

Traitement d'images

Emanuel Aldea <emanuel.aldea@u-psud.fr>
<http://hebergement.u-psud.fr/emi/TIPolytech>

Polytech Paris-Sud 5^{ème} année

Estimation robuste

Cadre du problème :

- ▶ observations fournies par les images
 - ▶ points d'intérêt, contours, régions etc.
 - ▶ associations : appariements, champs de flot optique, etc.
- ▶ une partie importante des observations générée par un modèle mathématique défini par un ensemble θ de paramètres

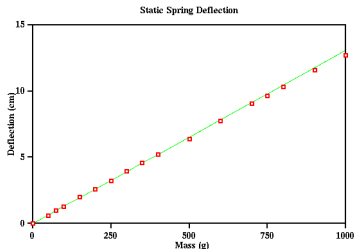
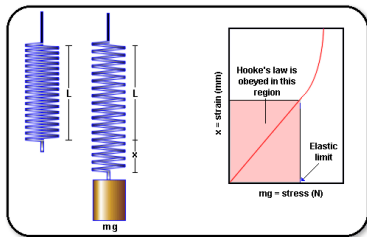
Objectif

- ▶ déterminer les paramètres θ
 - ▶ en robotique : souvent une information de déplacement
 - ▶ suivi de cibles
 - ▶ état d'un système physique etc.
- ▶ nombre d'observations largement suffisant pour inférer θ mais
- ▶ présence des valeurs aberrantes (outliers) qui ne respectent pas le modèle

Exemple jouet

La constante d'élasticité d'un ressort

- ▶ loi de Hooke : $F = kx$
- ▶ objectif : $\theta = \{k\}$
 - ▶ on varie N fois la force appliquée, on mesure la déformation
 - ▶ N observations $\{(F_i, x_i)\}$
 - ▶ ensemble minimal de mesures pour déterminer θ : $K = 2$
 - ▶ en pratique on utilise les N observations pour une estimation par moindres carrés , à cause du bruit de mesure
- ▶ pas de outliers, tout s'explique par le modèle considéré



Exemple en vision

Estimation de l'ego-mouvement

- ▶ N observations $\{x_i\}_{1 \leq i \leq N}$ (une obs. par pixel)
- ▶ ensemble minimal de taille K , $N \gg K$
- ▶ objectif : $\theta = \{R, t\}$
- ▶ un algorithme f qui fournit $\theta = f(x_1, \dots, x_K)$
- ▶ problème : hypothèse de scène statique
- ▶ éléments dynamiques \Rightarrow observations qui ne respectent pas le modèle θ

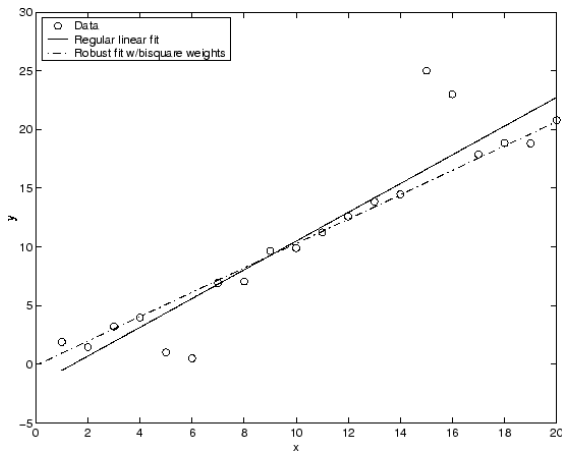
Objectif : déterminer θ et les observations valides



Source du problème

Influence des outliers

- ▶ on ne peut pas ignorer les outliers et déterminer les paramètres du modèle



- ▶ les méthodes de type moindres carrés sont très sensibles aux outliers à cause de la fonction d'erreur quadratique $\rho(r_i) = r_i^2$

Deux types d'approches

Analyse de l'ensemble des résidus

- ▶ Least Median of Squares (LMedS) ; on remplace la somme par la médiane des résidus :

$$\min_{\theta} \text{med } \rho(r_i)$$

- ▶ Least Trimmed Squares (LTS) ; tri des résidus et sélection des premiers $N/2 < M < N$

$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^M \rho(r_i)$$

- ▶ Recherche exhaustive nécessaire par K-tuples ; breakdown point $\sim 50\%$

Modification de ρ

Utilisation à la place de l'erreur quadratique d'une autre fonction symétrique, définie positive (voir Huber, Tukey etc.) Breakdown point inférieur à $1/K$

Dans tous les cas, on sépare les inliers et seulement après on peut appliquer une LMS classique.

