组合数学

冯卝松
fengjinsong@tongji.edu.cn

第3章 容斥原理与鸽巢原理

3.12 鸽巢原理

鸽巢原理：n个鸽子巢，若有n+1只鸽子在里面，则至少有一个巢里的鸽子数不少于2。

抽屉原理：如果把n+1个物体放到n个抽屉里，则必有一个抽屉里至少放了两个物体。

3.12 鸽巢原理

1、366个人中必然有至少两人生日相同(不包括闰年)；

2、抽屉里散放着10双手套，从中任意抽取11只，其中至少有两只是成双的；

3、某次会议有n位代表参加，每人认识其他n-1人中的至少一位。则至少有两个人认识的人数是一样的；

3.13 鸽巢原理举例

例　任取11个数，求证其中至少有两个数它们的差是10的倍数。

证明：

一个数是不是10的倍数取决于这个数的个位数是不是0，是0就是10的倍数；

一个数的个位数只可能是0, 1, . . . , 9十个数，任取11个数，其中必有两个数个位数相同，

那么这两个数的差的个位数必然是0。

3.13 鸽巢原理举例

例3-26 从1到2n的正整数中任取n+1个，则这n+1个数中至少有一对数，其中一个是另一个的倍数。

证明：设n+1个数是 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$。

每个数去掉一切2的因子，直至剩下一个奇数为止。组成序列 $r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}$。这n+1个数仍在［1，2n]中，且都是奇数。而[1，2n]中只有n个奇数。

故由鸽巢原理，必有 $r_i = r_j = r$，则 $a_i = 2^{\alpha i} r$，$a_j = 2^{\alpha j} r$

若αi＞αj，则 a_i 是 a_j 的倍数。

3.13 鸽巢原理举例

例3-27　设$a_1,a_2,\ldots,a_m$是正整数的序列，则至少存在整数k和L，$1\leqslant k\leqslant L\leqslant m$，使得和$a_k+a_{k+1}+\ldots+a_L$是m的倍数。

证明：构造一个和序列$s_1=a_1$

$$s_2=a_1+a_2$$

$$s_3=a_1+a_2+a_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$s_m=a_1+a_2+\ldots+a_m$$

则$s_1<s_2<\ldots<s_m$

令$s_h\equiv r_h \pmod{m}$，$0\le r_h\le m-1$，其中h=1, 2, 3, …, m。

3.13 鸽巢原理举例

有两种可能：

(1)取模得0，则有一个s_h是m的倍数，那么上式成立。

(2)取模不得0，则在上面的序列中没有任何一个元素是m的倍数，

$1 \le r_h \le m-1$, 其中h=1, 2, 3, ..., m。

由鸽巢原理，一定存在$r_L=r_k$。即s_L和s_k满足

$$s_k \equiv s_L \pmod{m}$$

3.13 鸽巢原理举例

设L>k。

$$s_L=a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}+\ldots+a_L$$

$$-)\ s_k=a_1+a_2+\ldots+a_k$$

$$s_L-s_k= a_{k+1}+\ldots+a_L$$

$s_L-s_k=0 \pmod m$

也就是说：$s_L-s_k= a_{k+1}+\ldots+a_L$是m倍数。

3.13 鸽巢原理举例

例3-30 设$a_1,a_2,\ldots,a_{100}$是由1和2组成的序列，已知从其中任意一个数开始的连续10个数的和不超过16，即对于1≤i≤91, 恒有$a_i+a_{i+1}+\ldots+a_{i+9}\leqslant 16$

则至少存在h和k，k>h, 使得

$$a_{h+1}+\ldots+a_k=39$$

证明：

构造和序列$s_1=a_1$, $s_2=a_1+a_2,\ldots$, $s_{100}=a_1+a_2+\ldots+a_{100}$。

由于每个a_i都是正整数，因此：

$s_1< s_2<\ldots< s_{100}$ （S一定是严格递增的）

$$s_{100}=(a_1+a_2+\ldots+a_{10})+(a_{11}+a_{12}+\ldots+a_{20})+\ldots+(a_{91}+a_{92}+\ldots+a_{100})$$

