组合数学

冯市松
fengjinsong@tongji.edu.cn

第2章 递推关系与母函数

2.11：指数型母函数

2.11.1 问题的来源

$S1=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$， S1的全排列个数是k!

$S2=\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_k\}$， S的r排列的个数是$k^r$

$S3=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}, n_1+n_2+\ldots+n_k=n$，S的n排列个数为

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}=$$

$$n!/(n_1!n_2!\ldots n_k!)$$

S3集合的r排列个数是多少？

2.11：指数型母函数

例2-27　有多重集$S=\{3\bullet a_1，2\bullet a_2，3\bullet a_3\}$, 从中取r个元素做组合，其组合数是多少？从中取r个元素做排列，有多少种可能？

- 多重集中取r个元素做组合的个数由母函数所确定的序列$\{a_r\}$确定

$$G(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)$$

- 多重集中取r个元素做排列的个数由母函数所确定的序列$\{a_r\}$确定

- 母函数=？

2.11：指数型母函数

8个元素取4个做可重排列：

$x_1x_3^3+x_2x_3^3+x_1^3x_3+x_1^3x_2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_1x_2x_3^2+x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3$

对应每一项的排列数为：

$$\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!1!2!}+\frac{4!}{2!1!1!}+\frac{4!}{1!2!1!}$$

比如：$x_1x_3^3$对应$x_1x_3x_3x_3$、$x_3x_1x_3x_3$、$x_3x_3x_1x_3$、$x_3x_3x_3x_1$这4种排列方式

有什么启发？

2.11：指数型母函数

定义：对于序列$a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$构造一函数：

$$G_e(x)=a_0+a_1\frac{x}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+a_3\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

称$G_e(x)$为序列$a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$的指数型母函数。

- 如若已知序列$a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$则对应的母函数$G_e(x)$便可根据定义给出。反之，如若已知序列的母函数$G_e(x)$，则该序列也随之确定。
- 序列$a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots$可以记为$\{a_n\}$

2.11：指数型母函数

例2-27　8个元素中a_1重复了3次，a_2重复了2次，a_3重复了3次，从中取r个排列（r≤8），其排列数为c_r，求取1到5的排列序列的母函数。

$$G_e(x) = \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)$$

$$= 1+3x+\frac{9x^2}{2}+\frac{14x^3}{3}+\frac{35x^4}{12}+\frac{17x^5}{12}+\frac{35x^6}{72}+\frac{8x^7}{72}+\frac{x^8}{72}$$

$$= 1+3\frac{x}{1!}+9\frac{x^2}{2!}+28\frac{x^3}{3!}+70\frac{x^4}{4!}$$

$$+170\frac{x^5}{5!}+350\frac{x^6}{6!}+560\frac{x^7}{7!}+560\frac{x^8}{8!}$$

2.11：指数型母函数

定理：设有k种不同元素，若元素a_1最多取n_1个，元素a_2最多取n_2个，……，元素a_k最多取n_k个，任取r个元素的排列数记为p_r,则序列$\{p_r\}$的指数型母函数为：

$$G_e(x)=(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_1}}{n_1!})$$

$$.(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_2}}{n_2!})\ldots(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n_k}}{n_k!})$$

p_r的值为展开式中$x^r/r!$的系数。

2.11：指数型母函数

做完乘法，x^r项由如下形式的项组成：

$$\frac{x^{n_1}}{n_1} \bullet \frac{x^{n_2}}{n_2} \bullet \ldots \bullet \frac{x^{n_k}}{n_k}$$ $n_1+n_2+\ldots+n_k=r$

$$\frac{x^r}{n_1 \bullet n_2 \bullet \ldots \bullet n_k} = \frac{r!}{n_1 \bullet n_2 \bullet \ldots \bullet n_k} \frac{x^r}{r!}$$

$$\frac{x^r}{r!} \text{项的系数为} \sum \frac{r!}{n_1 \bullet n_2 \bullet \ldots \bullet n_k}$$