RANSAC

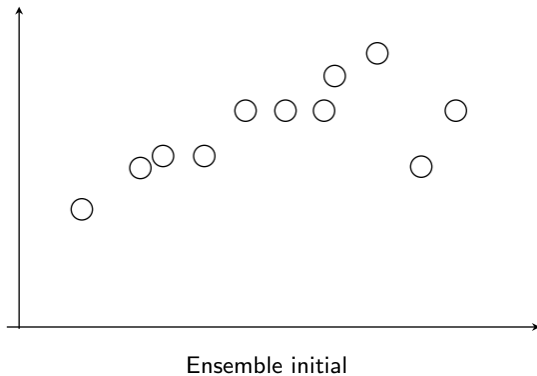
Random Sample Consensus

1. Pour T itérations / Tant qu'il reste du temps de calcul
 - ▶ sélection aléatoire de K observations
 - ▶ détermination exacte de θ
 - ▶ calcul cardinal du support pour $\theta : \{x_i \text{ t.q. } \rho(x_i, \theta) < \tau\}$
2. validation de $\hat{\theta}$ ayant le plus grand support
3. calcul de $\tilde{\theta}$ par moindres carrés sur le support de $\hat{\theta}$

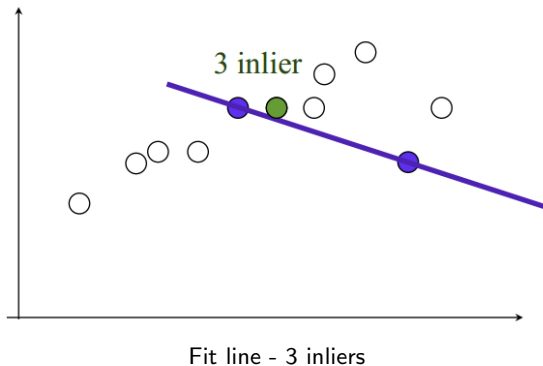
Paramètres

- ▶ τ pour l'inclusion dans le support
- ▶ le nombre de tirages P
- ▶ dépendent de l'application et de la proportion d'outliers