根据已知条件：$s_{100}\leq 10\times 16=160$

3.13 鸽巢原理举例

构造序列$s_1, s_2, \ldots, s_{100}, s_1+39, s_2+39, \ldots, s_{100}+39$, 共200项。

最后一项$s_{100}+39 \leqslant 160+39=199$。

但序列共200项。是从1到199的正整数。根据鸽巢原理，其中必有两项相等。因为前100项严格单调递增，后100项也严格单调递增。所以一项在序列前100项里，另一项在后100项里.

由鸽巢原理，一定存在h和k，有

$s_k=s_h+39, 1 \leqslant h, k \leqslant 100$

则：$s_k-s_h=39$

即：$a_1+a_2+\ldots+a_k-(a_1+a_2+\ldots+a_h)=39$也就是

$a_{h+1}+a_{h+2}+\ldots+a_k=39$

3.13 鸽巢原理举例

例3-31 X是9个不同正整数的集合，E是X的子集，S(E)是集合E的元素和。n是X的元素的最大值。

求n的值，使X至少存在两个集合A和B，使S(A)=S(B)。

解：

X的任意子集的元素之和小于X的所有子集的数目

设E是X的任意子集。

$S(E) \leqslant n+(n-1)+(n-2)+\ldots+(n-8)=9n-36$

也就是说X的任何子集的元素和都小于或等于9n-36

3.13 鸽巢原理举例

X的任何子集的元素和都小于或等于9n-36

X的非空子集的数目？

$C(9,1)+C(9,2)+\ldots+C(9,9)=2^9-1=511$

根据鸽巢原理，当非空子集数大于任意子集的元素和的个数时，必有两个子集的元素和相等。

$511>9n-36$

解这个不等式可得：$n<60.77$

n是正整数，因此$n\leq 60$

因此：$9\leqslant n\leqslant 60$。

***

3.14 鸽巢原理的推广

推广形式之一

设k和n都是任意的正整数，若至少有$kn+1$只鸽子分配在n个鸽巢里，则至少存在一个鸽巢中有不少于$k+1$只鸽子。

当$k=1$时，就是前面的鸽巢原理。

3.14 鸽巢原理的推广

推论1　m只鸽子，n个鸽巢，则至少有一个鸽巢里有不少于 $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ 只鸽子。

