Traitement d’images

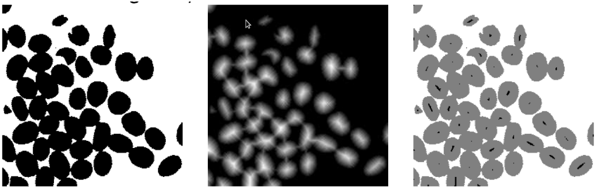
Emanuel Aldea <emanuel.aldea@u-psud.fr>
http://hebergement.u-psud.fr/emi/TIPolytech

Polytech Paris-Sud 5ère année

La morphologie mathématique

Définition

- théorie non linéaire, qui étudie les objets essentiellement en fonction de leur forme, de leur taille, des relations avec leur voisinage
- développée à l'origine pour l'étude des matériaux poreux
- transformations non linéaires, fondées sur des opérateurs de type sup et inf
- transformations non inversibles
- propriétés analytiques et algébriques
- algorithmes qui permettent des implémentations efficaces



Les opérateurs fondamentaux

Définition

- on etudie l'objet par rapport à un ensemble fixé, appelé élément structurant B
- addition de Minkowski : $X \oplus B = \{x + y | x \in X, y \in B\}$
  - union des translates de X par chaque point de B
- soustraction de Minkowski : $X \ominus B = \{z | \forall y \in B, z - y \in X\}$
  - intersection des translates de X par chaque point de B

Dilatation binaire

$$\delta_B(X) = \bigcup_{b \in B} X_{-b} = \{z \in \mathbb{Z}^2 | \exists b \in B, \exists x \in X, z = x - b\}$$

- l'ensemble des points pour lesquels l'intersection de X et B n'est pas vide

Erosion binaire

$$\epsilon_B(X) = \bigcap_{b \in B} X_{-b} = \{z \in \mathbb{Z}^2 | \forall b \in B, \exists x \in X, z = x - b\}$$

- l'ensemble des points pour lesquels B est un sous ensemble de X

Érosion et dilatation

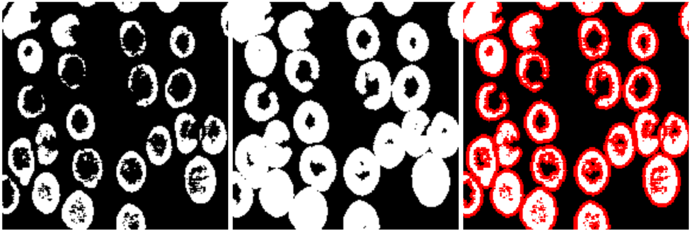
Lorsque l'élément structurant B est un disque de taille d :

$$B_\lambda(x) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 | d(x,y) < \lambda\}$$

les deux opérations se calculent par seuillage de la fonction distance

Dilatation par un disque

$$\delta_{B_\lambda}(X) = \{z \in \mathbb{Z}^2 | d(z,X) < \lambda\}$$



Érosion et dilatation

Lorsque l'élément structurant B est un disque de taille d :

$$B_\lambda(x) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 | d(x, y) < \lambda\}$$

les deux opérations se calculent par seuillage de la fonction distance

Erosion par un disque

$$\epsilon_{B_\lambda}(X) = \{z \in \mathbb{Z}^2 | d(z, X^C) < \lambda\}$$

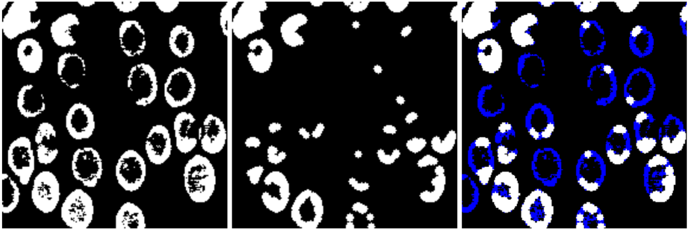
Ouverture binaire

L'ouverture de l'ensemble X par l'élément structurant B est défini comme :

$$X_B = \delta_B(\epsilon_B(X))$$

Propriétés algébriques

- anti-extensive : $X \supset X_B$
- croissante : $X \subset Y \Rightarrow X_B \subset Y_B$
- idempotente : $(X_B)_B = X_B$



Ouverture binaire

L'ouverture de l'ensemble X par l'élément structurant B est défini comme :

$$X_B = \delta_B(\epsilon_B(X))$$

Propriétés algébriques

- anti-extensive : $X \supset X_B$
- croissante : $X \subset Y \Rightarrow X_B \subset Y_B$
- idempotente : $(X_B)_B = X_B$

