Département de Physique, de Génie physique et d'Optique,

Université Laval,

Québec.

Initiation aux Tenseurs

Scalaires, vecteurs et *autres* sous transformation

Note : Il est conseillé de lire d'abord le module sur les transformations de coordonnées ou l'équivalent. Il y a une table des matières en page 45

1. Nomenclature et critère tensoriel

La notation tensorielle est une nomenclature, i.e. une façon systématique d'appeler les variables et champs d'intérêt physique et mathématique. La notation tensorielle permet de faire simplement des opérations sur nos équations de physique mathématique qui autrement seraient beaucoup plus lourdes. Cette notation n'est pas difficile à apprendre, mais exige qu'on apprenne certains termes et concepts.

Les tenseurs étudiés ici sont les variables et champs qui notent et mesurent les propriétés et caractéristiques de phénomènes physiques, mathématiques, chimiques, d'ingénierie… comme la position d'un objet, sa vitesse, sa largeur… un champ électrique ou magnétique..., la pression d'un fluide…, l'énergie, la force agissant sur un objet…

Nous sommes habitués à une nomenclature où ces quantités sont appelées scalaire, vecteur, dyadique… Dans un espace à N dimensions, un scalaire a une ou N^0 composante, un vecteur en a N ou N^1, un dyadique en a N^2 , etc.

Nous verrons que le classement des quantités en tant que tenseurs sera plus restrictif, mais plus précis. Le tenseur d'ordre zéro est un (vrai) scalaire et a une seule composante, mais ce n'est pas suffisant d'avoir une seule composante, i.e. d'être un nombre *isolé* pour être un tenseur d'ordre zéro. Un tenseur d'ordre un est un (vrai) vecteur et a N composantes, mais ce n'est pas suffisant d'avoir N composantes pour être un tenseur d'ordre N , etc. Un exemple évident est que la composante d'un vecteur n'est pas un scalaire, ce que certains pensent, mais elle est la composante d'un vecteur et cela fera toute la différence. Imaginez par exemple un segment de droite qui a une longueur et une orientation mesurée p/r à un système d'axes. Si vous faites tourner le système d'axes, l'orientation du segment de droite n'est plus la même mesurée p/r au nouveau système, mais la longueur du segment n'a pas changé. Il s'agit donc de deux types différents de quantité.

Le critère de sélection pour le classement tensoriel est le comportement des quantités lorsque nous opérons une **transformation** affectant les coordonnées qui supportent notre espace, générant une transformation des *composantes* des champs représentant nos quantités physiques. Un exemple *simple* de transformation est une transformation de système de coordonnées, par exemple d'un système cartésien à un système sphérique. Un autre exemple peut être une rotation d'un système cartésien. Il y a un nombre infini de transformations possibles. D'une façon générale, nous noterons ces coordonnées x^i, l'indice i étant placé en position supérieure par pure convention (pour l'instant), mais une fois cette convention acceptée, on doit la respecter, parce qu'en général, $x_i \neq x^i$, comme nous le verrons.

De façon générale, une transformation affectant les coordonnées signifie que nous passerons d'un ensemble (ancien) $\{x^i \mid i = 1, 2, 3, \ldots N\}$ à un ensemble (nouveau) $\{x^{i'} \mid i' = 1, 2, 3, \ldots N\}$. Chaque ensemble compte N nombres, les coordonnées d'un même point. Ce point peut être strictement le même, par exemple lors d'une transformation dite des coordonnées (cartésiennes vers sphériques, par exemple), ou peut résulter d'une translation, d'une rotation, ou… auquel cas il y a *déplacement* où chaque *nouveau* point provident d'un seul *ancien* point et on peut dire qu'il s'agit du même point, ce qui est vrai de tout ce qui est transporté avec la transformation, pour tout isomorphisme. Nous dirons alors qu'il s'agit du même point, qu'il y ait déplacement ou non. Il existe une liste pratiquement infinie d'autres transformations, comme les rotations d'axes de référence, les contractions de ces axes, leur inversion,…

2. Transformation et matrice de Jacobi

Notation : Certains auteurs priment les coordonnées et écrivent x'^i , alors que d'autres, comme nous faisons ici, priment l'indice et écrivent $x^{i'}$. Un exemple serait la transformation des coordonnées de cartésiens à sphériques

Dans ce cas, si les *anciennes* coordonnées sont cartésiennes, alors les trois coordonnées de la position d'un objet ponctuel seraient

$$x^1 = x$$

$x^2 = y$

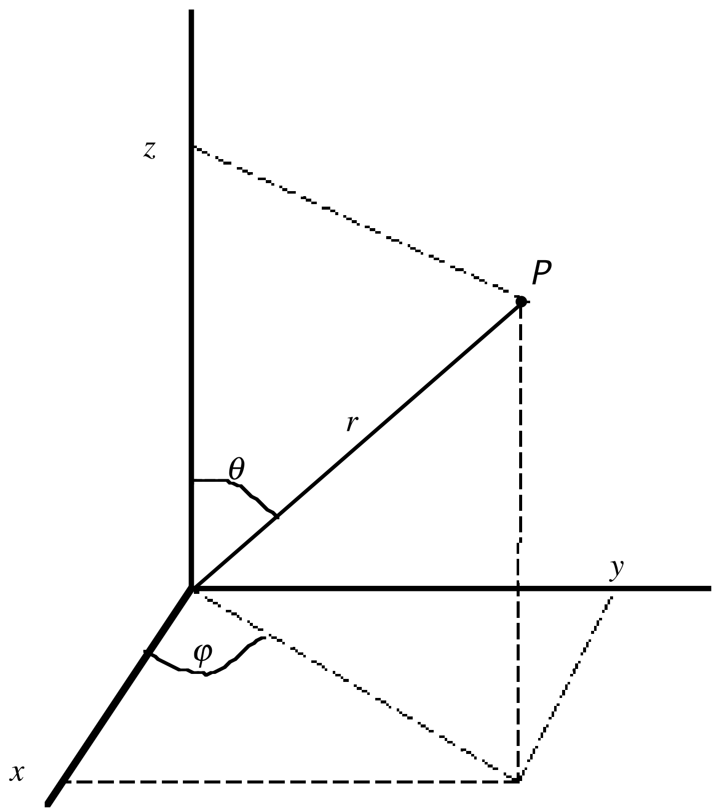
$x^3 = z$

et si les nouvelles coordonnées, i.e. résultant de la transformation, sont les coordonnées sphériques du même point, alors nous écrirons

$x^{1'} = r$

$x^{2'} = \theta$

$x^{3'} = \varphi$



Les $\{x^i \mid i = 1, 2, 3, \ldots N\}$, ici $\{x, y, z\}$ sont les *anciennes* coordonnées et les $\{x^{i'} \mid i' = 1, 2, 3, \ldots N\}$, ici $\{r, \theta, \varphi\}$ sont les *nouvelles* coordonnées du même point P. Puisque ici $N = 3$, trois coordonnées sont nécessaires et suffisantes pour définir ce point, il s'ensuit que seules N de ces coordonnées sont indépendantes, alors que les N autres ne seront pas linéairement indépendantes des N premières. D'un autre côté, les deux ensembles de N coordonnées désignent le même point. Il doit donc, physiquement et géométriquement exister des relations entre N coord. indépendantes et N coord. dépendantes. Si nous choisissons les anciennes comme indépendantes, alors ces relations s'écrivent comme donnant les nouvelles en fonction des anciennes, i.e.

$$x^{i'} = x^{i'}(x^i), \quad i, i' = 1, 2, 3, \ldots N$$

Puisque le point existe, indépendamment du choix de coordonnées, ces relations doivent être réversibles, i.e. les relations inverses doivent exister

$$x^i = x^i(x^{i'})$$

On dit des premières relations qu'elles définissent la transformation de coordonnées et les deuxièmes définissent la transformation inverse. L'existence de cet inverse implique que la matrice de Jacobi de la transformation est non singulière. Nous noterons A cette matrice dont les éléments sont définis en utilisant les N relations définissant la transformation

$$A^{i'}_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$$

2.1. Notation concernant la matrice de Jacobi (seulement)

1. Ici, l'indice supérieur, appelé indice contravariant, sera par convention utilisé comme indice de ligne de la matrice, alors que l'indice inférieur, appelé indice covariant est l'indice de colonne
2. L'algèbre des indices est similaire à l'algèbre des fractions composées

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$ exactement comme dans les fractions composées

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1 \times 4}{2 \times 3}$$

Ces règles sont très simples et connues. Ce sont celles des fractions composées. À gauche, a est au numérateur (haut) du numérateur, alors que b est au dénominateur (bas) du même numérateur, alors que c est au numérateur du dénominateur et d est au dénominateur du dénominateur. Plaçant tout cela au même niveau nous donne ad sur bc. On voit que, replacés sur une même ligne, d qui était au bas du bas monte au haut, alors que c qui était au haut du bas reste au bas, alors que b qui était au bas du haut s'en va au bas, et que a qui était au haut du haut reste au haut. Ainsi, on voit que l'utilisation des mêmes règles pour fixer la position des indices sur $A_i^{i'}$ permet d'identifier que *i*' était comme *a* et reste donc en haut, alors que *i* était comme *c* et reste donc au bas.

De façon similaire, nous avons

$$A_{ij'} = \frac{\partial x_i}{\partial x^{j'}}$$

Toujours de la même façon, nous avons aussi

$$A_{i'}^{i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$$

Il est important de réaliser que

$$A_i^{i'} \neq A_{i'}^{i}$$

Afin de déterminer la différence entre ces deux quantités, débutons avec l'expression de la transformation $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$ dont nous calculons la différentielle

$$dx^{i'} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} dx^j = \sum_{j=1}^{N} A_j^{i'} dx^j$$

Nous calculons maintenant la différentielle de l'expression pour la transformation inverse

$$x^j = x^j\left(x^{j'}\right) \quad \Rightarrow \quad x^j = x^j\left(x^{j'}\right) \quad \Rightarrow \quad dx^i = \sum_{j'=1}^{N} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} dx^{j'} = \sum_{j'=1}^{N} A_{j'}^{j} dx^{j'}$$

Remplaçant la deuxième dans la première donne

$$dx^{i'} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{j'=1}^{N} A_j^{i'} A_{j'}^{j} dx^{j'}$$

La double somme à droite fait intervenir tous les $dx^{j'}$, pour *j'* = 1,2,3…*N*. Mais cette somme ne doit donner qu'une seule de ces différentielles, parce que nous savons, à gauche, que la somme sur *j'* DOIT se limiter au seul terme correspondant à *j'* = *i'* qui est <u>fixé</u> à gauche. La seule façon pour que la somme sur *j'* se limite au seul terme *j'* = *i'* est que

$$\sum_{j=1}^{N} A_j^{i'} A_{j'}^{j} = \delta_{j'}^{i'} \text{ = delta de Kronecker, où}$$

$\delta_i^{j'} = 1$ si $i = j'$ et $= 0$ si $i \neq j'$ (même convention d'indice ici que la matrice $A_i^{i'}$).

De cette façon, nous *fermons la boucle*, puisqu'alors nous garantissons que $dx^j = dx^j$.

Vu de façon matricielle, le δ est un élément de la matrice unité. Le produit entre les matrices *A* ci-dessus est donc un produit d'une matrice par son inverse, la somme sur *j* portant sur les colonnes du *A* de gauche et sur les indices de ligne du *A* de droite. C'est donc bien un produit matriciel qui donne ici la matrice unité. Il s'agit donc du produit d'une matrice par son inverse. On conclut donc que

$A_i^{j'}$ est un élément de la matrice de transformation et

$A_{j'}^{j}$ est un élément de la matrice inverse.

Le produit de la matrice de Jacobi par son inverse donne donc la matrice unité, donc l'inverse existe, donc la transformation n'est pas (ne peut pas être) singulière.

Puisque nous parlons de notation et que nous opérons des dérivées (partielles ordinaires), disons qu'il existe plusieurs façons de noter cette opération de dérivée (partielle)

$$\frac{\partial V_j^i}{\partial x^k} \equiv \partial_k V_j^i \equiv V_{j,k}^i$$

où on note le respect de notre algèbre des indices. De la même façon, nous aurions

$$\frac{\partial V_j^i}{\partial x_k} \equiv \partial^k V_j^i = V_j^{i,k}$$

Ces notations allègent les équations, tout en restant très claires.

