



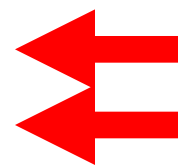
组合数学

冯巾松

fengjinsong@tongji.edu.cn

第3章 容斥原理与鸽巢原理

- 3. 1 De Morgan定理
- 3. 2 容斥原理
- 3. 3 容斥原理举例
- 3. 4 棋盘多项式与有限制的排列
- 3. 5 有禁区的排列
- 3. 6 广义的容斥原理
- 3. 7 广义容斥原理的应用
- 2. 8 第二类Stirling数的展开式
- 2. 9 欧拉函数 $\varphi(n)$
- 2. 10 n 对夫妻问题
- 2. 11 Mobius反演定理
- 2. 12 鸽巢原理
- 2. 13 鸽巢原理举例
- 2. 14 鸽巢原理的推广
- 2. 15 Ramsey数



3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

一、有限制的排列

对有重复的排列或无重复的排列，可以对一个或多个元素的**出现次数**进行限制，也可以对某些元素**出现的位置**进行限制，这两种情况统称为有限制条件的排列。

1、解决这些问题的工具有：

(1)、指数型母函数：

(2)、容斥原理：

(3)、递推关系：

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

(1) 指数型母函数

主要解决限制元素出现次数的排列问题

例 求1,3,5,7,9这5个数字组成的n位数的个数。要求其中3出现的次数为偶数，其它数字出现的次数无限制。

$$G_e(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^4 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

(2)、容斥原理:

既可解决限制元素出现次数的问题, 也能解决元素出现位置的问题

典型特征是: 问题能够化为集合问题:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}|$$

例 求a, b, c, d, e, f这6个字母的全排列中不允许出现ab和de图像的排列数。

解: 设 A_1 为出现ab图像的排列集, A_2 为出现de图像的排列集。

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

(3) 递推关系

既可解决限制元素出现次数的问题，也能解决元素出现位置的问题

典型特征是：写出递推关系

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

(4) 棋盘多项式

解决无重复排列元素出现位置的问题

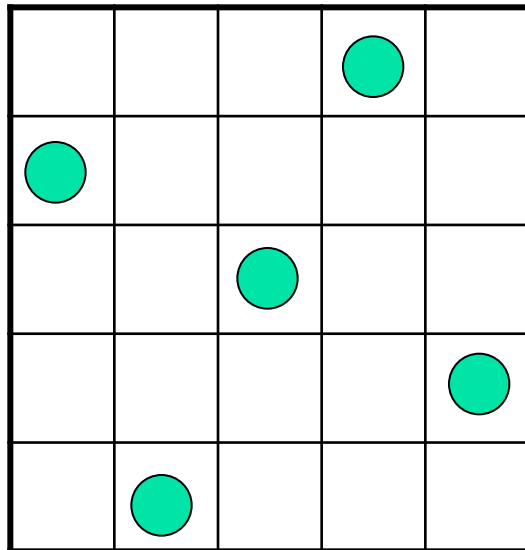
例3: 甲乙丙丁4个人, 有4项工作1, 2, 3, 4, 甲干不了1, 2, 3号工作, 乙干不了2, 3, 4号工作, 丙干不了1, 4号工作, 丁干不了1, 2, 4号工作, 求满足各人工作要求的方案数。

