组合数学

冯市松
fengjinsong@tongji.edu.cn

第2章 递推关系与母函数

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

有如下的递推关系：

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} = b_n$$

称为k阶线性递推关系，其中若$c_1, c_2, \ldots, c_k$都是常数，则称为常系数线性递推关系，若$b_n \neq 0$，则称为是非齐次的。

2.10任意阶齐次递推关系

设$r_1,r_2,\ldots,r_s$是线性常系数齐次递推关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} = 0$$

的不同的特征根，并设h_i是r_i的重根数，$i=1,2,3,\ldots,s$。则

$$a_n = (A_0 + A_1 n + \ldots + A_{h_1-1} n^{h_1-1}) r_1^{\,n}$$
$$+ (B_0 + B_1 n + \ldots + B_{h_2-1} n^{h_2-1}) r_2^{\,n} + \ldots$$
$$+ (T_0 + T_1 n + \ldots + T_{h_s-1} n^{h_s-1}) r_s^{\,n}$$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} = b_n$$

对应的齐次递推关系。

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} = 0$$

如果序列x_n和y_n满足*非齐次递推关系*，

则序列$z_n=x_n-y_n$满足其对应的齐次递推关系。

证明：略

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

定理1 若f_n是线性常系数非齐次递推关系a_n的特解，则这个线性常系数非齐次递推关系a_n的解有如下形式：

$a_n=f_n+$*对应的线性常系数齐次递推关系的解。*

非齐次通解=齐次通解+非齐次特解

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

方法： 对于如下非齐次递推关系。

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} = r^n b(n) \quad (2.11.3)$$

若b(n) 是n的p次多项式，如果r是线性齐次递推关系，

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} = 0$$ **的特征方程：**

$$K(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \ldots + c_k = 0$$

的m重根，则递推关系的特解有以下形式：

$$r^n(k_0 n^m + k_1 n^{m+1} + \ldots + k_p n^{m+p})$$

其中$k_0, k_1, \ldots k_p$由递推关系决定

若r不是K(x)=0的根，则特解是m=0时的形式。

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

- Hanoi塔问题求解

递推关系： $h_n = 2h_{n-1}+1$ （非齐次）

初始条件： $h_0 =0$

(1)齐次递推关系为$h_n = 2h_{n-1}$

齐次特征方程为$x-2=0$ → 特征根是2

齐次递推关系的通解为$h_n =A2^n$ (A待定)

(2)非齐次递推关系的特解：

$b_n=1^1\bullet 1$, $p=0$; 1不是特征根，$m=0$. 所以特解是一个常数

设特解为c

$c=2c+1$ → $c=-1$

(3)非齐次递推关系的通解为： $h_n =A2^n-1$

由初始条件$h_0 =0$得$A=1$

所以： $h_n =2^n-1$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

例：已知递推关系： $a_n = 3a_{n-1}-4n$

初始条件： $a_0 =2$，求 $a_n =$？

(1)齐次递推关系为 $a_n = 3a_{n-1}$

齐次特征方程为 $x-3=0$ → 特征根是3

齐次递推关系的通解为 $a_n =A3^n$ (A待定)

(2)非齐次递推关系的特解：

$b_n=-4n=1^1\bullet(-4n)$,是n的一次的多项式; 1不是特征根，m=0. 所以设特解为An+B，

代入递推关系得 A=2, B=3 所以特解为2n+3

(3)非齐次递推关系的通解为： $a_n =A3^n+2n+3$

由初始条件 $a_0 =2$ 得A=-1

所以： $a_n =-3^n+2n+3$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

例2-13：已知递推关系：$a_n = a_{n-1}+6a_{n-2}+5\bullet 4^n$

初始条件：$a_0 =5$，$a_1 =2$，求$a_n =$？

(1)齐次递推关系为$a_n = a_{n-1}+6a_{n-2}$

齐次特征方程为$x^2-x-6=0$ → 特征根是3, -2

齐次递推关系的通解为$a_n =A3^n +B(-2)^n$ (A,B待定)