2.2. Nomenclature 101, la valence, co et contra

Il est clair que le positionnement des indices n'est pas arbitraire, une fois qu'on a accepté la convention que les coordonnées (et vecteurs) *ordinaires* (entendons physiques) sont notées avec un indice supérieur, ce que nous faisons ici. On donne à l'indice supérieur le nom d'indice contravariant et à l'indice inférieur le nom d'indice covariant. On a vu ci-dessus que la somme portait sur des termes identifiés par un indice *j'* répété, une fois covariant (dans le facteur de gauche) et une fois contravariant (dans le facteur de droite). Il en sera toujours de même, i.e. un indice répété covariant-contravariant dans un même terme sera toujours sommé. En fait, un indice ne sera pas sommé s'il apparaît deux fois covariant ou deux fois contravariant dans le même terme. À cause de cette convention systématique, nous laissons tomber le symbole de somme et nous écrirons simplement

$$A_j^{i'} A_{j'}^{j} \equiv \sum_{j=1}^{N} A_j^{i'} A_{j'}^{j}$$

Cela permet d'alléger la notation considérablement. C'est la convention d'Einstein, ici systématisée, la véritable convention d'Einstein.

2.3. Deux exemples

Dans le développement qui suit, nous ferons systématiquement appel à deux exemples de transformation pour illustrer les quantités, les concepts et la nomenclature. Le premier exemple sera la transformation des coordonnées d'un point P dans un espace euclidien $\mathbf{E_3}$, passant des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques du même point. Le deuxième exemple est celui d'une rotation d'un angle α du plan xOy par rapport à un axe Oz. Ici, nous limiterons parfois l'espace est à 2 dimensions pour simplifier l'algèbre. Voyons ces deux exemples

2.3.1. Cartésien à sphérique

Dans le premier exemple, la transformation ne déplace pas les points de l'espace, elle les définit différemment par

$$x^i = \{x, y, z | i = 1,2,3\}, \quad x^{i'} = \{r, \theta, \varphi | i' = 1',2',3'\}$$

selon les transformations (inverses) clairement non linéaires

$$\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi \quad \Leftrightarrow \quad x^1 = x^{1'}\sin x^{2'}\cos x^{3'} \\
y &= r\sin\theta\sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = x^{1'}\sin x^{2'}\sin x^{3'} \\
z &= r\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = x^{1'}\cos x^{2'}
\end{aligned}$$

Nous savons que ces transformations se renversent, puisque chacun des deux systèmes de coordonnées est parfaitement capable de définir tout point de l'espace, où

$$\begin{aligned}
r &= \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \\
\theta &= \cos^{-1}\left(z / \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}\right) \\
\varphi &= tg^{-1}\left(y / x\right)
\end{aligned}$$

constituent les équations de la transformation, également non linéaire, qui nous fait passer des cartésiens aux sphériques.

Le premier outil dont nous avons besoin, c'est l'ensemble des coefficients $A_j^{i'}$ de la matrice de Jacobi de la transformation

Ainsi

$$A_1^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \equiv \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

alors que

$$A_2^{1'} = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}, \quad A_3^{1'} = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}}$$

On calcule aussi

$$A_1^{1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \equiv \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$A_2^{1'} = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}, \quad A_3^{1'} = \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}$$

$$A_1^{2'} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}\left[x^2+y^2+z^2\right]}$$

$$A_2^{2'} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}\left[x^2+y^2+z^2\right]}$$

$$A_3^{2'} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\left[x^2+y^2+z^2\right]}$$

$$A_1^{3'} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x\left(x^2+y^2\right)}$$

$$A_y^{3'} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)}$$

$$A_3^{3'} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

(Vous n'aurez plus jamais à les calculer de votre vie !).

Toutes ces quantités ont deux indices et peuvent donc s'écrire comme des matrices. Ici, nous utilisons la convention habituelle où l'indice contravariant (supérieur) est l'indice de ligne et l'indice covariant (inférieur) est l'indice de colonne.

On peut aussi calculer la matrice de Jacobi de la transformation inverse

$$A_{i'}^{i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$$

Explicitement

$$A_{i'}^{i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$$

$$A_{1'}^{1} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} = \frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi$$

$$A_{2'}^{1} = \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\varphi$$

....

$$A_{3'}^{3} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

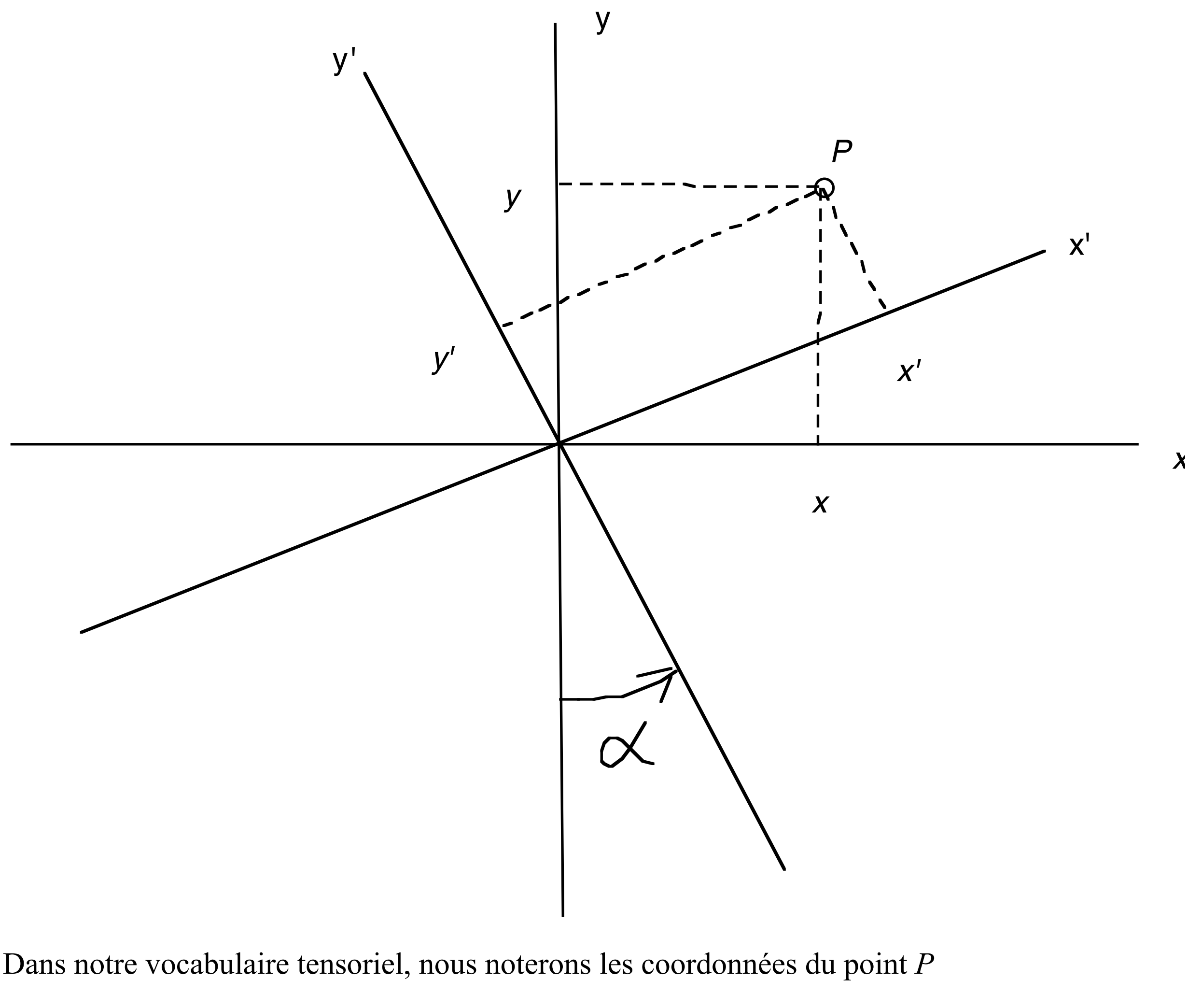
Par produit matriciel ordinaire, on vérifie directement que

$$A^i_{j'} A^{j'}_k = \delta^i_k$$

qui est un élément de la matrice unité, indiquant que les deux matrices sont l'inverse l'une de l'autre. Il est clair que ces calculs peuvent être fastidieux, mais ils ne sont pas techniquement difficiles. Nous verrons plus loin des utilisations plus utiles de cette matrice de transformation et de son inverse. Il faut aussi noter qu'une fois fait, le calcul n'a pas à être refait, il est général.

2.3.2. Rotation p/r à Oz dans le plan *Oxy*

Le prochain exemple touche les coordonnées (*x, y*) dans le plan *xOy* du point *P* et les coordonnées (*x', y'*) du même point *P* dans le référentiel *Ox'y'* obtenu du premier par une rotation d'un angle α selon *Oz* des axes *Ox* et *Oy* vers les axes *Ox'* et *Oy'*, tel que décrit sur la figure ci-dessous. Nous allons garder le point fixe et faire tourner les axes (faire tourner le point dans un système fixe est également possible)



Dans notre vocabulaire tensoriel, nous noterons les coordonnées du point *P*

$$x^i = \{x, y | i = 1,2\}$$
$$x^{i'} = \{x', y' | i = 1,2\}$$

Le point P étant unique, chacun des deux ensembles de coordonnées est suffisant pour le décrire et il n'y a donc que deux coordonnées indépendantes. Il doit donc être possible d'écrire un ensemble en fonction de l'autre, ce que la géométrie nous enseigne à faire d'ailleurs et qui donne

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x^{1'} = x^1\cos\alpha + x^2\sin\alpha$$
$$y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad x^{2'} = -x^1\sin\alpha + x^2\cos\alpha$$

et la transformation inverse

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x^1 = x^{1'}\cos\alpha - x^{2'}\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad x^2 = x^{1'}\sin\alpha + x^{2'}\cos\alpha$$

Ces expressions nous donnent directement les coefficients $A_i^{j'}$ et $A_{i'}^{j}$. Par exemple

$$A_{1'}^{2} = \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} = \sin\alpha, \quad A_1^{2'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} = -\sin\alpha, \quad etc$$

La matrice d'éléments $A_i^{j'}$ est simplement

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

alors que celle des $A_{i'}^{j}$ est

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

On constate facilement qu'elles sont effectivement l'inverse l'une de l'autre et que leur produit donne la matrice unité. Nous reprendrons ces quantités plus tard pour développer les outils d'intérêt.

3. Tenseurs, définition sous transformation

Nous allons maintenant définir ce que nous appelons tenseurs. Le point de départ est un espace $\boldsymbol{X_N}$ sous-tendu par N coordonnées $\{x^i | i = 1,2,3...N\}$ qui sont les coordonnées d'un point P et nous opérerons une transformation sur les coordonnées vers un nouvel ensemble $\{x^{i'} | i' = 1,2,3...N\}$, via des équations de transformation

$$x^{i'} = x^{i'}\left(x^i\right)$$

alors que la transformation inverse est définie par

$$x^i = x^i\left(x^{i'}\right)$$

des équations qui nous permettent de définir la matrice de Jacobi et son inverse. Il est très important de dire ici que ces transformations ne sont pas nécessairement linéaires.

Nous sommes habitués à dire qu'un scalaire est un champ qui n'a qu'une ou N^0 composante, qu'un vecteur a N composantes et notre *tenseur d'inertie* en mécanique du solide a N^2 composantes (souvent écrit sous la forme d'une matrice), on peut penser etc. Nous allons reformuler tout cela en disant qu'un tenseur d'ordre n aura N^n composantes. Par contre, l'énoncé inverse ne sera pas vrai. Il n'est pas suffisant d'avoir N^n composantes pour être un tenseur d'ordre n.

3.1. Les champs et leurs transformations

Dans cet espace $\boldsymbol{X_N}$, nous définirons généralement des champs, parfois *scalaires*, parfois *vectoriels*, parfois… qui dépendent des coordonnées, donc qui sont susceptibles de changer de valeur d'un point à l'autre. En sciences naturelles, ces champs décrivent les quantités physiques d'intérêt, comme la pression, le champ électrique, la température, la densité de charge,… Les transformations de coordonnées vont induire des transformations des composantes de ces champs. Le plus simple de ces champs est le champ des coordonnées elles-mêmes qui donne la position d'un point P dans notre espace. Nous avons pris l'habitude (mauvaise !) de l'appeler vecteur position. En fait nous avons pris l'habitude d'appeler systématiquement vecteur tout champ qui a N composantes, alors que nous appelons scalaire un champ qui n'a qu'une seule composante. Cette nomenclature simpliste n'est pas assez précise et la notation tensorielle cherche à préciser tout cela en donnant aux quantités des propriétés plus systématiques.