推论2　若取n(m-1)+1个球放进n个盒子，则至少有1个盒子的球数不少于m个。

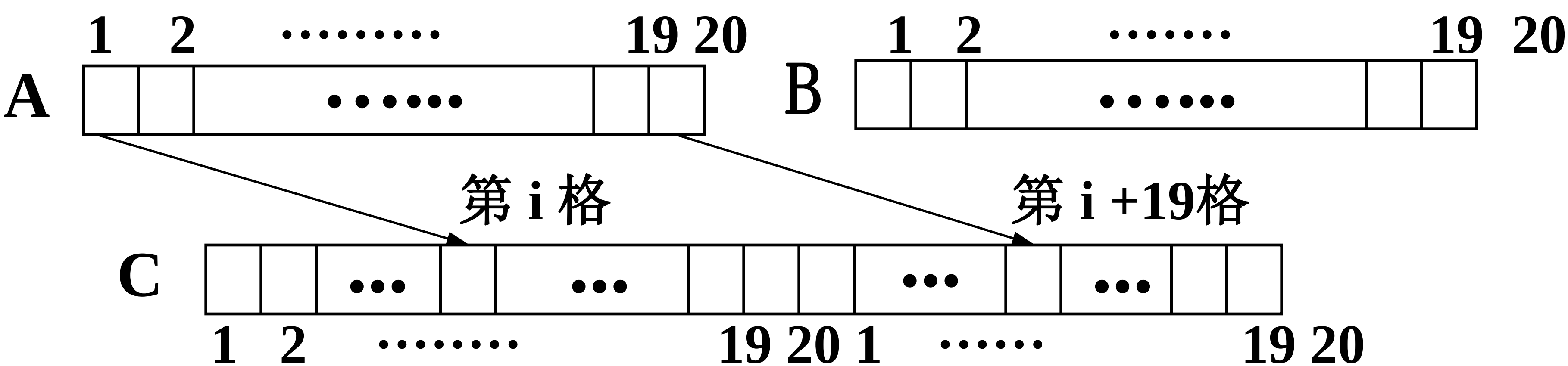
推论3　若$m_1, m_2, \ldots, m_n$是n个正整数，而且

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{n} > r - 1$$

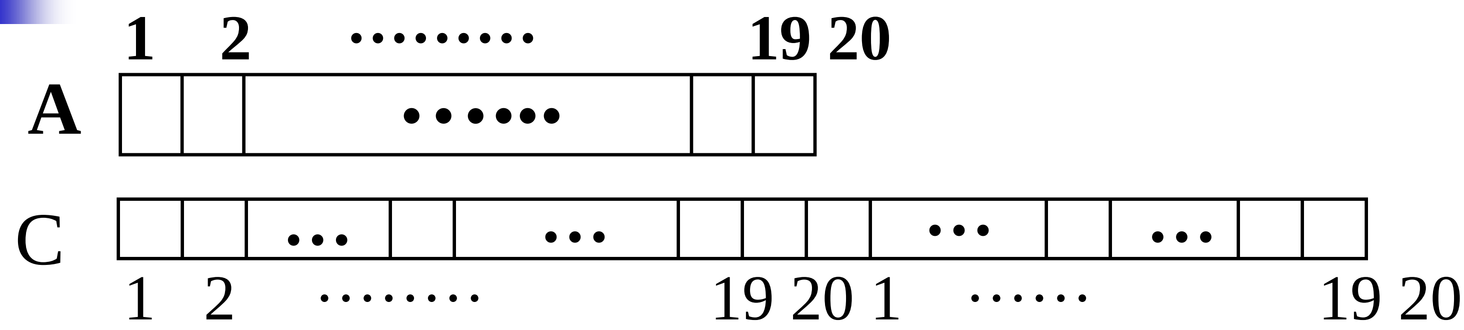
则$m_1, m_2, \ldots, m_n$中至少有1个数不小于r。

3.14 鸽巢原理的推广

例3-32：设A= $a_1a_2\cdots a_{20}$是10个0和10个1组成的20位二进制数。B=$b_1b_2\cdots b_{20}$是任意的20位2进制数。C=$b_1b_2\cdots b_{20}b_1b_2\cdots b_{20}$= $C_1C_2\cdots C_{40}$, 则存在某个i, 1≤i≤21, 使得$C_iC_{i+1}\cdots C_{i+19}$与$a_1a_2\cdots a_{20}$至少有10位对应数字相同。



3.14 鸽巢原理的推广



1、假想着A如图所示从左向右一格一格移动。

2、在移动到最后时。每一个b_j都遍历了$a_1,a_2,\ldots,a_{20}$。因为A中有10个0和10个1，每一个b_j都有10位次对应相等。

3、在20次的移动过程中共有10×20=200位次对应相等。平均每次有相同数字的格数应是200/20=10.