证明略

2.11：指数型母函数

1、$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\dots$ 序列{1,1,…,1,…}

2、$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}-\frac{x^{3}}{3!}+\dots$ 序列{1,-1,1,-1…}

$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\dots$ 序列{1,0,1,0,…}

$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^{3}}{3!}+\dots$ 序列{0,1,0,1,…}

$e^{kx}=1+k\frac{x}{1!}+k^{2}\frac{x^{2}}{2!}+k^{3}\frac{x^{3}}{3!}+\dots$ 序列{1,k,k²,k³…}

2.12：广义二项式定理

二项式定理

$$(1+x)^n = C(n,0) + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \ldots + C(n,n)x^n$$

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \ldots + C(n+k-1,k)x^k + \ldots$$

$$(1-x)^{\alpha} = 1 - ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$+(-1)^k \frac{a(a-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$

2.12：广义二项式定理

广义二项式定理：

二项式定理推广到对任意实数次幂的展开

例：$$(1-x)^{\alpha} = 1 - ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$+(-1)^k \frac{a(a-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$

另x=2y,α=-3/2

$$(1-2y)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{-\frac{3}{2}}{h} (-2y)^h = \frac{1 \bullet 3 \bullet 5 \bullet \ldots \bullet (2h+1)}{h!}$$

2.12：广义二项式定理

例2-29　由a,b,c,d这4个符号取5个进行排列，要求a出现的次数不超过2次，但不能不出现，b不超过一次，c出现的次数不超过3次，d出现的次数为偶数。求满足上上述条件的排列数。

解：构造母函数$G_e(x)$。

$$G_e(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)}_{a}\underbrace{\left(1+\frac{x}{1!}\right)}_{b}\underbrace{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)}_{c}\underbrace{\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)}_{d}$$

$$= \frac{x}{1!}+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+645\frac{x^6}{6!}+$$

$$1785\frac{x^7}{7!}+140\frac{x^8}{8!}+7650\frac{x^9}{9!}+12600\frac{x^{10}}{10!}$$

2.13 应用举例

- 例2-35：某单位有8位男同志，5位女同志，现要组成一个小组，要求男同志数目为偶数，女同志不少于2个，求有多少种组合方式？
- 解：令a_n为从8位男同志中抽取出的n个的允许组合数。
  - 因为男同志数目为偶数，则$a_1=a_3=a_5=a_7=0$
  - $a_0=1$，$a_2=C(8,2)=28$，$a_4=C(8,4)=70$，$a_6=C(8,6)=28$，$a_8=C(8,8)=1$
  - 序列$a_0, a_1, \ldots a_8$对应的数值是：1,0,28,0,70,0,28,0,1
  - 构造母函数为：$M(x)=1+28x^2+70x^4+28x^6+x^8$

2.13 应用举例

- 类似方法可得女同志的组合数对应的母函数为：$F(x)=10x^2+10x^3+5x^4+x^5$
- $C(x)=M(x)F(x)$

$=(1+28x^2+70x^4+28x^6+x^8)(10x^2+10x^3+5x^4+x^5)=10x^2+10x^3+285x^4+281x^5+840x^6+728x^7+630x^8+350x^9+150x^{10}+38x^{11}+5x^{12}+x^{13}$

总的组合数为

$10+10+285+281+840+728+630+350+150+38+5+1=3328$

2.13 应用举例

例2-39： 求 $S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$

$$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

$$S_{n-1} = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2$$

$$\therefore \quad S_n - S_{n-1} = n^2$$

同理 $S_{n-1} - S_{n-2} = (n-1)^2$

相减得 $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = 2n - 1$

2.13 应用举例

同理 $S_{n-1}-2S_{n-2}+S_{n-3}=2(n-1)-1$

相减得 $S_n-3S_{n-1}+3S_{n-2}-S_{n-3}=2$

同理

$$S_{n-1}-3S_{n-2}+3S_{n-3}-S_{n-4}=2$$

$$\therefore \quad S_n-4S_{n-1}+6S_{n-2}-4S_{n-3}+S_{n-4}=0$$

$$S_0=0, \quad S_1=1, \quad S_2=5, \quad S_3=14$$

对应的特征方程为

$$r^4-4r^3+6r^2-4r+1=(r+1)^4=0$$

2.13 应用举例

r=1是四重根

$$\therefore \quad S_n = (A + Bn + Cn^2 + Dn^3)(1)^n$$

依据$S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 = 5, S_3 = 14$ 得关于A、B、C、D的连立方程组：

$$\begin{cases} A = 0 \\ B + C + D = 1 \\ 2B + 4C + 8D = 5 \\ 3B + 9C + 27D = 14 \end{cases}$$

