1.6 允许重复的组合与不相邻的组合

例：从**{1，2，3}**中取**2**个不重复的组合是哪些？

{1，2}，{1，3}，{2，3}

例：从**{1，2，3}**中取**2**个允许重复的组合是哪些？

{1，1}，{1，2}，{1，3}，{2，2}，{2，3}，{3，3}

1.6 允许重复的组合与不相邻的组合

定理1-2：在n个不同元素中取r个作允许重复的组合，其组合数为C（n+r-1，r）。

证：设n个不同的元素为1，2，3，..., n

- 若$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$是一个从n中取r个允许重复的组合，不妨设$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_r$，可构造一个不允许重复的r组合$\{a_1, a_2+1, a_3+2, \ldots, a_r+r-1\}$，且$a_r+r-1 \le n+r-1$。这就证明每一个1到n取r个作允许重复的组合，对应一个从1到n+r-1中取r个作不重复的组合。
- 反之给定一个1到n+r-1中做不允许重复的r组合$\{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$，可以得到一个1到n中取允许重复的r组合$\{b_1, b_2-1, b_3-2, \ldots, b_r-r+1\}$，令$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2-1, \ldots a_r = b_r-r+1$,于是有$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_r \le n$.
- 故n个元素的允许重复的r组合与n+r-1个元素上的不允许重复的r组合之间有一一对应关系，它们的组合数相同，得证。

1.6 允许重复的组合与不相邻的组合

定理1-2：在n个不同元素中取r个作允许重复的组合，其组合数为C（n+r-1，r）。

另证：设S={$x_1a_1,x_2a_2,\ldots,x_na_n$}，S集合的r-组合满足 $x_1+x_2+\ldots+x_n = r$。现求组合数问题就可以转换为求 $x_1+x_2+\ldots+x_n = r$的非负整数解的个数。

求非负整数解个数的问题还可以转化成求重复集合T={r•1,(n-1)*}的排列的个数。

给定T的一个排列 11…1*11…1*11…1*…*11…1

第一个*之前有x_1个1。以此类推，最后一个*之后有x_n个1

有定理知这个排列的格式是$\binom{n-1+r}{r}$，定理得证。

1.6 允许重复的组合与不相邻的组合

例：某糕点厂生产8种点心。如果一盒内装一打点心，那么能买到多少种不同的盒装点心？

解：假设糕点厂可提供的各种点心数量是无穷的。那么不同盒装的数量就等于8种元素的重复组合成12的组合数。这个组合数是$C(8+12-1,12)$，即$C(19,12)$

例：若$x_1\geq 3$，$x_2\geq 1$，$x_3\geq 0$，$x_4\geq 5$，$x_1+x_2+x_3+x_4=20$的非负整数解的个数是多少？

解：引入新的变量$y_1=x_1-3$, $y_2=x_2-1$, $y_3=x_3$, $y_4=x_4-5$, 则$y_1+y_2+y_3+y_4=11$，所以答案是$C(4+11-1,11)=C(14,11)$

1.6 允许重复的组合与不相邻的组合

例：某糕点厂生产8种点心。如果一盒内装一打点心，而且盒中包含每种点心至少一个，那么能个买到多少种不同的盒装点心？

解： 该问题等价于方程$x_1+x_2+\ldots+x_8=12$的整数解的个数，其中$x_1\geq 1$，$x_2\geq 1$，…，$x_8\geq 1$，

这个组合数是$C(4+8-1,4)$，即$C(11,4)$

1.6 允许重复的组合与不相邻的组合

例1-29：试问$(x + y + z)^4$有多少项？

解1：$(x+y+z)^4 = (x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$

相当于将4个不同的球放到3个不同的盒子(x,y,z)里。第一个球可以放第一个盒子，或者放第二个盒子，或者放第三个盒子。同样的，第二个球，第三个球，第四个球都可以这样放。。。

问题等价于从3个元素里取4个作允许重复的组合。这个组合数是$C(3+4-1,4)$，故展开项个数为$C(3+4-1,4)=15$

1.6 允许重复的组合与不相邻的组合

例1-29：试问$(x + y + z)^4$有多少项？

解2： $(x+y+z)^4 = (x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)(x+y+z)$