Les transformations sur les coordonnées dont il est question ici seront, dans un premier temps tout-à-fait générales, non linéaires comme dans la transformation des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées sphériques, ou linéaires comme dans le cas de la rotation p/r à un axe passant par l'origine.

Nous allons exiger que les composantes des tenseurs se transforment linéairement entre elles via la matrice de Jacobi. Seront tenseurs, les champs qui se transformeront (leurs composantes) de façon linéaire, même si la transformation de coordonnées n'est pas linéaire.

3.1.1. Le tenseur d'ordre zéro ou (vrai) scalaire

Ce que nous appellerons tenseur d'ordre zéro a $n = 0$ et ce champ n'aura qu'une seule composante qui se transformera via la matrice de Jacobi à la *puissance* zéro. Ainsi, le champ scalaire vrai $S\left(x^i\right)$ devient $S'\left(x^{i'}\right)$ où

$S'\left(x^{i'}\right) = S\left(x^i\right)$ est invariant sous la transformation.

La seule composante de ce champ ne change pas de valeur, comme par exemple la distance entre deux points (si nous ne permettons pas les transformations de contraction ou d'extension d'espace) et cette valeur reste la même après une transformation de coordonnées. La matrice de Jacobi n'apparaît pas ou on pourrait dire qu'elle apparaît à la puissance zéro

$\left(A^i_{i'}\right)^0 = 1$ et écrire $S'\left(x^{i'}\right) = 1 \text{x} S\left(x^i\right)$ ou $S'\left(x^{i'}\right) = \left(A^i_{i'}\right)^0 \bullet S\left(x^i\right)$

Un tenseur d'ordre zéro ou (vrai) scalaire n'a qu'une seule composante, mais il n'est pas suffisant de n'avoir qu'une seule composante pour être un vrai scalaire, comme nous l'illustrerons plus loin avec le déterminant de certaines matrices, il doit être invariant sous la transformation.

3.1.2. Le tenseur d'ordre un contravariant ou (vrai) vecteur

On pourrait penser que les coordonnées du point, ou *rayon vecteur* constituent les composantes d'un tenseur d'ordre un ou vecteur. Ces composantes seront ici prises comme étant contravariantes, donc notées avec un indice supérieur. Certainement, ce type de tenseur devra avoir N composantes. Cependant, en général, la transformation reliant les anciennes coordonnées et les nouvelles ne sont pas linéaires (d'ordre un) dans la matrice de Jacobi (agissant une fois) donc

$x^{i'} = A^{i'}_i x^i$ n'est pas vrai en général, par exemple dans la transformation des coordonnées cartésiennes vers les sphériques, auquel cas, pour cette transformation, le *vecteur position* n'est pas un tenseur du premier ordre. On voit en effet par exemple que

$$x = r\sin\theta\cos\varphi = r\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}\ldots\right)\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!}\ldots\right)$$

où on voit clairement que la relation entre x et les variables sphériques est hautement non linéaire, en fait elle fera intervenir les puissances de θ et de φ jusqu'à la puissance infinie.

Considérons par contre la différentielle dx^i et sa contrepartie transformée $dx^{i'}$. Nous savons que notre équation générale de transformation s'écrit

$$x^{i'} = x^{i'}\left(x^i\right)$$

Calculons par les règles habituelles de somme, la différentielle

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i \equiv A_i^{i'} dx^i \quad \text{(il y a somme sur } i\text{)}$$

Cette transformation est clairement linéaire entre les composantes dx^i et $dx^{i'}$ et fait apparaître la matrice de Jacobi *à la puissance un*. Nous avons ici un tenseur d'ordre un d'indice supérieur ou contravariant de composantes dx^i. Nous avons donc qu'en général, les x^i ne constituent pas les composantes d'un tenseur d'ordre un (ne sont pas les composantes d'un vrai vecteur !), alors que les dx^i le sont. Chocking, comme diraient les Anglais ! Cela peut sembler insignifiant de dire que le *rayon vecteur* d'un point n'est pas un *vrai* vecteur, mais cela va changer.

Dans un domaine comme la mécanique classique, par exemple, où nous avons un paramètre indépendant comme le temps *t*, qui reste inchangé par la transformation des coordonnées, nous pouvons définir une vitesse

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dt}$$

où, clairement il est facile de calculer les propriétés de transformation

$$\dot{x}^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = A_i^{i'} \dot{x}^i$$

ce qui indique clairement que la vitesse est un tenseur d'ordre un, comme la différentielle, et ces deux champs sont donc des tenseurs d'ordre un, de *vrais vecteurs*. Le champ donnant la position d'un point, le fameux *rayon vecteur* n'est pas toujours un *vrai vecteur* (tenseur d'ordre un), mais le champ de vitesse de ce point est toujours un vecteur. Notez que les quantités physiques comme la force agissant sur un objet, sont de *vrais* vecteurs (tenseurs d'ordre un contravariants). En mécanique, le danger qui nous guette est l'accélération.

Notons ici que nous avons des tenseurs d'ordre un qui ont un indice contravariant (supérieur) dont la transformation fait intervenir la matrice de Jacobi d'éléments $A_i^{i'}$. En résumé, un objet de composantes Y^i sera un tenseur contravariant du premier ordre (un vrai vecteur) si, sous transformation générale définissant la matrice de Jacobi, ses composantes se transforment comme

$$Y^{i'} = A_i^{i'} Y^i$$

3.1.3. Le tenseur d'ordre un covariant, une autre sorte de vecteur

Ici, débutons avec un champ scalaire, véritable tenseur d'ordre zéro, le champ $S\left(x^i\right)$. Si nous calculons les dérivées de ce champ, habituellement appelées composantes du gradient du champ scalaire, nous obtenons les composantes $V_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}$ et leurs correspondantes $V_{i'} = \frac{\partial S}{\partial x^{i'}}$. Selon notre convention des indices, nous avons ici une sorte de vecteur dont nous devons noter les composantes avec un indice inférieur

$$V_i = \frac{\partial S}{\partial x^i} \quad \Rightarrow \quad V_{i'} = \frac{\partial S}{\partial x^{i'}}$$

et nous devons vérifier s'il s'agit ici d'un tenseur.
Pour ce faire, partons de l'expression pour la différentielle du champ scalaire *S*, nous obtenons alors par la règle de somme

$$\frac{\partial S}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial S}{\partial x^i} = A^i_{i'} \frac{\partial S}{\partial x^i} \quad \Rightarrow \quad V_{i'} = A^i_{i'} V_i$$

Ce résultat très simple à obtenir définit un très nouveau résultat, où un (vrai) vecteur, ou tenseur d'ordre un, voit ses composantes se transformer linéairement et à l'ordre un (une matrice de transformation apparaît une fois), mais via la matrice de Jacobi inverse. Comme la matrice inverse est différente de la matrice elle-même, cette sorte de vecteur est différente de la précédente. Il s'agit donc d'une toute nouvelle sorte de tenseurs d'ordre un ou *vrais vecteurs*. Le gradient définit une sorte de *vecteur covariant* qui est différent du vecteur de départ, accepté lui comme contravariant, et clairement différent d'un vecteur contravariant comme la vitesse. Il faudra tenir compte à l'avenir de cette différence qui traduira des significations physiques et géométriques différentes.

Sous forme matricielle, nous conviendrons que le vecteur contravariant est un vecteur colonne et le vecteur covariant un vecteur ligne. Nous savions donc déjà qu'il existait deux sortes de vecteur ! Par contre, si nous exprimons la force comme le gradient d'un potentiel, cette force sera covariante et cela risque d'être dangereux, la force étant (naturellement) un vecteur contravariant et le gradient un vecteur covariant ! Nous verrons plus loin comment s'assurer de la cohérence de nos équations physiques.

3.1.4. Tenseurs d'ordre 2

Nous allons procéder à partir de ce que nous savons déjà. Supposons avoir deux vecteurs contravariants, de *N* composantes X^i *et* Y^j et construisons un objet que nous noterons ici G et dont les N^2 composantes seront les juxtapositions X^iY^j (ce type de produit s'appelle produit direct). Notre algèbre des indices nous confirme que cet objet a N^2 composantes définies, selon notre algèbre des indices, comme

$$G^{ij} = X^iY^j \quad \Rightarrow \quad G^{i'j'} = X^{i'}Y^{j'}$$

Sachant transformer les composantes des vecteurs contravariants, nous écrivons directement

$$G^{i'j'} = X^{i'}Y^{j'} = A_i^{i'}X^iA_j^{j'}Y^j = A_i^{i'}A_j^{j'}X^iY^j = A_i^{i'}A_j^{j'}G^{ij}$$

La transformation est linéaire entre les anciennes et les nouvelles composantes et fait apparaître deux fois la matrice de Jacobi. Nous dirons ici que nous avons un tenseur d'ordre deux, deux fois contravariant. Cette définition est plus générale que notre introduction. En général, les tenseurs d'ordre deux ne sont pas *séparables* sous la forme d'un produit (direct) de deux vecteurs, mais le produit direct de deux vecteurs donne toujours un tenseur d'ordre deux.

Nous savons qu'existent des vecteurs (vrais) covariants possédant N composantes et nous pouvons maintenant définir un objet de N^2 composantes

$$G_{ij} = X_iY_j \quad \Rightarrow \quad G_{i'j'} = X_{i'}Y_{j'}$$

La loi de transformation est très simple

$$G_{i'j'} = A_{i'}^iA_{j'}^jG_{ij}$$

Ici, la transformation des composantes est linéaire et fait intervenir deux fois la matrice A inverse. Ceci définit un tenseur d'ordre deux, deux fois covariant. Il est différent du premier, puisque ses composantes se transforment à l'aide de la matrice inverse de Jacobi, que nous savons être différente de la matrice elle-même. Ici encore, le tenseur n'est pas généralement séparable en produit direct de deux vecteurs.

Ce n'est pas une surprise de constater que nous pouvons définir le tenseur d'ordre deux mixte par ses composantes et leur transformation

$$G_i^j \quad \Rightarrow \quad G_{i'}^{j'} = A_{i'}^iA_j^{j'}G_i^j$$

La transformation est linéaire entre nouvelles et anciennes composantes et les coefficients sont les éléments de la matrice de Jacobi, ici une fois directe et une fois inverse, donc un tenseur du deuxième ordre, une fois covariant et une fois contravariant, un tenseur mixte. Soulignons encore que les tenseurs du 2^e ordre sont rarement séparables sous la forme d'un produit direct de deux vecteurs. Cette façon de les introduire était la plus simple, mais pas la plus générale. Les tenseurs du 2e ordre sont des objets qui ont N^2 composantes se transformant via une double application de la matrice de Jacobi pour la transformation considérée, que cette matrice soit directe ou inverse. Ajoutons que les expressions comme

$$G_{i'j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} G_{ij}$$

ne décrivent pas des produits de matrice, mais une somme sur des composantes qui peuvent être extraites de matrices On ne peut pas écrire ***G' = AAG*****,** où les produits à droite seraient matriciels.

Note : À partir des tenseurs du deuxième ordre, il y a un aspect nouveau qui se manifeste. Il est possible que l'objet ait certaines symétries qui font que nous ne pouvons pas intervertir les indices sans qu'il y ait des conséquences. On peut identifier au deuxième ordre trois cas

$G^{ji} = +G^{ij}$ *tenseur symétrique*

$G^{ji} = -G^{ij}$ *tenseur antisymétrique*

G^{ji} *sans relation avec* G^{ij} *tenseur quelconque*

Puisque les tenseurs du deuxième ordre ont deux indices, il est fréquent de les écrire comme des matrices carrées N x N et nous conviendrons que le premier indice est l'indice de ligne et le deuxième l'indice de colonne. Ceci ne pose pas de difficulté pour les tenseurs deux fois covariants ou deux fois contravariants. Pour les mixtes (comme c'était le cas de la matrice de Jacobi, même si elle n'est pas un tenseur), il faudra être plus prudents ; nous y reviendrons.

3.1.5. Tenseurs en général

À partir d'ici, la règle est simple à généraliser pour définir un tenseur T, n fois contravariant et m fois covariant dont les composantes sont

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{j_1 j_2 \ldots j_m}$$

qui se transforment linéairement comme

$$T^{i'_1 i'_2 \ldots i'_n}_{j'_1 j'_2 \ldots j'_m} = A^{j_1}_{j'_1} \ldots A^{j_m}_{j'_m} A^{i'_1}_{i_1} \ldots A^{i'_n}_{i_n} T^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{j_1 j_2 \ldots j_m}$$

Nous avons ici un tenseur mixte d'ordre $n + m$, n fois contravariant et m fois covariant.

