组合数学

冯巾松
fengjinsong@tongji.edu.cn

第3章 容斥原理与鸽巢原理

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

一、有限制的排列

对有重复的排列或无重复的排列，可以对一个或多个元素的出现次数进行限制，也可以对某些元素出现的位置进行限制，这两种情况统称为有限制条件的排列。

1、解决这些问题的工具有：

(1)、指数型母函数：

(2)、容斥原理：

(3)、递推关系：

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

(1) 指数型母函数

主要解决限制元素出现次数的排列问题

例 求1,3,5,7,9这5个数字组成的n位数的个数。要求其中3出现的次数为偶数，其它数字出现的次数无限制。

$$G_e(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^4 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

(2)、容斥原理:

既可解决限制元素出现次数的问题，也能解决元素出现位置的问题

典型特征是：问题能够化为集合问题:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$$

例 求a, b, c, d, e, f这6个字母的全排列中不允许出现ab和de图像的排列数。

解：设A_1为出现ab图像的排列集，A_2为出现de图像的排列集。

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

(3) 递推关系

既可解决限制元素出现次数的问题，也能解决元素出现位置的问题

典型特征是：写出递推关系

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

(4) 棋盘多项式

解决无重复排列元素出现位置的问题

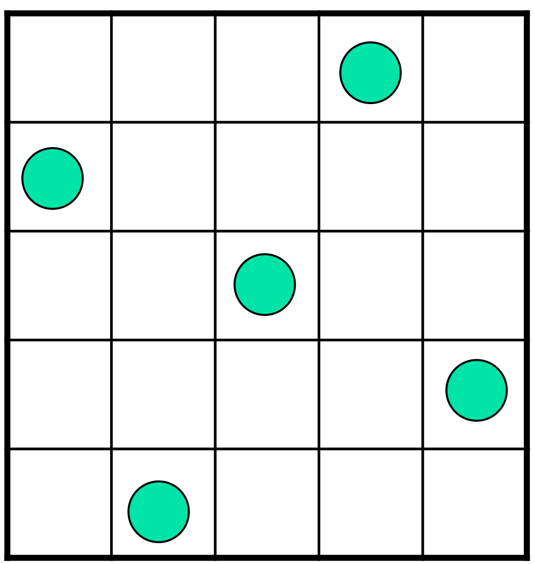
例3:甲乙丙丁4个人,有4项工作1,2,3,4,甲干不了1,2,3号工作,乙干不了2,3,4号工作,丙干不了1、4号工作,丁干不了1,2,4号工作,求满足各人工作要求的方案数。

