解有如下形式:

 $a_n = f_n + 对应的线性常系数齐次递推关系的解。$

非齐次通解=齐次通解+非齐次特解

方法: 对于如下非齐次递推关系。

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} = r^n b(n)$$
 (2.11.3)

若b(n) 是n的p次多项式,如果r是线性齐次递推关系,

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} = 0$$
 的特征方程:

$$K(x) = x^{k} + c_{1}x^{k-1} + ... + c_{k} = 0$$

的m重根,则递推关系的特解有以下形式:

$$r^{n}(k_{0}n^{m} + k_{1}n^{m+1} + \ldots + k_{p}n^{m+p})$$

其中k₀,k₁,...k_p由递推关系决定

若r不是K(x)=0的根,则特解是m=0时的形式。

Hanoi塔问题求解

递推关系:
$$h_n = 2h_{n-1} + 1$$
 (非齐次)

初始条件: $h_0 = 0$

- (1)齐次递推关系为 $h_n = 2h_{n-1}$ 齐次特征方程为x-2=0 → 特征根是2 齐次递推关系的通解为 $h_n = A2^n$ (A待定)
- (2)非齐次递推关系的特解: $b_n=1^1 \cdot 1$, p=0; 1不是特征根,m=0. 所以特解是一个常数设特解为c

$$c=2c+1 \rightarrow c=-1$$

(3)非齐次递推关系的通解为: $h_n = A2^{n}-1$ 由初始条件 $h_0 = 0$ 得A=1

所以: h_n = 2ⁿ-1

例:已知递推关系: $a_n = 3a_{n-1}-4n$

初始条件: $a_0 = 2$,求 $a_n = ?$

- (1)齐次递推关系为 $a_n = 3a_{n-1}$ 齐次特征方程为 $x-3=0 \rightarrow$ 特征根是3 齐次递推关系的通解为 $a_n = A3^n$ (A待定)
- (2)非齐次递推关系的特解:

 b_n =-4n=1¹•(-4n),是n的一次的多项式; 1不是特征根, m=0. 所以设特解为An+B,

代入递推关系得 A=2, B=3 所以特解为2n+3

(3)非齐次递推关系的通解为: $a_n = A3^n + 2n + 3$ 由初始条件 $a_0 = 2$ 得A = -1

所以: $a_n = -3^n + 2n + 3$

例2-13:已知递推关系: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 5 \cdot 4^n$ 初始条件: $a_0 = 5$, $a_1 = 2$, 求 $a_n = ?$ (1)齐次递推关系为 $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$

下次短距人家为 $a_n - a_{n-1} \cdot oa_{n-2}$ 齐次特征方程为 x^2 -x-6=0 → 特征根是3, -2 齐次递推关系的通解为 $a_n = A3^n + B(-2)^n$ (A,B待定)

(2)非齐次递推关系的特解:

 $b_n=5•4^n$, 4不是特征根,故设特解为C4ⁿ,由递推关系知 C4ⁿ= C4ⁿ⁻¹ + 6C4ⁿ⁻²+5•4ⁿ → C=40/3 特解为(40/3) 4ⁿ

(3)非齐次递推关系的通解为:

 $a_n = A3^n + B(-2)^n + (40/3) 4^n$ 由初始条件得A=-68/5, B=79/15 所以: $a_n = (-68/5)3^n + (79/15)(-2)^n + (40/3)4^n$

例2-14: 已知递推关系: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 3^n$ 初始条件: $a_0 = 5$, $a_1 = 2$, 求 $a_n = ?$

- $b_n=3^n$, 3是特征根,故设特解为cn3ⁿ,由递推关系知 cn3ⁿ= c(n-1)3ⁿ⁻¹ + 6c(n-2)3ⁿ⁻²+3ⁿ \rightarrow c=3/5 特解为(3/5) n3ⁿ
- (3)非齐次递推关系的通解为:
- $a_n = A3^n + B(-2)^n + (3/5)n3^n$ 由初始条件得A=51/25, B=74/25 所以: $a_n = (51/25) 3^n + (74/25) (-2)^n + (3/5) n3^n$

例2-14: 已知递推关系: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 3^n$

初始条件: $a_0 = 5$, $a_1 = 2$, 求 $a_n = ?$

解法2: 令其母函数为 $G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...$

由递推关系有 a_2 - a_1 - $6a_0$ = 3^2 等式两边同乘 x^2

$$a_3 - a_2 - 6a_1 = 3^3$$
 ...

$$a_4$$
- a_3 - $6a_2$ = 3^4 ...

全部相加**G**(x)-2x-5-x[**G**(x)-5]-6x²**G**(x)=3²x²/(1-3x)整理得:

$$G(X) = \frac{5 - 18x + 18x^2}{(1 + 2x)(1 - 3x)^2} = \frac{A}{1 + 2x} + \frac{B}{1 - 3x} + \frac{C}{1 - 3x}$$

$$(A+B+C)+(-6A-B+2C)x+(9A-6B)x^2=5-18x+18x^2$$

得
$$\begin{cases}
A + B + C = 5 \\
6A + B - 2C = 18 \\
9A - 6B = 18
\end{cases}$$