3.1.6. Covariant vraiment différent de contravariant ?

Nous avons vérifié explicitement dans nos deux exemples de départ, que la matrice de Jacobi de la transformation et son inverse sont différentes. Les tenseurs contravariants se transforment utilisant l'une et les covariants utilisant l'autre. Ils constituent donc deux espèces différentes de *vecteurs*.

Dans le cas des vecteurs, nous savions déjà qu'il peut être nécessaire d'identifier deux sortes de vecteurs. En effet, lorsque nous utilisons les matrices pour représenter les vecteurs, nous devons différencier entre vecteur colonne et vecteur ligne. Ceci est vrai dans toutes les opérations que nous faisons avec les vecteurs dans ce formalisme, en particulier dans la définition du produit scalaire. Nous sommes (malheureusement) habitués à écrire que

$$\left(\vec{A},\vec{B}\right)=\vec{A}\bullet\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

qui laisse supposer que les deux vecteurs sont de même nature. Cette illusion disparaît lorsque nous écrivons cette opération en utilisant la notation matricielle, où nous devons écrire

$$\left(\vec{A},\vec{B}\right)=\begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

Nous voyons ici clairement que les deux *vecteurs* ne sont pas de même nature. En fait ils n'appartiennent même pas au même espace vectoriel, puisqu'il n'existe aucune combinaison linéaire de vecteurs colonnes capables de donner un vecteur ligne et vice-versa ! Par contre, matriciellement parlant, nous pouvons ici obtenir le deuxième en fonction du premier parce que l'un est le transposé de l'autre. Nous verrons comment obtenir des tenseurs covariants à partir de leur *équivalents* contravariants et vice-versa.

3.2. Les lois physiques et les premières opérations

Nous allons ici introduire certaines opérations comme la somme et certains produits.Une définition plus utile du produit tensoriel doit attendre la discussion des tenseurs irréductibles. Nous nous en tiendrons au produit direct et au produit scalaire et dirons un mot du *produit vectoriel*.

3.2.1. Les lois physiques

Puisqu'il nous est impossible d'identifier un référentiel qui serait LE référentiel de référence absolu, nous devons nous assurer de savoir écrire nos lois physiques sous une forme qui soit indépendante du référentiel. La seule façon est d'écrire toutes nos lois physiques comme

$$T=0$$

où T est un tenseur qui peut être de la forme $T = B - C$, donc la loi peut prendre la forme

$$B = C.$$

Il doit être clair que B et C doivent être des tenseurs du même type.

Supposons en effet un tenseur d'ordre deux pour servir d'exemple, nous aurons alors

$$T^{ij} = 0 \quad i, j = 1,2,3\ldots N.$$

Changer de référentiel via une transformation de coordonnées ou de translation ou de rotation… transformera cette équation en

$$A_i^{i'} A_j^{j'} T^{ij} = T^{i'j'} = 0$$

où, de façon manifeste, la forme de notre loi physique n'a pas changé, $B = C$ devient alors $B' = C'$ et la loi physique ne change pas de forme.

C'est ce que nous voulons, parce que si on devait récrire nos lois selon le référentiel, quel référentiel serait le bon ? ou plus simplement, il deviendrait impossible d'écrire des lois physiques universelles.

Cette façon d'écrire les lois physiques est appelée manifestement covariante, où ici le mot covariant ne réfère pas à un indice inférieur, simplement il indique une écriture de la loi physique qui demeure invariante de forme sous une transformation quelconque des coordonnées. Désolé pour la légère confusion, mais c'est la tradition.

Peut-être un contre-exemple aidera-t-il à voir le problème. Nous sommes très familiers en mécanique avec les forces dérivant d'un potentiel et nous écrivons

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

mais cette expression n'est pas manifestement covariante et c'est ce qui rend le passage aux coordonnées sphériques, par exemple, si peu transparent, puisque nous savons que

$F_\theta = -\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$ est FAUX (le côté droit n'est pas une force). Nous verrons plus loin comment corriger le tir et comment écrire l'équation de Newton de façon manifestement covariante.

3.2.2. La somme

Nous ne pouvons additionner que des tenseurs de même type, par exemple

$$T^{ij} = S^{ij} + U^{ij} + W^{ij},$$

où toutes ces quantités sont, ici des tenseurs deux fois contravariants. Sous transformation, cette équation garde sa forme pour donner

$$T^{i'j'} = S^{i'j'} + U^{i'j'} + W^{i'j'}$$

conservant ainsi la forme de l'équation.

3.2.3. Le produit direct

Nous avons déjà utilisé le produit direct sans le dire. Le produit direct entre deux champs ou variables consiste à simplement les accoler. Par exemple, le produit direct entre un scalaire S et un vecteur de composantes V^i redonnera simplement un vecteur dont les composantes auront valeur SV^i. La situation se complique un peu dans le produit direct de deux vecteurs de composantes respectives V^i et U^j, le résultat étant un tenseur d'ordre deux de composantes

$$T^{ij} = V^i U^j$$

Dans le langage plus *élémentaire* des vecteurs, nous écririons le produit direct à partir de deux vecteurs (utilisant les composantes cartésiennes) en 3D ($N = 3$)

$$\begin{aligned}
&\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}, \quad \vec{U} = U_x\hat{i} + U_y\hat{j} + U_z\hat{k} \\
&\Rightarrow \quad \vec{T} = \left(V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}\right)\left(U_x\hat{i} + U_y\hat{j} + U_z\hat{k}\right) \\
&\qquad = V_x U_x \hat{i}\hat{i} + V_x U_y \hat{i}\hat{j} + V_x U_z \hat{i}\hat{k} + \ldots + V_z U_y \hat{k}\hat{j} + V_z U_z \hat{k}\hat{k}
\end{aligned}$$

où nous identifions les neuf composantes (3^2) caractéristiques. En notation tensorielle, nous travaillons directement sur les composantes dans un formalisme qui est indépendant (le même) pour toutes les bases. On doit noter au dessus qu'il ne faut pas modifier l'ordre des vecteurs unitaires dans chaque terme, notant que

$$\hat{i}\hat{j} \neq \hat{j}\hat{i}$$

parce que les composantes correspondantes ne sont pas égales, par exemple

$$V_x U_y \neq V_y U_x$$

mais également, $\hat{i} \bullet \hat{i}\ \hat{j} = \hat{j}, \quad \hat{i} \bullet \hat{j}\ \hat{i} = 0$.

Dans un produit direct entre deux tenseurs généraux d'ordre n et m respectivement, le résultat sera un tenseur d'ordre $n + m$ et possèdera $N^{(n+m)} = N^n N^m$ composantes.

3.2.4. Le produit scalaire

Le produit scalaire classique est défini entre deux vecteurs. Reprenons-le avant de le généraliser. Le produit scalaire entre deux vecteurs doit donner un scalaire ! Nous n'avons qu'une seule façon d'obtenir ce résultat ici, disons entre un vecteur (tenseur d'ordre un) de composantes V^i et un tenseur d'ordre un de composantes U_j dans l'opération

$$S = V^i U_i$$

où la somme sur l'indice i fait *disparaître* l'indice i, ne laissant qu'un (vrai) scalaire. Notons deux choses. D'abord cette opération requiert un vecteur contravariant et un vecteur covariant. Deuxièmement, on aurait pu procéder par étape en définissant d'abord par produit direct un tenseur du deuxième ordre de composantes

$$S^i_j = V^i U_j$$

pour ensuite *contracter* l'indice *i* dans l'opération de calcul de

$$S^i_i = V^i U_i = S \, .$$

La contraction scalaire ne pose pas de problème, mais la première remarque en pose un. En effet, nous sommes habitués à définir le module carré d'un vecteur par le produit scalaire du vecteur avec lui-même. Le problème est que le produit scalaire tel que défini ici implique deux vecteurs différents ! Si les V^i sont les composantes de $\vec{V}$, à quoi correspondent les V_i qui sont nécessaires dans le calcul de

$$\left|\vec{V}\right|^2 = V^i V_i$$

C'est là le sujet de la prochaine section.

Le produit scalaire peut être *interne*, comme nous l'avons vu d'ailleurs ci-dessus (S^i_i). Pour un tenseur d'ordre plus grand ou égal à deux, on peut faire une contraction interne. Prenons par exemple un tenseur du 3^e ordre que nous noterons T^i_{jk}. Nous pouvons faire une certaine combinaison (somme) d'un choix particulier de ces composantes dans l'opération

$$T^i_{ik} = T_k \equiv \sum_i^N T^i_{ik}$$

une somme sur l'indice répété *i*. Le résultat *contracte* cet indice qui est indice de somme, donc muet, donc qui disparaît, ne laissant derrière qu'un vecteur que nous avons noté T_k, ce qui est souvent fait, même si ce *T* est un vecteur construit par une somme sur un choix particulier des composantes d'un tenseur du 3^e ordre aussi noté par la lettre *T*, ce qui est souvent fait dans ce type d'opération.

4. Éléments de géométrie : la métrique

4.1. La métrique, co vs contra variant, angle et longueur

Il est nécessaire de pouvoir relier les composantes du tenseur contravariant d'ordre un, *V* de composantes V^i aux composantes V_j de la version covariante, afin de permettre l'évaluation du produit scalaire et du module (carré) de ce vecteur. Elle permet par exemple de relier les dx^i aux dx_j et ainsi de calculer une longueur invariante, (un scalaire) une quantité fondamentale d'une géométrie, puisque l'élément de longueur carré est nécessairement

$$ds^2 = d\vec{x} \bullet d\vec{x} = dx^i dx_i$$

Quant au produit scalaire en général entre deux vrais vecteurs, il donne

$$\vec{V} \bullet \vec{U} = V^i U_i = |\vec{V}||\vec{U}|\cos\theta$$

et son existence permet de définir et d'évaluer les angles. Avec angles et *longueurs*, nous aurons une géométrie.

Dans des textes plus avancés sur les tenseurs, on dira que les champs de tenseurs du premier ordre contravariants appartiennent à l'espace vectoriel tangent T_N, alors que les tenseurs covariants du premier appartiennent à l'espace tangent dual T'_N. Nous cherchons ici un isomorphisme entre les deux, i.e. une relation un à un entre les éléments des deux espaces.

L'outil nécessaire est le tenseur métrique g, un tenseur du deuxième ordre qui permet, toujours selon l'algèbre des indices, de définir les composantes covariantes en fonction des composantes contravariantes, établissant un pont entre l'espace vectoriel T_N et son dual T'_N

$$V_i = g_{ij} V^j, \ \ où \ \ V^j \subset T_N \ \ et \ \ V_i \subset T'_N$$

et le produit scalaire est alors simplement

$$V^i U_i = g_{ij} V^i V^j$$

alors que l'élément de longueur invariant (scalaire) est

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = dx^i dx_i$$

Quant au module carré du vecteur, il est trivialement

$$|\vec{V}|^2 = g_{ij} V^i V^j$$

L'angle entre deux vecteurs est alors évalué par la formule ci-dessus dont on isole le cos

$$\cos\theta = \frac{g_{ij} V^i U^j}{\sqrt{g_{nm} V^n V^m}\sqrt{g_{kl} U^k U^l}} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\vec{V} \bullet \vec{U}}{|\vec{V}||\vec{U}|}$$

Le tenseur métrique contient toute l'information sur la géométrie (définition de la longueur et de l'angle) de notre espace $\boldsymbol{X_N}$, même si cette information n'est pas immédiatement évidente, les composantes du tenseur métrique changeant beaucoup dans un changement de coordonnées, sans que les propriétés de notre espace changent. Si le tenseur métrique (et sa représentation matricielle) est symétrique,

$$g_{ij} = g_{ji}$$

l'espace est dit riemannien (ou de Riemann).