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

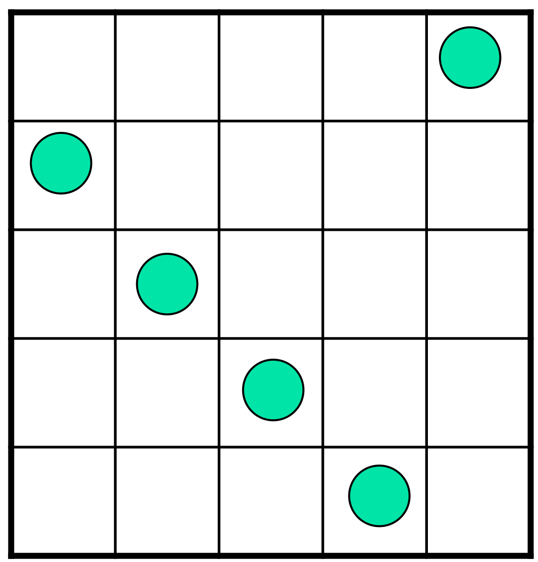
1、棋盘多项式的由来

n个不同元素的某一排列可以看做是n个相同的棋子在n×n的棋盘上的一种布局。

41352



51234



3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

			X	
X				
		X		
				X
	X			

棋盘的每一个布局每行每列有且有一个棋子；

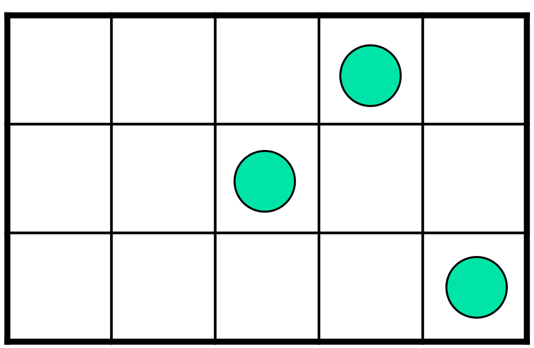
类似于象棋中的车无对攻原则。

3.2 棋盘多项式和有限制条件的排列

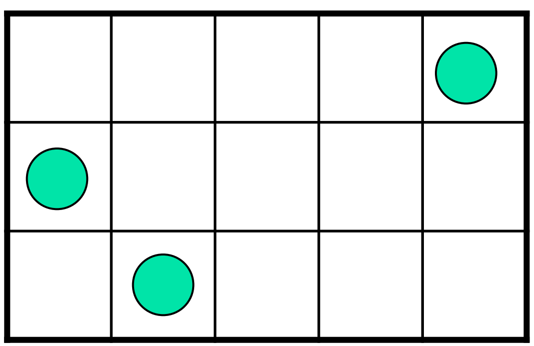
n个不同元素取r个的排列可以看做是n个相同的棋子在r×n的棋盘上的一种布局，

例如：1, 2, 3, 4, 5中取3个的排列

435



512



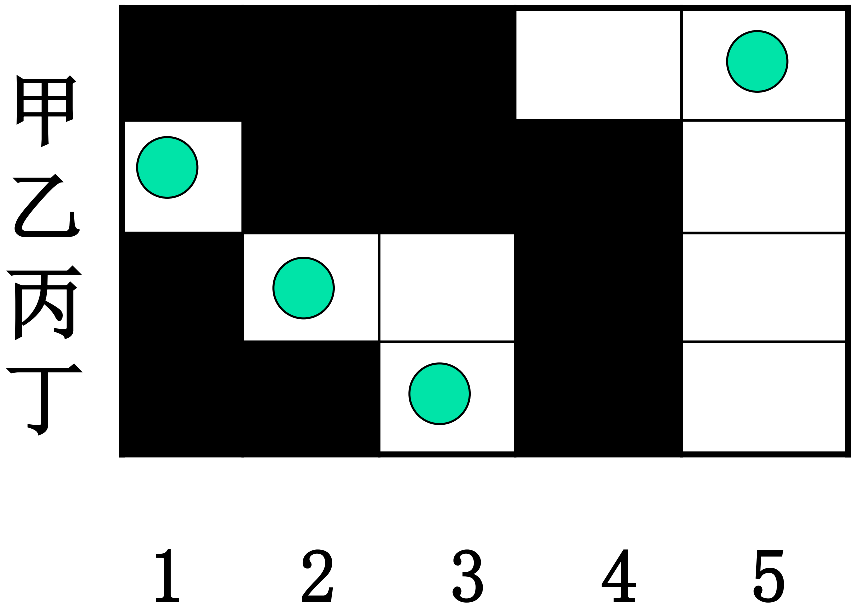
3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