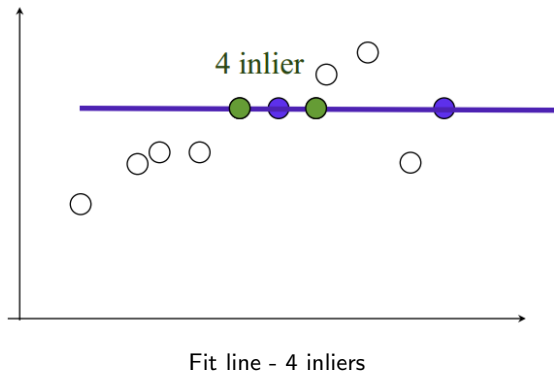
Exemple en 2D



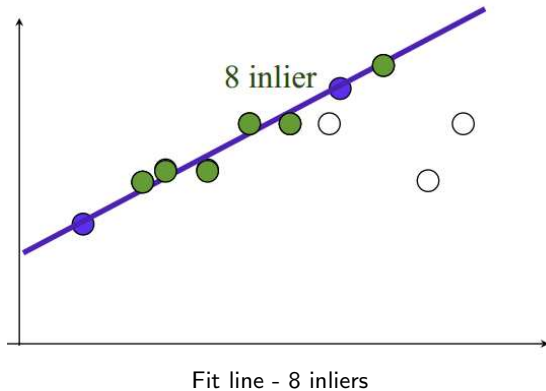
Exemple en 2D



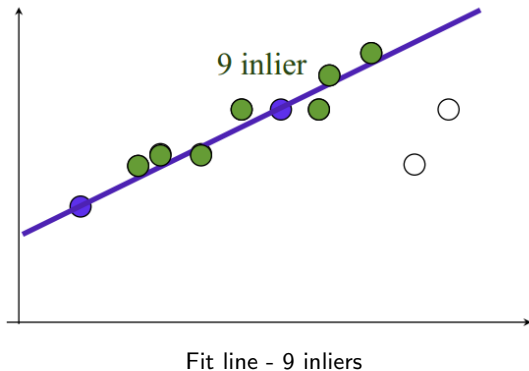
Exemple en 2D



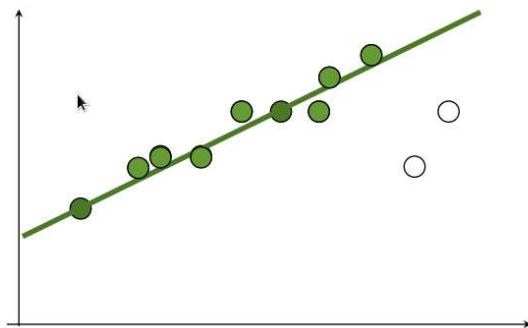
Exemple en 2D



Exemple en 2D

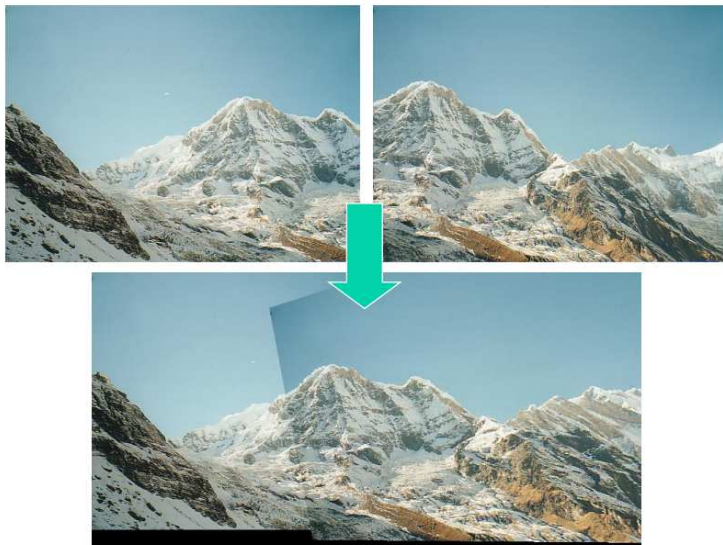


Exemple en 2D



Estimation finale par moindres carrés

Reconstruction panoramique



Objectif de l'opération

Reconstruction panoramique

Problème

- ▶ Détection de points d'intérêt et association
- ▶ Observation de type (x, y, x', y') : le coin (x, y) dans la première image est associé au coin (x', y') dans la deuxième image
- ▶ si rotation pure de la camera entre les deux images $\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{x}}$ ou :

$$\begin{bmatrix} wx' \\ wy' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ en développant

$$\begin{cases} x' &= \frac{h_{00}x + h_{01}y + h_{02}}{h_{20}x + h_{21}y + h_{22}} \\ y' &= \frac{h_{10}x + h_{11}y + h_{12}}{h_{20}x + h_{21}y + h_{22}} \end{cases}$$

Reconstruction panoramique

Problème

- les inconnues étant les différents h_{ij}

$$\begin{cases} x'(h_{20}x + h_{21}y + h_{22}) = h_{00}x + h_{01}y + h_{02} \\ y'(h_{20}x + h_{21}y + h_{22}) = h_{10}x + h_{11}y + h_{12} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'x & -x'y & -x' \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 & -y'x & -y'y & -y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{00} \\ h_{01} \\ h_{02} \\ h_{10} \\ h_{11} \\ h_{12} \\ h_{20} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reconstruction panoramique