$(x+y+z)^4$展开式每一项幂次的和都是4次方的，令每一项的格式为$x^a y^b z^c$，则有$a+b+c=4$

问题等价于求$a+b+c=4$的非负整数解的个数。

这个组合数是$C(3+4-1,4)$，故展开项个数为$C(3+4-1,4)=15$

1.6 允许重复的组合与不相邻的组合

定理1-3： 从A={1,2,3,…,n}中取r个作不相邻的组合，其组合数为C(n-r+1,r)=$\binom{n-r+1}{r}$

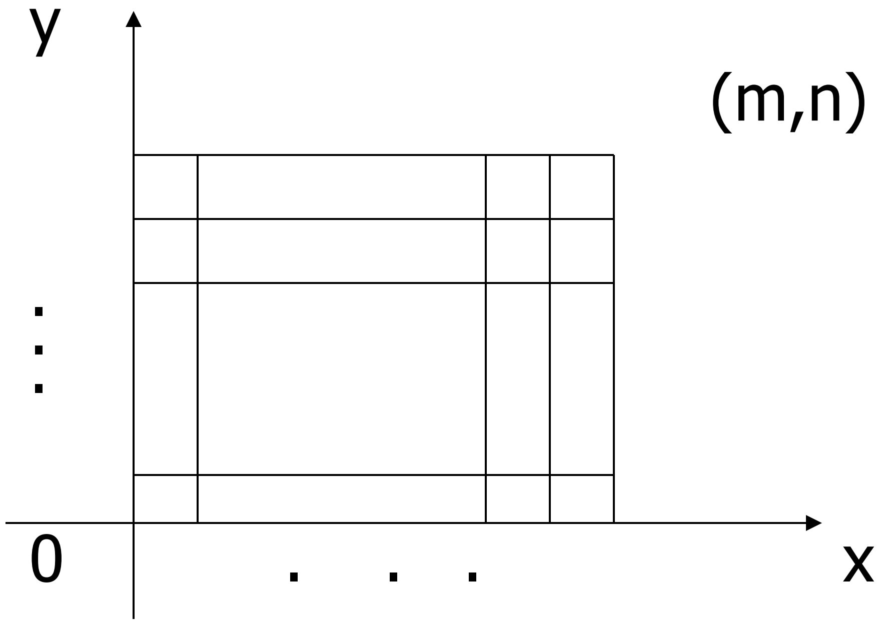
例：从A={1,2,3,4,5,6,7}中取3个不相邻的数做组合，有C(7-3+1,3)=10个

{1,3,5}，{1,3,6}，{1,3,7}，{1,4,6}，
{1,4,7}，{1,5,7}，{2,4,6}，{2,4,7}，
{2,5,7}，{3,5,7}

1.7 组合意义的解释

例1-30 路径数问题 $|(0,0)\rightarrow(m,n)|=\binom{m+n}{m}$

从 (0,0)点出发沿x轴或y轴的正方向每步走一个单位，最终要走到(m,n)点，有多少条路径？



规定：不允许向下走，向左走，就是不允许走回头路

1.7 组合意义的解释

无论怎样走法，在x方向上总共走m步，在y方向上总共走n步。

若用一个字母x表示在x方向上的一步，用一个字母y表示在y方向上的一步.则(0,0) -> (m,n)的每一条路径可以表示为m个x与n个y的一个排列。在m+n个元素中取m个就是$\binom{m+n}{m}$，再在剩下的n个元素中取n个就是$\binom{n}{n}$。根据乘法法则，路径数是$\binom{m+n}{m}\binom{n}{n}$

1.7 组合意义的解释

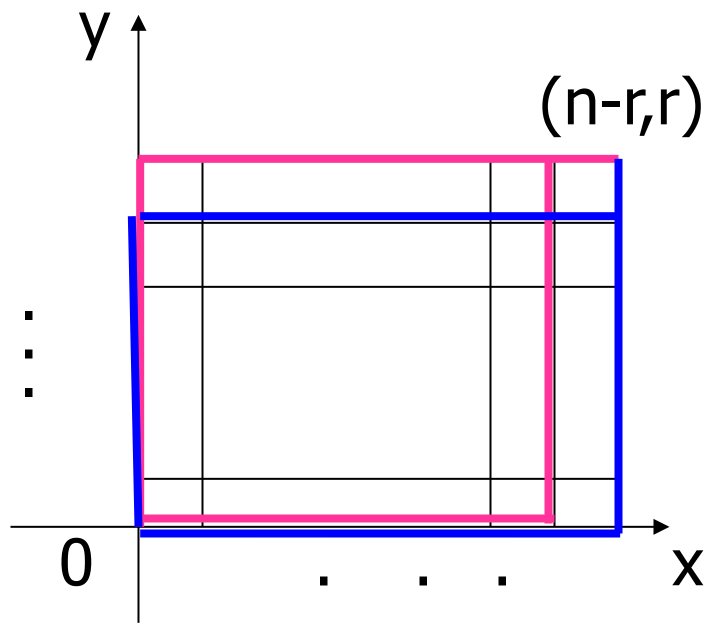
例1-31 证明$\binom{m+n}{m}=\binom{m+n}{n}$或$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