			X	
X				
		X		
				X
	X			

令$r_k(C)$表示k只棋子布到棋盘C的不同的方案数，规则是当一只棋子布到棋盘的某一格时，则这个格子所在的行和列上的其他格子不再允许布上别的棋子。

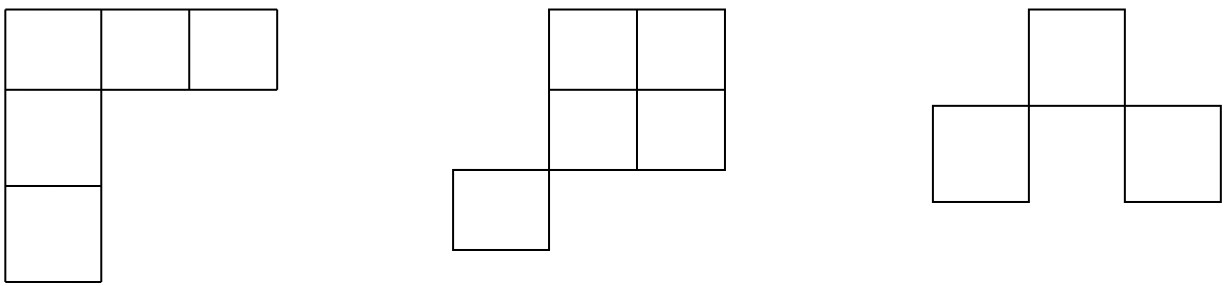
3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

例：甲乙丙丁4个人住店，有5个房间1, 2, 3, 4, 5，甲不住1, 2, 3号房间，乙不住2, 3, 4房间，丙不住1、4号房间，丁不住1, 2, 4号房间，求满足要求的方案数。



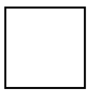
3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

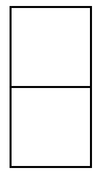
可以把棋盘C推广到任意形状，例如：

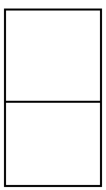


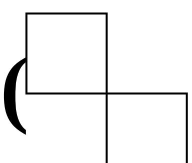
3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

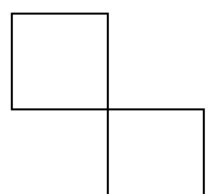
令$r_k(C)$表示k只棋子布到棋盘C的不同的方案数，规则是当一只棋子布到棋盘的某一格时，则这个格子所在的行和列上的其他格子不再允许布上别的棋子。

r_1() =1

r_1() =2

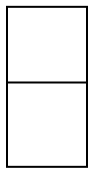
r_2() =0

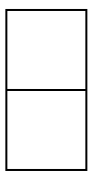
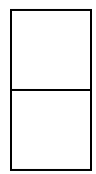
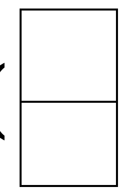
r_1() =2

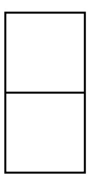
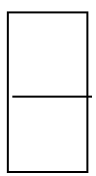
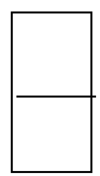
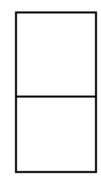
r_2() =1

2、棋盘多项式的定义

定义：设C为一棋盘，称：$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)x^k$ 为棋盘C的棋盘多项式。

求棋盘  的多项式

$r_0($  $)=1$　$r_1($  $)=2$　$r_2($  $)=0$

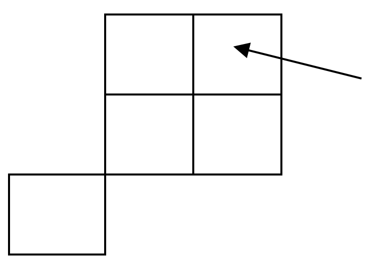
$R($  $)=r_0($  $)x^0+r_1($  $)x^1+r_2($  $)x^2=1+2x$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

