组合数学

冯巾松
fengjinsong@tongji.edu.cn

第2章：递推关系与母函数

2.6 线性常系数齐次递推关系

- 已知序列$\{a_n\}$。如果存在$c_1, c_2, \ldots, c_k$和b_n满足

  $$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_k\ a_{n-k}+b(n),\quad n\geq k$$

  则称该序列满足**k阶线性递推关系**
- 如果b(n)是常数0，则线性递推关系是**齐次的**，否则是**非齐次的**。
- 如果$c_1, c_2, \ldots, c_k$是常数，则称之为**常系数**线性递推关系
- Hanoi塔问题：$h_n = 2h_{n-1}+1$

  是一个非齐次的一阶线性常系数递推关系
- Fibonacci序列：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

  是一个齐次的二阶线性常系数递推关系

2.6 线性常系数齐次递推关系

- 几个定义：

序列$\{a_n\}$满足以下**k阶线性递推关系**

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \cdots - c_k\ a_{n-k} = b_n,\quad n \geq k \qquad (1)$$

则 $$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_{k-1} x^k - c_k \qquad (2)$$

为递推关系(1)的**特征多项式**，

称 $$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_{k-1} x^k - c_k = 0 \qquad (3)$$

为递推关系(1)的特征方程，其解称为特征根

2.6 线性常系数齐次递推关系

- 序列$\{a_n\}$满足以下k阶线性齐次递推关系

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \cdots - c_k\, a_{n-k} = 0,\quad n \geq k \qquad (1)$$

设特征多项式

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_{k-1} x^k - c_k \qquad (2)$$

有k个互异的**特征根**$r_1, r_2, \cdots, r_k$，则

$$a_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \cdots + A_k r_k^n$$

是k阶线性递推关系(1)的**一般解**，对于给定的初值$a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$时，常数$A_1, A_2, \cdots$，$A_k$有唯一的值来确定表达式$a_n$的唯一解。

2.6 线性常系数齐次递推关系

- 例：序列$\{a_n\}$满足初始条件$a_0=1$， $a_1=2, a_2=0$, ， 且满足递推关系$a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}-2a_{n-3}$。**求解序列$a_n$=?**

解：递推关系对应的特征方程：

$$x^3-2x^2-x+2=0$$

$$x^2(x-2)-(x-2)=0$$

$$(x^2-1)(x-2)=0$$

求得特征根是$x=-1, 1, 2$。**这些根互异，则**

$a_n=A_1\bullet(-1)^n+A_2\bullet(1)^n+A_3\bullet 2^n$

A_1, A_2, A_3需满足

$$a_0=1,\quad A_1\bullet(-1)^0+A_2\bullet(1)^0+A_3\bullet 2^0=A_1+A_2+A_3=1$$

$$a_1=2,\quad A_1\bullet(-1)^1+A_2\bullet(1)^1+A_3\bullet 2^1=-A_1+A_2+2A_3=2$$

$$a_2=0,\quad A_1\bullet(-1)^2+A_2\bullet(1)^2+A_3\bullet 2^2=A_1+A_2+4A_3=0$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

$A_1+A_2+A_3=1$

$-A_1+A_2+2A_3=2$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$

$A_1+A_2+4A_3=0$

得$A_1 = -\frac{2}{3}, A_2 = 2, A_3 = -\frac{1}{3}$

$$\therefore \quad a_n = -\frac{2}{3}(-1)^n + 2 \bullet (1)^n - \frac{1}{3}2^n$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

- 例：只由3个字母a,b,c组成的长度为n的单词在通信信道上传输，满足条件：传输中不得有2个a连续出现在任一单词中。确定通信信道允许传输的单词个数。

解：令h_n表示信道上允许传输的长度为n的单词个数。现分2种情况来讨论：

1，如果第一个字母是b或c，则共有$2h_{n-1}$个n长的单词。

2，如果第一个字母是a，则第二个字母一定是b或c，所以共有$2h_{n-2}$个n长的单词。

由加法原理可知： $h_n = 2h_{n-1} + 2h_{n-2}$；初始条件$h_0 =1$， $h_1 =3$

递推关系的特征方程为：$x^2-2x-2=0$

特征根为：$x = 1 \pm \sqrt{3}$ $\quad \therefore h_n = A_1(1+\sqrt{3})^n + A_2(1-\sqrt{3})^n$

由初始条件得：
$$h_0 = A_1 + A_2 = 1$$
$$h_1 = A_1(1+\sqrt{3}) + A_2(1-\sqrt{3}) = 3$$

解得：
$$A_1 = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}$$
$$A_2 = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

- 序列$\{a_n\}$满足以下k阶线性齐次递推关系

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \cdots - c_k\ a_{n-k} = 0,\quad n \geq k \quad (1)$$