Effets

- suppression des parties plus petites que B
- "lissage" des contours en supprimant les petites excroissances
- différente par rapport à l'érosion (ne réduit pas systématiquement les structures)

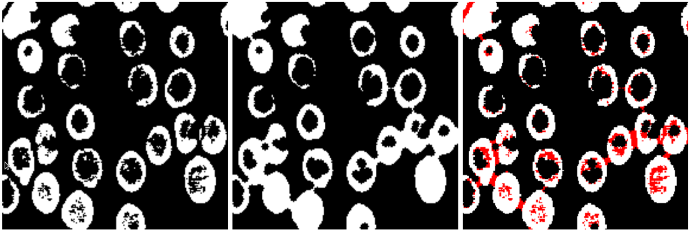
Fermeture binaire

La fermeture de l'ensemble X par l'élément structurant B est défini comme :

$$X^B = \epsilon_B(\delta_B(X))$$

Propriétés algébriques

- extensive : $X \subset X^B$
- croissante : $X \subset Y \Rightarrow X^B \subset Y^B$
- idempotente : $(X^B)^B = X^B$



Fermeture binaire

La fermeture de l'ensemble X par l'élément structurant B est défini comme :

$$X^B = \epsilon_B(\delta_B(X))$$

Propriétés algébriques

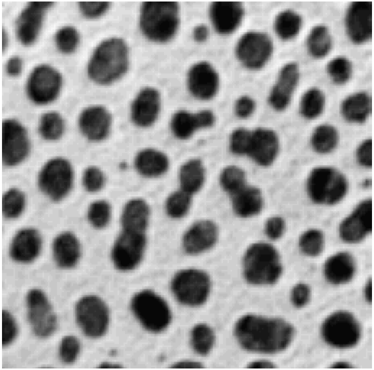
- extensive : $X \subset X^B$
- croissante : $X \subset Y \Rightarrow X^B \subset Y^B$
- idempotente : $(X^B)^B = X^B$

Effets

- boucher les trous qui sont plus petits que B
- "lissage" des contours en rajoutant des points dans les concavités

Sujet de réflexion

Soit l'image suivante :



On cherche à compter les différents types de cellules et leur proportions respectives. Proposez une solution, décrivez le synoptique de l'algorithme à mettre en œuvre et les fonctions à développer (notamment les entrées / sorties).

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
   - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
   - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
   - ✓ Convient pour des changements de perspective importants

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
   - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
   - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
   - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
   - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
   - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
   - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)
2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
   - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
   - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
   - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)
2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)
   - ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
   - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
   - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
   - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)
2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)
   - ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)
   - ✗ Problèmes pour des changements de perspective importants

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
   - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
   - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
   - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)
2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)
   - ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)
   - ✗ Problèmes pour des changements de perspective importants
   - ✓ Estimation du déplacement relatif **dense** (pour chaque pixel de l'image)

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
   - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
   - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
   - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)
2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)
   - ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)
   - ✗ Problèmes pour des changements de perspective importants
   - ✓ Estimation du déplacement relatif **dense** (pour chaque pixel de l'image)

Définition du flot optique

Champ de mouvement apparent **local** qui associe a chaque pixel (x, y, t) de I_t un vecteur (f_x, f_y) de vitesse apparente dans le plan image, par rapport à l'image suivante I_{t+1}.

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
   - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
   - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
   - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)
2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)
   - ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)
   - ✗ Problèmes pour des changements de perspective importants
   - ✓ Estimation du déplacement relatif **dense** (pour chaque pixel de l'image)

Définition du flot optique

Champ de mouvement apparent **local** qui associe a chaque pixel (x, y, t) de I_t un vecteur (f_x, f_y) de vitesse apparente dans le plan image, par rapport à l'image suivante I_{t+1}.

Le vecteur (f_x, f_y) représente la projection sur le plan image du vecteur vitesse 3D (V_x, V_y, V_z) des objets de la scène par rapport au centre de la camera.

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
   - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
   - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
   - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)
2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)
   - ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)
   - ✗ Problèmes pour des changements de perspective importants
   - ✓ Estimation du déplacement relatif **dense** (pour chaque pixel de l'image)

Définition du flot optique

Champ de mouvement apparent **local** qui associe a chaque pixel (x, y, t) de I_t un vecteur (f_x, f_y) de vitesse apparente dans le plan image, par rapport à l'image suivante I_{t+1}.