4、因此必有一次相同数字的格数不少于10位

3.14 鸽巢原理的推广

例：随意地给正十边形的10个顶点编上号码1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 求证：必有一个顶点及与之相邻的两顶点之和不小于17。

证明：以$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$表示正十边形的10个顶点，

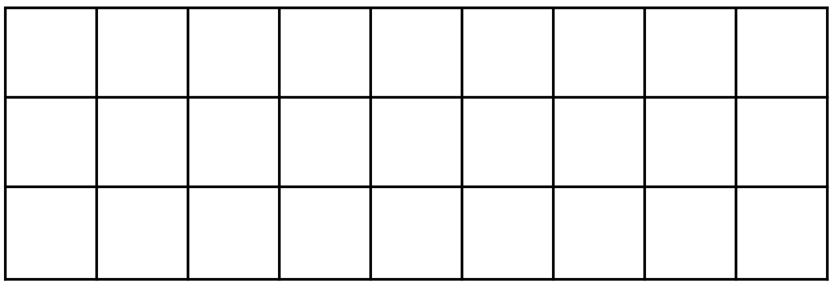
以q_i表示顶点A_i与A_i相邻的两顶点号码之和

求$\Sigma q_i = (1+2+\ldots+10)\times 3=165$

因此根据鸽巢原理推论3，必存在$q_i \geq 17$

3.14 鸽巢原理的推广

例：下图中画出了3行9列共27个小方格，将每一个方格涂上红色或者蓝色，证明：无论如何涂色，其中必有至少两列它们的涂色方式完全相同。



解：每个方格的涂色方案有红和蓝2种，每列有3个格子，因此每列有：

2×2×2=8种涂色方案。

现在有9列，根据鸽巢原理，必有至少两列它们的涂色方式完全相同。

3.14 鸽巢原理的推广

例：能否在一个n×n的棋盘的每个方格填上1, 2或3，使得棋盘上各行各列以及对角线上的数字之和都不相等。

解：棋盘上各行各列以及对角线上的数字之和，共有2n+2个数。

从1, 2或3中取n个数，

从1, 2或3中取n个数，最大和值是3n, 最小和值是n, n和3n之间共有2n+1个不同的数值。

答案是否定的。

3.14 鸽巢原理的推广

3.14.3 推广形式之二

定理3-8 设有$p_1+p_2+\ldots+p_n-n+1$只鸽子，有标号分别为：1, 2, …, n的鸽巢，则存在至少一个标号为j的鸽巢至少有p_j只鸽子，j=1, 2, …, n。

证明：（反证法）第1个鸽巢最多有p_1-1只鸽子，

第2个鸽巢最多有p_2-1只鸽子，

.....

第n个鸽巢最多有p_n-1只鸽子

鸽子总数＝ $(p_1-1)+(p_2-1)+\ldots+(p_n-1)$

$= p_1+p_2+\ldots+p_n-n$

与假设矛盾

3.15 Ramsey 数

一对常数a和b，对应于一个整数r，使得r个人或a个人互相认识，或有b个互不认识；（或有a个人互不认识，或有b个人互相认识，）这个数r的最小值用R(a,b)来表示。