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

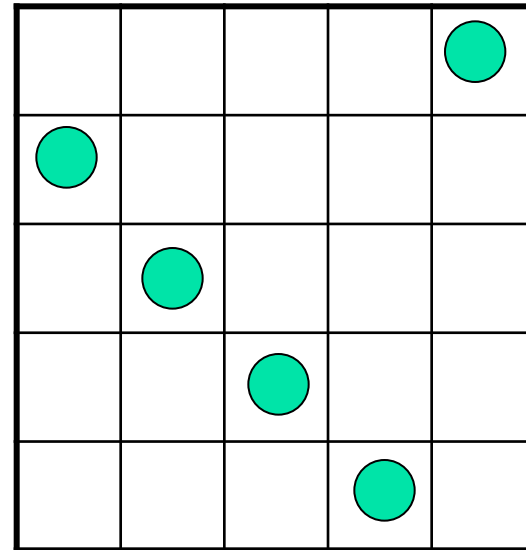
1、棋盘多项式的由来

n 个不同元素的某一排列可以看做是 n 个相同的棋子在 $n \times n$ 的棋盘上的一种布局。

41352



51234



3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

			X	
X				
		X		
				X
	X			

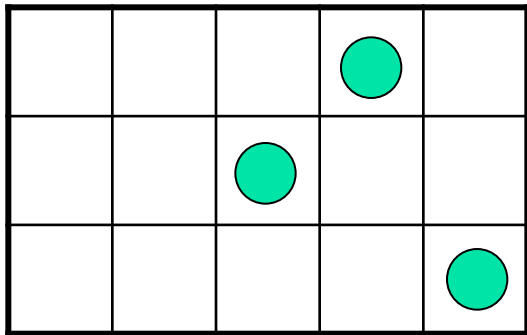
棋盘的每一个布局每行每列有且有一个棋子；
类似于象棋中的车无对攻原则。

3.2 棋盘多项式和有限制条件的排列

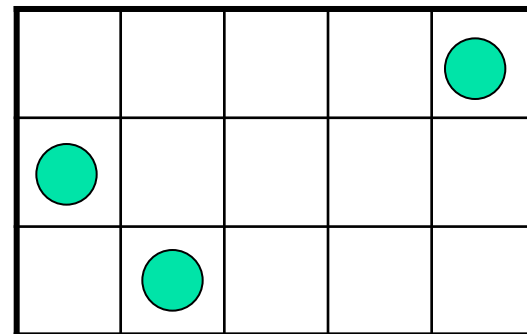
n 个不同元素取 r 个的排列可以看做是 n 个相同的棋子在 $r \times n$ 的棋盘上的一种布局，

例如：1, 2, 3, 4, 5中取3个的排列

435



512



3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

			X	
X				
		X		
				X
	X			

令 $r_k(C)$ 表示 k 只棋子布到棋盘 C 的不同的方案数，规则是当一只棋子布到棋盘的某一格时，则这个格子所在的行和列上的其他格子不再允许布上别的棋子。

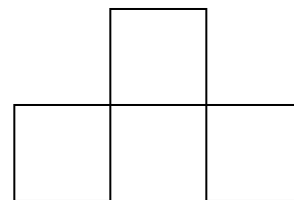
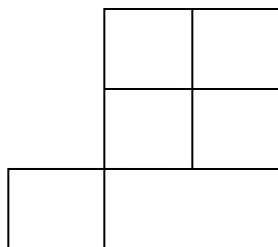
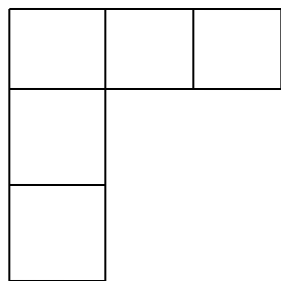
3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

例：甲乙丙丁4个人住店，有5个房间1, 2, 3, 4, 5，甲不住1, 2, 3号房间，乙不住2, 3, 4房间，丙不住1、4号房间，丁不住1, 2, 4号房间，求满足要求的方案数。

甲 乙 丙 丁					
	1	2	3	4	5

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

可以把棋盘C推广到任意形状，例如：



3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

令 $r_k(C)$ 表示 k 只棋子布到棋盘 C 的不同的方案数，规则是当一只棋子布到棋盘的某一格时，则这个格子所在的行和列上的其他格子不再允许布上别的棋子。

$$r_1(\square) = 1$$

$$r_1(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) = 2$$

$$r_2(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) = 0$$


$$r_1(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}) = 2$$

$$r_2(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}) = 1$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

2、棋盘多项式的定义

定义：设C为一棋盘，称： $R(C) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)x^k$ 为棋盘C的棋盘多项式。

求棋盘  的多项式

$$r_0\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right) = 1 \quad r_1\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right) = 2 \quad r_2\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right) = 0$$

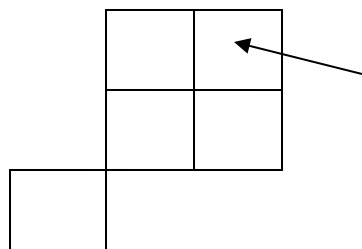
$$R\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right) = r_0\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right)x^0 + r_1\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right)x^1 + r_2\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right)x^2 = 1 + 2x$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