Évidemment, le tenseur métrique sert aussi à *monter et descendre* ses propres indices et on peut définir sa version deux fois contravariante qui représente les éléments de la matrice inverse, puisque

$$V_i = g_{ij}V^j = g_{ij}g^{jk}V_k \equiv V_i \quad \Rightarrow \quad g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k = matrice\ unit\acute{e}$$

Prenons par exemple notre espace Euclidien ***E₃*** dans lequel l'élément invariant de longueur en cartésiens s'écrit

$$ds^2 = dxdx + dydy + dzdz = dx^2 + dy^2 + dz^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

Il est clair que le tenseur métrique est ici

$$\left[g_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \left[g^{ij}\right]$$

qui est un cas trivial et unique, où les coordonnées covariantes sont identiques aux contravariantes. Cependant, si nos coordonnées pour le même espace sont les coordonnées sphériques

$$x^i = (r,\theta,\varphi), i = 1,2,3 \quad \Rightarrow dx^i = (dr, d\theta, d\varphi)$$

nous savons, par méthode vectorielles directes et assez simples ou en utilisant les éléments de la matrice de transformation calculés en **2.4.1.** dans

$$g_{i'j'} = A_{i'}^i A_{j'}^j g_{ij}$$

(où les coordonnées prime sont sphériques) que le même élément de longueur s'écrit maintenant (en laissant tomber le prime une fois la transformation complétée)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\varphi^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

qui permet d'identifier directement la matrice métrique

$$\left[g_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{bmatrix} \neq \left[g^{ij}\right]$$

et de calculer son inverse

$$\left[g^{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 sin^2\theta \end{bmatrix}$$

On aurait pu faire cette identification directement des équations de transformation

$$\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\varphi &&\Rightarrow\quad dx = \sin\theta\cos\varphi dr + r\cos\theta\cos\varphi d\theta - r\sin\theta\sin\varphi d\varphi \\
y &= r\sin\theta\sin\varphi &&\Rightarrow\quad dx = \sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\sin\theta\cos\varphi d\varphi \\
z &= r\cos\theta &&\Rightarrow\quad dz = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta
\end{aligned}$$

Sachant que $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, le remplacement direct nous donne facilement l'expression pour ds^2 en coordonnées sphériques, donc nous donne la métrique. Alors que nous avions en cartésien

$dx_1 = dx^1 = dx$, idem pour y et z

nous aurons ici, débutant avec la version contravariante (selon notre convention)

$$dx^1 = dr,\quad dx^2 = d\theta,\quad dx^3 = d\varphi$$

et la version covariante deviendra

$$dx_i = g_{ij}dx^j \quad\Rightarrow\quad dx_1 = dr,\quad dx_2 = r^2 d\theta,\quad dx_3 = r^2 sin^2\theta d\varphi$$

À la simple observation des composantes du tenseur métrique en cartésiens et en sphériques, on ne croirait pas qu'il s'agit du même espace, c'est pourtant le cas. Les deux seuls éléments en commun entre les deux systèmes de coordonnées est le fait que les métriques sont diagonale, ce qui ne fait que refléter le caractère orthogonal des deux systèmes de coordonnées, et le fait qu'ils sont symétrique, une caractéristique de l'espace, mais laquelle? L'information sur notre espace qui est contenue dans la métrique n'est pas transparente dans le simple examen de celle-ci. Nous verrons plus loin une façon d'extraire cette information.

4.2. Densités tensorielles

Il existe des quantités qui sont *presque tensorielles* à un certain facteur près, ce facteur étant le Jacobien de la transformation à une certaine puissance. Il est alors possible d'utiliser ces quantités et de construire des tenseurs à partir d'elles. Nous allons d'abord étudier un presque scalaire, le déterminant de la métrique. Nous savons que la métrique est un tenseur, donc elle se transforme comme

$$g_{i'j'} = A^i_{i'}A^j_{j'}g_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}g_{ij}$$

Si nous considérons cette équation comme matricielle et que nous prenons le déterminant (des deux côtés), nous obtenons

$$|g'| = \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|^2 |g|$$

où $\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|$ est le déterminant de la matrice inverse de Jacobi, aussi appelé Jacobien . Il est donc clair que le déterminant de la métrique, qui n'a qu'une composante, n'est pas un scalaire, puisqu'il n'est pas invariant de forme ($|g'| \neq |g|$), parce que le facteur du Jacobien de l'inverse au carré à droite brise la covariance manifeste. Nous dirons ici que le déterminant de la métrique est une densité scalaire (tensorielle) de poids -2 (c'est l'inverse qui apparaît par convention). Ce résultat nous sera utile pour définir, à partir de densités tensorielles, des quantités qui seront des tenseurs, donc invariants de forme sous transformation. Prenons l'exemple d'une quantité du deuxième ordre (deux indices) qui n'est pas un tenseur, mais qui se transforme comme, disons

$$T_{j'}^{i'} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^n A_i^{i'} A_{j'}^{j} T_j^i$$

Cette quantité est une densité tensorielle à cause du facteur $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^n$, sans quoi ce serait un tenseur. Sachant que le déterminant de la métrique est une densité tensorielle de poids -2, nous pouvons construire la quantité de composantes

$$|g|^{n/2} T_j^i$$

qui se transformera comme

$$|g'|^{n/2} T_{j'}^{i'} = A_i^{i'} A_{j'}^{j} |g|^{n/2} T_j^i$$

où nous voyons clairement que la quantité dont les composantes sont $|g|^{n/2} T_j^i$ est un tenseur.

Un cas très important de densité tensorielle est celui de la mesure d'intégration volumique qui en cartésien s'écrit

$$dV = dxdydz = dx^1 dx^2 dx^3$$

et n'est pas un vrai scalaire (semble l'être en cartésiens !), mais une densité scalaire, évident dans tout autre système de coordonnées. On peut construire un élément de *volume* scalaire en définissant la version tensorielle de l'élément de volume par

$$dV = \sqrt{|g|}\, dx^1 dx^2 \ldots dx^N$$

qui est un scalaire invariant de forme et est valable pour tout système de coordonnées.

5. Dérivées covariantes

Nous avons déjà constaté que, face à une transformation quelconque des coordonnées (par exemple cartésien → sphérique), le *rayon vecteur* entre l'origine et le point P n'est pas un tenseur d'ordre un, donc n'est pas un vrai vecteur. Par contre, la différentielle de ces coordonnées est un tenseur, ainsi que la vitesse qui est la dérivée des coordonnées p/r à un paramètre invariant, le temps (propre). Cette vitesse a les composantes

$$v_i = \frac{dx^i}{dt} \xrightarrow{\text{tenseur}} v^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dt} = A_i^{i'} v^i$$

Si on tente de définir l'accélération comme la dérivée de cette vitesse, on calcule

$$\frac{dv^i}{dt} \xrightarrow{\text{espérant}} \frac{dv^{i'}}{dt} = A_i^{i'} \frac{dv^i}{dt}$$

Malheureusement, notre espérance est déçue et cette dérivée simple de la vitesse ne redonne pas un tenseur, ce qui est évident dans le calcul explicite

$$\frac{dv^{i'}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A_i^{i'} v^i\right] = A_i^{i'} \frac{dv^i}{dt} + \frac{dv^i}{dt}\frac{d}{dt}A_i^{i'} = A_i^{i'} \frac{dv^i}{dt} + \frac{dv^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\frac{\partial A_i^{i'}}{\partial x^j}$$

Le premier terme est parfait, mais l'apparition (inévitable) du second gâche la sauce et rend cette définition de l'accélération inutilisable dans une loi physique écrite de façon manifestement covariante. Dans $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, le vecteur $\boldsymbol{F}$ est un vrai vecteur qui représente une force physique. Nous avons physiquement besoin de pouvoir définir une accélération dont le concept est relativement facile : le taux de variation de la vitesse. Il faut donc nous assurer mathématiquement que notre calcul de $\boldsymbol{a}$ donnera un vrai vecteur. L'équation de Newton, en particulier ici, devient donc problématique dans son écriture en coordonnées curvilignes. Nous devrons réapprendre à dériver de façon à ce que la dérivée d'un tenseur redonne un tenseur. Pour écrire l'équation de Newton de façon *correcte*, on peut procéder par cheminement purement vectoriel *traditionnel*, mais en faisant très attention, le chemin est truffé d'embûches. Ce que nous proposons ici, c'est de le faire de façon systématique et manifestement covariante (entendez facile !), en définissant ce que nous appellerons la dérivée covariante qui a de particulier que, appliquée à un tenseur, elle redonne un tenseur. (Encore une nouvelle utilisation du mot covariant dans dérivée covariante, désolé, mais ici l'adjectif covariant est accolé à dérivée, ce qui rend toute méprise impossible).

Nous étudierons la dérivée d'un champ totale p/r à un paramètre invariant, comme le temps propre, et les dérivées partielles p/r aux coordonnées.

5.1. Dérivée covariante d'un scalaire

Soit un champ scalaire $\phi\left(x^i,t\right)$ où t est un paramètre invariant dont peuvent dépendre les coordonnées si on se place sur une trajectoire où

$$x^i = x^i(t), \quad i = 1,2,3...N$$

Souvent, le champ scalaire ne dépend pas explicitement du paramètre invariant, $\phi = \phi\left(x^i\right)$ et $x^i = x^i(t)$ ce que nous considérerons ici. Clairement

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \dot{x}^i$$

qui reste clairement un scalaire, puisque

$$\frac{d\phi'}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{i'}} \dot{x}^{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} A^{i'}_j \dot{x}^j \equiv \underbrace{A^i_{i'} A^{i'}_j}_{\delta^i_j} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \dot{x}^j = \delta^i_j \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \dot{x}^j = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \dot{x}^i$$

En calculant cette dérivée totale, nous faisons appel au facteur

$$\phi,_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$

qui est la dérivée partielle d'un scalaire, que nous savons déjà être une composante d'un tenseur covariant du premier ordre, le gradient du champ scalaire. Notez l'utilisation de la notation virgule suivie de l'indice i qui signifie dérivée ordinaire (partielle) par rapport à x^i.

5.2. Dérivée spatiale covariante d'un vecteur, symboles de Christoffel

Nous avons déjà noté que la dérivée d'un tenseur du premier ordre (vrai vecteur) ne donne pas un tenseur, donc, même si elle est dotée de deux indices, la quantité suivante n'est pas un tenseur

$$X^i_j = \frac{\partial V^i}{\partial x^j}$$

parce que nous vérifions directement que

$$X^{i'}_{j'} = \frac{\partial V^{i'}}{\partial x^{j'}} = A^j_{j'} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(A^{i'}_i V^i\right) = A^j_{j'} A^{i'}_i \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + A^j_{j'} V^i \frac{\partial A^{i'}_i}{\partial x^j} \neq A^j_{j'} A^{i'}_i X^i_j$$

où clairement le terme en dérivée de A fait que cette quantité n'est pas un tenseur. Il est possible de faire un grand détour via la définition de la géodésique pour identifier les quantités requises pour garantir que la dérivée partielle d'un tenseur est un tenseur. Ici, nous allons sauter directement à la conclusion ; on se réfère à des traités plus complets, comme celui de la série Schaum, par exemple. Les quantités requises sont les symboles de Christoffel de deuxième espèce, notés et calculés par

$$\Gamma^{l}_{jk} = g^{li}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial gjk}{\partial x^{i}}\right) \equiv \Gamma^{i}_{kj}$$

Sous leur apparence rébarbative, ces quantités, qui ne sont pas des tenseurs, permettent de définir des opérations de dérivée de tenseurs qui donnent des tenseurs. En fait ils sont des quantités qui assurent qu'un choix particulier de coordonnées est utilisé d'une façon qui respecte la géométrie de notre espace. Ceci se vérifie directement, même si, ici, ce sera a posteriori ! Pour un tenseur du premier ordre contravariant, sa dérivé *covariante* p/r à x_k est notée (;) et calculée par l'expression

$$\frac{DV^{i}}{Dx^{k}} \equiv V^{i}_{;k} = \frac{\partial V^{i}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{i}_{jk} V^{j}$$

(qui contient une somme sur j) qui garantit que la quantité obtenue est la composante d'un tenseur du 2^{e} ordre

$$V^{i'}_{;k'} = A^{i'}_{i} A^{k}_{k'} V^{i}_{;k}$$

donc que les indices demeurent des indices tensoriels. On doit noter que nous obtenons ici un tenseur du deuxième ordre. Le calcul de la dérivée totale covariante par rapport au temps de la composante $V^{i}\left(x^{j}\right)$ du tenseur contravariant V est, par l'habituelle règle de somme, où $x^{j} = x^{j}\left(t\right)$, donc sur une trajectoire

$$\frac{DV^{i}}{Dt} = V^{i}_{;k}\dot{x}^{k} = V^{i}_{,j}\dot{x}^{j} + \Gamma^{i}_{jk} V^{j}\dot{x}^{k} = \frac{dV^{i}}{dt} + \Gamma^{i}_{jk} V^{j}\dot{x}^{k}$$

De façon similaire, nous devons définir la dérivée covariante d'un tenseur du 1er ordre à composantes covariantes et nous obtenons (vérifiez en exercice)

$$V_{i;j} = V_{i,j} - \Gamma^{k}_{ij} V_{k}$$

On remarquera ici le signe – entre les deux termes. Cette définition garantit que toute transformation donnera un vrai tenseur

$$V_{i';j'} = A^{i}_{i'} A^{j}_{j'} V_{i;j} .$$

5.2.1. Équation de Newton, forme générale

Nous notons ici l'intéressant résultat du calcul de l'accélération covariante où le champ de vecteur est la vitesse et où nous calculons une accélération manifestement covariante. À partir de l'expression ci-dessus et prenant $V^i = \dot{x}^i$ = la vitesse, nous obtenons une définition covariante de l'accélération

$$\frac{D\dot{x}^i}{Dt} = \frac{d\dot{x}^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k$$

ce qui nous permettra d'écrire l'équation de Newton sous une forme manifestement covariante (ici sa composante contravariante)

$$m\left[\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k\right] = F^i$$

Si la force dérive d'un potentiel Φ, alors nous avons

$$F_j = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^j} \quad \Rightarrow \quad F^i = g^{ij}F_j = -g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}$$

et l'équation de Newton devient alors

$$m\left[\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k\right] = -g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}$$

Vous pouvez maintenant utiliser le système de coordonnées que vous voudrez, l'équation de Newton aura toujours cette forme ! En cartésien tous les $\Gamma^k_{ij} \equiv 0$, mais dans aucun autre système.

