# 组合数学 – 例题讨论

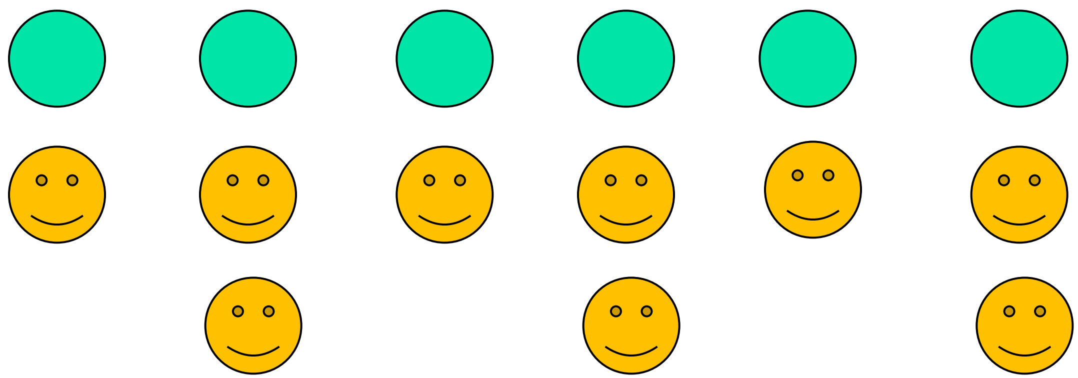
冯巾松

fengjinsong@tongji.edu.cn

# 排列数 例题

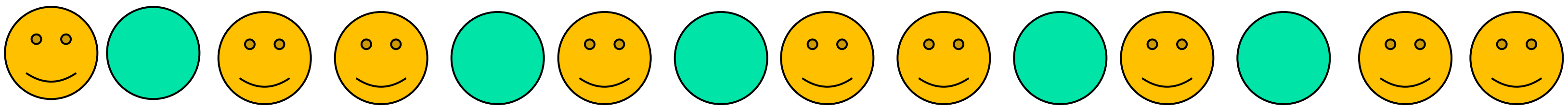
某车站有6个入口处，每个入口处每次只能进一个人。问一个小组9个人进站的方案数有多少？

比如



# 排列数 例题

解法1：把从第1入口到第6入口的人员依次顺序排列，可得9个人的一个排列，但这样把哪些人从哪个入口进入的信息丢失了。我们可以在相邻入口人员间加一个标志。因为是6个门，所以加上5个标志。



9个人+5个标志=14个元素。所以方案数是14个元素的全排列。但标志是没区别的，关键在其所在位置。故问题导致14个元素中5个无区别，9个有区别的。所以进站的方案数为：14!/5 !

# 排列数 例题

解法2：第1个人可以在6个入口中任意选择一个，有6种选法。第2个人有7种选法，因为他还可以选择在第一个人的前面或后面。同理，第3个人有8种选法。…第9个人有14种选法。根据乘法法则，进站的方案数共有6*7*8*9*10*11*12*13*14。

# 圆排列 例题

红蓝黄绿黑色珠子各一枚，串成一个手串，有多少种方案？

$$Q(5,5)/2=4!/2=12$$

# 多重集的组合 例题

6个相同的球放入4个不同的盒子里，有多少种方案？

等价于：$x_1+x_2+x_3+x_4=6$，有多少个非负整数解？

还等价于：有无穷多个$x_1$无穷多个$x_2$无穷多个$x_3$无穷多个$x_4$，取6个做组合，有多少种方案？

$C(6+4-1,6)=C(9,6)=C(9,3)=84$

# 指数型母函数 例题

$(x+y+z)^4$展开式有多少不同的项？每项系数是多少?

$$(x+y+z)^4=\sum_{\substack{i+j+k=4\\ i,j,k\ge 0}}\frac{4!}{i!\,j!\,k!}x^i y^j z^k$$

$(x+y+z)^4$展开式共有C(4+3-1,4)个不同的$x^iy^jz^k$项。每项系数是4!/i!j!k!

