组合数学

冯巾松
fengjinsong@tongji.edu.cn

第2章 递推关系与母函数

2.14：非线性递推关系举例

- 线性常系数齐次递推关系 – 全部可以解决
- 线性常系数非齐次递推关系 – 部分解决
- 非线性递推关系 – 只涉及特殊的几个

2.14.1：Stirling数

多项式展开式的讨论

（1）多项式系数

$(x+y)^n$展开式的通项$x^k y^{n-k}$项的系数是:$C(n,k)$

n个有区别的球放到两个有区别的盒子里，

若要求x盒子放k个球，y盒子放n-k个球,

k=0, 1, 2…n. 方案数应是$(x+y)^n$ 中$x^k y^{n-k}$项的系数C(n,k)。

2.14.1：Stirling数

多项式展开式的讨论

（2）多项式系数之和

$(x+y)^n$展开式的系数和是:2^n

相当于把n个不同的球放进两个不同的盒子中

$(x+y)^n$展开式中的系数

$$C(n,0)+C(n,1)+\cdots+C(n,n)=2^n$$

2.14.1：Stirling数

多项式展开式的讨论

（3）多项式系数项数

$(x+y)^n$展开式的项数是: $n+1$

相当于把n个相同的球放进两个不同的盒子中的方案数。

2.14.1：Stirling数

可把上面的讨论推广到n个有区别的球放到m个有区别的盒子里，m个盒子放的球数分别是 $n_1, n_2, \cdots, n_m (n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m)$ 的情况

$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$ 展开式通项

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}, n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$$

的系数是:
$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$$

系数之和等于$\mathbf{m^n}$ 。

项数等于C(m+n-1,n)

2.14.1：Stirling数

从n个有区别的球中取出n_1个放到第1个盒子里去，其选取方案数为$\binom{n}{n_1}$；当第1个盒子的n_1个球选定后，第2个盒子里的n_2个球则是从$n-n_1$个中选取的，其方案数应为$\binom{n-n_1}{n_2}$；第3个盒子的n_3个球则是从$n-n_1-n_2$个中选取的，其方案数应为$\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$；依此类推，并根据乘法法则得

2.14.1：Stirling数

$$\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_m} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$$

$$\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}{n_m}$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}$$

$$\cdot\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots$$

$$\cdot\frac{n_m!}{n_m!0!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_m!}.$$

2.14.1：Stirling数

n个有区别的球，放到m个有标志的盒子的问题，也可以考虑把n个有区别的球进行全排列。对于每一个排列依次取n_1个放到第1个盒子里，取n_2个放到第2个盒子里，…，最后n_m个放到第m个盒子里。然而，放到盒子里的球不考虑球的顺序，故得不同的方案数为

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_m!}$$

2.14.1：Stirling数

定理2-5：$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$展开式的项数等于$\binom{n+m-1}{n}$，而且这些系数之和等于m^n

证明：$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开式中的 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ 项 $(n_1+n_2+\cdots+n_m=n)$和从m个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_m$中取n个作允许重复的组合一一对应。故得$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开式的

2.14.1：Stirling数

项数等于$\binom{n+m-1}{n}$。从m个中取n个作允许重复的组合的全体，对于每个球都有m个盒子可供选择，根据乘法法则有

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n}\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_m} = m^n$$

2.14.1：Stirling数

第一类Stirling数

定义2-2:

$$[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

$$= s(n,0) + s(n,1)x + s(n,2)x^2 + \cdots + s(n,n)x^n$$

称 $s(n,0), s(n,1), \ldots, s(n,n)$ 为第一类Stirling数

2.14.1：Stirling数

$$
\begin{aligned}
[x]_{n+1} &= [s(n,0) + s(n,1)x + \cdots + s(n,n)x^n](x-n) \\
&= s(n+1,0) + s(n+1,1)x + \cdots \\
&\quad s(n+1,n+1)x^{n+1}
\end{aligned}
$$

显然有递推关系

$$
s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k)
$$

2.14.1：Stirling数

$$
\begin{aligned}
[x]_n &= x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) \\
&= s(n,0)+s(n,1)x+\ldots+s(n,k)x^k+\ldots+s(n,n)x^n \\
&= [x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2)](x-n+1) \\
&= [s(n-1,0)+s(n-1,1)x+\ldots+s(n-1,k-1)x^{k-1} \\
&\quad + s(n-1,k)x^k+\ldots+s(n-1,n-1)x^{n-1}] \times (x-n+1)
\end{aligned}
$$

其中x^k项的系数为s(n-1,k-1)-(n-1)s(n-1,k)

递推关系式s(n,k)=s(n-1,k-1)-(n-1)s(n-1,k)

初始条件：s(n,0)=0　　s(n,n)=1

当k>n时，s(n,k)=0

2.14.1：Stirling数

定义2-3： n个有区别的球放到m个相同的盒子中，要求无一空盒，其不同的方案数用S(n, m)表示，称为**第二类Stirling数**.