Historiquement on note (f_x, f_y) par (u, v)

Analyse de mouvement - enjeux

Objectif général : comprendre un phénomène qui a lieu en 3D, à partir d'une séquence vidéo (2D). Comment faire ?

1. Analyser deux images bien espacées en temps
   - ✓ Estimation 2D vers 3D **précise** (en connaissant le déplacement de la camera)
   - ✓ Convient pour des changements de perspective importants
   - ✗ Estimation du déplacement relatif des pixels **pas dense** (pour les points d'intérêt uniquement)
2. Analyser deux images consécutives (différences très faibles)
   - ✗ Estimation 2D vers 3D impossible (nécessite intégration temporelle)
   - ✗ Problèmes pour des changements de perspective importants
   - ✓ Estimation du déplacement relatif **dense** (pour chaque pixel de l'image)

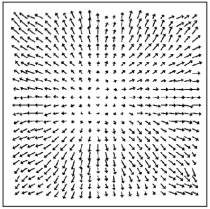
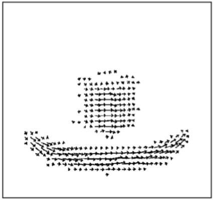
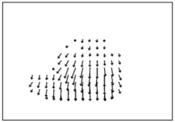
Définition du flot optique

Champ de mouvement apparent **local** qui associe a chaque pixel (x, y, t) de I_t un vecteur (f_x, f_y) de vitesse apparente dans le plan image, par rapport à l'image suivante I_{t+1}.

On calcule le flot (u, v) à partir des variations temporelles (petites) de la fonction $I(x, y, t)$.

Exemples de champs de mouvement



Exploitation du flot optique

En ordre croissant du niveau conceptuel :

- estimation du mouvement dominant

Exploitation du flot optique

En ordre croissant du niveau conceptuel :

- estimation du mouvement dominant
- détection de discontinuités (contours), et de singularités (foyer d'expansion)

Exploitation du flot optique

En ordre croissant du niveau conceptuel :

- estimation du mouvement dominant
- détection de discontinuités (contours), et de singularités (foyer d'expansion)
- temps avant collision

Exploitation du flot optique

En ordre croissant du niveau conceptuel :

- estimation du mouvement dominant
- détection de discontinuités (contours), et de singularités (foyer d'expansion)
- temps avant collision
- profondeur

Exploitation du flot optique

En ordre croissant du niveau conceptuel :

- estimation du mouvement dominant
- détection de discontinuités (contours), et de singularités (foyer d'expansion)
- temps avant collision
- profondeur
- mouvement propre

Exploitation du flot optique

En ordre croissant du niveau conceptuel :

- estimation du mouvement dominant
- détection de discontinuités (contours), et de singularités (foyer d'expansion)
- temps avant collision
- profondeur
- mouvement propre
- orientation des surfaces

Calcul du flot optique

Mais comment peut-on calculer le flot optique ?

L'hypothèse de persistance de l'intensité lumineuse

A deux instants très proches, et pour un mouvement faible, l'endroit respectif de la scène ne change pas d'intensité lumineuse :

$$\boxed{I(x, y, t) = I(x + dx, y + dy, t + dt)}$$

Calcul du flot optique

Mais comment peut-on calculer le flot optique ?

L'hypothèse de persistance de l'intensité lumineuse

A deux instants très proches, et pour un mouvement faible, l'endroit respectif de la scène ne change pas d'intensité lumineuse :

$$\boxed{I(x, y, t) = I(x + dx, y + dy, t + dt)}$$

Développement de Taylor à l'ordre 1 de I :

$$I(x, y, t) \approx I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x}dx + \frac{\partial I}{\partial y}dy + \frac{\partial I}{\partial t}dt$$

Calcul du flot optique

Mais comment peut-on calculer le flot optique ?

L'hypothèse de persistance de l'intensité lumineuse

A deux instants très proches, et pour un mouvement faible, l'endroit respectif de la scène ne change pas d'intensité lumineuse :

$$\boxed{I(x, y, t) = I(x + dx, y + dy, t + dt)}$$

Développement de Taylor à l'ordre 1 de I :

$$I(x, y, t) \approx I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x} dx + \frac{\partial I}{\partial y} dy + \frac{\partial I}{\partial t} dt$$

En simplifiant on obtient l'equation du flot optique :

$$\boxed{I_x u + I_y v + I_t = 0}$$

Calcul du flot optique

Mais comment peut-on calculer le flot optique ?