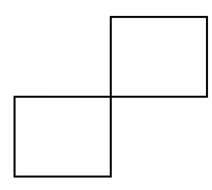
3、棋盘多项式的化简

设$C_{(I)}$是棋盘C的某一指定格子所在的行与列都去掉后所得的棋盘；

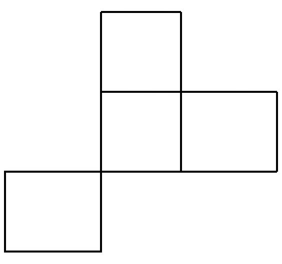
$C_{(e)}$是仅去掉该格子后的棋盘。



棋盘C



$C_{(I)}$

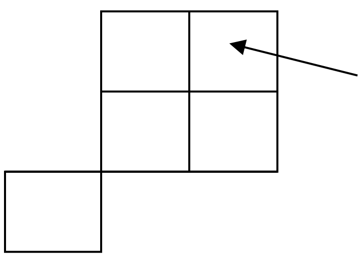


$C_{(e)}$

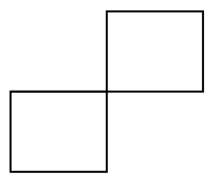
3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

公式1、$r_k(C)=r_{k-1}(C_{(I)})+r_k(C_{(e)})$

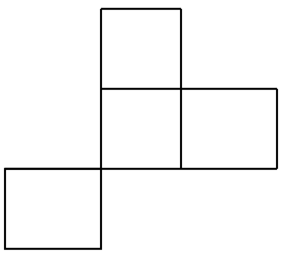
例如：



棋盘C



$C_{(I)}$



$C_{(e)}$

$r_2(C)=\ 6$ $\quad r_1(C_{(i)})=\ 2$ $\quad r_2(C_{(e)})=\ 4$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

公式1、$r_k(C)=r_{k-1}(C_{(\mathrm{I})})+r_k(C_{(e)})$

证明：

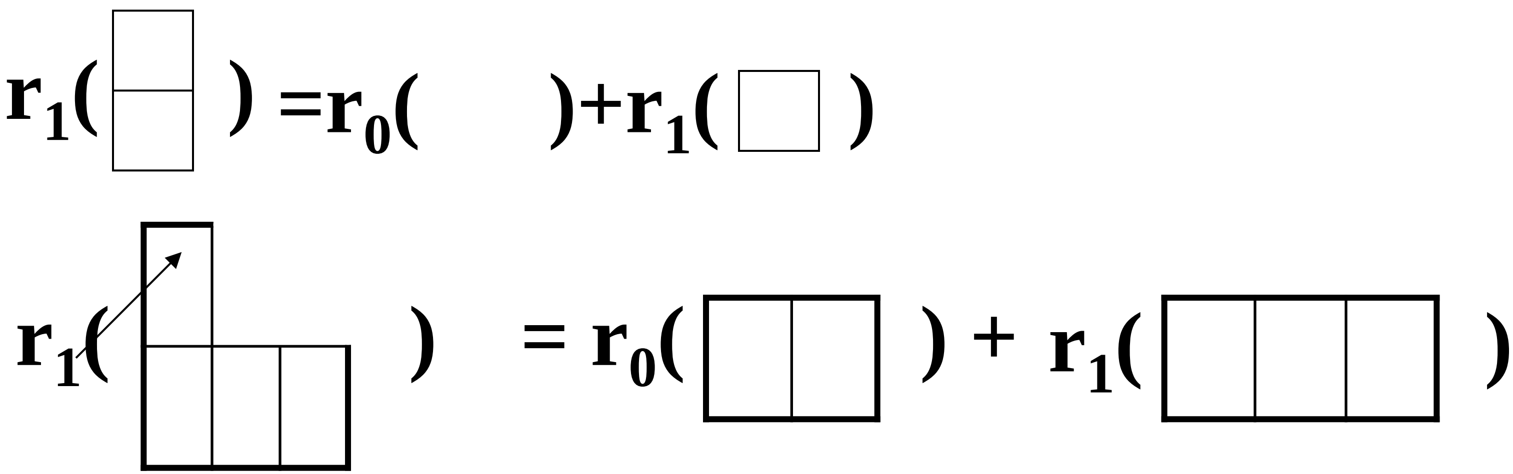
就某一格子而言，无非两种可能，一种是对该格子布子，另一种则是不布子，所有的布局依此可分成两类：