5.2.2. Exemple : équation de Newton en coordonnées sphériques

Suivons la recette esquissée ci-dessus et expliquons les résultats plus tard. Nous pouvons calculer les symboles de Christoffel pour les coordonnées sphériques et nous constatons que les seuls qui soient non nuls sont (et vous n'aurez plus à les recalculer de votre vie)

$$\Gamma^1_{22} = -r, \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} = \Gamma^2_{21}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} = \Gamma^3_{31}, \quad \Gamma^3_{23} = \cot\theta = \Gamma^3_{32}$$

On peut alors construire les équations de mouvement, ce qui donne

$$m\left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right] = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

$$m\left[\ddot{\theta} + \frac{1}{r}\dot{r}\dot{\theta} + \frac{1}{r}\dot{\theta}\dot{r} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right] = m\left[\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right] = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

$$m\left[\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} + 2\cot\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\right] = -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$$

En suivant la forme héritée des équations cartésiennes, on aurait attendu, pour la première équation, l'équation de mouvement pour la variable r

$$m\ddot{r} = F_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad ,$$

une équation clairement **fausse**, même physiquement. La raison de cette différence de forme entre cartésiens et sphériques ne vient pas d'un changement dans la structure/géométrie de notre espace, c'est clairement le même espace. La raison vient de la différence dans la façon dont ces différentes coordonnées décrivent la géométrie de notre espace. Prenons la première équation et notons que nous pouvons l'écrire comme

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + F^r$$

Le dernier terme à droite est l'habituelle force physique due à des agents extérieurs et agissant radialement sur l'objet ponctuel de masse m. Les deux premiers termes à droite ont des dimensions de force et décrivent un effet équivalent à des forces sur notre objet, sans que ces *forces* proviennent d'agents extérieurs, mais leur effet est bien réel, prenez un virage en voiture pour vous en convaincre, ce sont eux qui vous collent contre la portière. Ces termes, de la nature de force dans l'équation décrivent l'effet centrifuge bien connu. Il n'est pas possible de faire tourner un objet au bout d'une corde sans tirer sur cette corde, afin de contrebalancer cet effet centrifuge qui est de la nature d'une force. Le premier terme est direct et immédiat, le bras de rotation selon θ étant r, alors que dans le deuxième terme, le bras a clairement longueur $r\sin\theta$ pour une rotation selon φ, ce qui est géométriquement évident ; si θ est nul, l'objet est sur l'axe Oz et une rotation en φ n'a clairement aucun effet dynamique sur un objet ponctuel. On entend souvent l'expression *force centrifuge*, ce à quoi s'opposent un certain nombre de physiciens, parce que cette *force* ne provient pas d'agents agissant sur le système, c'est simplement un terme qui doit apparaître pour tenir compte de la façon dont le système choisi de coordonnées décrit la géométrie du système. Évidemment, si nous faisons évoluer le système selon une rotation, nous aurons cet effet, ressenti comme une force.

Le lecteur peut se référer au module sur les transformations de coordonnées pour voir comment, par méthode vectorielle/traditionnelle, on peut retrouver la bonne équation de Newton pour la variable r, ainsi que pour les autres variables.

Ce que font pour nous les coefficients de Christoffel, c'est de tenir compte de la façon dont un système donné de coordonnées décrit la géométrie de notre espace et de nous donner les outils nécessaires pour procéder, nous fournissant ainsi une forme universelle pour notre équation/loi physique, i.e. une forme invariante sous transformation quelconque des coordonnées.

6. Les opérateurs différentiels

Nous sommes habitués aux opérateurs différentiels à caractère vectoriel que sont le gradient, la divergence, le rotationnel et le laplacien qui sont tous basés sur l'opérateur nabla, généralement noté ∇ et ces opérations sont le gradient d'un scalaire qui donne un vecteur, la divergence d'un vecteur qui donne un scalaire, le laplacien qui est la divergence du gradient d'un scalaire et donne donc un scalaire. Le rotationnel est un peu plus mystérieux et nous ne ferons ici qu'effleurer le problème. Le rotationnel d'un vecteur doit donner un vecteur, mais ce vecteur est souvent appelé pseudo-vecteur, afin de souligner certains traits particuliers.

6.1. Le gradient d'un scalaire est d'abord obtenu par ses composantes qui apparaissent *naturellement* comme celles d'un vecteur covariant

$$\vec{B} = \nabla\phi \quad \xrightarrow{composantes} B_i = \frac{\partial\phi}{\partial x^i} = \phi,_i = \partial_i\phi$$

toutes ces notations étant standard et auto-explicatives et nous avons déjà vu que le gradient arrive *naturellement* comme un vecteur covariant. Les composantes contravariantes du gradient sont obtenues grâce au tenseur métrique

$$B^i = g^{ij} B_j$$

9.3. La divergence d'un vecteur donne un scalaire et doit donc être l'opération suivante

$$\nabla \bullet \vec{B} \quad \xrightarrow{tensoriel} \quad B^i{}_{;i}$$

qui est la contraction interne suivant une dérivée covariante du vecteur, la seule façon de générer un scalaire à partir des dérivées spatiales d'un vecteur. Suivons ces opérations systématiquement selon nos outils tensoriels. Nous devons d'abord dériver de façon covariante les composantes d'un vrai vecteur, cela donne un tenseur du 2^e ordre

$$B^i_{;j} = \frac{\partial B^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} B^k$$

qui est ici initialement mixte, co-contravariant. La divergence est alors obtenue de la contraction interne des indices co et contravariants de ce tenseur, résultant en un vrai scalaire, un tenseur d'ordre zéro noté S

$$S = B^i_{;i} = \frac{\partial B^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ik} B^k$$

Si le vecteur B est lui-même le gradient d'un scalaire, alors

$$\vec{B} = \nabla \phi \quad \xrightarrow{composantes} B_i = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \phi,_i = \partial_i \phi$$

Par ailleurs, nous pouvons montrer que la contraction interne (somme)

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{g}$$

et alors, ce dernier cas donnera

$$S = \frac{\partial B^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{g} B^k \equiv \frac{\partial B^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{g} B^i \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} B^i \right)$$

où nous avons utilisé le fait qu'un indice contracté dans un terme (initialement k) est muet et qu'on peut le rebaptiser n'importe comment, sauf lui donner un nom qui apparaît déjà dans ce terme. Ici il n'y en a pas d'autre et on a rebaptisé k en i.

Note complémentaire : Cette remarque déborde le cadre du calcul de la divergence. Changer le nom d'un indice contracté est possible parce qu'il est muet et disparaît du résultat. Cependant on ne peut pas l'écrire comme un indice existant déjà dans notre terme, parce qu'on générerait des contractions additionnelles parasites. On peut donc écrire

$$G^i_{ijk} = G^l_{ljk} = T_{jk}$$

mais on ne peut pas écrire

$$G^i_{ijk} = G^j_{jjk} \quad FAUX$$

6.3. Le laplacien d'un scalaire est la divergence du gradient du scalaire, le résultat devant donner un scalaire, donc un tenseur d'ordre zéro. Combinant ce que nous venons de voir, nous pouvons écrire directement

$$\vec{B} = \nabla \phi, \quad \nabla^2 \phi = \nabla \bullet \vec{B} \xrightarrow{tenseur} B^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{g} B^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right)$$

6.4. Le rotationnel est une quantité qui apparaît rapidement comme mal définie tensoriellement. On note que le rotationnel, comme le produit vectoriel d'ailleurs, est censé donner un vecteur. En trois dimensions, il donne trois composantes, ce qui est le nombre de composantes d'un vecteur dans cet espace. Cependant, dans un espace en deux dimensions, il n'a qu'une composante, ce qui est insuffisant pour être un vecteur qui devrait avoir deux composantes dans cet espace. En 4 dimensions, il aura six composantes ce qui est trop ! Il semble donc que ce soit par hasard que cette opération soit possible et seulement en 3D, ce n'est pas convainquant ! Pour mieux cerner le problème et tenter de récupérer ce type d'opération, débutons avec le plus simple où on identifie déjà un problème, le rotationnel d'un vecteur en trois dimensions en cartésien

$$\nabla \times \vec{B} = \hat{i}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)$$

Il est clair que les composantes de cette quantité sont faites de quantités comme $\frac{\partial B_x}{\partial y}$ antisymétrisées sous la forme typique

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}$$

que nous écririons en notation tensorielle

$$\frac{\partial B^1}{\partial x^2} = B^1{}_{,2} = V_2^1 = \partial_2 B^1 \quad \Rightarrow \quad \partial_2 B_1 - \partial_1 B_2 \text{ (antisymétrisé 2 fois covariant)}$$

qui *appartient* clairement à un tenseur du deuxième ordre et non pas du premier ordre, donc certainement pas à un vrai vecteur qui serait un tenseur du 1er ordre. Essayons de construire une quantité qui sera un élément de tenseur et dont la structure serait suggérée par les termes de V au-dessus qui n'est pas un tenseur. Nous savons déjà que ce sera un tenseur du 2^e ordre

$$F_{ij} = B_{i;j} - B_{j;i}$$

obtenu comme la différence antisymétrique de deux dérivées covariantes, alors que le rotationnel (ordinaire) est construit de la différence antisymétrique de deux dérivées ordinaires. Selon nos formules déjà obtenues, nous aurons

$$F_{ij} = B_{i;j} - B_{j;i} = B_{i,j} - \Gamma_{ij}^k B_k - B_{j,i} + \Gamma_{ji}^k B_k$$

Parce que

$$\Gamma_{ij}^k = +\Gamma_{ji}^k$$

alors les deux termes de correction s'annulent et nous restons avec

$$F_{ij} = B_{i;j} - B_{j;i} = B_{i,j} - B_{j,i} \quad \Rightarrow \quad F_{ji} = -F_{ij}$$

et nous constatons, avec surprise, que les composantes du rotationnel d'origine sont les composantes d'un tenseur, noté ici F, mais ce tenseur est du deuxième ordre. Représentons-le par une matrice. Clairement son antisymétrie fait que les termes sur la diagonale sont nuls et, de plus, les termes au dessus de la diagonale sont égaux au signe près aux termes sous la diagonale. Pour une matrice 2x2, cela laisse un terme indépendant, pour une matrice 3x3, cela en laisse 3, pour une matrice 4x4, cela en laisse 6, etc. Nous avons ici notre explication. Le rotationnel dans un espace 3D a trois composantes qui sont les éléments linéairement indépendants d'un tenseur du 2e ordre antisymétrique ! C'est tout. Mais ce n'est pas un vrai vecteur, ce n'est pas un tenseur du premier ordre, puisque ses éléments se transforment comme

$$F_{i'j'} = A^{i}_{i'} A^{j}_{j'} F_{ij}$$

où la matrice de Jacobi intervient deux fois. En conclusion, ce que nous appelons le rotationnel est un objet mathématique qui a pour composantes les éléments antisymétriques d'un tenseur du 2e ordre du type

$$F_{ij} = B_{i;j} - B_{j;i} = B_{i,j} - B_{j,i} \quad \Rightarrow \quad F_{ji} = -F_{ij}$$

Dans un espace à N dimensions, il y a $N(N\text{-}1)/2$ composantes indépendantes possiblement non nulles dans ce tenseur.

