Image Formation, Camera Model

王天江
tjwang@hust.edu.cn

华中科技大学计算机学院

目录

几何基元

- 几何基元构成了用于描述三维形状的基本构件：
  - 点、线和平面
  - 曲线、曲面和体积
- 二维点：图像中的像素坐标 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- 二维线： $ax + by + c = 0$
- 三维点： $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- 三维平面： $ax + by + cz + d = 0$

齐次坐标系

- 笛卡尔坐标下: 齐次坐标系下: 两者之间的关系

2D 点

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$X = x/\mathrm{w}$$

$$Y = y/\mathrm{w}$$

- 齐次坐标系的作用:
  - 简化计算
  - 表示无穷远点

齐次坐标系表示无穷远点

❖ 平行线在无限远相交问题

- 在欧氏空间，同一平面上的两条平行线不能相交
- 在射影空间，两条平行的轨道在地平线相交，地平线是无穷远处的一点

❖ 在齐次坐标系下可以这样

- 例如，笛卡尔坐标的点 (1,2) 变成了齐次坐标的点 (1,2,1)
- 将该点向无穷远点移动，表示为将w分量不断减小.
- 到达无穷远点时，它变成 (1,2,0)，即, (1/0, 2/0) = (∞,∞)

❖ 因此，在齐次坐标系下，用小量w，表示无穷远点

齐次坐标系简化计算

- 在笛卡尔坐标系中，平移不能简单的用矩阵乘法实现
- 齐次坐标用矩阵运算来统一表示各种几何变换
  - 如旋转、缩放和平移等。
  - 但在齐次坐标系中，平移可以简单地表示为一个矩阵乘法操作
- 例如，二维点P(x, y)要x平移a单位，y平移b单位，可用如下矩阵变换：

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

为什么称作齐次坐标系

❖ 看看例子

齐次坐标　　笛卡尔坐标

$$(1,2,3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$(2,4,6) = \left(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$(4,8,12) = \left(\frac{4}{12}, \frac{8}{12}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(1a, 2a, 3a) = \left(\frac{1a}{3a}, \frac{2a}{3a}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

- 点 (1, 2, 3), (2, 4, 6) 和 (4, 8, 12) 对应着
  - 同一个欧氏空间点(1/3, 2/3).
- 齐次坐标作点积, (1a, 2a, 3a) 对应着
  - 同一个欧氏空间点(1/3, 2/3).
- 齐次的含义
  - 若干点是齐次的，表示它们是欧氏空间的同一个点
  - 齐次坐标是尺度不变的.
  - 齐次指：点、线、面都可以统一用向量表示

齐次坐标下的2D点和线

❖ 2D 点

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

❖ 2D 直线

$$\tilde{\mathbf{l}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

❖ 直线方程

$$\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{l}} = ax + by + c = 0$$

❖ 两直线的交点

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{l}}_1 \times \tilde{\mathbf{l}}_2$$

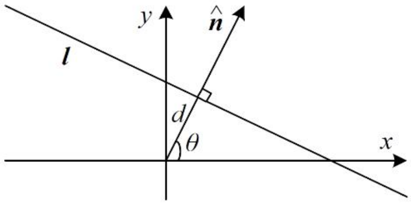
❖ 连接两个点的直线

$$\tilde{\mathbf{l}} = \tilde{\mathbf{x}}_1 \times \tilde{\mathbf{x}}_2$$

❖ 直线归一化

$$\tilde{\mathbf{l}} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y, d) = (\hat{\mathbf{n}}, d) \quad (\|\hat{\mathbf{n}}\| = 1)$$

$\hat{\mathbf{n}}$:法向量



齐次坐标下的3D 点、线和平面

❖ 3D 点

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

❖ 3D 平面

$$\hat{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

❖ 平面方程

$$\tilde{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{m}} = ax + by + cz + d = 0$$