2.13 应用举例

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 12$$

$$B = \frac{1}{12} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 8 \\ 14 & 9 & 27 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}$$

2.13 应用举例

$$C=\frac{1}{12}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 14 & 27\end{vmatrix}=\frac{1}{2},D=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad S_n=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

2.13 应用举例

- 例2-41 求$S_n=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$

(1)观察得，递推关系为$S_n=S_{n-1}+n^3$
初始值为$S_0=0$, $S_1=1$, $S_2=9$, $S_3=36$, $S_4=100$

(2)齐次特征方程为$x-1=0$ →特征根是1
齐次关系的一般解为$A(1)^n=A$ （A待定）

(3)非齐次关系的特解为（1是特征根）：
$a_n=A_1n+A_2n^2+A_3n^3+A_4n^4$，
带入递推关系解一个四元以此方程组

2.13 应用举例

另一个简明的方法是

设

$$S_n = A + A_1\binom{n}{1} + A_2\binom{n}{2} + A_3\binom{n}{3} + A_4\binom{n}{4}$$

2.13 应用举例

$S_0=0=A$

$$S_1=1=A_1,$$

$$S_2=1^3+2^3=9=1\cdot\binom{2}{1}+A_2,\quad A_2=7,$$

$$S_3=9+3^3=36=1\cdot 3+7\cdot\binom{3}{2}+A_3,\quad A_3=12,$$

$$S_4=36+4^3=100=1\cdot 4+7\cdot 6+12\cdot 4+A_4,$$

$$A_4=6.$$

2.13 应用举例

$$\therefore\quad S_n=\binom{n}{1}+7\binom{n}{2}+12\binom{n}{3}+6\binom{n}{4}$$

以*n*=5对上面的结果验证一下

$$S_5=100+5^3=225$$

$$\binom{5}{1}+7\binom{5}{2}+12\binom{5}{3}+6\binom{5}{4}$$

$$=5+70+120+30=255$$

2.13 应用举例

例2-44 n条直线将平面分成多少个域？假定无三线共点，且两两相交。

解：设n条直线将平面分成D_n个域。

初始条件：第1条直线将平面分成2个域$D_1=2$,
第2条直线将平面分成4个域$D_2=4$，
第3条直线将平面分成7个域$D_3=7$，
第4条直线将平面分成10个域$D_4=11$
...

递推关系：第n条直线被其余的n-1条直线分割成n段。这n段正好是新增的n个域的边界。 $D_n=D_{n-1}+n$

2.13 应用举例

例2-46 设有n条椭圆曲线，两两相交于2点，任意3条椭圆曲线不相交于一点，试问这样的n个椭圆将平面分成多少部分？

解：设n个椭圆曲线将平面分成D_n个部分。

初始条件：第1个椭圆将平面分成2个部分$D_1=2$,

第2个椭圆将平面分成4个部分$D_2=4$,

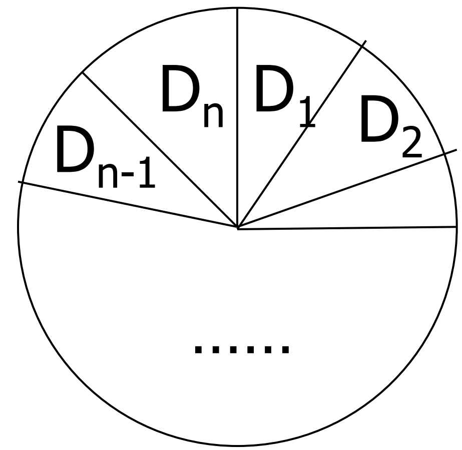
第3个椭圆将平面分成8个部分$D_3=8$,

…

递推关系：第n个椭圆和前面的n-1个椭圆相交于2(n-1)个点，这2(n-1)个点把第n个椭圆截成2(n-1)条弧。每条弧把2(n-1)个部分中的每个部分一分为二。故新增的部分就是2(n-1) 。 $D_n=D_{n-1}+2(n-1)$