En 3D en système cartésien et en quelques autres orthogonaux simples, on s'en tire assez bien, mais il faut faire attention à généraliser le produit vectoriel et le rotationnel.

7. Un exemple bien connu, les champs électromagnétiques et la relativité

Nous connaissons bien les lois de l'électromagnétisme, depuis que Maxwell nous les a données. Elles sont bâties sur les deux champs vectoriels (?) $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et contiennent plusieurs rotationnels. À la lumière de ce que nous venons de voir, ceci peut poser un problème, puisqu'il semble que ces équations sous leur forme habituelle ne sont pas manifestement covariantes et que leur forme n'est donc pas universelle. Il y a pire encore, les rotationnels qu'on y trouve ne s'appliquent pas sur des vecteurs ! Nous savons très bien que l'espace naturel de l'électromagnétisme est l'espace relativiste de Minkowski et que cet espace a 4 dimensions, pas 3. Nos champs électrique et magnétique ne peuvent pas être de vrais vecteurs, auquel cas ils auraient 4 composantes, ce qui n'est clairement pas le cas. Que signifie une opération non manifestement covariante sur des quantités qui ne sont même pas des vecteurs ? D'un autre côté, le succès de la théorie de Maxwell la met à l'abri, mais la question demeure, la forme que nous connaissons doit être la manifestation concrète d'un formalisme manifestement covariant qui reste (ici) à découvrir.

7.1 Les données physiques

Les champs électromagnétiques se produisent dans un espace 4D de Minkowski, comptant une coordonnée de temps et trois d'espace $\left\{x^i = ct, x, y, z \middle| i = 1,2,3,4\right\}$ ou $\left\{x^i = \tau, x, y, z \middle| i = 1,2,3,4\right\}$ où un facteur c a été intégré dans le τ. Nous savons que la métrique est dans ce dernier cas

$$\left[g_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \left[g^{ij}\right],$$

lorsque les coordonnées spatiales sont les coordonnées <u>cartésiennes</u>. De cette façon, la *longueur* invariante est

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Clairement, dans ce choix de coordonnées, les dérivées ordinaires sont identiques aux dérivées covariantes, tous les symboles de Christoffel étant nuls.

Les sources physiques des champs sont les charges et les courants, habituellement notés par leurs densité, volumique de charge et de surface de courant $\left(\rho, \vec{j}\right)$. Il y a ici un type particulier de transformations sous lesquelles nous voulons que le formalisme reste invariant de forme, ce sont les transformations de Lorentz, qui a identifié comme étant celles qui laissent les équations de Maxwell invariantes. Les équations de Maxwell en système SI et dans le vide sont

$$\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \bullet \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Les deux équations de gauche sont avec terme de source, donc relient les champs à leurs sources physiques. Celles de droite reflètent la dynamique de propagation propre aux ondes électromagnétiques.

Nous sommes dans un espace 4D et les vecteurs devraient avoir 4 composantes, ce qui n'est pas le cas ni de $\vec{E}$ ni de $\vec{B}$. L'opération de rotationnel mal définie comme opération sur des vecteurs, ici ne s'applique même pas à des vecteurs (vrais), alors quel est le résultat ? Cette écriture n'est pas manifestement covariante (de forme). Cela n'enlève rien à sa validité, mais peut poser des problèmes. Nous savons que les transformations de Lorentz (TL) incluent des déplacements à vitesse $\vec{v}\ (v < c)$, donc lorsque appliquées sur une densité de charge par exemple, cela génère un courant. Sous ces transformations, la densité de charge n'est donc pas un scalaire et, de toute façon, la densité de courant n'est pas un vrai vecteur non plus, n'ayant que 3 composantes. D'un autre côté, une loi physique très générale de conservation de la charge électrique totale nous donne l'équation non manifestement covariante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet \vec{j} = 0$$

Le fait que les densités de charge et de courant vont se transformer les unes dans les autres sous TL suggère d'inclure toutes ces quantités à l'intérieur d'un vrai vecteur ou tenseur du 1er ordre, le 4-vecteur courant $j^k = \left(c\rho, j_x, j_y, j_z \middle| k = 1,2,3,4\right)$. Il est trivial de vérifier alors que notre équation de conservation de la charge s'écrit tout simplement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet \vec{j} = \frac{\partial j^k}{\partial x^k} = \frac{1}{c}\frac{\partial (c\rho)}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = j^k_{,k} = j^k_{;k} = 0$$

qui est manifestement covariant (la généralisation covariante de la divergence), puisque l'équation garde sa forme sous toute transformation

$$j^k_{;k} = 0 \quad \Rightarrow \quad j^{k'}_{;k'} = 0$$

7.2. Le tenseur électromagnétique et les champs électrique et magnétique

Nous savons que nos champs électrique et magnétique s'expriment en fonction des potentiels dits *scalaire* et *vectoriel*, $\left(\phi, \vec{A}\right)$. Ces noms sont erronées, sous TL, ces quantités se transforment les unes dans les autres, donc ϕ n'est pas un scalaire (tenseur d'ordre zéro) puisqu'il serait invariant sous TL et $\vec{A}$ n'est même pas un vrai vecteur avec ses trois composantes. Nous savons que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad \text{et que} \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Les composantes de $\vec{B}$ sont donc de la forme antisymétrique déjà rencontrée dans notre étude du rotationnel. À première vue, ce n'est pas le cas du champ $\vec{E}$, mais un regard plus prudent nous indique que c'est exactement la même chose, compte tenu de la différence de signe qui apparaît entre les parties spatiale et temporelle de la métrique. Définissons en effet le 4-vecteur potentiel

$$A^k = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \middle| k = 1,2,3,4\right) \quad \Rightarrow \quad A_k = g_{kl}A^l = \left(\frac{\phi}{c}, -\vec{A} \middle| k = 1,2,3,4\right)$$

Nous avons déjà déterminé que les composantes d'un rotationnel sont les composantes d'un tenseur antisymétriques du 2e ordre que nous noterons ici

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

Calculons explicitement certains de ces éléments

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = \frac{\partial(-A_x)}{c\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi}{c}\right) = \frac{1}{c}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \frac{E_x}{c}$$

$$F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \frac{\partial(-A_y)}{\partial x} - \frac{\partial(-A_x)}{\partial y} = -\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = -B_z$$

et ainsi de suite, pour obtenir le tenseur électromagnétique sous forme matricielle où, selon notre convention, le premier indice compte les lignes et le second compte les colonnes. Cette convention est la même que celle de Wikipedia

$$\left[F_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Ce tenseur a six composantes indépendantes, traditionnellement appelées les trois composantes du champ électrique plus les trois composantes du champ magnétique. Il est manifestement clair ici que ces champs ne sont pas des vecteurs !

On peut définir la version doublement contravariante de ce tenseur par $F^{ij} = g^{ik} g^{jl} F_{kl}$

$$\left[F^{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Note : Plusieurs auteur utilisent les labels *m,n...*=0,1,2,3 en relativité, respectivement pour le temps et les trois coordonnées d'espace.

9.3. Les équations de Maxwell sous forme manifestement covariante.

Avec les définitions que nous avons déjà de nos 4-vecteurs, nous vérifions par calcul assez simple que les 4 équations provenant de

$$\partial_i F^{ik} = \mu_{(0)} j^k, \quad i,k = 1,2,3,4$$

nous donnent les équations de Maxwell avec terme de source. Vérifions deux d'entre elles, celle pour k = 1 et celle pour k = 2.

$$\partial_i F^{i1} = \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_4 F^{41}$$
$$= \frac{\partial 0}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_x}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_y}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_z}{c}\right) = \frac{1}{c}\nabla\bullet\vec{E}$$

Étant donné que $j^0 = c\rho$ et que $c = 1/\sqrt{\varepsilon_{(0)}\mu_{(0)}}$ (valeurs dans le vide), on vérifie directement et facilement que l'équation de Maxwell pour la divergence du champ électrique est

$$\partial_i F^{i0} = \mu_{(0)} j^0$$

sous une forme maintenant manifestement covariante.
Calculons maintenant

$$\partial_i F^{i2} = \partial_1 F^{12} + \partial_2 F^{22} + \partial_3 F^{32} + \partial_4 F^{42}$$
$$= \frac{\partial}{c\partial t}\left(\frac{-E_x}{c}\right) + 0 + \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial(-B_y)}{\partial z}$$
$$= \left(\nabla\times\vec{B}\right)_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial x}$$

De l'équation de Maxwell avec le terme de courant comme terme de source, ceci est exactement égal à $\mu_{(0)} j_x = \mu_{(0)} j^1$ et donc à la composante *x* de l'équation de Maxwell inhomogène qui apparaît manifestement covariante comme

$$\partial_i F^{i1} = \mu_{(0)} j^1$$

Il est clair que nous avons ici les équations inhomogènes de Maxwell complètement représentées, sous forme manifestement covariante, comme

$\partial_i F^{ik} = \mu_{(0)} j^k$ où $\mu_{(0)}$ est la permittivité du vide et $k = 1,2,3,4$.

À cause de l'antisymétrie du tenseur électromagnétique, nous avons l'identité (de type Poisson)

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} \equiv 0$$

L'explicitation de cette équation nous donne les équations de Maxwell sans terme de source, qui apparaissent ainsi simplement comme une simple conséquence (!) du fait que le tenseur électromagnétique est antisymétrique, ce qui reflète le caractère doublement transverse de l'onde électromagnétique.

8.0. Caractérisation de l'espace : la courbure

Nous avons tous une préconception de la courbure, débutant avec la courbe que fait une trajectoire, sous l'influence d'une force par exemple. Cette notion de courbure, essentiellement donnée par l'inverse du rayon de courbure, n'est pas caractéristique de l'espace, mais de phénomènes s'y produisant. De fait, une courbe est un espace à une dimension et on peut la projeter sur une droite, sans perdre son seul élément de géométrie qui est la longueur entre deux points de la courbe. On ne peut pas faire la même chose si on tente de projeter une coupole sphérique en 2D sur un plan également 2D. C'est pourquoi aucune carte géographique n'est exacte. Les éléments de géométrie qui sont ici des distances et des angles ne sont pas préservés, la coupole devant s'ouvrir comme une pelure d'orange si on veut l'étendre sur le plan. . La coupole est un espace 2D différent du plan 2D. Elle possède une courbure intrinsèque, caractéristique de cet espace.

8.1. Quoi utiliser pour caractériser notre espace.

Nous avons déjà constaté que la métrique contient toute l'information sur notre espace, mais qu'elle change beaucoup par simple changement de coordonnées et sa forme n'est donc pas par elle-même un indicateur de la nature de notre espace. La quantité recherchée devrait donc dépendre aussi au moins de dérivées de la métrique. Toutefois, sans entrer dans les détails, un choix approprié de coordonnées peut rendre ces dérivées identiquement nulles, n'apportant rien de neuf. Cette propriété découle du fait que la dérivée covariante de la métrique est toujours identiquement nulle

$$g_{ij;k} = g_{ij,k} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{kj} g_{il} \equiv 0$$

et que nos dérivées ordinaires de la métrique seront nulles si on résout $\Gamma^l_{kj} = 0$, ce qui est possible par un choix approprié de coordonnées. Or, si notre espace est intrinsèquement courbe, cela ne peut pas dépendre du système de coordonnées utilisé pour le cartographier.

Il faudra donc introduire au moins des deuxièmes dérivées de la métrique si on espère définir une quantité (tensorielle). Nous savons que nos symboles de Christoffel sont déjà définis à partir de la métrique et de ses dérivées ordinaires. On peut donc penser qu'une quantité définie à partir de ces symboles et de leurs dérivées serait capable de satisfaire notre condition essentielle. Nous devons chercher ici à construire un tenseur, puisque nous voulons caractériser notre espace, indépendamment du système de coordonnées utilisé pour le cartographier.

8.2. Le tenseur de courbure et ses cousins

Par chance, il existe une seule combinaison des symboles de Christoffel et de ses dérivées qui donne un tenseur ! (Je suis heureux de dire que j'en ai oublié la démonstration).