称作Ramsey数

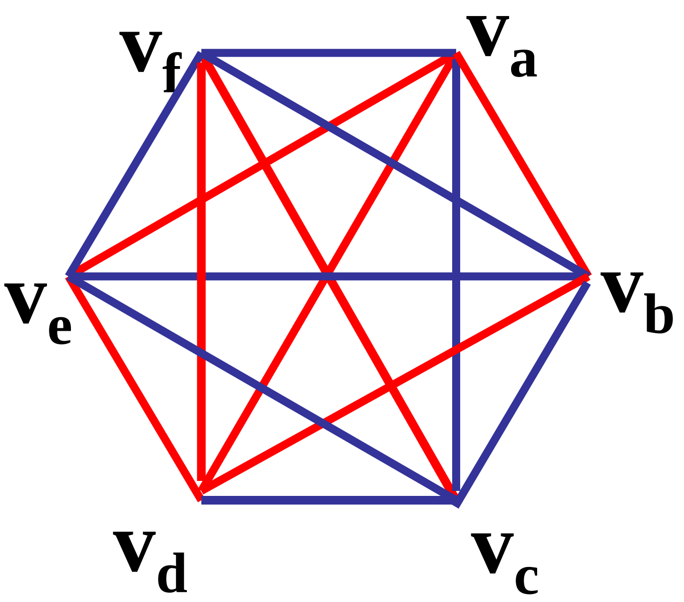
R(3,3)=6，R(3,4)=9,R(4,4)=18

3.15 Ramsey 数

例3-38　试证6个人在一起，其中至少存在3个人或互相认识，或互相不认识。

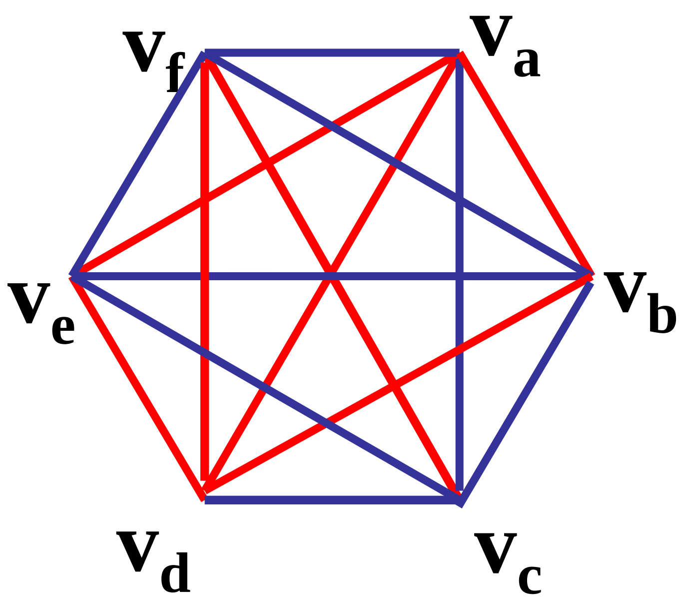
6个人设为A, B, C, D, E, F, 分别用6个顶点 $v_a, v_b, v_c, v_d, v_e, v_f$ 表示，过此6个顶点作完全图，互相认识的两个人，对应顶点的连线着红色。

互相不认识的两个人对应的顶点联线着蓝色。



3.15 Ramsey 数

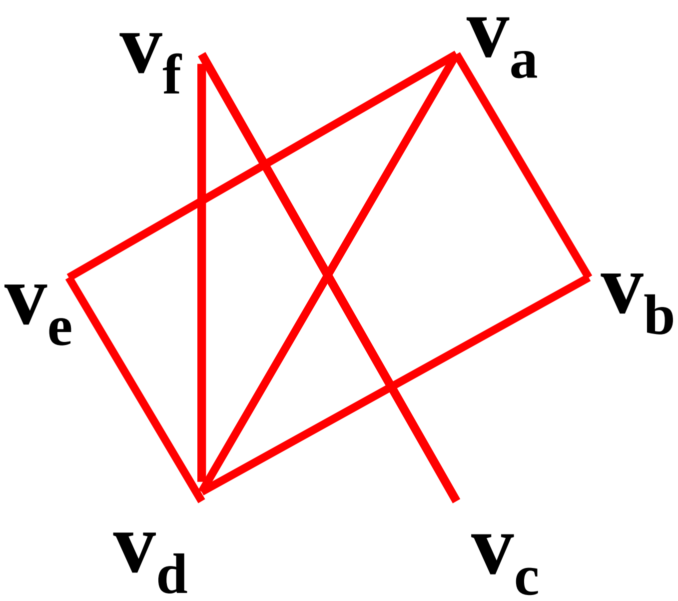
问题等价于证明这6个顶点的完全图的边，用红、蓝二色任意着色，必然至少存在一个红色边三角形，或者存在一个蓝色边三角形。