1、右端第一项$r_{k-1}(C_{(\mathrm{I})})$表示对某格下了一个棋子后，剩下**k-1**个棋子布到$C_{(\mathrm{I})}$棋盘的方案数；

2、右端第二项$r_k(C_{(e)})$表示某格子不布棋子，则**k**个棋子布到棋盘$C_{(e)}$上的方案数。

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

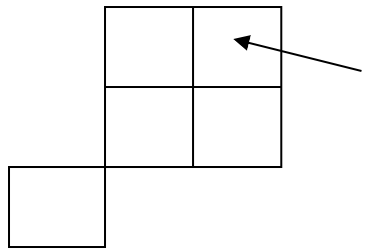
公式1、$r_k(C)=r_{k-1}(C_{(I)})+r_k(C_{(e)})$



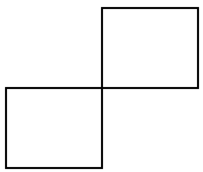
规定 $r_0(C)=1$，包括$r_0(\ )=1$。

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

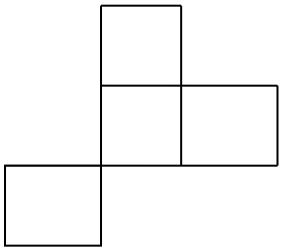
公式2 $R(C) = xR(C_{(i)}) + R(C_{(e)})$



棋盘C



$C_{(I)}$



$C_{(e)}$

$$R(C) = 1 + 5x + 6x^2 + 2x^3$$

$$R(C_{(i)}) = 1 + 2x + x^2$$

$$R(C_{(e)}) = 1 + 4x + 4x^2 + x^3$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

公式2 $R(C)=xR(C_{(i)})+R(C_{(e)})$

证明：$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)x^k \quad =1+\sum_{k=1}^{\infty} r_k(C)x^k$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}[r_{k-1}(C_{(i)})+r_k(C_{(e)})]x^k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty} r_{k-1}(C_{(i)})x^k+\sum_{k=1}^{\infty} r_k(C_{(e)})x^k$$

$$=x\sum_{k=1}^{\infty} r_{k-1}(C_{(i)})x^{k-1}+1+\sum_{k=1}^{\infty} r_k(C_{(e)})x^k$$

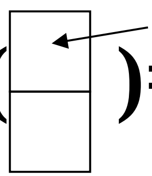
$$=x\sum_{h=0}^{\infty} r_h(C_{(i)})x^h+\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C_{(e)})x^k \quad =xR(C_{(i)})+R(C_{(e)})$$

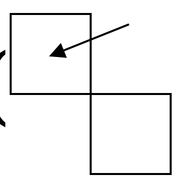
3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

利用公式 $R(C) = xR(C_{(i)}) + R(C_{(e)})$

化简棋盘多项式

R($\square$) =1+ x;

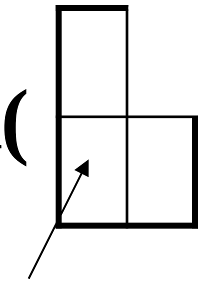
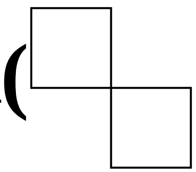
R()= xR( )+ R($\square$) =x+(1+x)=1+2x;

R() = x R($\square$) + R($\square$)

=x(1+x)+1+x

=1+2x+x^2。

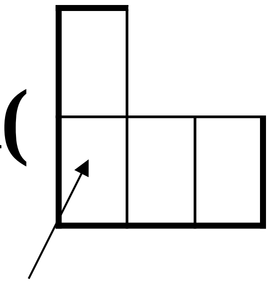
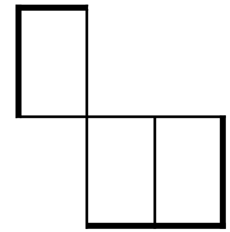
3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