# 例题

试证$n^2$的整除数的数目是奇数。

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_m^{a_m}$$

$$n^2 = p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \ldots p_m^{2a_m}$$

$$C(2a_1+1,1) \times C(2a_2+1,1) \times \ldots \times C(2a_m+1,1)$$

# 例题

设x+2y+3z=n的非负整数解(x,y,z)的组数为En

(1)求En的普通型母函数

(2)求出En的通项公式

解：此问题相当于对整数n拆分成1,2,3(允许重复)的和$G(x)=(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)$

$$=\frac{1}{1-x}\bullet\frac{1}{1-x^2}\bullet\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{1-x}\bullet\frac{1}{(1-x)(1+x)}\bullet\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x)(1+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}x)}$$

特征根为：1（三重），-1（一重），$e^{\pm 2/3\pi i}$

所以$En=(A+Bn+Cn^2)*1^n+D(-1)^n+E*\cos 2n\pi/3+F*\sin 2n\pi/3$

初始条件为：$E_0=1, E_1=1, E_2=2, E_3=3, E_4=4, E_5=5$

# 递推关系 例题

在由a,b,c,d,e构成的n位字符串中，不允许出现一个字符连续出现3次的情况，这样的n位串有多少?

解：设满足条件的n位字符串有$a_n$个。设最后3位字符分别为x,y,z。这$a_n$个字符串可分两种情况：

1, 当$x \neq y$时，z可以在a,b,c,d,e任意取，所以 $a_n=5a'_{n-1}$，而$a'_{n-1}=4a_{n-2}$

2，当x=y时，此时为了不使一字符连续出现3次，一定要求$z \neq y(=x)$，则$a_n=4a''_{n-1}$，而$a'_{n-1}+a''_{n-1}=a_{n-1}$所以$a''_{n-1}=a_{n-1}-4a_{n-2}$

由加法原理知 $a_n =5a'_{n-1} +4a''_{n-1}=5*4a_{n-2}+4(a_{n-1}-4a_{n-2})$

$=4a_{n-1} +4a_{n-2}$

初始条件为 $a_1 =5$，$a_2 =5^2$，$a_3 =5^3-5$

# 递推关系 例题

在由a,b,c,d,e构成的n位字符串中，不允许出现一个字符连续出现3次的情况，在满足这个要求的串中，一个字符连续出现2次的n位字符串有多少?

解：满足上题条件的$a_n$个字符串中，减去一个字符不连续出现2次的情况（$5*4^{n-1}$种）

| 第一个字符 | 1 | 2 | 3 | 。。。 | n |
|---|---|---|---|---|---|
| 选择数 | 5 | 4 | 4 | 。。。 | 4 |

所以一个字符连续出现2次的情况有

$b_n=a_n -5*4^{n-1}$

# 非齐次递推关系 例题

求$1^4+2^4+\dots+n^4$，其中n是整数。

解：令$S_n= 1^4+2^4+\dots+n^4$，得$S_n= S_{n-1}+n^4$

由于1是特征根，所以齐次关系的通解形式为$A\bullet 1^n$

非齐次关系的特解形式为

$(Bn+Cn^2+Dn^3+En^4+Fn^5)\bullet 1^n$

最后的解形式为$A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4+Fn^5$

简单起见可令其形式为

$$A_0 + A_1\binom{n}{1} + A_2\binom{n}{2} + A_3\binom{n}{3} + A_4\binom{n}{4} + A_5\binom{n}{5}$$

由$S_0$ $S_1$ $S_2$ $S_3$ $S_4$ $S_5$的值定一下$A_i$的值。

# 例题

数字1~n构成的圆排列中，顺时针扫描，要求不出现i和i+1（i=1,2,...,n-1）相邻及n和1相邻，这样的圆排列有多少个?

解：没有任何限制的圆排列个数为Q(n,n)=(n-1)!

现圆排列中不能出现12,23,34,...,(n-1)n,n1共n个模式。

设集合$A_i$是出现i(i+1)模式的圆排列集合i=1,2,...n-1.

集合$A_n$是出现n1模式的圆排列集合。

则$|A_i|=Q(n-1,n-1)=(n-2)!$

$|A_i \cap A_j|= Q(n-2,n-2)=(n-3)!$ ...

$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|= 1$

故满足条件的圆排列个数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = (n-1)!-\binom{n}{1}(n-2)!+\binom{n}{2}(n-3)!-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}0!+(-1)^n\binom{n}{n}$$