所以:
$$a_n = (74/25)(-2)^n + (51/25)3^n + (3/5)n3^n$$

例:已知递推关系: $a_n = a_{n-1} + n^3$

初始条件: $a_0 = 0$,求 $a_n = ?$

- (1)齐次递推关系为 $a_n = a_{n-1}$ 齐次特征方程为x-1=0 → 特征根是1 齐次递推关系的通解为 $a_n = A1^n = A$ (A待定)
- (2)非齐次递推关系的特解:

b_n=n³=1ⁿ•n³, 1是特征根,故设特解为An⁴+Bn³+Cn²+Dn,由递推关系知

 $An^4+Bn^3+Cn^2+Dn=A(n-1)^4+B(n-1)^3+C(n-1)^2+D(n-1)+(n-1)^3$

- → 特解为(1/4) n⁴+(-1/2) n³+(1/4)n²
- (3)非齐次递推关系的通解为:

 $a_n = (1/4) n^4 + (1/2) n^3 + (1/4) n^2 + A$ 由初始条件 $a_0 = 0$ 得A=0

所以: $a_n = (1/4) n^4 + (1/2) n^3 + (1/4) n^2 = n^2(n-1)^2/4$

例2-17
$$a_n+3a_{n-1}-10a_{n-2}=(-7)^nn$$

对应齐次关系的特征方程

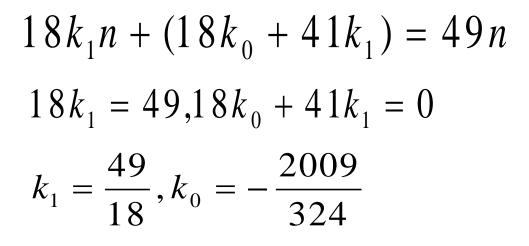
$$K(x) = x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2) = 0$$

有两个特征根: 2和-5,-7不是特征根,故m=0,按定理,非齐次关系的特解可写为:

$$\alpha = (-7)^n (k_0 + k_1 n)$$

代入递推关系式:

$$(-7)^{n} (k_{0} + k_{1}n) + 3(-7)^{n-1} [k_{0} + k_{1}(n-1)]$$
$$-10(-7)^{n-2} [k_{0} + k_{1}(n-2)] = (-7)^{n} n$$



特解:
$$\alpha = (-7)^n \left[-\frac{2009}{324} + (\frac{49}{18})n \right]$$

因此一般解为:

$$a_n = k_1(2)^n + k_2(-5)^n + (-7)^n \left[\left(\frac{49}{18} \right) n - \frac{2009}{324} \right]$$

例2-18: 已知递推关系: $a_n + 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = 2^n(5+n)$, 求递推关系的一个特解

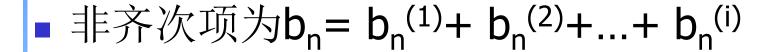
(1)齐次递推关系为 $a_n + 3 a_{n-1} - 10a_{n-2} = 0$ 齐次特征方程为 $x^2 + 3x - 10 = 0$ →特征根是2, -5

(2)非齐次递推关系的特解: b_n=2ⁿ(5+n), 2是特征根, 故设特解为 (An+Bn²)2ⁿ, 代入递推关系可以确定A=87/49, B=1/7

故特解为[(87/49)n+(1/7)n²]2ⁿ

例2-19
$$a_{n-1}+2a_{n-2}=6n^{2}$$
, $a_{0}=6,a_{1}=7$

- (1)齐次特征方程 $K(x) = x^2 3x + 2 = (x 1)(x 2) = 0$ 有两个特征根: 1和2。
- (2)右端项6n²可以看作是(1)ⁿ 6n², 1是特征根, 所以特解 $\alpha = (k_1 n + k_2 n^2 + k_3 n^3)1^n$
- (3)特解代入递推关系求出系数 k_1 =-49, k_2 =-15, k_3 =-2 所以特解是-49n-15 n^2 -2 n^3



设非齐次项 $b_n^{(1)}$ 的特解为 $a_n^{(1)}$ 设非齐次项 $b_n^{(2)}$ 的特解为 $a_n^{(2)}$

.

设非齐次项 $b_n^{(i)}$ 的特解为 $a_n^{(i)}$

■ 则非齐次项 b_n 对应的特解为 $a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + ... + a_n^{(i)}$

例: 己知递推关系: a_n -a_{n-1}-6a_{n-2}=10•4ⁿ-7•3ⁿ, 求递推关系的解

- (1)齐次递推关系为 a_n - a_{n-1} -6 a_{n-2} =0 齐次特征方程为 x^2 -x-6=0 →特征根是-2, 3 齐次关系对应的通解为A(-2) n +B3 n
- (2)对应的特解形式为(4不是特征根, 3是特征根):
 a_n=C4ⁿ+(Dn)3ⁿ,

由递推关系得C=80/3,D=-21/5,故

特解为a_n=(80/3)ⁿ-(21/5)n3ⁿ

(3)非齐次关系对应的通解为

 $a_n = A(-2)^n + B3^n + (80/3)^n - (21/5)n3^n$

- 常系数线性非齐次递推关系的求解步骤
 - 1. 根据题意求递推关系
 - 2. 解对应齐次关系的特征方程
 - 3. 写出齐次关系的通解
 - 4. 找到非齐次关系的特解
 - 5. 代入递推公式得到特解中的系数
 - 6. 写出非齐次关系的通解表达式
 - 7. 根据初值确定通解中的系数
 - 8. 得出非齐次递推关系的通解