华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 4.3 C-K方程

主讲：王湘君

转移概率矩阵的性质

命题 4.3.1

设$\mathbb{P}=(p_{ij})$为$\{X_n, n\in\mathbb{N}_0\}$的转移概率矩阵，则

（1）$p_{ij}\ge 0$;　　（2）$\sum_{j\in I} p_{ij}=1$.

定义4.3.2 我们称满足上面两个性质的矩阵为随机矩阵.

注

转移概率矩阵的列和并没有任何要求，若随机矩阵还满足$\sum_{i\in I} p_{ij}=1$，我们称之为一个双随机矩阵.

n步转移概率

定义4.3.3 设$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一Markov链，我们称

$$p_{ij}^{(n)} \triangleq P(X_{m+n} = j | X_m = i)$$

为$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$的$n$步转移概率；

称$\mathbb{P}^{(n)} \triangleq \left(p_{ij}^{(n)}\right)$为$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$的$n$步转移概率矩阵.

注

我们约定$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$, 即$\mathbb{P}^{(0)}$为单位矩阵.

显然， n步转移概率矩阵也为一随机矩阵.

C-K方程

定义4.3.4 设$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一Markov链，则

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)}, \qquad l = 0,1,\cdots,n.$$

我们称之为Chapman-Kolmogorov方程（简称**C-K方程**）.

注

C-K方程的矩阵形式为

$$\mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^{(l)}\mathbb{P}^{(n-l)} = \mathbb{P}^n.$$

初始概率分布与绝对概率分布

定义4.3.5 设$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$为一Markov链，

◆记$P(X_0 = j) \triangleq p_j$，我们称$\{p_j\}$为$\{X_n\}$的初始概率分布，称$P^T(0) = (\cdots, p_j, \cdots)$为$\{X_n\}$的初始概率分布向量；

◆记$P(X_n = j) \triangleq p_j(n)$，我们称$\{p_j(n)\}$为$\{X_n\}$的绝对概率分布，称$P^T(n) = (\cdots, p_j(n), \cdots)$为$\{X_n\}$的绝对概率分布向量.

定理4.3.6 $P^T(n) = P^T(0)\mathbb{P}^{(n)}$.

证明 由全概率公式，

$$p_j(n) = \sum_{i \in I} P(X_0 = i)P(X_n = j | X_0 = i).$$

作业

设Markov链$\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$的状态空间$I = \{1,2,3\}$, 转移概率矩阵

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

初始概率分布$P^T(0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$,

1. 求$P(X_3 = 2, X_5 = 3 | X_0 = 1)$;
2. 求$E(X_3 | X_2)$;
3. $P(X_2 = 2 | X_0 = 1, X_1 \neq 1)$与$P(X_2 = 2 | X_1 \neq 1)$是否相等? 如果不等, 与Markov性矛盾吗?

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！