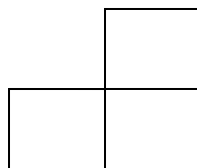
3、棋盘多项式的化简

设 $C_{(I)}$ 是棋盘 C 的某一指定格子所在的行与列都去掉后所得的棋盘；

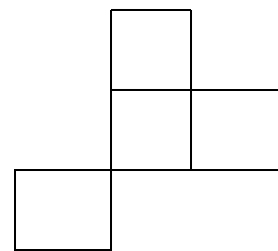
$C_{(e)}$ 是仅去掉该格子后的棋盘。



棋盘 C



$C_{(I)}$

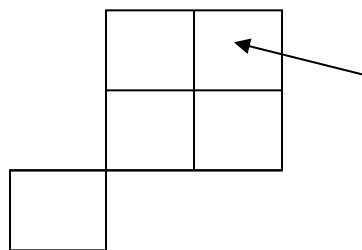


$C_{(e)}$

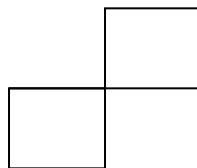
3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

公式1、 $r_k(C) = r_{k-1}(C_{(I)}) + r_k(C_{(e)})$

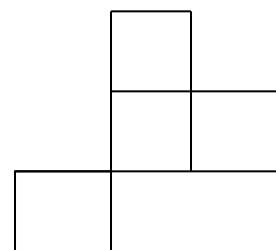
例如：



棋盘C



$C_{(I)}$



$C_{(e)}$

$$r_2(C) = 6$$

$$r_1(C_{(i)}) = 2$$

$$r_2(C_{(e)}) = 4$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

公式1、
$$r_k(C) = r_{k-1}(C_{(I)}) + r_k(C_{(e)})$$

证明：

就某一格子而言，无非两种可能，一种是对该格子布子，另一种则是不布子，所有的布局依此可分成两类：

1、右端第一项 $r_{k-1}(C_{(I)})$ 表示对某格下了一个棋子后，剩下 $k-1$ 个棋子布到 $C_{(I)}$ 棋盘的方案数；

2、右端第二项 $r_k(C_{(e)})$ 表示某格子不布棋子，则 k 个棋子布到棋盘 $C_{(e)}$ 上的方案数。

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

公式1、 $r_k(C) = r_{k-1}(C_{(I)}) + r_k(C_{(e)})$

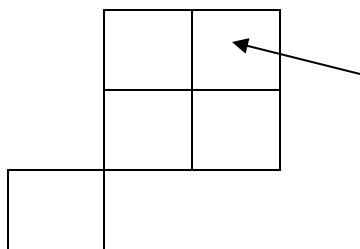
$$r_1\left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}\right) = r_0(\quad) + r_1(\square)$$

$$r_1\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \nearrow & & \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}\right) = r_0(\square\square) + r_1(\square\square\square)$$

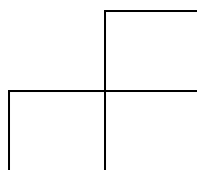
规定 $r_0(C) = 1$ ，包括 $r_0(\quad) = 1$ 。

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

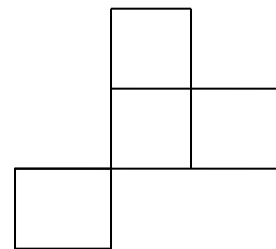
公式2 $R(C) = xR(C_{(i)}) + R(C_{(e)})$



棋盘C



$C_{(i)}$



$C_{(e)}$

$$R(C) = 1 + 5x + 6x^2 + 2x^3$$

$$R(C_{(i)}) = 1 + 2x + x^2$$

$$R(C_{(e)}) = 1 + 4x + 4x^2 + x^3$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

公式2 $R(C) = xR(C_{(i)}) + R(C_{(e)})$

证明: $R(C) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(C)x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(C)x^k$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} [r_{k-1}(C_{(i)}) + r_k(C_{(e)})]x^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_{k-1}(C_{(i)})x^k + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(C_{(e)})x^k$$

$$= x \sum_{k=1}^{\infty} r_{k-1}(C_{(i)})x^{k-1} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(C_{(e)})x^k$$

$$= x \sum_{h=0}^{\infty} r_h(C_{(i)})x^h + \sum_{k=0}^{\infty} r_k(C_{(e)})x^k = xR(C_{(i)}) + R(C_{(e)})$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

利用公式 $R(C) = xR(C_{(i)}) + R(C_{(e)})$

化简棋盘多项式

$$R(\square) = 1 + x;$$

$$R(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) = xR(\square) + R(\square) = x + (1 + x) = 1 + 2x;$$

$$\begin{aligned} R(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}) &= xR(\square) + R(\square) \\ &= x(1 + x) + 1 + x \\ &= 1 + 2x + x^2. \end{aligned}$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\text{Diagram 1}) &= x \mathbf{R}(\text{Diagram 2}) + \mathbf{R}(\text{Diagram 3}) \\ &= x + 1 + 2x + x^2 \\ &= 1 + 3x + x^2 \end{aligned}$$

Diagram 1: A 2x2 grid of squares with an arrow pointing to the bottom-left square.