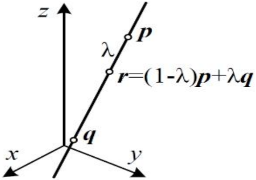
平面向量归一化：

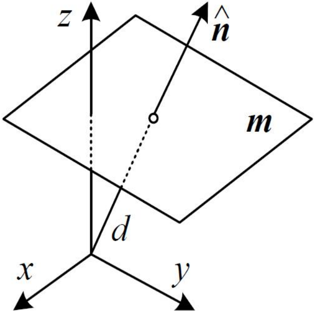
$$\hat{\mathbf{m}} = \left(\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z, d\right) = \left(\hat{\mathbf{n}}, d\right)$$

❖ 3D 直线：用直线上的两个点来表达

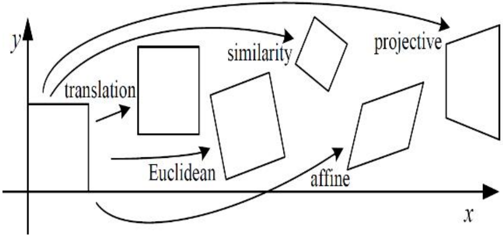
- 直线上的两个点 (p, q)
- 直线上任意一点 r 可以表示成(p, q) 的线性组合

$$\hat{\mathbf{r}} = \mu\hat{\mathbf{p}} + \lambda\hat{\mathbf{q}}$$





- 2D平面上的简单变换



- 平移变换

$$x' = x + t$$

- 旋转变换

$$x' = Rx$$

其中，**R** 为正交旋转矩阵

$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$, $|\mathbf{R}| = 1$.

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

旋转 + 平移

❖ 旋转+平移变换，又称欧式变换或者刚体运动

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t}$$

❖ 若连续做两个刚体变换，公式显得混乱

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{R}_2(\mathbf{x}' + \mathbf{t}_2) + \mathbf{t}_1 = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{x} + (\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)$$

❖ 若用齐次坐标系，则很清晰：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{t}_1 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ and } \begin{pmatrix} \mathbf{x}'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{t}_2 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{t}_2 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{t}_1 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

尺度缩放变换

- 尺度缩放变换又称为相似变换：
  - 变换后，直线的夹角仍然保持不变
- 尺度缩放变换表示为：

$$\mathbf{x}' = s\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t}$$

这里 s 是任意标量因子

- 在齐次坐标系下：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 仿射变换：
  - 变换后，平行线仍然保持平行的变换
  - 它包括了平移、旋转、缩放、错切操作
- 仿射变换表示为： $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t}$

这里 A 是任意 2×2 矩阵

- 齐次坐标系下：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{t} \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

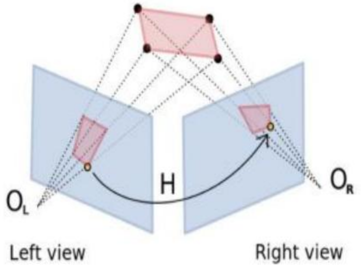
射影变换

- 射影变换又称为透视变换或者单应操作
  - 该变换保持直线仍然是直线
  - 更一般化，除了包括仿射变换内容外，还处理透视效果（无穷远点等）
- 透视变换可表示成：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{H}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

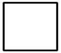
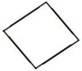
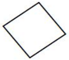
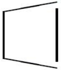
  - 这里 **H** 是任意 3×3 矩阵，称为“单应”矩阵

- “单应”矩阵H，表示
  - 空间物体透视映射到不同平面上，它们之间的关系
  - 如果两个平面平行，单应操作退化为仿射变换



基元的3D 变换

❖ 3D 变换与 2D 变换很相似，用在2D的都可以用在3D

Transformation	Matrix	# DoF	Preserves	Icon
translation	$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{3\times 4}$	3	orientation	
rigid (Euclidean)	$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{3\times 4}$	6	lengths	
similarity	$\begin{bmatrix} s\mathbf{R} & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{3\times 4}$	7	angles	
affine	$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix}_{3\times 4}$	12	parallelism	
projective	$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix}_{4\times 4}$	15	straight lines	