L'hypothèse de persistance de l'intensité lumineuse

A deux instants très proches, et pour un mouvement faible, l'endroit respectif de la scène ne change pas d'intensité lumineuse :

$$\boxed{I(x, y, t) = I(x + dx, y + dy, t + dt)}$$

Développement de Taylor à l'ordre 1 de I :

$$I(x, y, t) \approx I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x} dx + \frac{\partial I}{\partial y} dy + \frac{\partial I}{\partial t} dt$$

En simplifiant on obtient l'equation du flot optique :

$$\boxed{I_x u + I_y v + I_t = 0}$$

Problème : on peut déterminer I_x, I_y, I_t, mais il y a deux inconnues u, v et une seule équation par pixel.

Calcul du flot optique

Le problème de l'estimation du flot optique est mal posé.

Calcul du flot optique

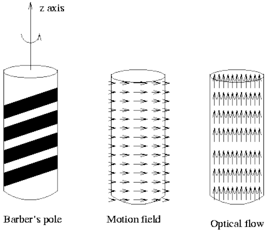
Le problème de l'estimation du flot optique est mal posé.

- problèmes importants dans les endroits homogènes

Calcul du flot optique

Le problème de l'estimation du flot optique est mal posé.

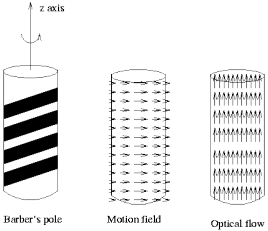
- problèmes importants dans les endroits homogènes
- moins souvent, des problèmes où le mouvement apparent ne correspond pas au mouvement réel



Calcul du flot optique

Le problème de l'estimation du flot optique est mal posé.

- problèmes importants dans les endroits homogènes
- moins souvent, des problèmes où le mouvement apparent ne correspond pas au mouvement réel



Solution : introduire des contraintes supplémentaires (**régulariser** la solution) pour réduire l'espace de recherche

L'algorithme de Lucas-Kanade

Idée

Une équation, deux inconnues $\Rightarrow$ problème. Mais supposons que le flot est **régulier** (sa valeur ne change pas brutalement d'un pixel a ses voisins). On peut imposer alors que les inconnues u, v satisfassent également l'équation du flot pour tous les voisins d'un certain pixel.

L'algorithme de Lucas-Kanade

Idée

Une équation, deux inconnues $\Rightarrow$ problème. Mais supposons que le flot est **régulier** (sa valeur ne change pas brutalement d'un pixel a ses voisins). On peut imposer alors que les inconnues u, v satisfassent également l'équation du flot pour tous les voisins d'un certain pixel.

Avant :

$$I_x u + I_y v = -I_t$$

L'algorithme de Lucas-Kanade

Idée

Une équation, deux inconnues $\Rightarrow$ problème. Mais supposons que le flot est **régulier** (sa valeur ne change pas brutalement d'un pixel a ses voisins). On peut imposer alors que les inconnues u, v satisfassent également l'équation du flot pour tous les voisins d'un certain pixel.

Proposition de Lucas-Kanade :

$$\begin{bmatrix} I_{x1} & I_{y1} \\ \vdots & \vdots \\ I_{x9} & I_{y9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{t1} \\ \vdots \\ -I_{t9} \end{bmatrix}$$

L'algorithme de Lucas-Kanade

Idée

Une équation, deux inconnues $\Rightarrow$ problème. Mais supposons que le flot est **régulier** (sa valeur ne change pas brutalement d'un pixel a ses voisins). On peut imposer alors que les inconnues u, v satisfassent également l'équation du flot pour tous les voisins d'un certain pixel.

Proposition de Lucas-Kanade :

$$\begin{bmatrix} I_{x1} & I_{y1} \\ \vdots & \vdots \\ I_{x9} & I_{y9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{t1} \\ \vdots \\ -I_{t9} \end{bmatrix}$$

Cela revient à résoudre pour chaque pixel un système de type :

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{I_t}$$

L'algorithme de Lucas-Kanade - résolution

On a $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{I_t}$, mais on peut l'écrire sous la forme $\mathbf{A^T}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A^T}\mathbf{I_t}$, ce qui donne :

$$u = \underbrace{(\mathbf{A^T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A^T}}_{\text{pseudo-inverse}}\mathbf{I_t}$$

L'algorithme de Lucas-Kanade - résolution

On a $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{I_t}$, mais on peut l'écrire sous la forme $\mathbf{A^T}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A^T}\mathbf{I_t}$, ce qui donne :

$$u = \underbrace{(\mathbf{A^T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A^T}}_{\text{pseudo-inverse}}\mathbf{I_t}$$