Diagram 2: A 1x1 grid of squares.

Diagram 3: A 2x1 grid of squares.

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\text{Diagram 1}) &= x \mathbf{R}(\text{Diagram 2}) + \mathbf{R}(\text{Diagram 3}) \\ &= x + (1+x)(1+2x) \\ &= 1+4x+2x^2 \end{aligned}$$

Diagram 1: A 2x3 grid of squares with an arrow pointing to the bottom-left square.

Diagram 2: A 1x3 grid of squares.

Diagram 3: A 2x2 grid of squares with an additional square attached to the top-left corner.

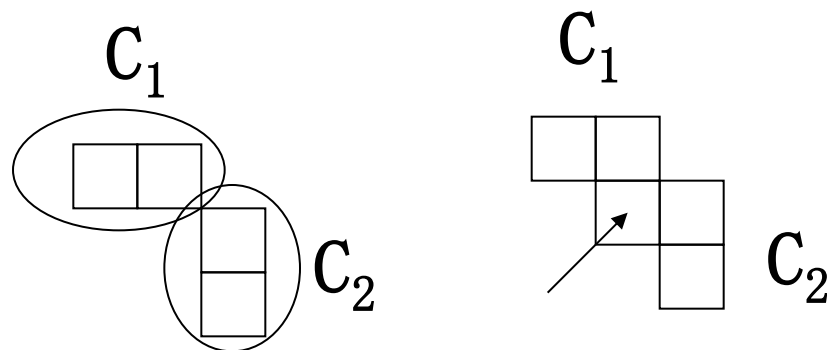
3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

如果C由相互分离的 C_1 , C_2 组成, 相互分离指的是同行或同列中没有同时属于 C_1 和 C_2 的格子。则有:

$$R(C) = R(C_1)R(C_2)$$

证明:

$$R(C) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(C) x^k$$



因为 C_1, C_2 分离, 因此在 C_1 上布子与 C_2 上布子互不影响;

在C上布k个棋子可分为 C_1 上布i个, C_2 上布k-i个, 方案数是 $r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

在C上布k个棋子可分为C₁上布i个, C₂上布k-i个,方案数是 $r_i(C_1)r_{k-i}(C_2)$

$$R(C) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(C) x^k$$

$$R(C) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k r_i(C_1) r_{k-i}(C_2) \right) x^k$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} r_i(C_1) x^i \sum_{j=0}^{\infty} r_j(C_2) x^j$$

$$= R(C_1) R(C_2)$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

例:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) &= \mathbf{x} \mathbf{R} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \mathbf{R} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \\ \hline & & \square \\ \hline & & \square \\ \hline \end{array} \right) \\ &= \mathbf{x}(1+\mathbf{x})^2 + (1+2\mathbf{x})^2 \\ &= 1 + 5\mathbf{x} + 6\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^3 \end{aligned}$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

例:

$$\mathbf{R}(\text{diagram}) = \mathbf{xR}(\text{diagram}_1) + \mathbf{R}(\text{diagram}_2)$$

The diagram on the left is a 3x3 grid with the main diagonal cells (1,1), (2,2), and (3,3) shaded. An arrow points to the (2,2) cell. The first diagram on the right is a 2x2 grid with the top-left cell shaded. The second diagram on the right is a 3x3 grid with the main diagonal cells (1,1), (2,2), and (3,3) shaded.

$$= \mathbf{x}(1+\mathbf{x})(1+2\mathbf{x}) + (1+2\mathbf{x})(1+3\mathbf{x}+\mathbf{x}^2)$$

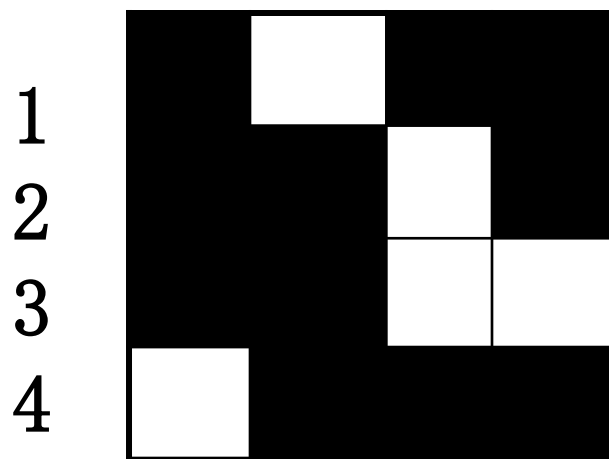
$$= 1 + 6\mathbf{x} + 10\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x}^3$$