在m+n个格上选m个格子，剩下的格子为n个。先将m个格填x，再将n个格子填上y，构成长为m+n，由m个x和n个y构成的序列，这个序列和由m+n个格上选n个格子填上y ，剩下m个格子填上x的情况一一对应，故$\binom{m+n}{m}=\binom{m+n}{n}$

令m+n = n′，m=r，n=n′-r，即得$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

1.7 组合意义的解释

例1-32 $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$



证1： $\binom{n}{r}$是$(0,0)$点到$(n-r,r)$点的路径数

$\binom{n-1}{r}$是$(0,0)$点到$(n-r-1,r)$点的路径数

$\binom{n-1}{r-1}$是$(0,0)$点到$(n-r,r-1)$点的路径数

1.7 组合意义的解释

例1-32 $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$

证2：从n个不同的元素a_1, a_2, …, a_n中取r个元素，分成两类：

1) 组合中含有a_1，那么从剩下的n-1个元素中取r-1个元素。
共C(n-1, r-1)种。

2)组合中不含a_1，那么从剩下的n-1个元素中取r个元素。
共C(n-1, r)种。

由加法法则知：$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$

1.7 组合意义的解释

Pascal三角 （杨辉三角）

- n=0 1
- n=1 1 1
- n=2 1 2 1
- n=3 1 3 3 1

r=0

C(0,0) r=1

C(1,0) C(1,1)

C(2,0) C(2,1) C(2,2)

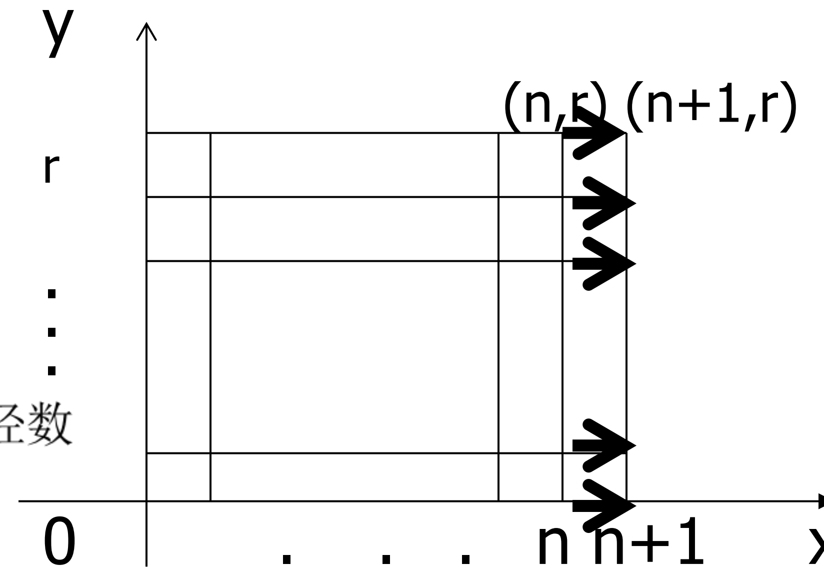
C(3,0) C(3,1) C(3,2) C(3,3)

第n行是二项式（x+y）^{n}展开式的系数

1.7 组合意义的解释

例1-33 $\binom{n+r+1}{r}=$

$$\binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\binom{n+r-2}{r-2}+\ldots+\binom{n}{0}$$



$\binom{n+r+1}{r}$是$(0,0)$点到$(n+1,r)$点的路径数

$\binom{n+r}{r}$是$(0,0)$点到(n,r)点的路径数

…

$\binom{n}{0}$是$(0,0)$点到$(n,0)$点的路径数

1.7 组合意义的解释

例1-33 $\binom{n+r+1}{r}=$

$\binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\binom{n+r-2}{r-2}+\ldots+\binom{n}{0}$

解：分成n个子路径

- 经(n,r)点
  - 从原点(0,0)到(n,r)点的路径数为C(n+r, r);
  - 从经(n,r)点到(n+1,r)点的路径数为1;
  - 根据乘法法则得经(n,r)点的路径数为C(n+r, r);
- 经(n,r-1)点
  - 路径数为C(n+r-1, r-1);
- …
- 经(n,0)点
  - 路径数为C(n, 0);