R() = x R( ) + R()

$$=x+1+2x+x^2$$

$$=1+3x+x^2$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

R() = x R( ) + R()

$$=x+(1+x)(1+2x)$$

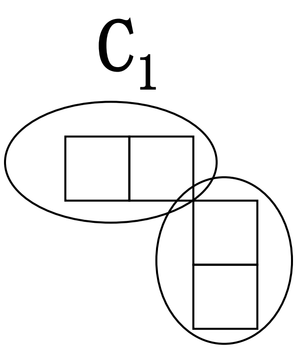
$$=1+4x+2x^2$$

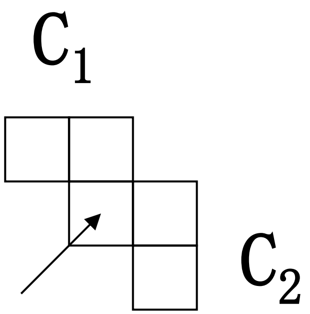
3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

如果C由相互分离的C_1，C_2组成，相互分离指的是同行或同列中没有同时属于C_1和C_2的格子。则有：
$$R(C)=R(C_1)R(C_2)$$

证明：

$$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)x^k$$





因为C_1,C_2分离，因此在C_1上布子与C_2上布子互不影响;

在C上布k个棋子可分为C_1上布i个，C_2上布k-i个,方案数是 $r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

在C上布k个棋子可分为C_1上布i个，C_2上布k-i个,方案数是 $r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)$

$$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)x^k$$

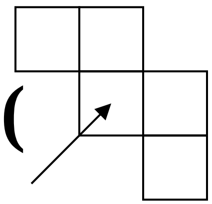
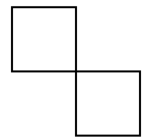
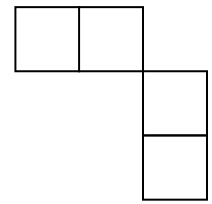
$$R(C)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)\right)x^k$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} r_i(C_1)x^i \sum_{j=0}^{\infty} r_j(C_2)x^j$$

$$=R(C_1)R(C_2)$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

例：

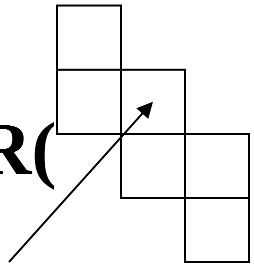
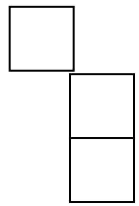
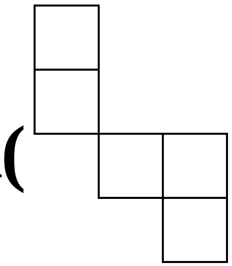
R () = xR()+R()

$$= x(1+x)^2 + (1+2x)^2$$

$$=1+5x+6x^2+x^3$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

例：

R() = xR() + R()

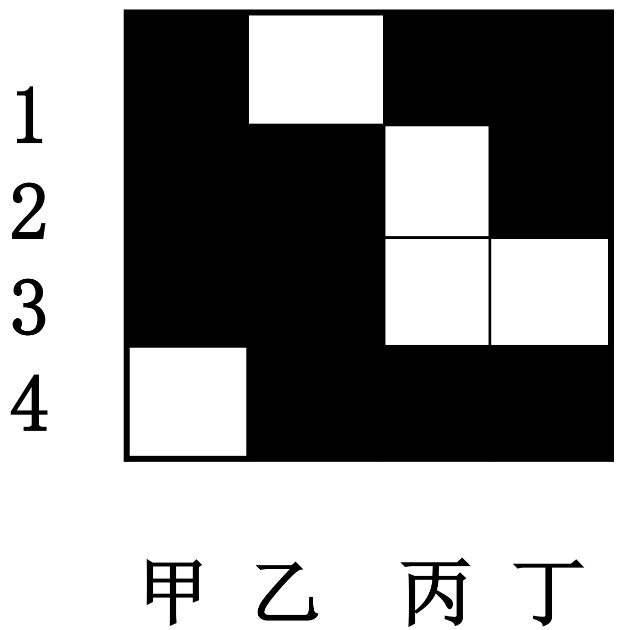
$$=x(1+x)(1+2x)+(1+2x)(1+3x+x^2)$$

$$= 1+6x+10x^2+4x^3$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

4、棋盘多项式的应用

例4:甲乙丙丁4个人住店,有4个房间1,2,3,4,甲不住1,2,3号房间,乙不住2,3,4房间,丙不住1、4号房间,丁不住1,2,4号房间,求满足要求的方案数。