设特征方程有s个互异的**特征根**$r_1, r_2, \cdots, r_s$，并设h_i是r_i的重根数，则

$$a_n = (A_0^{(1)} + A_1^{(1)} n + \cdots + A_{h_1-1}^{(1)} n^{h_1-1}) r_1^n + (A_0^{(2)} + A_1^{(2)} n + \cdots + A_{h_2-1}^{(2)} n^{h_2-1}) r_2^n + \cdots + (A_0^{(s)} + A_1^{(s)} n + \cdots + A_{h_s-1}^{(s)} n^{h_s-1}) r_s^n$$

是k阶线性递推关系(1)的**一般解。**

对于给定初值$a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$时，常数$A_0^{(i)}, A_1^{(i)}, \cdots,\ A_k^{(i)}$有唯一的值，以确定$a_n$的唯一解

2.6 线性常系数齐次递推关系

- 例：序列$\{h_n\}$满足初始条件$h_0=1$， $h_1=0, h_2=1$, $h_3=2$， 且满足递推关系$h_n=-h_{n-1}+3h_{n-2}+5h_{n-3}+2h_{n-4}$。**求解序列$h_n$=?**

解：递推关系对应的特征方程

$$q^4+q^3-3q^2-5q-2=0$$

$$(q+1)^3(q-2)=0$$

特征根是-1，-1，-1，2

通解是 $h_n = A(-1)^n + Bn(-1)^n + Cn^2(-1)^n + D2^n$

代入初值：A+D=1　　　　　　解得 A=7/9

-A-B-C+2D=0　　　　B=-1/3

A+2B+4C+4D=1　　　C=0

-A-3B-9C+8D=2　　　D=2/9

2.6 线性常系数齐次递推关系

- **例2-37：** 求下列n阶行列式d_n的值。

$$d_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

初始条件：$d_1=2$，$d_2=3$

递推关系：$d_n-2d_{n-1}+d_{n-2}=0$

2.6 线性常系数齐次递推关系

根据行列式性质

$$d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2} = 0, \quad d_1 = 2, \quad d_2 = 3$$

对应的特征方程为

$$m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 = 0$$

$$m_1 = m_2 = 1$$

故m=1是二重根

$$\therefore \quad d_n = (A + Bn)(1)^n = A + Bn$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

- n=1时有d_1=A+B= 2
- n=2时有d_2=A+2B= 3

$$\therefore \quad \begin{cases} A + B = 2 \\ A + 2B = 3 \end{cases} \Rightarrow \quad A = B = 1$$

- 即

$$d_n = n + 1$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

例2-38：求 $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + \overline{n-1} + n$$

$$S_{n-1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + \overline{n-1}$$

$$\therefore \quad S_n - S_{n-1} = n$$

同理 $S_{n-1} - S_{n-2} = n - 1$

相减得 $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = 1$

2.6 线性常系数齐次递推关系

同理 $S_{n-1} - 2S_{n-2} + S_{n-3} = 1$

$$\therefore \quad S_n - 3S_{n-1} + 3S_{n-2} - S_{n-3} = 0$$

$$S_0 = 0, \quad S_1 = 1, \quad S_2 = 3$$

对应的特征方程为

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = (m-1)^3 = 0$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

m=1是三重根

$$\therefore \quad S_n = (A + Bn + Cn^2)(1)^n = A + Bn + Cn^2$$

$$S_0 = 0, \quad \therefore \quad A = 0$$

$$S_1 = 1, \quad B + C = 1$$

$$S_2 = 3, \quad 2B + 4C = 3, \quad \therefore \quad B = C = \frac{1}{2}$$

即 $S_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{2}n(n+1)$

这就证明了 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

2.6 线性常系数齐次递推关系

- 常系数线性齐次递推关系的求解步骤
  1. 根据题意求递推关系
  2. 利用递推关系得到特征方程
  3. 解特征方程，求特征根
  4. 利用特征根写递推关系通解
  5. 根据初值确定通解中的系数
  6. 给出递推关系的解

2.6 线性常系数齐次递推关系

- 二阶线性常系数齐次递推关系总结

$$a_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = 0, c \neq 0$$

C(x)= x^2+bx+c 为特征多项式。

$x^2+bx+c=0$ 称为特征方程。

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad G(x) = \frac{P(x)}{(1-r_1x)(1-r_2x)}$$

针对 r_1,r_2 为实根还是复根，是否相等，分别讨论

2.6 线性常系数齐次递推关系

$$a_n + ba_{n-1} + ca_{n-2} = 0, c \neq 0$$

针对特征方程$x^2+bx+c=0$的根的情况分别有：

1、特征方程有两不同实根的情况:

$$a_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$$

$$a_n = \frac{a_1 - a_0 r_2}{r_1 - r_2}(r_1)^n + \frac{a_1 - a_0 r_2}{r_2 - r_1}(r_2)^n$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

- **2、两个相等实根的情况**

$$a_n = [h + kn]r^n \qquad a_n = [a_0 + (\frac{a_1}{r} - a_0)n]r^n$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