On peut montrer que cela est équivalent à trouver la solution au sens des moindres carrés :

$$\min \sum_{i=1}^{9} (I_{xi}u + I_{yi}v + I_{ti})^2$$

L'algorithme de Lucas-Kanade - résolution

On a $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{I_t}$, mais on peut l'écrire sous la forme $\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{I_t}$, ce qui donne :

$$u = \underbrace{(\mathbf{A}^\mathbf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathbf{T}}_{\text{pseudo-inverse}}\mathbf{I_t}$$

On peut montrer que cela est équivalent à trouver la solution au sens des moindres carrés :

$$\min \sum_{i=1}^{9} (I_{xi}u + I_{yi}v + I_{ti})^2$$

qui nous amène au système suivant :

$$\begin{cases} \sum_i (I_{xi}u + I_{yi}v + I_{ti})I_{xi} = 0 \\ \sum_i (I_{xi}u + I_{yi}v + I_{ti})I_{yi} = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Lucas-Kanade - résolution

On a $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{I_t}$, mais on peut l'écrire sous la forme $\mathbf{A^T A u} = \mathbf{A^T I_t}$, ce qui donne :

$$u = \underbrace{(\mathbf{A^T A})^{-1}\mathbf{A^T}}_{\text{pseudo-inverse}}\mathbf{I_t}$$

On peut montrer que cela est équivalent à trouver la solution au sens des moindres carrés :

$$\min \sum_{i=1}^{9} (I_{xi} u + I_{yi} v + I_{ti})^2$$

$$\begin{bmatrix} \sum I_{xi}^2 & \sum I_{xi} I_{yi} \\ \sum I_{xi} I_{yi} & \sum I_{yi}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum I_{xi} I_{ti} \\ -\sum I_{yi} I_{ti} \end{bmatrix}$$

L'algorithme de Lucas-Kanade - résolution

On a $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{I_t}$, mais on peut l'écrire sous la forme $\mathbf{A^T}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A^T}\mathbf{I_t}$, ce qui donne :

$$u = \underbrace{(\mathbf{A^T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A^T}}_{\text{pseudo-inverse}}\mathbf{I_t}$$

On peut montrer que cela est équivalent à trouver la solution au sens des moindres carrés :

$$\min \sum_{i=1}^{9} (I_{xi}u + I_{yi}v + I_{ti})^2$$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum I_{xi}^2 & \sum I_{xi}I_{yi} \\ \sum I_{xi}I_{yi} & \sum I_{yi}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\sum I_{xi}I_{ti} \\ -\sum I_{yi}I_{ti} \end{bmatrix}$$

L'algorithme de Lucas-Kanade - limitations

Une méthode locale :

- une solution analytique, relativement simple
- un problème qui se parallélise bien
- difficultés majeures dans les zones homogènes
- difficultés pour les déplacements importants

L'algorithme de Horn-Schunck

Idée

Il faudrait chercher le champ inconnu dans une équation **globale**, une grosse minimisation qui pénalise les écarts par rapport à l'équation du flot optique, et aussi les variations fortes dans la solution du problème

L'algorithme de Horn-Schunck

Idée

Il faudrait chercher le champ inconnu dans une équation **globale**, une grosse minimisation qui pénalise les écarts par rapport à l'équation du flot optique, et aussi les variations fortes dans la solution du problème

Proposition de Horn-Schunck :

$$\min \int\int \underbrace{(I_x u + I_y v + I_t)^2}_{\text{attache aux données}} + \lambda \underbrace{({u_x}^2 + {u_y}^2 + {v_x}^2 + {v_y}^2)}_{\text{régularisation}} \; dxdy$$

L'algorithme de Horn-Schunck

Idée

Il faudrait chercher le champ inconnu dans une équation **globale**, une grosse minimisation qui pénalise les écarts par rapport à l'équation du flot optique, et aussi les variations fortes dans la solution du problème

Proposition de Horn-Schunck :

$$\min \int\int \underbrace{(I_x u + I_y v + I_t)^2}_{\text{attache aux données}} + \lambda \underbrace{({u_x}^2 + {u_y}^2 + {v_x}^2 + {v_y}^2)}_{\text{régularisation}} \ dxdy$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\begin{cases} 2(I_x u + I_y v + I_t)I_x + 2\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 0 \\ 2(I_x u + I_y v + I_t)I_y + 2\lambda \left[\left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Horn-Schunck