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_1 x_1 & -x'_1 y_1 & -x'_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -y'_1 x_1 & -y'_1 y_1 & -y'_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_n x_n & -x'_n y_n & -x'_n \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -y'_n x_n & -y'_n y_n & -y'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{00} \\ h_{01} \\ h_{02} \\ h_{10} \\ h_{11} \\ h_{12} \\ h_{20} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

H est déterminée modulo un facteur multiplicatif, donc on peut fixer h_{22} à 1. On retient donc que pour le problème d'estimation de l'homographie $K = 4$. Il faut donc résoudre **Ah = 0**.

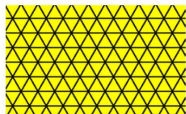
Si $n > 4$ le système est surdéterminé. En général pour trouver la solution par moindres carrés de **Ax = b** il faut :

1. calculer la décomposition en valeurs singulières (la SVD) de **A** : **A** = **UDV**^T
2. calculer **b'** = **U**^T**b**
3. trouver **y** défini par $y_i = b'_i / d_i$
4. la solution est **x** = **Vy**

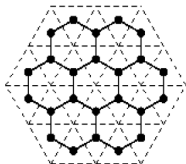
Notions préliminaires de géométrie discrète

Partition de l'espace

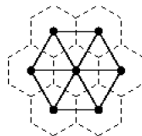
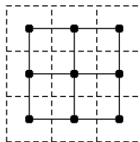
- ▶ **pavage** : partition de l'espace continu en cellules élémentaires
- ▶ régularité → pavages réguliers : triangulaire, carré, hexagonal :



- ▶ **maillage** : ensemble des segments entre des cellules ayant une arête commune
- ▶ dualité entre pavage et maillage :



Traitement d'images



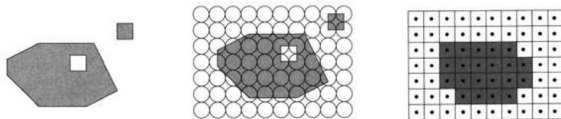
Notions préliminaires de géométrie discrète

Topologie discrète

- ▶ nombre de composantes connexes, de trous
- ▶ représentation hiérarchique des objets

Distances discrètes

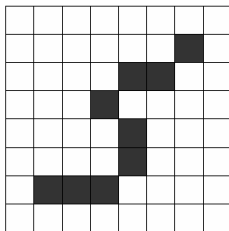
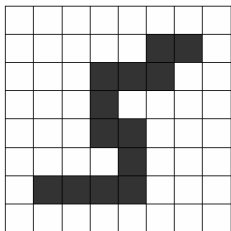
- ▶ Dimension (e.g. rayon) des composantes connexes
- ▶ Distance entre les objets



Connexité

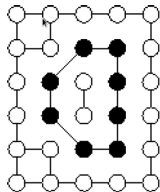
- la topologie dépend de la connexité du graphe de maillage :

- 4-chemin : $\{(i_k, j_k)_{1 \leq k \leq n} | \forall k \in [1, n-1] \ ||i_{k+1} - i_k|| + ||j_{k+1} - j_k|| \leq 1\}$
- 8-chemin : $\{(i_k, j_k)_{1 \leq k \leq n} | \forall k \in [1, n-1] \ \max\{||i_{k+1} - i_k|| + ||j_{k+1} - j_k||\} \leq 1\}$



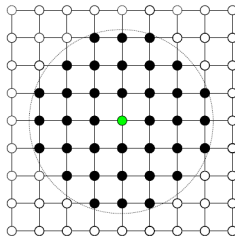
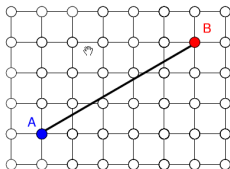
Théorème de Jordan

- Toute courbe simple fermée sépare l'espace en deux composantes : l'intérieur et l'extérieur de la courbe
- Cas du pavage carré : un 4-chemin (resp. 8-chemin) simple fermé sépare l'espace en deux composantes 8-connexes (resp. 4-connexes)