根据加法法则共有C(n+r, r)+C(n+r-1, r-1)+C(n+r-2, r-2)+…+C(n, 0)=C(n+r+1, r)

1.7 组合意义的解释

例1-33 $\binom{n+r+1}{r}=$

$$\binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\binom{n+r-2}{r-2}+\ldots+\binom{n}{0}$$

根据$\binom{n+r}{n}=\binom{n+r}{r}$，进行逐项替换，也可以得另一公式

$$\binom{n+r+1}{r}=\binom{n+r}{n}+\binom{n+r-1}{n}+\binom{n+r-2}{n}+\ldots+\binom{n+1}{n}+\binom{n}{n}$$

1.7 组合意义的解释

例：求和$S=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n\cdot(n+1)$

解：$S=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n\cdot(n+1)$

$=2[1+2\cdot3/2+3\cdot4/2+\ldots+n\cdot(n+1)/2]$

$=2[C(2,2)+C(3,2)+\ldots+C(n+1,2)]$

利用公式

$$\binom{n+r+1}{r}=\binom{n+r}{n}+\binom{n+r-1}{n}+\binom{n+r-2}{n}+\ldots+\binom{n+1}{n}+\binom{n}{n}$$

上式$=2C(n+2,n-1)$

$=2C(n+2,3)$

$=(n+2)(n+1)n/3$

1.7 组合意义的解释

例： $mn=\binom{m+n}{2}-\binom{m}{2}-\binom{n}{2}$

组合意义：有m个男生和n个女生。一男一女的组合共有mn种。

m+n个人中两个人的组合数有C(m+n,2)。

两个男生的组合数有C(m,2)。

两个女生的组合数有C(n,2)。

一男一女的组合数有C(m+n,2)- C(m,2) -C(n,2)

1.7 组合意义的解释

例1-35 $\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\ldots+\binom{m}{m}=2^m$

证：由二项式定理

$(x+y)^m=\binom{m}{0}x^m+\binom{m}{1}x^{m-1}y+\binom{m}{2}x^{m-2}y^2+\ldots+\binom{m}{m}y^m$

看作m个无区别的球放入两个有标志（x和y）的盒子

令x=y=1，得

$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\ldots\binom{m}{m}=2^m$

左式说明所有状态分解为：m个球中x盒分别装0个，1个，…，m个的组合的总合。

右式说明对x盒子来说，每次都有两个选择：放进和不放进，故总共是2^m。

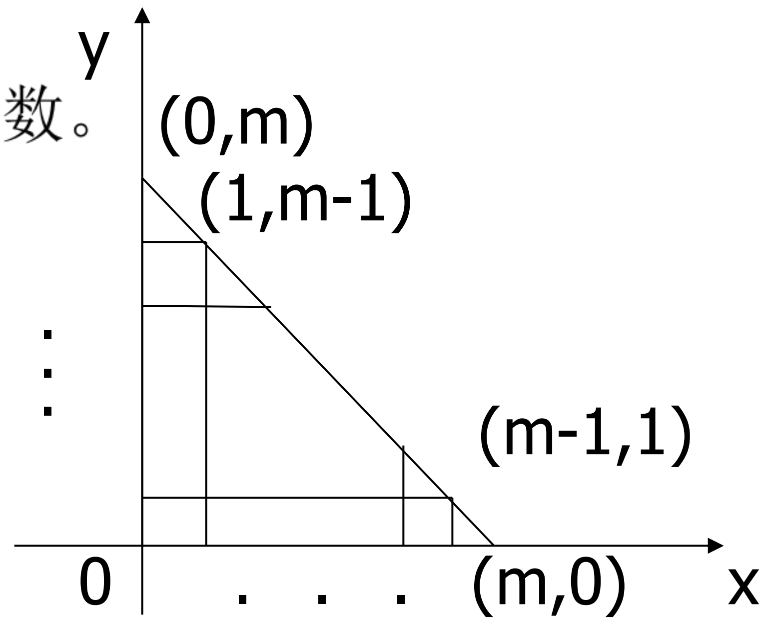
1.7 组合意义的解释

例1-35 $\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\ldots+\binom{m}{m}=2^m$

证2：$\binom{m}{0}$是(0,0)点到$(m,0)$点的路径数，
$\binom{m}{1}$是(0,0)点到$(m-1,1)$点的路径数，

…

$\binom{m}{m}$是(0,0)点到$(0,m)$点的路径数。



1.7 组合意义的解释

例1-36 $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots\pm\binom{n}{n}=0$

