组合数学

冯巾松
fengjinsong@tongji.edu.cn

第3章 容斥原理与鸽巢原理

3.1 De Morgan定理

德摩根(De Morgan)定理:

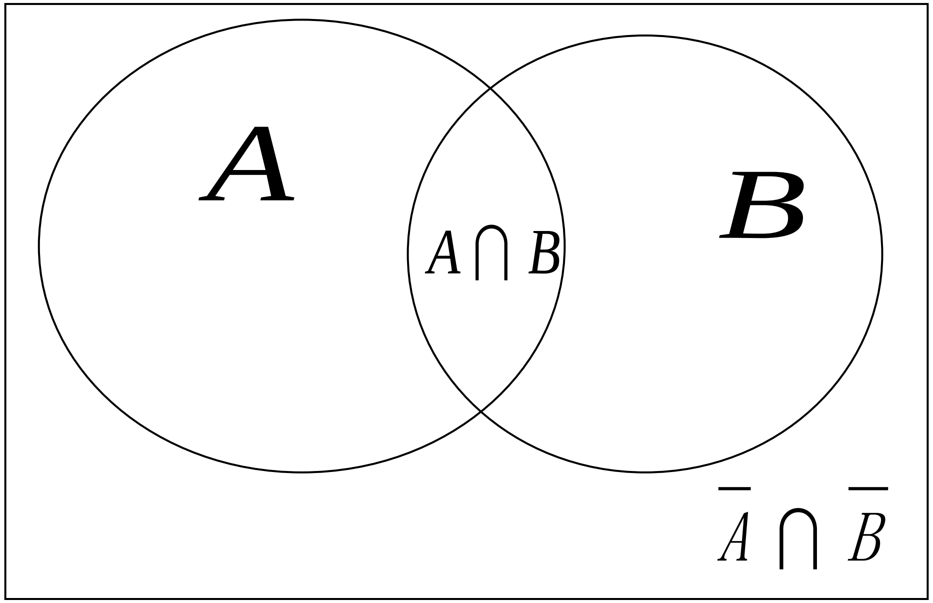
若A和B是集合U的子集，则

$$(a)\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$(b)\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

3.1 De Morgan定理

利用图形可以直观的看出德摩根定理



3.1 De Morgan定理

德摩根(De Morgan)定理的推广：

设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是U的子集，则：

$$(a)\ \overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$$

$$(b)\ \overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$$

证明可以采用数学归纳法，略

3.2 容斥原理

容斥原理的两个基本公式

加法法则是指：

$A \cap B = \varnothing$

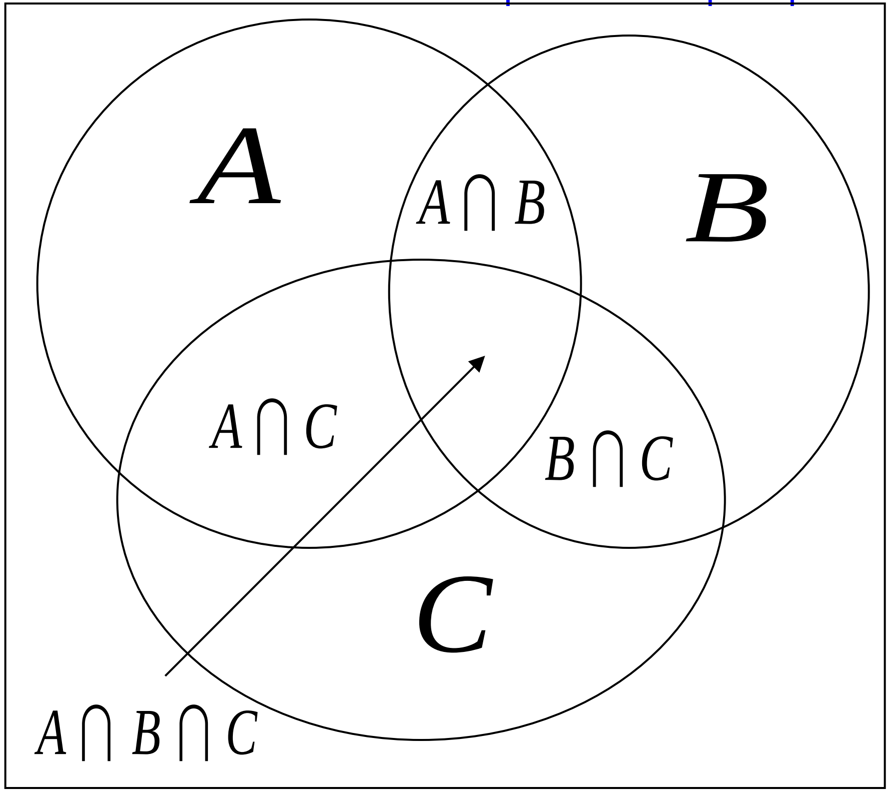
$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