# 容斥原理 例题

求集合$\{1,2,3,\ldots,10^4\}$中不是$n^2$,$n^3$形式的数的数目有多少?n是正整数。

解：集合$\{1,2,3,\ldots,10^4\}$中共有10000个整数。

其中，是$n^2$形式的数有 $\sqrt{10000} = 100$

是$n^3$形式的数有 $\sqrt[3]{10000} = 21$

既是$n^2$形式又是$n^3$形式的数，为$n^6$形式的数有

$$\sqrt[6]{10000} = 4$$

所以：满足要求的正整数共有

$$10000-100-21+4=9883$$

# 容斥原理 例题

求集合$\{10^3, 10^3+1,\ldots,10^4\}$中不是$n^2$,$n^3$形式的数的数目有多少?n是正整数。

解:集合$\{10^3, 10^3+1,\ldots,10^4\}$中共有9001个整数。

其中，是$n^2$形式的数有69个：$32^2,33^2,\ldots,100^2$

是$n^3$形式的数有12个：$10^3, 11^3,\ldots,21^3$

既是$n^2$形式又是$n^3$形式的数，为$n^6$形式的数有1个：$4^6$

所以：满足要求的正整数共有

9001-69-12+1=8921

# 鸽巢原理 例题

在一个平面上，称x,y都是整数的点(x,y)是整点。证明：

（1）5个整点中必有2个整点的重心是整点；

（2）9个整点中必有3个整点的重心是整点；

（3）设$n=2^a3^b$，其中a,b是非负整数，试证4n-3个整点中必有n个整点的重心是整点，即$(x_i,y_i),i=1,2,\ldots,n$的重心为 $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$

分析：对于任何一个整点(x,y)，x和y的奇偶性有4种可能：( 奇，奇)，(奇，偶)，(偶，奇)，(偶，偶)

# 鸽巢原理 例题

解：（1）现有5个整点，有鸽巢原理知，至少存在2个整点的奇偶性相同。设这两个整点为$(x_1,y_1)$和$(x_2,y_2)$，那么$(x_1+x_2)/2$, $(y_1+y_2)/2$都是整数，所有两个整点的重心仍为整点。

（2）设$(x,y)$是整点，每个分量模3后有下表的结果：

| | | |
|---|---|---|
| **（0,0）** | **（0,1）** | **（0,2）** |
| **（1,0）** | **（1,1）** | **（1,2）** |
| **（2,0）** | **（2,1）** | **（2,2）** |

若有3个点模3后的结果落在上表中的同一个格中，则这3个点的重心是整点。

若有3点占满一行，则3点的重心是整点；

若有3点占满一列，则3点的重心是整点；

若有3点是棋盘分布，则3点的重心是整点；

# 鸽巢原理 例题

- 由上表可知，若只有8个点，也不能保证有3个点的重心是整点。（因为若每个格子都是2点，则只占有4个格子，无法保证上面的要求）
- 现在有9个整点，假设其中任3点的重心都不是整点，则这9个点，至少占有[9/2]=5个格子（因为每格中最多有2个点，否则有3个点的重心为整点）每行最多有2格，又[5/2]=3，所以每列都有点。同理，每行都有点。不妨设第一行2点，第二行2点，第三行1点，前2行有两种模式：或这样第三行的点无论在哪一列都构成占满一列或构成一个棋盘分布。满足前面说的三点重心是整点的情况。
- 故9个点能保证其中存在3个整点的重心是整点

# 鸽巢原理 例题

（3）利用归纳法

(a)当$a=1,b=0$时，$n=2$,结论（1）已证明;

(b)当$a=0,b=1$时，$n=3$,结论（2）已证明;

(c)设$n=2^a3^b$，$4n-3$个整点中必有n个整点同奇偶性，那么它们的重心是整点。现只要证明以下两个结论即可:

I. 当$n'=2^{a+1}3^b=2n$时， $4n'-3=8n-3$个整点中必有$n'=2n$个整点的重心是整点;

II.当$n''=2^a3^{b+1}=3n$时， $4n''-3=12n-3$个整点中必有$n''=3n$个整点的重心是整点

# 鸽巢原理 例题

I. 现共有8n-3>4n-3个整点，由假设可知定存在n个整点的重心是整点，把这n个整点去掉（找到第一个重心），

剩下的7n-3>4n-3个整点，定存在n个整点的重心是整点，把这n个整点去掉（第二个重心），

剩下的6n-3>4n-3个整点，定存在n个整点的重心是整点，把这n个整点去掉（第三个重心），

剩下的5n-3>4n-3个整点，定存在n个整点的重心是整点，把这n个整点去掉（第四个重心），

剩下的4n-3个整点，定存在n个整点的重心是整点

结论（1）知：以上5个重心中，必有两个点$C_i$,$C_j$同奇偶，这8n-3个整点的重心为$C=(C_i+C_j)/2$

# 鸽巢原理 例题

II. 现共有12n-3>4n-3个整点，由假设可知定存在n个整点的重心是整点$C_1$

剩下11n-3>4n-3个整点,定存在n个整点的重心是整点$C_2$

剩下10n-3>4n-3个整点,定存在n个整点的重心是整点$C_3$

……

剩下4n-3个整点，定存在n个整点的重心是整点$C_9$

结论（2）知：以上九个整点中，必有三个点$C_i$,$C_i$,$C_k$的重心C为整点，这12n-3个整点的重心为$C=(C_i+C_i+C_k)/3$

# 例题

存在一个由51个1,29个0组成的80个0-1串，证明存在2个0，其位置之差是3或6（例如0110000中标出的两个0的位置之差为6）

证明：反证法

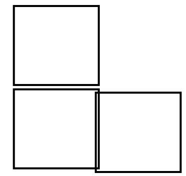
假设不存在这样的串，那么80位的0-1串中只要出现一个0，就必是如下模式：0_ _1_ _1,其中_是0或1。80位的0-1串中共有29个0，决定了29*2=58个1.

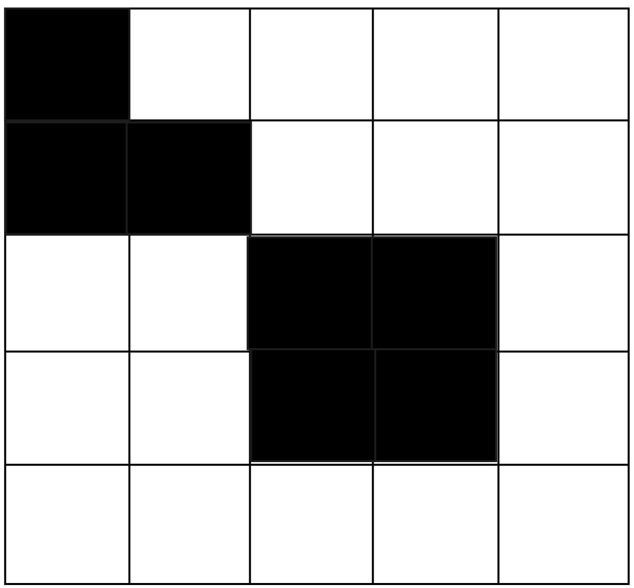
80位的0-1串中最后一位为0，则58个1中可能有6个1是落在了80位之外。

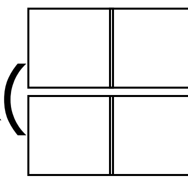
所以至少有58-6=52个1在80位的0-1串里，而1的个数只有51个，矛盾，所以假设不成立.

# 有禁区的排列 例题

有一个5 x 5的棋盘，禁区如图黑色标示，求排列数

解：R(  ) $=1+3x+x^2$



R(  ) $=1+4x+2x^2$

$$R(C)=(1+3x+x^2)(1+4x+2x^2)$$
$$=1+7x+15x^2+10x^3+2x^4$$

有禁区的排列数为

$5!-7\times4!+15\times3!-10\times2!+2\times1!$

# 例题

证明：m+1行，mC(m+1,2)+1列的格子用m种颜色着色，每格着一种颜色，其中必有一个4角的格子同色的矩阵。

证：用m种颜色对某一列进行染色。由于任何一列有m+1个格子，所以这一列中必有两个格子是同色的。同色的这两个格子的取法有C(m+1,2)种。

共有m种颜色，所以同色的模式（包括两个格子的颜色和行号）共有mC(m+1,2)种。

共有mC(m+1,2)+1列，所以定有两列具有相同的同色模式，即必有一个4角的格子同色的矩阵。

# 例题

m(m>2)个人互相传球，接球后即传给别人，由甲发球（作为第一次发球）。设经过n次传球后，球仍回到甲手中的传球方式为h(n)种（可假定h(0) =1）。

1，试求出h(n)的普通型母函数；

2，求出h(n)的通项公式。

解：由于每个人接球后即传给别人，所以每个人接球后有(m-1)种选择。n次传球后球回到甲手中，这时要求n-1次传球后，球一定不在甲手中。

易知，n-1次传球后，总共有$(m-1)^{n-1}$种传球方式。可分两种情况：

- n-1次传球后，球回到甲手中，这时的传球方式共有h(n-1)种，甲不可能将球再传给自己，所以这种情况下，n次传球后，不可能再到甲手中；
- n-1次传球后，球没到甲手中，只有这种情况下才能将第n次传球传到甲手中，这种共有$(m-1)^{n-1}$ -h(n-1)种传球方式

# 例题

所以$h(n)= (m-1)^{n-1} -h(n-1)$

递推关系为$h(n) +h(n-1)= (m-1)^{n-1}$

解得$h(n)=(m-1)/m[(-1)^{n}+(m-1)^{n-1}]$