S(n, m)也是将n个数拆分成非空的m个部分的方案数。

2.14.1：Stirling数

例如红，黄，蓝，白四种颜色的球，放到两个无区别的盒子里，不允许有空盒，其方案有如下七种：

	1	2	3	4	5	6	7
第1盒子	r	y	b	w	ry	rb	Rw
第2盒子	ybw	rbw	ryw	ryb	bw	yw	yb

其中r表红球，y表黄球，b表蓝球，w表白球，

$$\therefore \quad S(4,2) = 7$$

2.14.1：Stirling数

定理2.14 第二类司特林数S(n,k)有以下性质：

1. $S(n,0)=S(0,n)=0;$
2. $S(n,k)>0,$ 若 $n\geq k\geq 1;$
3. $S(n,k)=0,$ 若 $k>n\geq 1;$
4. $S(n,1)=1,$ 若 $n\geq 1;$
5. $S(n,n)=1,$ 若 $n\geq 1;$
6. $S(n,2)=2^{n-1}-1;$
7. $S(n,3)=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)-2^{n-1};$
8. $S(n,n-1)=C(n,2)$
9. $S(n,n-2)=C(n,3)+3C(n,4)$

2.14.1：Stirling数

$$1.\quad S(n,0)=S(0,n)=0;$$

性质1的意思是把n个不同的球放进0个盒子中或把0个不同的球放进n个盒子的方案数都是0。

$$2.\quad S(n,k)>0,\text{若 } n\ge k\ge 1;$$

性质2的意思是把n个不同的球放进k个盒子中,当球等于或多于盒子时，至少有一种方案。

2.14.1：Stirling数

3． $S(n,k)=0$, 若 $k>n\geq 1$;

性质3的意思是把n个球放进k个盒子中,当盒子多于球数时，要想使盒子不空是不可能的。

4． $S(n,1)=1$, 若 $n\geq 1$;

性质4的意思是把n个球放进1个盒子中, 放法只有一种。

5． $S(n,n)=1$, 若 $n\geq 1$;

性质5的意思是把n个不同的球放进n个相同的盒子中,不允许空盒，放法也只有一种。

2.14.1：Stirling数

6. $S(n,2) = 2^{n-1} - 1;$

意思是把n个不同的球放进2个相同的盒子中，

当第一个球放进其中一个盒子后，其余n-1个有标志的球都有两种选择，一种是选择与第一个球同盒，第二种选择是与第一个球不同盒。共有2^{n-1}种可能，

要排除都放在同一个盒子的情况。因此共有2^{n-1}-1种方案。

2.14.1：Stirling数

$$7.\quad S(n,3)=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)-2^{n-1};$$

$$8.\quad S(n,n-1)=C(n,2)$$

把n个有标志的球放进n-1个相同的盒子中，因为必须保证每个盒子中都有球，因此只有1个盒子中有2个球，问题就是求两个球的组合数，因此有C(n,2)种方案。

2.14.1：Stirling数

$$9.\quad S(n,n-2)=C(n,3)+3C(n,4)$$

(1)、剩余的两个球放进一个盒子中，这样的方案对应着从n中取3个的组合数，是C(n,3)。

(2)、剩余的两个球放进二个盒子中，这样的方案对应着从n中取4个，然后再把4个球两两分成2组，将4个球分成两组的方案数是C(4,2)/2。

因此在这种情况下方案数是：C(n,4)C(4,2)/2=3C(n,4)。

例如：1, 2, 3, 4分成两两2组的方案。

{(1, 2), (3, 4)}, {(1, 3), (2, 4)}, {(1, 4), (2, 3)}

2.14.1：Stirling数

定理2-7 第二类司特林数满足下面的递推关系：

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1), n>1, m\geq 1$$

证明：设有n个有区别的球$b_1,b_2,\ldots,b_n$,对于其中的某一个球b_i, 根据b_i的情况分为两类：

1、b_i独占一盒，其方案为S(n-1,m-1)

2、b_i不独占一盒，这相当于先将剩下的n-1个球放到m个盒子，不允许空盒，共有S(n-1,m)种不同方案，然后将bi球放进其中一盒，共有m种选择方式。所以bi球不独占一盒的方案数为mS(n-1,m)

由加法法则有$S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m)$

2.14.1：Stirling数

如今将红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里。

$$S(5,2)=2S(4,2)+S(4,1)=2\times 7+1=15$$

故共有15种不同的方案。

先把绿球取走，余下的四个球放到两个盒子的方案已见前面的例子。和前面一样用r，y，b，w分别表示红，黄，蓝，白球，绿球用g表示，故得表

2.14.1：Stirling数

g 不独占一盒				g 独占一盒	
第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子
rg	ybw	r	ybwg	g	rybw
yg	rbw	y	rbwg		
bg	ryw	b	rywg		
wg	ryb	w	rybg		
ryg	bw	ry	bwg		
rbg	yw	rb	ywg		
rwg	yb	rw	ybg		

