华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 1.5 条件期望的定义与性质

主讲：王湘君

条件期望的定义

若X,Y为 d.r.v., 则对Y的任一取值y，我们可以定义一个条件概率测度$P(\cdot\,|Y=y),X$在此测度下的（条件）期望

$$E(X|Y=y)=\sum_x xP(X=x|Y=y)=\sum_x x\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}\triangleq h(y).$$

若X,Y为 c.r.v.，联合密度$f(x,y)$, 条件密度$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$，则

$$E(X|Y=y)=\int_{\mathbb{R}} xf(x|y)dx\triangleq h(y).$$

定义1.5.1 记号如上描述，令$E(X|Y)\triangleq h(Y)$，称之为X关于Y的条件数学期望。

条件期望的性质

定义1.5.2 （1）全期望公式： $E(X)=E\big(E(X|Y)\big)$；

证明：以连续情形为例，

$$E\big(E(X|Y)\big)=E\big(h(Y)\big)=\int_{\mathbb{R}} h(y)f_Y(y)dy$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} xf(x|y)dx\right)f_Y(y)dy=\iint_{\mathbb{R}^2} xf(x,y)dxdy=E(X).$$

（2）条件期望的线性性： $\forall a,b\in\mathbb{R}, E(aX_1+bX_2|Y)=aE(X_1|Y)+bE(X_2|Y)$;

（3）对可测函数$g, E(Xg(Y)|Y)=E(X|Y)g(Y)$；

证明： $E(Xg(Y)|Y=y)=E(Xg(y)|Y=y)=E(X|Y=y)g(y).$

条件期望的性质（续）

（4）若X,Y独立，则$E(X|Y)=E(X)$;

证明： 依然以连续情形为例，由独立性，

$$E(X|Y=y)=\int_{\mathbb{R}} xf(x|y)dx=\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx=E(X).$$

（5）$E(E(X|Y_1,Y_2)|Y_1)=E(E(X|Y_1)|Y_1,Y_2)=E(X|Y_1).$

例子

例1.5.3 一只锲而不舍的小老鼠被困在有3个出口的矿洞中，每次它都从中任选一个出口。如果它选择了出口1，则它很幸运地经过3小时到达安全的地方，如果它选择了出口2，则它很不幸运地经过5小时回到原地，如果它选择了出口3，则它更不幸运地经过7小时回到原地。小老鼠平均需要多少时间到达安全地?

解： 以X记小老鼠到达安全地所需时间，以Y记小老鼠第一次选择的出口，则

$$E(X)=E\big(E(X|Y)\big)=\sum_{k=1}^{3}E(X|Y=k)P(Y=k)$$

$$=\frac{1}{3}\big(3+\big(5+E(X)\big)+(7+E(X))\big),$$

解得，$E(X)=15.$

谢 谢 ！