Idée

Il faudrait chercher le champ inconnu dans une équation **globale**, une grosse minimisation qui pénalise les écarts par rapport à l'équation du flot optique, et aussi les variations fortes dans la solution du problème

Proposition de Horn-Schunck :

$$\min \int\int \underbrace{(I_x u + I_y v + I_t)^2}_{\text{attache aux données}} + \lambda \underbrace{({u_x}^2 + {u_y}^2 + {v_x}^2 + {v_y}^2)}_{\text{régularisation}} \; dxdy$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\begin{cases} (I_x u + I_y v + I_t) I_x + \lambda \nabla^2 u = 0 \\ (I_x u + I_y v + I_t) I_y + \lambda \nabla^2 v = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Horn-Schunck - résolution

On peut montrer facilement que $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = u - \tilde{u}$

L'algorithme de Horn-Schunck - résolution

On peut montrer facilement que $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = u - \tilde{u}$
Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\begin{cases} (I_x u + I_y v + I_t) I_x + \lambda(u - \tilde{u}) = 0 \\ (I_x u + I_y v + I_t) I_y + \lambda(v - \tilde{v}) = 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Horn-Schunck - résolution

On peut montrer facilement que $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = u - \tilde{u}$
Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\begin{cases} (I_x u + I_y v + I_t) I_x + \lambda(u - \tilde{u}) = 0 \\ (I_x u + I_y v + I_t) I_y + \lambda(v - \tilde{v}) = 0 \end{cases}$$

Schéma itératif de résolution (méthode de Gauss-Siedel) :

$$\begin{cases} u_k = \tilde{u}_{k-1} - I_x(I_x \tilde{u}_{k-1} + I_y \tilde{v}_{k-1} + I_t)/(I_x^2 + I_y^2 + \lambda) \\ u_k = \tilde{u}_{k-1} - I_x(I_x \tilde{u}_{k-1} + I_y \tilde{v}_{k-1} + I_t)/(I_x^2 + I_y^2 + \lambda) \end{cases}$$

L'algorithme de Horn-Schunck - résolution

On peut montrer facilement que $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = u - \tilde{u}$
Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$\begin{cases} (I_x u + I_y v + I_t)I_x + \lambda(u - \tilde{u}) = 0 \\ (I_x u + I_y v + I_t)I_y + \lambda(v - \tilde{v}) = 0 \end{cases}$$

Schéma itératif de résolution (méthode de Gauss-Siedel) :

$$\begin{cases} u_k = \tilde{u}_{k-1} - I_x(I_x \tilde{u}_{k-1} + I_y \tilde{v}_{k-1} + I_t)/(I_x^2 + I_y^2 + \lambda) \\ u_k = \tilde{u}_{k-1} - I_x(I_x \tilde{u}_{k-1} + I_y \tilde{v}_{k-1} + I_t)/(I_x^2 + I_y^2 + \lambda) \end{cases}$$

Fonctionnement de l'algorithme :

1. Initialiser les champs scalaires u_0, v_0.
2. Appliquer le schéma itératif et calculer u_k, v_k à partir de u_{k-1}, v_{k-1}.
3. Vérifier un critère de converge et s'arrêter en cas de convergence.

L'algorithme de Horn-Schunck - limitations

Une méthode locale :

- une solution itérative, mais globale
- capable de propager les contraintes sur les bords dans les zones homogènes
- difficultés majeures autour des discontinuités
- difficultés pour les déplacements importants

D'autres fonctionnelles proposées

Une grande diversité de minimisations de type attache aux données + régularisation. Voici deux exemples :

L'algorithme de Zach

Variation totale et régularisation en norme L1 :

$$E = \int_{\Omega} |I(x + w) - I(x)| + \lambda |\nabla \mathbf{u}|$$

D'autres fonctionnelles proposées

Une grande diversité de minimisations de type attache aux données + régularisation. Voici deux exemples :

L'algorithme de Zach

Variation totale et régularisation en norme L1 :

$$E = \int_\Omega |I(x+w) - I(x)| + \lambda |\nabla \mathbf{u}|$$

L'algorithme de Brox

Attache aux données :

$$E_{data} = \int_\Omega |I(x+w) - I(x)| + \lambda |\nabla I(x+w) - \nabla I(x)|^2$$

Régularisation : $E_{smooth} = \int_\Omega |\nabla_3 u + \nabla_3 v|$
Énergie totale : $E = E_{data} + \alpha E_{smooth}$

Analyse multi-echelle