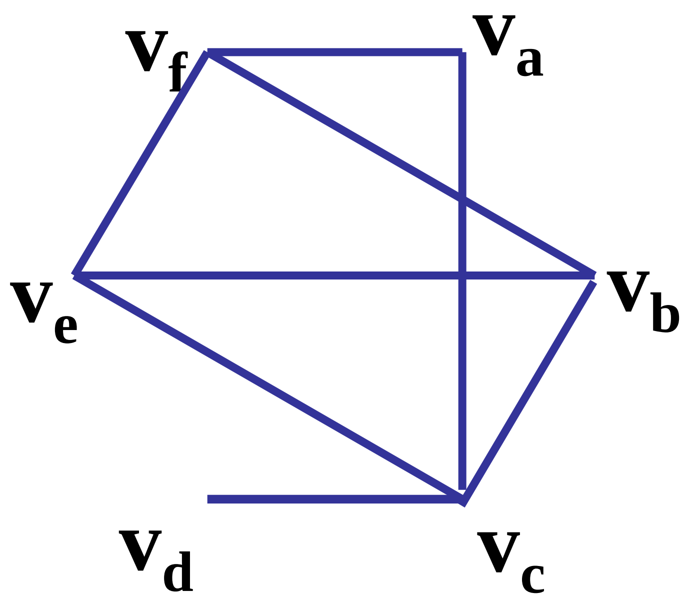
3.15 Ramsey 数

在图论中经常用补图的概念来表述：

6个顶点的图G中要么有一个三角形，要么图G的补图中有一个三角形。



图G

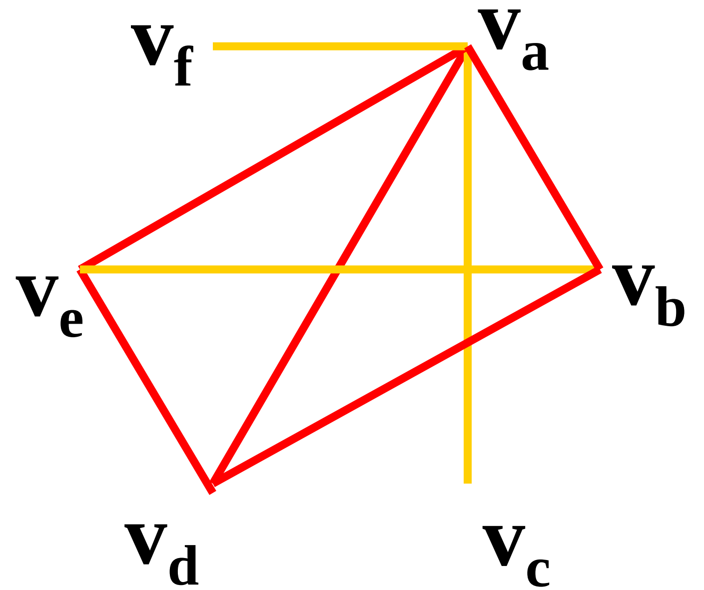


图G的补图

3.15 Ramsey 数

Va点和其他5个顶点相连有5条边，每条边或着以红色，或着以蓝色。依据鸽巢原理，其中至少有3条边同色，不妨假定有3条边着以红色，

3条边的另外3个端点设为v_e, v_d, v_b。



这3个端点间的联线或同色或不同色，

若同色。则已存在一个同色三角形，如果不同色，则至少有一条边是红色，

3.15 Ramsey 数

对于A以外的5个人可分为Friend和Strange两个集合。

Friend=其余5人中与A互相认识的集合;

Strange=其余5人中与A不认识的人的集合;