如果 $A \cap B \neq \varnothing$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

3.2 容斥原理

定理3-1 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



3.2 容斥原理

定理3.1 $|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|$
$-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

证明： $|A\cup B\cup C|=|(A\cup B)\cup C|$

$=|A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C|$

$=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|\ -|(A\cup B)\cap C|$

根据：

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$|(A\cup B)\cap C|=|(A\cap C)\cup(B\cap C)|=|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

3.2 容斥原理

例3-2：一个学校只有数学，物理，化学3门课 。已知修这3门课的学生人数分别有170,130,120人；同时修数学、物理两门课的学生有45人；同时修数学、化学的有20人；同时修物理、化学的有22人；同时修三门课的学生有3人，问这个学校共有多少学生？

解：令M为修数学课的学生集合；P为修物理课的学生集合；C为修化学课的学生集合，按照已知条件：

$$|M|=170,|P|=130,|C|=120$$

$$|M\cap P|=45,|M\cap C|=20,|P\cap C|=22$$

$$|M\cap P\cap C|=3$$

3.2 容斥原理

学校的学生数为

$$= |M| + |P| + |C| - |M \cap P| - |M \cap C|$$

$$- |P \cap C| + |M \cap P \cap C|$$

=170+130+120-45-20-22+3

=336

3.2 容斥原理

定理3-2　设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是有限集合，则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i \cap A_j|$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{h>j}|A_i \cap A_j \cap A_h| - \ldots$$

$$+(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

3.2 容斥原理

设N为全集U的元素个数，那么不属于A的元素数目等于集合的全体减去属于A的元素个数。记作：

$$\left|\overline{A}\right| = N - |A|$$

按照德摩根定理

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}$$

3.2 容斥原理

$$
\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right| = \left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}\right|
$$

$$
= N - \left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right|
$$

$$
= N - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j|
$$

$$
- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{h>j} |A_i \cap A_j \cap A_h| + \ldots
$$

$$
+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|
$$

3.2 容斥原理

容斥原理的两种形式:

形式1:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{h>j} |A_i \cap A_j \cap A_h| - \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

3.2 容斥原理

形式2:

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right|=$$

$$=N-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{h>j}|A_i\cap A_j\cap A_h|+\ldots$$

$$+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

3.3 容斥原理举例

例3-4　求a, b, c, d, e, f这6个字母的全排列中不允许出现ace和df图像的排列数。

解：设A_1为出现ace图像的排列集，A_2为出现df图像的排列集。

$$N=6!,\ |A_1|=4!,\ |A_2|=5!\ |A_1\cap A_2|=3!$$

不允许出现ace和df的排列数为：

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|=N-(|A_1|+|A_2|)+|A_1\cap A_2|$$

$$=6!-(5!+4!)+3!=582$$

3.3 容斥原理举例

例3-5　求由a, b, c, d这4个字符构成的n位符号串中，a, b, c都至少出现一次的符号串的数目。

解(用指数型母函数)

$$G_e(x) = (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^3(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots)$$

$$= (e^x - 1)^3 e^x$$

$$= (e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1)e^x$$

$$= e^{4x} - 3e^{3x} + 3e^{2x} + e^x$$

$$a_n = 4^n - 3\times 3^n + 3\times 2^n + 1$$

3.3 容斥原理举例

例3-5　求由a, b, c, d这4个字符构成的n位符号串中，a, b, c都至少出现一次的符号串的数目。

解(用容斥原理)

设A为n位符号中不出现a符号的集合。

设B, C分别为n位符号中不出现b, c符号的集合。

不加限制的n位符号串的个数应是4^n个。

3.3 容斥原理举例

$$N = 4^n$$

$$|A| = |B| = |C| = 3^n$$

$$|A \cap B| = 2^n, |A \cap C| = 2^n, |B \cap C| = 2^n$$

$$|A \cap B \cap C| = 1$$

a至少出现一次的集合是$\overline{A}$

b至少出现一次的集合是$\overline{B}$

c至少出现一次的集合是$\overline{C}$

a, b, c至少出现一次的集合是$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

3.3 容斥原理举例

$$\left|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right| = 4^n - (|A|+|B|+|C|)$$
$$+(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)$$
$$-|A\cap B\cap C|$$

$$= 4^n - 3\times 3^n + 3\times 2^n - 1$$

3.3 容斥原理举例

例　N={1, 2, ..., 500}, 求N中至少能被2, 3, 5其中之一除尽的数的数目。

N中被k除尽的数的数目为： $\left\lfloor \frac{500}{k} \right\rfloor$

N中能被a, b同时除尽的数的数目：

设m为a, b的最小公倍数。

$$\left\lfloor \frac{500}{m} \right\rfloor$$

3.3 容斥原理举例

解：

设A_1, A_2, A_3分别表示N中为2, 3, 5的倍数的集合。

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{500}{2} \right\rfloor = 250 \quad |A_2| = \left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor = 166 \quad |A_3| = \left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor = 100$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{500}{2 \times 3} \right\rfloor = 83 \quad |A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{500}{2 \times 5} \right\rfloor = 50$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{500}{3 \times 5} \right\rfloor = 33$$

