华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 3.6 Poisson过程的两个应用案例

主讲：王湘君

问题一的提出

考虑如下软件可靠性问题:

假设开发了一款应用软件或程序包，需要考虑其中的bugs. 常用的方式就是做测试，运行软件一段时间， bugs在运行过程中会引发一些错误（errors）.运行结束后，仔细检查软件，修正所有引发错误的bugs.

注意：有些bugs没有引发错误，所以没有被找出.

问 题 如何估计修正以后的软件的可靠性?

请大家不急于看后面的描述，先花10分钟的时间想想你打算怎么处理?

模型假设

1 最初软件有m（未知）个bugs，我们记为 bugs 1, bugs 2, ……， bugs m;

2 bugs i在软件运行过程中以速率为λ_i的 Poisson过程引发错误;

3 bugs是相互独立的.

- 我们能观测到的是引发了错误的bugs在整个测试过程中引发的错误次数.
- 而我们要估计的是修正以后的软件的可靠性（未引发错误的bugs 的引发错误速率）.

可靠性的描述

令

$$\psi_i(t)=\begin{cases}1, & \text{bug } i \text{ 到时刻} t \text{为止没有引发错误,}\\ 0, & \text{bug } i \text{ 到时刻} t \text{为止引发了至少一次错误,}\end{cases}$$

则我们需要估计的是

$$\Lambda(t)=\sum_i \lambda_i\psi_i(t),$$

即修正以后的软件的错误发生率.

可靠性的描述

注意到

$$E\big(\Lambda(t)\big) = \sum_i \lambda_i E(\psi_i(t)) = \sum_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \ .$$

我们以$M_j(t), j \geq 1$记引发了j次错误的bugs数目, 若令

$$I_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{bug } i \text{ 到时刻} t \text{为止引发了1次错误,} \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

则

$$M_1(t) = \sum_i I_i(t), \quad E\big(M_1(t)\big) = \sum_i \lambda_i t e^{-\lambda_i t} ,$$

可靠性的描述

所以，

$$E\left(\Lambda(t)-\frac{M_1(t)}{t}\right)=0,$$

我们有$\frac{M_1(t)}{t}$为$\Lambda(t)$的一个无偏估计.

当然，我们也需要讨论这个估计量的均方误及其估计，留给大家思考.

参见 [1] S. M. Ross, Introduction to Probability Model, 10th Edition, New York: Academic, 2010

问题二

人的一生中避免不了各种打击，不同的打击会带来不同大小的创伤.

丢了10元钱

分手

考试失利

但我们有自我修复功能，随着时间的推移，创伤会衰减.

请建立创伤模型，用来乐观面对即将到来的各种打击！

以上纯属虚构，
如有雷同，
实属巧合！

问题二

以一个参数为λ的Poisson过程$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$来描述受到的打击次数，

以$\{W_n\}$描述打击的发生时刻，

以$\{\xi_n\}$描述第n次打击的创伤大小，假设创伤指数衰减，衰减率为α.

那么，到t时刻的累积创伤为

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k \exp\{-\alpha(t - W_k)\}.$$

作业

如果我们在问题二中假设$\{\xi_n\}$ $i.i.d.$,且与$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$相互独立，计算$\{X_t\}$的均值函数与方差函数吗.

華中科技大學

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