(2)非齐次递推关系的特解：

$b_n=5\bullet 4^n$, 4不是特征根，故设特解为$C4^n$，由递推关系知 $C4^n= C4^{n-1} + 6C4^{n-2}+5\bullet 4^n$ → $C=40/3$

特解为$(40/3)\ 4^n$

(3)非齐次递推关系的通解为：

$a_n = A3^n+B(-2)^n+(40/3)\ 4^n$

由初始条件得$A=-68/5$, $B=79/15$

所以：$a_n = (-68/5)3^n+(79/15)(-2)^n +(40/3)4^n$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

例2-14：已知递推关系：$a_n = a_{n-1}+6a_{n-2}+3^n$

初始条件：$a_0 =5$，$a_1 =2$，求$a_n =$?

(1)齐次递推关系为$a_n = a_{n-1}+6a_{n-2}$

齐次特征方程为$x^2-x-6=0$ → 特征根是3, -2

齐次递推关系的通解为$a_n =A3^n +B(-2)^n$ (A,B待定)

(2)非齐次递推关系的特解：

$b_n=3^n$, 3是特征根，故设特解为$cn3^n$，由递推关系知 $cn3^n= c(n-1)3^{n-1} + 6c(n-2)3^{n-2}+3^n$ → $c=3/5$

特解为$(3/5)\ n3^n$

(3)非齐次递推关系的通解为：

$a_n = A3^n+B(-2)^n+(3/5)n3^n$

由初始条件得$A=51/25$, $B=74/25$

所以：$a_n = (51/25)\ 3^n+(74/25)\ (-2)^n +(3/5)\ n3^n$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

例2-14：已知递推关系： $a_n = a_{n-1}+6a_{n-2}+3^n$

初始条件： $a_0 =5$， $a_1 =2$，求 $a_n =?$

解法2：令其母函数为 $G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$

由递推关系有 $a_2-a_1-6a_0=3^2$ 等式两边同乘 x^2

$a_3-a_2-6a_1=3^3$ … x^3

$a_4-a_3-6a_2=3^4$ … x^4

+) …

全部相加 $G(x)-2x-5-x[G(x)-5]-6x^2G(x)=3^2x^2/(1-3x)$

整理得：

$$G(x) = \frac{5-18x+18x^2}{(1+2x)(1-3x)^2} = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{1-3x} + \frac{C}{1-3x}$$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

$(A+B+C)+(-6A-B+2C)x+(9A-6B)x^2=5-18x+18x^2$

得

$$\begin{cases} A+B+C=5 \\ 6A+B-2C=18 \\ 9A-6B=18 \end{cases}$$

$A=74/25,\ B=36/25,\ C=3/5$

所以： $a_n=(74/25)(-2)^n+(51/25)\,3^n+(3/5)\,n3^n$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

例：已知递推关系：$a_n = a_{n-1}+n^3$

初始条件：$a_0 =0$，求$a_n =$？

(1)齐次递推关系为$a_n = a_{n-1}$

齐次特征方程为$x-1=0$ → 特征根是1

齐次递推关系的通解为$a_n =A1^n =A$ (A待定)

(2)非齐次递推关系的特解：

$b_n=n^3=1^n\bullet n^3$，1是特征根，故设特解为$An^4+Bn^3+Cn^2+Dn$，

由递推关系知

$An^4+Bn^3+Cn^2+Dn=A(n-1)^4+B(n-1)^3+C(n-1)^2+D(n-1)+(n-1)^3$

→ 特解为$(1/4)\ n^4+(-1/2)\ n^3+(1/4)n^2$

(3)非齐次递推关系的通解为：

$a_n = (1/4)\ n^4+(1/2)\ n^3+(1/4)n^2 +A$

由初始条件$a_0 =0$得$A=0$

所以：$a_n = (1/4)\ n^4+(1/2)\ n^3+(1/4)n^2 =n^2(n-1)^2/4$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