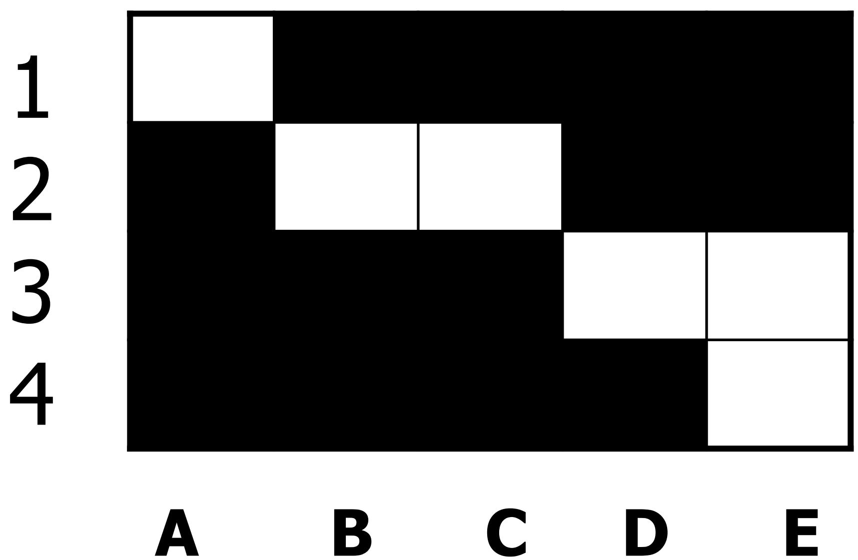


$$R(C)$$
$$=(1+x)(1+x)(1+3x+x^2)$$
$$=1+5x+8x^2+5x^3+x^4$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

例　一婚姻介绍所，登记有5名男性A，B，C，D，E和4名女性1，2，3，4，经了解：1不能与B,C,D,E，2不能与A,D,E,3不能与A,B,C，4不能与A,B,C,D。求可能婚配的方案数。

解：



$R(C)$

$=(1+x)(1+2x)(1+3x+x^2)$

$=1+6x+12x^2+9x^3+2x^4$

3.5 有禁区的排列

定理3-3　有禁区的排列数为

$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\ldots+(-1)^n r_n$

其中r_i是有i个棋子布置到禁区部分的方案数。

证明：

设A_i为第i个棋子布入禁区，其他棋子任意布的方案集的集合，**i =1 , 2 , 3, …,n**。

$$\sum_{i=1}^{n}|A_i| = r_1(n-1)!$$

3.5 有禁区的排列

两个棋子落入禁区的方案数设为r_2, 而其余n-2个棋子为无限制条件的排列，方案数是(n-2)!。

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\left|A_i \cap A_j\right| = r_2(n-2)!$$

布n个棋子无一落入禁区的方案数应为：

$$\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\right| = N - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\left|A_i \cap A_j\right|$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{h>j}\left|A_i \cap A_j \cap A_h\right| + \ldots$$