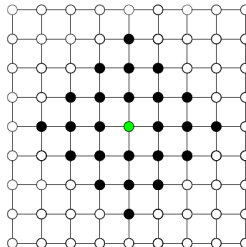
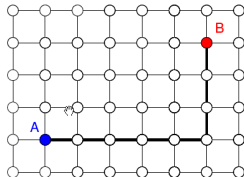


Distance

- la distance dépend également de la connexité du graphe de maillage



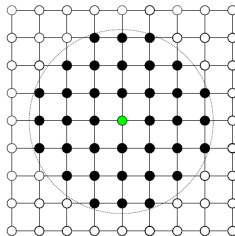
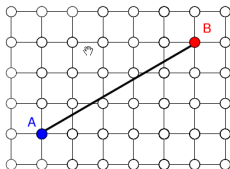
Distance euclidienne dans \mathbb{Z}^2 : $d_E = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$



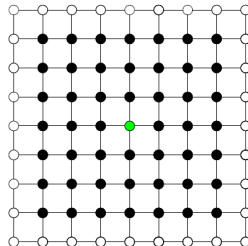
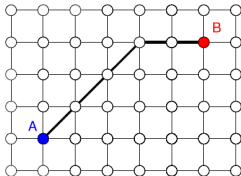
Distance d_4 dans \mathbb{Z}^2 : $d_4 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

Distance

- la distance dépend également de la connexité du graphe de maillage



Distance euclidienne dans \mathbb{Z}^2 : $d_E = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$



Distance d_8 dans \mathbb{Z}^2 : $d_8 = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$

Exemple de calcul distance : d_4

Balayage UL \rightarrow LR

```
// initialisation
for (i = 0; i<w; i++)
    for (j = 0; j<h; j++){
        if I(i,j)  $\in$  X d(i,j) = 0;
        else d(i,j) =  $\infty$ ;
    }
// calcul de d - etape 1
for (i = 0; i<w; i++)
    for (j = 0; j<h; j++){
        d(i,j) = min(d(i,j),
                     d(i-1,j) + 1, d(i,j-1) + 1 );
    }
```

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
0	∞	∞	0	0	∞	∞	∞	0
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	2	0
0	1	2	0	0	1	2	0	0
0	1	2	1	1	2	3	0	0
0	1	2	2	2	3	4	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Exemple de calcul distance : d_4

Balayage LR \rightarrow UL

```
// calcul de d - etape 2
for (i = w-1; i>=0; i--)
  for (j = h-1; j>=0; j--){
    d(i,j) = min(d(i,j),
      d(i+1,j) + 1, d(i,j+1) + 1);
  }
```

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	0
0	1	2	0	0	1	2	0
0	1	2	1	1	2	3	0
0	1	2	2	2	3	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	1	1	2	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	2	1	1	2	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Exemple de calcul distance : d_4

Balayage LR \rightarrow UL

```
// calcul de d - etape 2
for (i = w-1; i>=0; i--)
  for (j = h-1; j>=0; j--){
    d(i,j) = min(d(i,j),
      d(i+1,j) + 1, d(i,j+1) + 1);
  }
```

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	0
0	1	2	0	0	1	2	0
0	1	2	1	1	2	3	0
0	1	2	2	2	3	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	1	1	2	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	2	1	1	2	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Exercice :

- Prouvez que l'algorithme fonctionne correctement

Exemple de calcul distance : d_4

Balayage LR \rightarrow UL

```
// calcul de d - etape 2
for (i = w-1; i>=0; i--)
  for (j = h-1; j>=0; j--){
    d(i,j) = min(d(i,j),
      d(i+1,j) + 1, d(i,j+1) + 1);
  }
```

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	0
0	1	2	0	0	1	2	0
0	1	2	1	1	2	3	0
0	1	2	2	2	3	4	0
0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	1	1	2	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	2	1	1	2	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Exercice :

- Prouvez que l'algorithme fonctionne correctement
- Proposez un algorithme similaire pour d_8