例2-17 $a_n+3a_{n-1}-10a_{n-2}=(-7)^n n$

对应齐次关系的特征方程

$$K(x)=x^2+3x-10=(x+5)(x-2)=0$$

有两个特征根：2和-5，-7不是特征根，故m=0，按定理，非齐次关系的特解可写为：

$$\alpha=(-7)^n(k_0+k_1 n)$$

代入递推关系式：

$$(-7)^n(k_0+k_1 n)+3(-7)^{n-1}[k_0+k_1(n-1)]$$
$$-10(-7)^{n-2}[k_0+k_1(n-2)]=(-7)^n n$$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

$$18k_1 n + (18k_0 + 41k_1) = 49n$$

$$18k_1 = 49, 18k_0 + 41k_1 = 0$$

$$k_1 = \frac{49}{18}, k_0 = -\frac{2009}{324}$$

特解: $$\alpha = (-7)^n[-\frac{2009}{324} + (\frac{49}{18})n]$$

因此一般解为:

$$a_n = k_1(2)^n + k_2(-5)^n + (-7)^n[(\frac{49}{18})n - \frac{2009}{324}]$$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

例2-18：已知递推关系: $a_n+3a_{n-1}-10a_{n-2}=2^n(5+n)$, 求递推关系的一个特解

(1)齐次递推关系为$a_n+3a_{n-1}-10a_{n-2}=0$

齐次特征方程为$x^2+3x-10=0$ →特征根是2, -5

(2)非齐次递推关系的特解：

$b_n=2^n(5+n)$, 2是特征根，

故设特解为（$An+Bn^2)2^n$，

代入递推关系可以确定A=87/49，B=1/7

故特解为$[(87/49)n+(1/7)n^2]2^n$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

例2-19 $a_n-3a_{n-1}+2a_{n-2}=6n^2$，$a_0=6,a_1=7$

(1)齐次特征方程 $K(x)=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$

有两个特征根：1和2。

(2)右端项$6n^2$可以看作是$(1)^n\ 6n^2$, 1是特征根,

所以特解 $\alpha=(k_1n+k_2n^2+k_3n^3)1^n$

(3)特解代入递推关系求出系数$k_1=-49,k_2=-15,k_3=-2$

所以特解是$-49n-15n^2-2n^3$

***

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

- 非齐次项为$b_n = b_n^{(1)} + b_n^{(2)} + \ldots + b_n^{(i)}$

  设非齐次项$b_n^{(1)}$的特解为$a_n^{(1)}$
  设非齐次项$b_n^{(2)}$的特解为$a_n^{(2)}$
  ……
  设非齐次项$b_n^{(i)}$的特解为$a_n^{(i)}$

- 则非齐次项b_n对应的特解为
  $a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \ldots + a_n^{(i)}$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

例：已知递推关系: $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 10 \bullet 4^n - 7 \bullet 3^n$, 求递推关系的解

(1)齐次递推关系为$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$

齐次特征方程为$x^2 - x - 6 = 0$ →特征根是-2, 3

齐次关系对应的通解为$A(-2)^n + B3^n$

(2)对应的特解形式为(4不是特征根，3是特征根):

$a_n = C4^n + (Dn)3^n$,

由递推关系得C=80/3，D=-21/5，故

特解为$a_n = (80/3)^n - (21/5)n3^n$

(3)非齐次关系对应的通解为

$a_n = A(-2)^n + B3^n + (80/3)^n - (21/5)n3^n$

2.7 关于线性常系数非齐次递推关系

- 常系数线性非齐次递推关系的求解步骤
  1. 根据题意求递推关系
  2. 解对应齐次关系的特征方程
  3. 写出齐次关系的通解
  4. 找到非齐次关系的特解
  5. 代入递推公式得到特解中的系数
  6. 写出非齐次关系的通解表达式
  7. 根据初值确定通解中的系数
  8. 得出非齐次递推关系的通解