2.14.1：Stirling数

n个球放到m个盒子里，依球和盒子是否有区别？是否允许空盒？共有 $2^3=8$种状态。其方案计数分别列于下表。

- n个有区别的球，m个有区别的盒子，有空盒时方案计数为m^n
- n个有区别的球，m个有区别的盒子，无空盒时方案计数为m!S(n,m)

2.14.1：Stirling数

- n个有区别的球，m个无区别的盒子，有空盒时方案计数为

$$S(n,1)+S(n,2)+\cdots+S(n,m),$$

$$n \geq m$$

$$S(n,1)+S(n,2)+\cdots+S(n,n),$$

$$n \leq m$$

2.14.1：Stirling数

- n个有区别的球，m个无区别的盒子，无空盒时方案计数为S(n,n)

- n个无区别的球，m个有区别的盒子，有空盒时方案计数为C(n+m-1,n)

2.14.1：Stirling数

- n个无区别的球，m个有区别的盒子，无空盒时方案计数为

$$C(n+(n-m)-1, n-m)$$

$$= C(n-1, n-m)$$

$$= C(n-1, m-1)$$

2.14.1：Stirling数

- n个无区别的球，m个无区别的盒子，有空盒时方案计数为

$$G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

的x^n项系数。

2.14.1：Stirling数

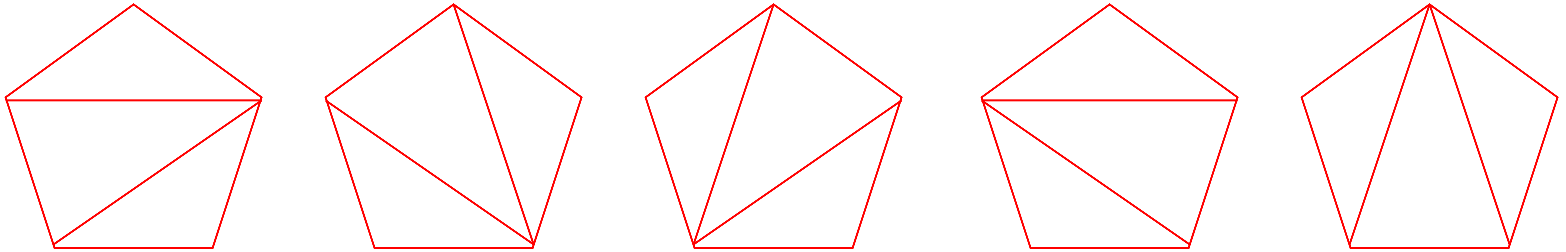
- n个无区别的球，m个无区别的盒子，无空盒时方案计数为

$$G(x) = \frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

的x^n项系数。

2.14.2：Catalan数

- 凸n边形：n边形内任意两点的连线线段都在该n边形内。
- 一个凸n边形, 通过不相交于n边形的对角线, 把n边形拆分成若干三角形, 不同拆分的数目用C_n表示。
- 例如五边形有如下五种拆分方案：



2.14.2：Catalan数

- Catalan数的递推关系

定理2-8：

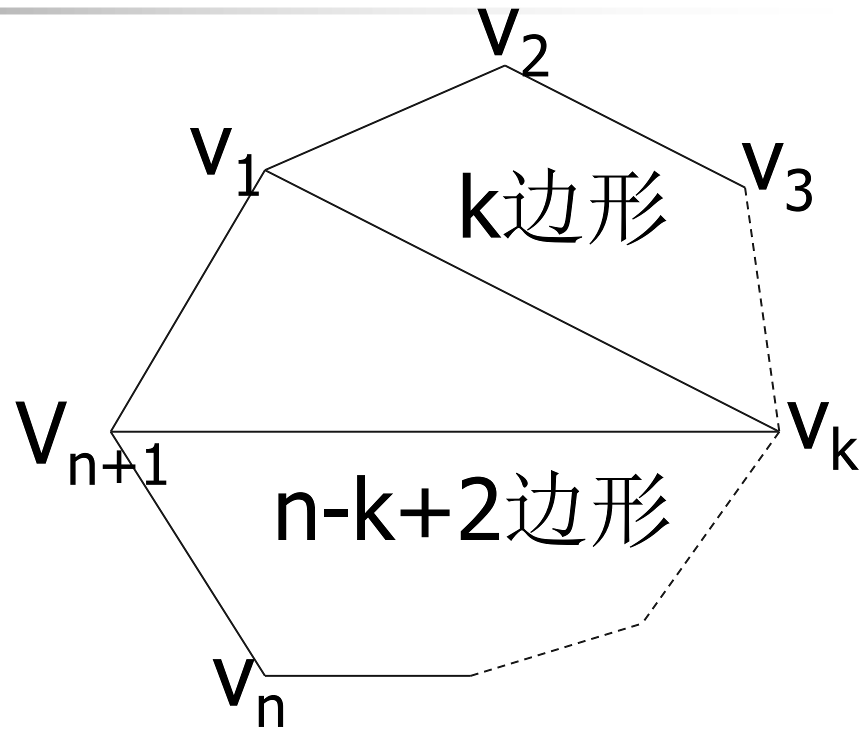
$$(a)\quad C_{n+1} = C_2C_n + C_3C_{n-1} + \cdots + C_nC_2,$$