Il est du quatrième ordre, s'appelle le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel et il est défini comme

$$R^l_{mns} = \frac{\partial \Gamma^l_{mn}}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma^l_{ms}}{\partial x^n} + \Gamma^i_{mn}\Gamma^l_{si} - \Gamma^i_{ms}\Gamma^l_{ni}$$

Parce qu'il est du 4e ordre, il a donc a priori N^4 composantes, ce qui peut être long à calculer, mais heureusement des symétries internes découlant de sa définition même font que sur permutation de certains indices ce tenseur est soit symétrique, soit antisymétrique et qu'il obéit à une règle de cyclicité

$$R_{kmnr} = R_{nrkm}$$
$$R_{kmnr} = -R_{mknr} = -R_{kmrn} = R_{mkrn}$$
$$R_{kmnr} + R_{krmn} + R_{knrm} \equiv 0$$

ce qui fait que le nombre de composantes indépendantes *tombe* à $N^2\left(N^2-1\right)/12$. Ce nombre est nul en 1D et il n'y a donc pas de courbure en 1D. En 2D, nous avons une seule composante indépendante, 6 en 3D et 20 en 4D.

À cause de ses symétries, le tenseur n'a qu'une seule contraction qui mène à un résultat non nul et qui donne le tenseur de courbure de Ricci

$$R_{mn} = R^k{}_{mkn} = R_{nm}$$

qui a aussi une contraction menant à la courbure scalaire

$$R = R^m_m$$

que connaissait Gauss qui utilisait une courbure qui serait l'équivalent de $-R/2$.

Un résultat qu'il faut vérifier, parce qu'il n'est pas une conséquence triviale de la définition de la courbure, fait que la divergence covariante d'une certaine combinaison des tenseurs de courbure et de la métrique est identiquement nulle

$$G^n = \left(R^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}R\right)_{;m} \equiv 0$$

8.3. Quelques conséquences mathématiques et physiques

Nous prenons généralement pour acquise la commutativité des dérivées partielles du 2e ordre, en particulier qui s'appliquent sur une composante de vecteur

$$\frac{\partial^2 V_m}{\partial x^k \partial x^n} = \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^n \partial x^k}$$

qui donnerait, en notation covariante

$$V_{m;k;n} = V_{m;n;k}$$

mais ceci n'est vrai que dans un espace plat, i.e. qui n'a pas de courbure. C'est FAUX dans un espace courbe. De la définition de la dérivée covariante et du tenseur de courbure, nous obtenons plutôt

$$V_{m;k;n} = V_{m;n;k} - V_r R^r{}_{mkn}$$

et $$V^m_{;k;n} = V^m_{;n;k} + V^r R^m_{rkn}$$

On peut donc dire que la non commutativité des dérivées du 2e ordre indique un espace courbe. C'est moins surprenant qu'il n'y paraît. Si vous vous déplacez sur terre de 10 m vers l'ouest (en φ) et ensuite de 5 m vers le nord (en θ), vous n'arriverez pas tout-à-fait au même point si vous inversez ces deux déplacements. Imaginez faire cette expérience près d'un pôle par exemple, l'effet y est plus frappant.

Le résultat mentionné ci-dessus a trouvé son utilité dans l'équation d'Einstein de la relativité générale (RG) qui est énoncée dans un espace 4D ou (1+3)

$$R^{mn} - \frac{1}{2} g^{mn} R = -8\pi G T^{mn}$$

Le tenseur d'énergie-impulsion T^{mn} est le terme de source de cette équation et contient l'information sur les densités de matière et d'énergie qui sont la source du champ gravitationnel vu ici comme une courbure de l'espace. On doit solutionner cette équation pour obtenir la métrique qui nous donnera alors toute l'information requise sur notre espace déformé par la présence de masse et d'énergie décrites par le tenseur d'énergie-impulsion. Il faut mentionner que Einstein lui-même avait introduit un terme additionnel, mathématiquement permis impliquant la constante cosmologique λ

$$R^{mn} - \frac{1}{2} g^{mn} R - \lambda g^{mn} = -8\pi G T^{mn}$$

Il se qualifiât bientôt lui-même d'idiot pour avoir introduit ce terme, parce qu'il ne devait pas exister dans le type d'espace-temps stationnaire qu'envisageait Einstein, sans compter qu'aucune mesure existante le rendait nécessaire. Aujourd'hui on pense que peut-être ce terme est effectivement présent et que c'était là simplement un autre exemple du génie d'Einstein.

8.4. Parallèles et géodésiques

8.4.1 Transport parallèle

Si nous nous plaçons dans un espace de Minkowski de façon générale, de métrique η_{mn} alors en l'absence de force agissant sur un objet ponctuel test, le vecteur vitesse $\{u^m | m = 1,2,3,4\}$ est constant et nous avons sur une trajectoire

$$\frac{du^m}{d\tau} = 0, \quad \tau = \text{ temps invariant pour } \eta_{mn}$$

et nous disons que le champ de vecteur (vitesse ici) est transporté sur la trajectoire de façon *parallèle* à la trajectoire.

Selon le principe d'équivalence à la base de la RG, l'introduction de la gravité n'introduit pas une *force* au sens habituel, mais simplement une déformation de l'espace et nous devrions avoir alors

$$\frac{Du^m}{D\tau} = 0, \quad \tau = \text{ temps invariant pour } g_{mn}$$

8.4.2. Géodésique

Par définition, la géodésique est la trajectoire, la courbe de plus courte distance entre deux points donnés. La trajectoire aura la forme

$$x^m = x^m(\tau), \quad m = 1,2,...N$$

dans un espace à *N* dimensions, avec τ le paramètre invariant générant la courbe (en mécanique classique, c'est généralement le temps, mais en relativité ce n'est pas le temps). Un élément de longueur au carré de la courbe est

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n = g_{mn} \frac{dx^m}{d\tau} \frac{dx^n}{d\tau} d\tau^2 = g_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n d\tau^2$$

donc $\quad ds = \sqrt{g_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n} \; d\tau$

Entre deux points fixes, la longueur de la courbe sera simplement

$$S(1,2) = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{g_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n} \; d\tau$$

et nous voulons minimiser cette quantité, donc imposer

$$\delta S = \delta \int_1^2 \sqrt{g_{mn} \dot{x}^m \dot{x}^n} \; d\tau = 0$$

C'est là un problème bien connu, le problème de Lagrange où le Lagrangien serait simplement $L(x^r, \dot{x}^r) = \sqrt{g_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n}$ et la minimisation de la longueur est donnée par les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^r}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^r} = 0$$

Ici, la métrique dépend généralement des coordonnées, mais pas des vitesses et le résultat est simplement

$$\frac{d\dot{x}^m}{d\tau} + \Gamma^m_{nr}\dot{x}^n\dot{x}^r = 0$$

où on voit qu'il s'agit de la courbe de transport parallèle du vecteur vitesse défini à partir du paramètre invariant.

9. Un exemple, la sphère

Nous allons nous intéresser ici à un espace confiné à la surface d'une sphère.

9.1. La métrique

Il serait intéressant de donner un exemple tiré de la RG, mais ce n'est pas le sujet du présent texte, aussi allons-nous nous en tenir à un exemple plus simple, celui de la surface de la sphère qui est un espace 2D courbe bien connu, puisque nous avons les deux pieds sur une telle surface. Le système de coordonnées le plus intelligent pour cartographier la surface d'une sphère de rayon *a* est le système de coordonnées sphériques dans lequel nous gelons la variable radiale à la valeur *a*, ce qui la fait disparaître, laissant $\{\theta, \varphi\}$

$$\{r, \theta, \varphi\} \xrightarrow{r=a} \{a, \theta, \varphi\} = \{\theta, \varphi | r = a\}$$

La sphère est comprise dans notre espace Euclidien ordinaire où la métrique est

$$g_{mn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Évidemment, si on calcule le tenseur de courbure à partir de cette métrique, on obtient zéro partout. La restriction à la surface de la sphère donne la métrique 2D

$$g_{rs} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2\sin^2\theta \end{bmatrix} = a^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad g^{rs} = \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/a^2\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

qui *semble* plus simple, mais pour laquelle la courbure intrinsèque n'est pas nulle. Ici, nous avons évidemment $\{x^n | n = 1,2\} = \{\theta, \varphi\}$ et

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

9.2. Les symboles de Christoffel

Ils sont assez simples à calculer si on remarque que la seule dérivée de la métrique qui soit non nulle est

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{\partial\left(a^2 \sin^2\theta\right)}{\partial\theta} = 2a^2 \sin\theta\cos\theta$$

ce qui nous permet d'évaluer les seuls symboles de Christoffel non nuls

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11}\left(0 + 0 - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) = -\sin\theta\cos\theta$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \cot\theta$$

9.3. La courbure

Nous savons déjà qu'il n'y a qu'une seule composante non nulle du tenseur de Riemann-Christoffel que nous choisissons comme étant R_{1212}. En fait, calculons avec la formule déjà avancée, la composante

$$\begin{aligned} R^1{}_{212} &= \frac{\partial\Gamma^1_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial\Gamma^1_{22}}{\partial x^1} + \Gamma^r_{21}\Gamma^1_{2r} - \Gamma^r_{22}\Gamma^1_{1r} \\ &= 0 - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\sin\theta\cos\theta\right) + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} - 0 \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + \cot\theta\left(-\sin\theta\cos\theta\right) \\ &= -\sin^2\theta \end{aligned}$$

d'où nous tirons, par symétrie et avec une métrique très simple et diagonale

$$R_{1212} = -a^2\sin^2\theta = R_{2121}, \quad R_{2112} = R_{1221} = a^2\sin^2\theta$$

Par la suite, nous pouvons calculer les composantes du type mixte

$$R^2{}_{112} = g^{22}R_{2112} = \frac{1}{a^2\sin^2\theta}a^2\sin^2\theta = 1$$

et ainsi de suite.

Par la suite, nous pouvons calculer les éléments (4) du tenseur de courbure de Ricci en opérant des contractions (internes)

$$R_{mr} = R^k{}_{mkr} = R^1{}_{m1r} + R^2{}_{m2r}$$

ce qui donne

$$R_{11} = -1, \quad R_{22} = -\sin^2\theta, \quad R_{12} = R_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \quad R^{11} = g^{11}g^{11}R_{11} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{a^2}\left(-1\right) = -\frac{1}{a^4} \;\text{ et }\; R^{22} = -\frac{1}{a^4\sin^2\theta}$$

Nous pouvons alors évaluer la courbure scalaire

$$R = g_{mn}R^{mn} = g_{11}R^{11} + g_{22}R^{22} = a^2\left(-\frac{1}{a^4}\right) + a^2\sin^2\theta\left(-\frac{1}{a^4\sin^2\theta}\right)$$

$$= -\frac{2}{a^2}$$

qui est une constante, un résultat nécessaire et évident pour notre espace. On constate que plus le rayon est petit, plus la courbure est grande. Par contre, pour une très grande sphère, cette courbure tend vers zéro. Le signe est conventionnel, où (-) signifie concave. Plus le rayon a est grand, plus la grandeur de la courbure est petite, ce qui est intuitivement très correct.

9.4. La géodésique

La géodésique est la trajectoire ou courbe ayant la plus petite longueur entre deux points donnés (fixes). Le fameux adage que la droite est le plus court chemin entre deux points est manifestement faux, il n'y a pas vraiment de droite sur la surface d'une sphère, comme la surface de la Terre ! Simplement, à petite échelle, nous ne percevons pas la courbure intrinsèque de notre univers de tous les jours. Nous savons déjà quels symboles de Christoffel sont non nuls ici et pouvons écrire les équations de la géodésique immédiatement

$$\frac{d\dot{x}^m}{d\tau} + \Gamma^m_{nr}\dot{x}^n\dot{x}^r = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\dot{x}^1}{dt} + \Gamma^1_{22}\dot{x}^2\dot{x}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\dot{\theta}}{dt} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0$$

et de la même façon $\quad \dfrac{d\dot{\varphi}}{dt} + \cot\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} + \cot\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\dot{\varphi}}{dt} + 2\cot\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} = 0$

La solution générale n'est pas triviale, même pour une géométrie aussi simple. Rappelons ici que $\theta = \pi/2$ est l'équateur. Pour $\dot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = cte$, vous obtiendrez $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = cte \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t$, qui décrit le grand cercle passant par les deux pôles. Tous ces grands cercles qui sont parallèles les uns aux autres en traversant l'équateur se croisent aux deux pôles. Ici, les parallèles finissent par se croiser et plutôt deux fois qu'une !

Table des Matières