依据鸽巢原理，Friend和Strange中有一个集合至少有3个人，首先假设是集合friend。

Friend中所有人若是彼此互相不认识，则问题已得到证明，

否则有两个人互相认识，不妨设这两个人是P和Q，则A，P，Q这3个人彼此认识。

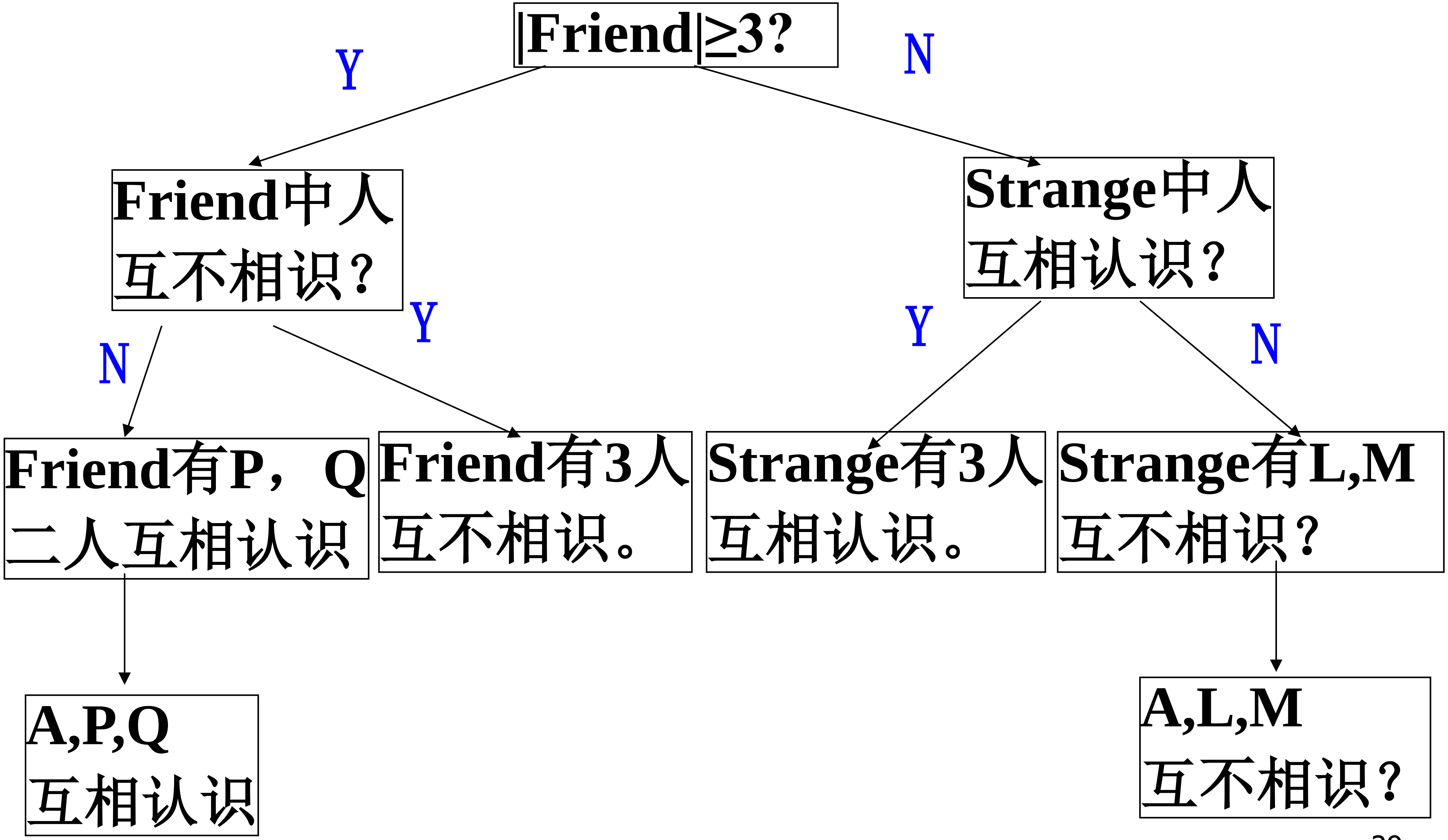
3.15 Ramsey 数

若是Strange至少有3个人,可以同样讨论如下:

若Strange中所有人彼此互相认识,则问题的条件已得到满足,

否则设L和M互不相识，则A,L,M互不相识。

推理过程如下：A以外的5个人



作业

- 3.1
- 3.6
- 3.14
- 3.22
- 3.32
- 3.47
- 3.61
- 3.65
- 3.73