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

4、棋盘多项式的应用

例4: 甲乙丙丁4个人住店, 有4个房间

1, 2, 3, 4, 甲不住1, 2, 3号房间, 乙不住2, 3, 4房间, 丙不住1、4号房间, 丁不住1, 2, 4号房间, 求满足要求的方案数。



$R(C)$

$$= (1+x) (1+x) (1+3x+x^2)$$

$$= 1+5x+8x^2+5x^3+x^4$$

甲 乙 丙 丁

3.4 棋盘多项式和有限制条件的排列

例 一婚姻介绍所，登记有5名男性A, B, C, D, E和4名女性1, 2, 3, 4，经了解：1不能与B, C, D, E, 2不能与A, D, E, 3不能与A, B, C, 4不能与A, B, C, D。求可能婚配的方案数。

解：

1					
2					
3					
4					
	A	B	C	D	E

$$R(C)$$

$$= (1+x) (1+2x) (1+3x+x^2)$$

$$= 1+6x+12x^2+9x^3+2x^4$$

3.5 有禁区的排列

定理3-3 有禁区的排列数为

$$n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \dots + (-1)^n r_n$$

其中 r_i 是有 i 个棋子布置到禁区部分的方案数。

证明:

设 A_i 为第 i 个棋子布入禁区, 其他棋子任意布的方案集的集合, $i=1, 2, 3, \dots, n$ 。

$$\sum_{i=1}^n |A_i| = r_1(n-1)!$$

3.5 有禁区的排列

两个棋子落入禁区的方案数设为 r_2 , 而其余 $n-2$ 个棋子为无限制条件的排列, 方案数是 $(n-2)!$ 。

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| = r_2 (n-2)!$$

布 n 个棋子无一落入禁区的方案数应为:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| &= N - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} |A_i \cap A_j| \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j>i} \sum_{h>j} |A_i \cap A_j \cap A_h| + \dots \\ &\quad + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \\ &= n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \dots + (-1)^n r_n \end{aligned}$$

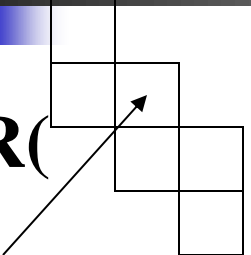
3.5 有禁区的排列

例3-14 有P, Q, R, S四位工作人员, A, B, C, D为四项任务, 但P不能从事任务B; Q不能从事B, C两项任务; R不能做C, D工作; S不能从事任务D。若要求每人从事各自力所能及的一项工作, 问有多少种不同方案?

解: 由题意可得棋盘

	A	B	C	D
P				
Q				
R				
S				

3.5 有禁区的排列


$$\mathbf{R}(\text{Diagram 1}) = \mathbf{xR}(\text{Diagram 2}) + \mathbf{R}(\text{Diagram 3})$$

$$= \mathbf{x}(1+\mathbf{x})(1+2\mathbf{x}) + (1+2\mathbf{x})(1+3\mathbf{x}+\mathbf{x}^2)$$

$$= 1+6\mathbf{x}+10\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}^3$$

按照定理3-3，相当于 $r_0=1, r_1=6, r_2=10, r_3=4$ ，代入公式：

$$N = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - \dots \pm r_n$$

$$= 4! - 6 \times 3! + 10 \times 2! - 4$$

$$= 24 - 36 + 20 - 4 = 4$$

3.5 有禁区的排列

例3-15 错排问题

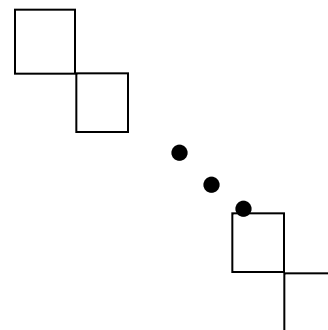
将错排问题看做是有禁区的排列，可看作禁区是在对角线上的方格。

X				
	X			
		X		
			X	
				X

对角线棋盘的棋盘多项式为：

$$R(C) = (1 + x)^n$$

$$= 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \dots + C(n,n)x^n$$



3.5 有禁区的排列

$$R(C) = (1 + x)^n$$

$$= 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \dots + C(n,n)x^n$$

$$r_1 = C(n,1), r_2 = C(n,2), \dots$$

$$r_n = C(n,n)$$

因此错排的方案数为：

$$n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! - \dots + (-1)^n C(n,n)$$

$$= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$