2.13 应用举例

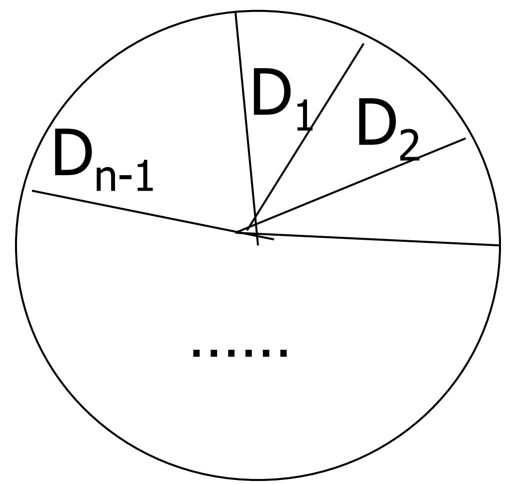
例2-47 一个圆域，依圆心等分成n个部分，用k种颜色对这n个域进行涂色，要求相邻的域不同色，试问有多少种涂色方案？



解：设a_n表示这n个域的涂色方案数。

分2种情况：

(1) D_{n-1}和D_1有相同颜色: D_n域有k-1种颜色可用，从D_1到D_{n-2}的涂色方案，和n-2个部分的涂色方案一一对应，由乘法原理知，涂色方案有(k-1) a_{n-2}种。



2.13 应用举例

- (2) D_{n-1}和D_1有不同颜色: D_n域有k-2种颜色可用，从D_1到D_{n-1}的每一个涂色方案和n-1个域的涂色方案一一对应，由乘法原理知，涂色方案有$(k-2)\ a_{n-1}$种。
- (3)由加法原理知，总方案数为

  $$a_n = (k-1)\ a_{n-2} + (k-2)\ a_{n-1}$$

  其特征方程是$x^2-(k-2)x-k+1=0$

  所以：$a_n = A(k-1)^n + B(-1)^n$
- 初始条件：$a_1=k$, $a_2=k(k-1)$,

  得$A=k/(k-1), B=0 \rightarrow a_n = k(k-1)^{n-1}$

2.13 应用举例

- 例2-49 求n位二进制数中最后3位为010**图像**的个数。

出现010图像的意思：对于n位二进制数$b_1b_2b_3\ldots b_n$，从左往右进行扫描，一但出现010图像，便从这图像后面一位从头开始扫描。

例如：对11位二进制数00101001010从左往右的扫描结果应该是2-4位，7-9位出现010图像。而不是4-6位，9-11位出现010图像。

$0\underline{010}10\underline{010}10$

2.13 应用举例

最后是010数字的n位二进制数的个数是2^{n-3}，分2种情况：

- 最后3位出现010图像**…*<u>010</u>,这类数的个数为a_n个。
- 第n-4为到第n-2位出现010图像，而在最后3位并不出现010图像**…*<u>010</u>10