证：有二项式定理

$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n}y^n$

令x=1，y=-1代入，等式即得证明。

组合意义：从n个元素中取出偶数个数的组合数（包含0），等于取出奇数个数的组合数。

1.7 组合意义的解释

例1-37 $\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$

解：共有m+n个球，其中m个红球，n个篮球

- 从m+n个球中取r个球的组合是$\binom{m+n}{r}$
- 以上的组合可以分成以下几类
  - r个球中，有0个红球，r个篮球，共有$\binom{m}{0}\binom{n}{r}$;
  - r个球中，有1个红球，r-1个篮球，共有$\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}$;
  - …
  - r个球中，有r个红球，0个篮球，共有$\binom{m}{r}\binom{n}{0}$

1.7 组合意义的解释

例1-38 $\binom{m+n}{m}=\binom{m}{m}\binom{n}{0}+\binom{m}{m-1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{0}\binom{n}{m}$

其中m≤n

解：由1-37公式

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

设m=r，以上的公式即为

$$\binom{m+n}{m}=\binom{m}{0}\binom{n}{m}+\binom{m}{1}\binom{n}{m-1}+\cdots+\binom{m}{m-1}\binom{n}{1}+\binom{m}{m}\binom{n}{0}$$

由$\binom{m}{l}=\binom{m}{m-l}$，得本公式。

1.7 组合意义的解释

例1-39 $\binom{n+1}{r+1}=\binom{n}{r}+\binom{n-1}{r}+\cdots+\binom{r+1}{r}+\binom{r}{r}$

证明：由组合式公式可得$\binom{r-1}{r-1}=\binom{r}{r}=1$

把中的C(r+1,r+1)换作C(r,r)，这时只需反复运用公式

C(n, r) = C(n-1, r) + C(n-1, r-1)。

右式$=\binom{n}{r}+\binom{n-1}{r}+\cdots+\binom{r+1}{r}+\binom{r}{r}$

$\binom{r+1}{r}+\binom{r+1}{r+1}$

$\binom{r+2}{r}+\binom{r+2}{r+1}$

$\cdots$

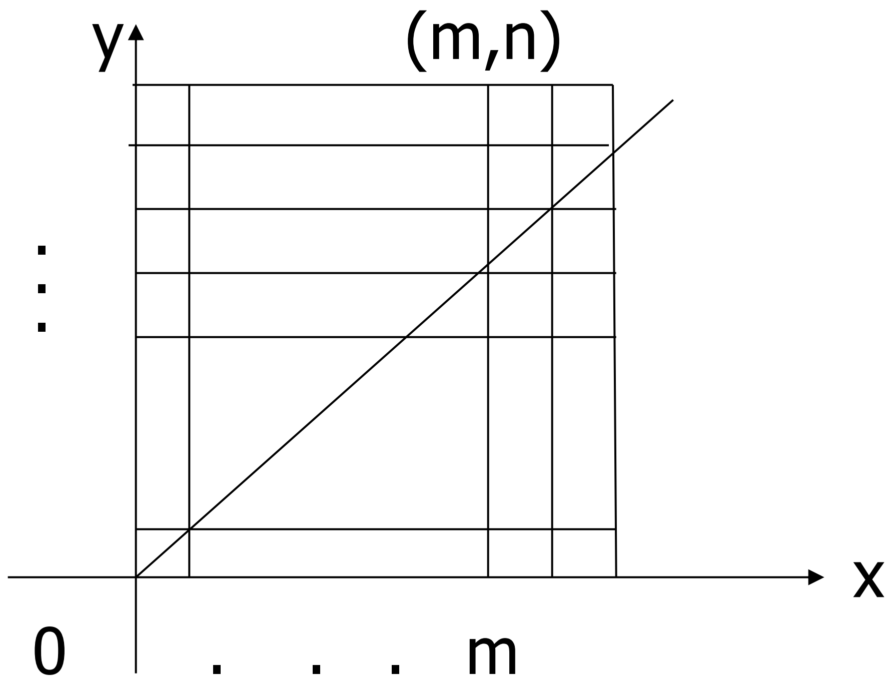
$\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r+1}$

$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}$

$=\binom{n+1}{r+1}=$左式

1.8 应用举例

例1-44 从(0,0)点到达(m,n)点，其中m<n，要求中间所有经过的路径上的点(a,b)恒满足a<b。问有多少不同的路径？



1.9 Stirling公式

- 组合计数的渐进值问题是组合论的一个研究方向。
- Stirling公式给出一个求n!的近似公式，它对从事计算和理论分析都是有意义的。

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

作业

- 1.2
- 1.5
- 1.11
- 1.22
- 1.25
- 1.27
- 1.45
- 1.52