3.3 容斥原理举例

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{500}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 16$$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 250 + 166 + 100 - 83 - 50 - 33 + 16 \\ &= 366\end{aligned}$$

3.3 容斥原理举例

例3-6　求不超过120的素数的个数。

解： $P = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}, p_i$为质数$, i = 1,2,\ldots,k$

因为11^2=121, 因此不超过120的合数的质因子必然有小于11的质数，也就是不超过120的合数至少是2, 3, 5, 7中之一的倍数，

3.3 容斥原理举例

设A_i为不超过120的数同时又是i的倍数的集合，i=2, 3, 5, 7.

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor = 60 \qquad |A_3| = \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor = 40$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor = 24 \qquad |A_7| = \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = 17$$

3.3 容斥原理举例

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3} \right\rfloor = 20 \qquad |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 5} \right\rfloor = 12$$

$$|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 7} \right\rfloor = 8 \qquad |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{3\times 5} \right\rfloor = 8$$

$$|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{3\times 7} \right\rfloor = 5 \qquad |A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{5\times 7} \right\rfloor = 3$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3\times 5} \right\rfloor = 4 \qquad |A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3\times 7} \right\rfloor = 2$$

$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 5\times 7} \right\rfloor = 1 \qquad |A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{3\times 5\times 7} \right\rfloor = 1$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3\times 5\times 7} \right\rfloor = 0$$

3.3 容斥原理举例

$$\left|\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_7}\right| = 120-|A_2|-|A_3|-|A_5|-|A_7|$$

$$+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_5|+|A_2\cap A_7|+|A_3\cap A_5|+|A_3\cap A_7|+|A_5\cap A_7|$$

$$-|A_2\cap A_3\cap A_5|-|A_2\cap A_3\cap A_7|-|A_2\cap A_5\cap A_7|-|A_3\cap A_5\cap A_7|$$

$$+|A_2\cap A_3\cap A_5\cap A_7|$$

$$=120-(60+40+24+17)+(20+12+8+8+5+3)$$

$$-(4+2+1+1)=27$$

注意：27包括了1这个非素数，另外2, 3, 5, 7本身是素数没有计算在内，因此满足要求的素数是27+4−1=30个。

3.3 容斥原理举例

错排问题:n个有序的元素应该有n!个不同的排列。若一个排列使得所有的元素都不在原来的位置上，则称这个排列为错排，也叫重排。

1,2的错排是唯一的,即21

1,2,3的错排有312,231。

1,2,3,4的错排有4312,4123,4312,
3412,3421,2413,
2143,3142,2341。

4和1、2、3互换位置，
其余两个再错排

4和231互换位置

3.3 容斥原理举例

对于1,2,…,n，设n个数的错排数为D_n

1、与D_{n-1}的关系：

任取其中一个数i, 除数i以外的n-1个数进行错排，然后n与其中每一个数互换得到$(n-1)D_{n-1}$个错排。

2、与D_{n-2}的关系：

任取其中一个数i，数i分别与其它的n-1个数之一互换，其余n-2个数进行错排，共得$(n-1)D_{n-2}$个错排。

综合以上分析得到递推关系：

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}), D_1 = 0, D_2 = 1$$

3.3 容斥原理举例

设A_i为第i个元素在原来位置上的排列数，则

$|A_i|=(n-1)!$ $i=1,2,3\ldots,n$

同理: $|A_i \cap A_j|=(n-2)!$ $i,j=1,2,3\ldots,n,\ i\neq j$

$|A_i \cap A_j \cap A_k|=(n-3)!$ $i,j,k=1,2,3\ldots,n,\ i\neq j\neq k$

……

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right| = N-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{h>j}|A_i\cap A_j\cap A_h|+\ldots + (-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

3.3 容斥原理举例

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right|$$

$$= N-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{h>j}|A_i\cap A_j\cap A_h|+\ldots$$

$$+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

$$= n!-C(n,1)(n-1)!+C(n,2)(n-2)!-\ldots+(-1)^n C(n,n)$$

$$= n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!})$$

3.3 容斥原理举例

例3-11: 6个人参加会议，入场式将帽子随意挂在衣架上，走时匆匆忙忙顺手戴一顶就走，试问没一个人拿对的概率是多少？

$$\text{概率}\ p=\frac{D_6}{6!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}$$

$$=\frac{6!-6!+6\bullet 5\bullet 4\bullet 3-6\bullet 5\bullet 4+6\bullet 5-6+1}{6!}$$

$$=\frac{720-720+360-120+30-6+1}{720}=\frac{265}{720}$$