得到$a_n+a_{n-2}=2^{n-3}$ $n\ge 5$

初始值为$a_3=1$，$a_4=2$， $a_2=0$

特征方程为$(x-2)(x^2+1)=0$

2.15 递推关系解法的补充

1、母函数法

2、迭代法

3、归纳法

4、置换法

5、相加消去法

2.15 递推关系解法的补充-母函数法

例 2-63 $a_n-3a_{n-1}-10a_{n-2}=28\cdot 5^n$

初始条件： $a_0=25$， $a_1=120$， 求$a_n=$？

解：令其母函数为$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$

由递推关系有$a_2-3a_1-10a_0=28\cdot 5^2$ 等式两边同乘x^2

$a_3-3a_2-10a_1=28\cdot 5^3$ … x^3

$a_4-3a_3-10a_2=28\cdot 5^4$ … x^4

+) …

全部相加$G(x)-120x-25-3x[G(x)-25]-10x^2G(x)=700x^2/(1-5x)$

整理得：

$$G(x)=\frac{25-80x+475x^2}{(1-5x)^2(1+2x)}=\frac{A}{(1-5x)^2}+\frac{B}{1-5x}+\frac{C}{1+2x}$$

2.15 递推关系解法的补充-母函数法

$$25-80x+475x^2=A(1+2x)+B(1-5x)(1+2x)+C(1-5x)^2$$

可解得A=20,B=-10,C=15 。所以

$$G(x)=\frac{20}{(1-5x)^2}+\frac{-10}{1-5x}+\frac{15}{1+2x}$$

利用母函数公式

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$$

和

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

把公式里的x用5x替换

2.15 递推关系解法的补充-母函数法

$$G(x) = 20[(1 + 2(5x) + 3(5x)^2 + 4(5x)^3 + \ldots + (n+1)5^n x^n + \ldots]$$
$$+ (-10)[1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \ldots + 5^n x^n + \ldots]$$
$$+ 15[1 + (-2x) + (-2x)^2 + (-2x)^3 + \ldots + (-2)^n x^n + \ldots]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [20(n+1)5^n - 10 \bullet 5^n + 15(-2)^n] x^n$$

$$\therefore a_n = 20(n+1)5^n - 10 \bullet 5^n + 15(-2)^n$$

2.15 递推关系解法的补充-置换法

例：求下列递推关系的解

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2^n}, a_0 = 7$$

解1：置换法：

$$2^n a_n - 2^n a_{n-1} = 1 \qquad 2^n a_n - 2 \times 2^{n-1} a_{n-1} = 1$$

令 $b_n = 2^n a_n$ $\qquad b_n - 2 \times b_{n-1} = 1$

$$b_n = k 2^n - 1 \qquad b_n = 8 \times 2^n - 1$$

$$a_n = \frac{b_n}{2^n} = 8 - \frac{1}{2^n}$$

***

2.15 递推关系解法的补充

例：求下列递推关系的解

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2^n}, a_0 = 7$$

解2：猜解法：

$$k2^{-n} - k2^{-(n-1)} = 2^{-n}$$

特解 $-\frac{1}{2^n}$

一般解： $a_n = k - \frac{1}{2^n}$　　$a_n = 8 - \frac{1}{2^n}$

2.15 递推关系解法的补充

例：求下列递推关系的解

$$a_n = a_{n-1}^2 a_{n-2}^3, a_0 = 1, a_1 = 2$$

解：用置换法：

$$\ln a_n = 2\ln a_{n-1} + 3\ln a_{n-2}$$

$$令\ b_n = \ln a_n, 则有\ b_n = 2b_{n-1} + 3b_{n-2}$$

解特征方程可得： $r_1 = 3, r_2 = -1$

$$b_n = k_1 3^n + k_2(-1)^n \quad b_0 = 0, b_1 = \ln 2$$

2.15 递推关系解法的补充

$$0 = k_1 + k_2$$
$$\ln 2 = 3k_1 - k_2$$

$$k_1 = \frac{\ln 2}{4}, k_2 = -\frac{\ln 2}{4}$$

$$b_n = \frac{\ln 2}{4} 3^n - \frac{\ln 2}{4}(-1)^n = [\frac{1}{4} 3^n - \frac{1}{4}(-1)^n] \ln 2$$

令 $b_n = \ln a_n$

$$a_n = 2^{\frac{1}{4} 3^n - \frac{1}{4}(-1)^n}$$

作业

- 2.1
- 2.4
- 2.14
- 2.20
- 2.36
- 2.38
- 2.42
- 2.48
- 2.64
- 2.66