根 $r_1=r_2$的情形，即$b^2=4ac$, $r_1=r_2=-b/2$

$$G(x)=\frac{P(x)}{(1-rx)^2} \quad =\frac{A}{(1-rx)}+\frac{B}{(1-rx)^2}$$

$$\frac{1}{(1-rx)^2}=1+2rx+3r^2x^2+\ldots$$

$$G(x)=A\sum_{n=0}^{\infty}r^n x^n+B\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)r^n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[A+B(n+1)]r^n x^n$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

$$a_n = [A + B(n+1)]r^n$$

$$= [(A+B) + Bn]r^n$$

令$A + B = h, B = k$

$$a_n = [h + kn]r^n$$

设a_0，a_1是两个初值

当n=0时，有a_0=h

当n=1时，有a_1=(h+k)r

$$k = \frac{a_1}{r} - a_0$$

因此，对于二重根r，有 $a_n = [a_0 + (\frac{a_1}{r} - a_0)n]r^n$

2.6 线性常系数齐次递推关系

- **3、有一对共轭复根的情况：**

$$a_n = k_1\rho^n \cos n\theta + k_2\rho^n \sin n\theta$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

(2) 当$r_1 \neq r_2$，但r_1和r_2是一对共轭复根时。

$$r_1 = \rho e^{i\theta}, r_2 = \rho e^{-i\theta}$$

$$(r_1)^n = \rho^n e^{in\theta} \quad = \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$(r_2)^n = \rho^n e^{-in\theta} \quad = \rho^n (\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

$$a_n = A_1 (r_1)^n + A_2 (r_2)^n \quad = A_1 \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$+ A_2 \rho^n (\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

$$= (A_1 + A_2)\rho^n \cos n\theta + (A_1 - A_2) i \rho^n \sin n\theta$$

$$= K_1 \rho^n \cos n\theta + K_2 \rho^n \sin n\theta$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

- 例2-11：$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$，$a_1=1$，$a_{2=}=0$，求序列a_n

递推关系的特征方程为：$x^2-x+1=0$

解方程可得：

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_{1,2}=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

所以有:

$$a_n = k_1 \cos\frac{n\pi}{3} + k_2 \sin\frac{n\pi}{3}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}k_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}k_2 = 1$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}k_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}k_2 = 0$$

解方程可得:

$$k_1 = 1, k_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

- 定理2-1 设$\frac{P(x)}{R(x)}$是有理分式，多项式P(x)的次方低于R(x)的次方，则$\frac{P(x)}{R(x)}$可化为部分分式来表示，且表示唯一。

$$\frac{p(x)}{(1-\alpha_1 x)^{k1}(1-\alpha_2 x)^{k2}\cdots(1-\alpha_t x)^{kt}}$$

$$=\frac{p(x)}{(1-\alpha_1 x)^{k1}}+\frac{p(x)}{(1-\alpha_2 x)^{k2}}+\ldots+\frac{p(x)}{(1-\alpha_2 x)^{kt}}$$

$$\frac{P_i(x)}{(1-\alpha_i x)^{k_i}}=\frac{A_{i1}}{1-\alpha_i x}+\frac{A_{i2}}{(1-\alpha_i x)^2}+\ldots+\frac{A_{i2}}{(1-\alpha_i x)^{ki}}$$

A_{ij}是常数

2.6 线性常系数齐次递推关系

一般情况

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} = 0$$

令$a_0, a_1, \ldots$,序列的母函数为:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

K阶齐次递推关系特征方程为:

$$K(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_k = 0$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

(1)、如果特征方程有k个不同的根$r_1,r_2,\ldots,r_k$,

$$K(x)=(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_k)=\prod_{j=1}^{k}(x-r_j)=0$$

$$D(x)=(1-r_1x)(1-r_2x)\ldots(1-r_kx)$$

利用部分分数展开法可将A(x)化为:

$$A(x)=\frac{A_1}{(1-r_1x)}+\frac{A_2}{(1-r_2x)}+\ldots+\frac{A_k}{(1-r_kx)}$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

$$A(x)=\frac{A_1}{(1-r_1x)}+\frac{A_2}{(1-r_2x)}+\ldots+\frac{A_k}{(1-r_kx)}$$

其中$A_1,A_2,\ldots,A_k$是待定常数，即

$$A(x)=A_1\sum_{j=0}^{\infty}(r_1x)^j+A_2\sum_{j=0}^{\infty}(r_2x)^j\ldots+A_k\sum_{j=0}^{\infty}(r_kx)^j$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}(A_1r_1{}^j+A_2r_2{}^j+\ldots+A_kr_k{}^j)x^j$$

$$a_n=A_1r_1{}^n+A_2r_2{}^n+\ldots+A_kr_k{}^n$$

2.6 线性常系数齐次递推关系

- （2）如果$r_1,r_2,\ldots r_s$是特征方程

$$a_n+c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ka_{n-k}=0$$

的不同的特征根，并设h_i是r_i的重根数，$i=1,2,3,\ldots,s$。则

$$a_n=(A_0+A_1n+\ldots+A_{h_1-1}n^{h_1-1})r_1^n$$

$$+(B_0+B_1n+\ldots+B_{h_2-1}n^{h_2-1})r_2^n+\ldots$$

$$+(T_0+T_1n+\ldots+T_{h_s-1}n^{h_s-1})r_s^n$$