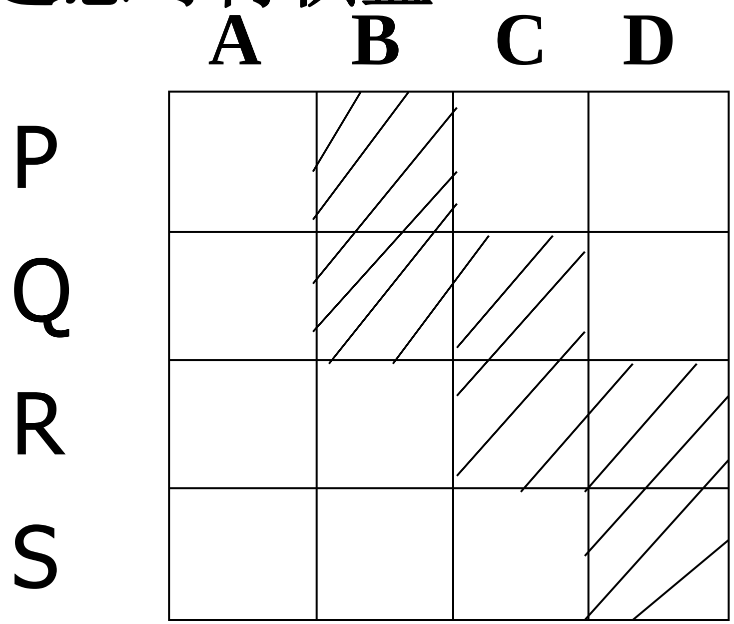
$$+ (-1)^n\left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right|$$

$$= n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \ldots + (-1)^n r_n$$

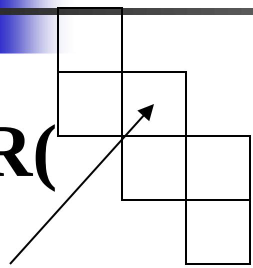
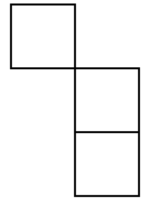
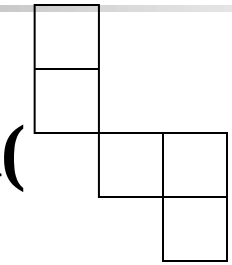
3.5 有禁区的排列

例3-14　有P, Q, R, S四位工作人员，A, B, C, D为四项任务，但P不能从事任务B;Q不能从事B，C两项任务；R不能做C, D工作；S不能从事任务D。若要求每人从事各自力所能及的一项工作，问有多少种不同方案？

解：由题意可得棋盘



3.5 有禁区的排列

R( **) = xR(**  **) + R(**  **)**

$$= x(1+x)(1+2x)+(1+2x)(1+3x+x^2)$$

$$= 1+6x+10x^2+4x^3$$

按照定理3-3，相当于$r_0=1$, $r_1=6$, $r_2=10$, $r_3=4$, 代入公式：

$$N = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \ldots \pm r_n$$

$$= 4! - 6 \times 3! + 10 \times 2! - 4$$

$$= 24 - 36 + 20 - 4 = 4$$

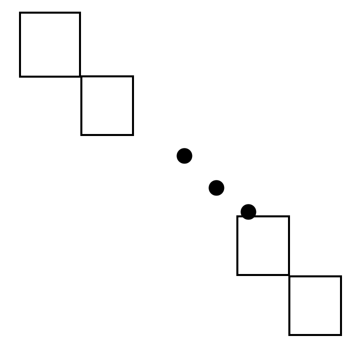
3.5 有禁区的排列

例3-15　错排问题

x				
	x			
		x		
			x	
				x

将错排问题看做是有禁区的排列，可看作禁区是在对角线上的方格。

对角线棋盘的棋盘多项式为：



$$R(C)=(1+x)^n$$

$$=1+C(n,1)x+C(n,2)x^2+\ldots+C(n,n)x^n$$

3.5 有禁区的排列

$$R(C) = (1+x)^n$$

$$= 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \ldots + C(n,n)x^n$$

$$r_1 = C(n,1), r_2 = C(n,2), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_n = C(n,n)$$

因此错排的方案数为：

$$n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \ldots (-1)^n C(n,n)$$

$$= n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$