3D to 2D 投影

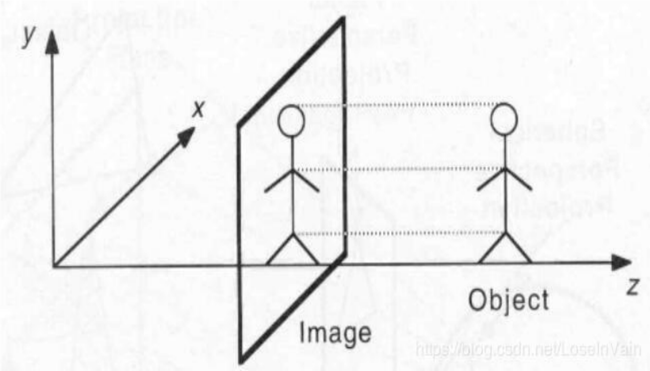
- 我们需要确定如何将3D图元投影到图像平面上。
- 可以使用线性投影矩阵实现3D到2D的投影
  - 最简单的模型是正交投影。
  - 更常用的模型是透视投影.

正交投影

❖ 它只需删除3D坐标的z分量

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

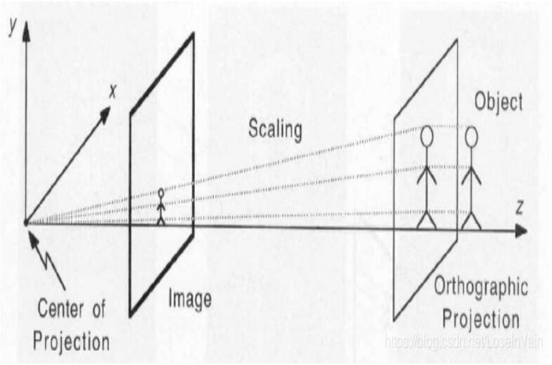


尺度正交投影

- 若将场景的深度看成相同的
  - 即场景是个“平”的
- 尺度正交投影：先做正交，再做缩放
  - 这种投影也称为弱透视投影
- 尺度正交投影计算（s尺度因子）：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

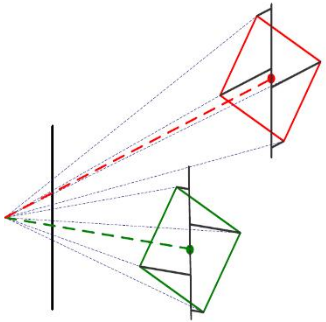
$$x' = (s/z_0)x$$
$$y' = (s/z_0)y$$



准透视投影

- 准透视投影：实现仿射变换
- 准透视投影过程：
  - 首先，物体点被投射到局部参考平面（平行于图像平面）
    - ✓ 采用平行于物体中心的视线的投影线
  - 随后，采用通常的尺度投影到最终的图像平面上。
  - 因此，这两个投影的组合是仿射变换
- 准透视投影计算：

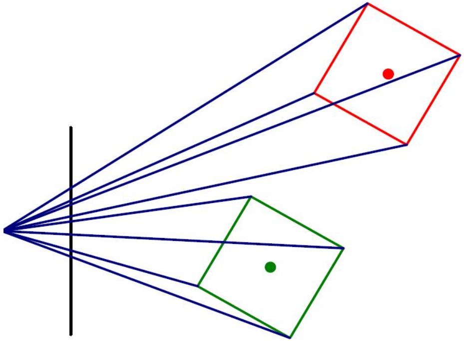
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



透视投影

- 透视投影：平行线在无穷远交于一点
- 透视投影计算：
  - 投到图像平面的2D坐标，是其3D坐标除以z坐标
  - 在非齐次坐标下：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{pmatrix}$$



  - 在齐次坐标系下：

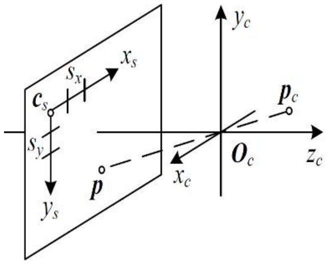
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

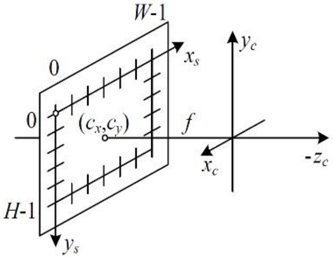
  - 这表明：透视投影放弃了**p**的*w*分量。因此，不可能从图像中恢复三维点的*距离*