$$(b)\quad (n-3)C_n = \frac{n}{2}(C_3C_{n-1} + C_4C_{n-2} + \cdots + C_{n-2}C_4 + C_{n-1}C_3)$$

2.14.2：Catalan数

(*a*)证明:

以v_1v_{n-1}作为一个边的三角形 $v_1v_{n-1}v_k$，将凸n+1边形分割成两部分，一部分是*k*边形，另一部分是n-k+2边形，k=2,3,…,n，即v_k点可以是$v_2,v_3,…,v_n$点中任意一点。依加法法则有



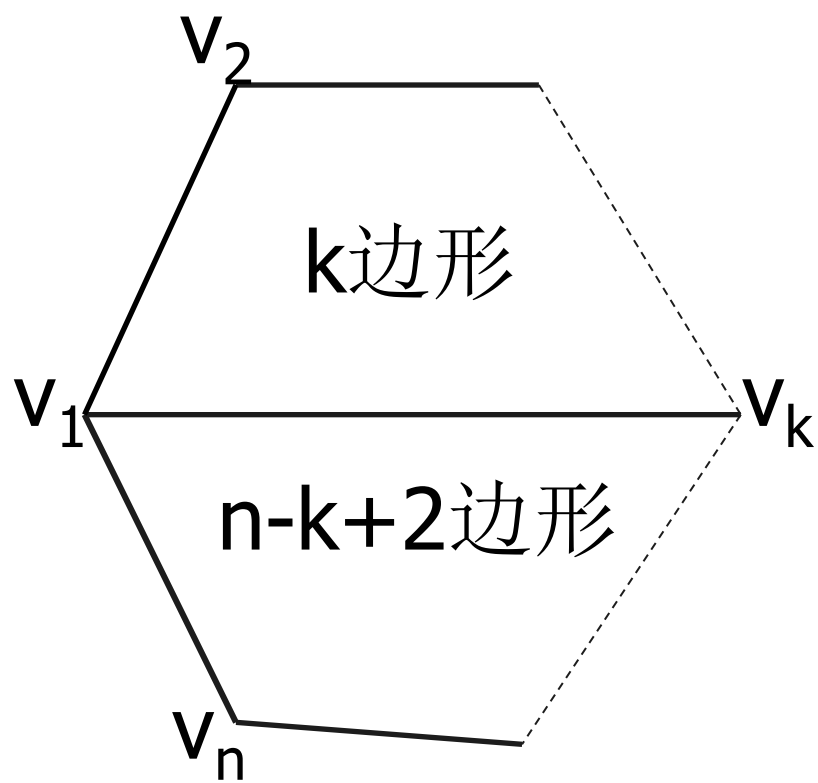
$$C_{n+1} = \sum_{k=2}^{n} C_k C_{n-k+2} = C_2 C_n + C_3 C_{n-1} + \cdots + C_{n-1} C_3 + C_n C_2$$

2.14.2：Catalan数

(b)的证明

从v_1点向其它n-3个顶点$\{v_3, v_4, \cdots, v_{n-1}\}$可引出n-3条对角线。

对角线v_1v_k把n边形分割成两个部分，因此以v_1v_k对角线作为拆分线的方案数为C_kC_{n-k-2}



2.14.2：Catalan数

v_k可以是$\{v_3, v_4, \cdots, v_{n-1}\}$中任一点，对所有这些点求和得

以 $v_2, v_3, \cdots, v_n$ 取代v_1点也有类似的结果。但考虑到对角线有两个顶点，同一对角线在两个顶点分别计算了一次，所以

$$\frac{n}{2}(C_3C_{n-1} + C_4C_{n-2} + \cdots + C_{n-2}C_4 + C_{n-1}C_3)$$

2.14.2：Catalan数

由于一个凸n边形的剖分有n-3条对角线，而对其每一条边计数时该剖分都计数了一次，故重复了n-3次，则

$$(n-3)C_n = \frac{n}{2}(C_3C_{n-1} + C_4C_{n-2} + \cdots + C_{n-2}C_4 + C_{n-1}C_3)$$