成像光学

❖ **来自场景的光线到达相机**

- 现实世界光线通过镜头到达成像传感器。
- 对于许多应用，把镜头当作一个理想的针孔
- 所有光线通过一个共同的投影中心投射出去
- CCD等感光传感器位于成像平面，得到图像
- 成像平面有自己的坐标系



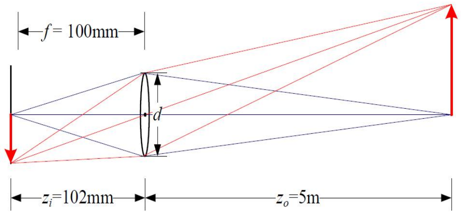


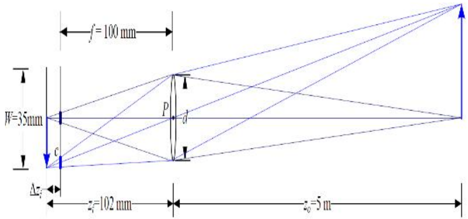
相机模型

- 焦距为 f的薄透镜作用
  - 将光线从透镜前的物体（距离为 z_o ）聚焦到透镜后成像面平面上（距离为z_i ）
- 根据透镜定律，有：

$$\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z_i}=\frac{1}{f}$$

  - 其中f被称为镜头的焦距
- 弥散圆：取决于图像平面运动Δz_i相对于透镜的距离
- 如果$z_0 \to \infty$，调整镜头（移动像面），使无限远处的物体都在焦点上，则有$z_i = f$，

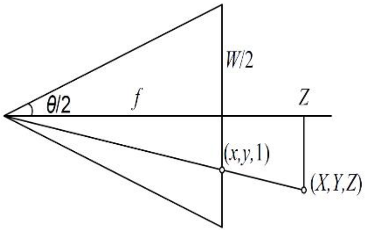




相机的视场

- 中心投影，图像宽w，焦距f，水平视场θ_H
- w、f、θ_H 之间的关系有：

$$\tan\frac{\theta_H}{2} = \frac{w}{2f}$$



- 同理可得垂直视场
- 根据水平视场θ_H，可计算在任意物距Z的场景，有多宽可以成像

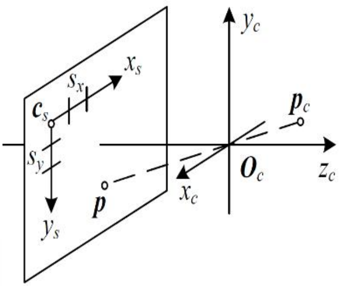
几何成像

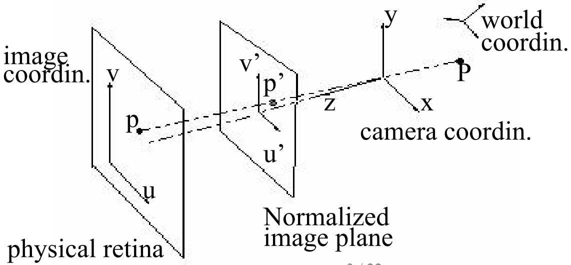
❖3D 点 p_c 投影到传感器平面上的点 p, 包括几个步骤:

1. 转换世界坐标系下的 3D 点$\mathbf{P_c}$ 到相机坐标系下的点$\mathbf{P'_c}$

2. 投影 3D 点$\mathbf{P'_c}$ 到 2D 图像平面上的点**p'**

3. 投影 2D 点**p'** 到 2D成像平面下的点**p**

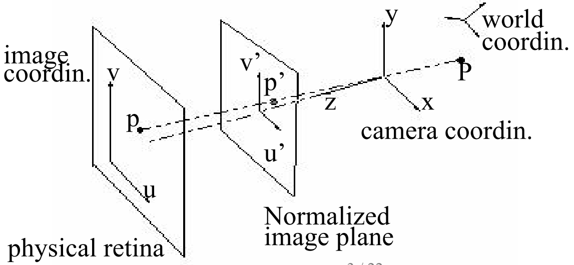




❖由于相机在世界坐标系里的位姿不同，因此，要做一个变换:

转换世界坐标系下的 3D 点$\mathbf{P_c}$ 到相机坐标系下的点$\mathbf{P'_c}$

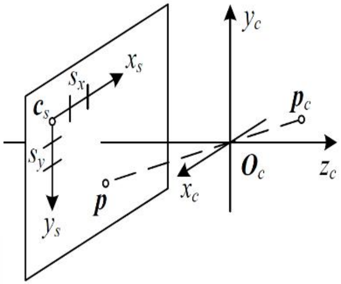
$$p'_c = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} p_c$$

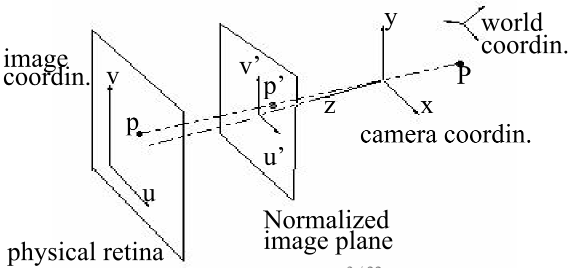


3D 空间到 2D 图像平面投影

❖成像的第二步，投影 3D 点**P'$_c$** 到 2D 图像平面上的点**p'**：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

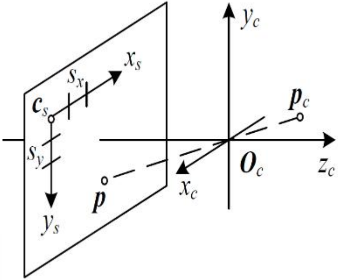




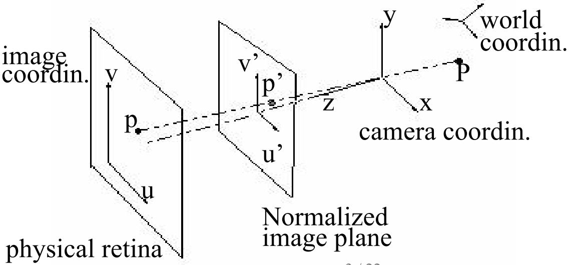
图像平面到成像平面投影

❖成像第三步，投影2D图像平面 点 p’ 到成像平面上的点 p:

$$
\mathbf{p} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & c_x \\ 0 & s_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z \end{pmatrix}
$$

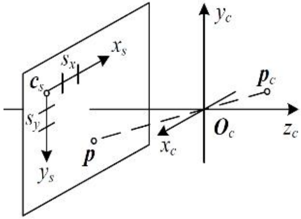


- 这一步做了缩放与平移



相机内参矩阵与外参矩阵

❖综合前面说的成像步骤，有：



$$p = E \cdot K \cdot p_c$$

❖ 相机外部参数矩阵：

$$E = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

❖相机内部参数矩阵：

- $\mathbf{c}_s$ ：传感器平面坐标系原点的3D坐标
- **s**：*倾斜因子*
- **K**：*又称标定矩阵，*

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} f & s & c_x \\ 0 & f & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

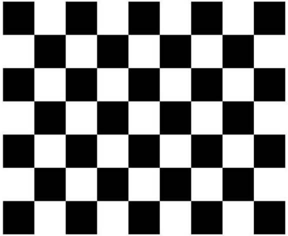
相机标定

❖相机标定的目的：

- 确定相机的内部参数和外部参数

❖相机标定的步骤：

- 准备标定板：
  - 通常使用带有已知几何特征的标定板，如棋盘格
  - 标定板上特征点在世界坐标系中的位置是已知的，以毫米为单位
- 拍摄标定板
  - 标定板图像特征点在图像坐标系中的位置是已知的，以像素为单位
- 求解内参矩阵和外参矩阵
  - 得到各个参数



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & s & c_x \\ 0 & f & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p = E \cdot K \cdot p_c$$

参数矩阵的求解

- 由于我们的投影变换是这样:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} f & s & c_x \\ 0 & f & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_c$$

- 参数的求解，将是解下面的优化问题:

$$\min_{K,R_i,T_i} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \left\| p(K, R_i, T_i, X_{ij}) - x_{ij} \right\|^2$$

  - 求解方法：具体可采用梯度下降法等迭代优化算法求解

Thank You！

智能与多媒体实验室