华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程
Stochastic Process

§6.10 各态历经性的判别

主讲：王湘君

均值各态历经的判别准则

定理6.10.1 设$\{X_t, t\in(-\infty,+\infty)\}$为一个均方连续的平稳过程. 则$\{X_t\}$的均值具有各态历经性当且仅当下面的式子成立

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)(R_X(\tau)-|m_X|^2)d\tau=0.$$

证明 由于$E \lt X_t \gt =E\left(\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X_t dt\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}EX_t dt=m_X$,

所以$P(\lt X_t \gt =m_X)=1\Leftrightarrow D(\lt X_t \gt)=0.$

显然，$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)d\tau=1.$

均值各态历经的判别准则

$$E|<X_t>|^2 = E\left(\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X_s ds\ \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\overline{X_t}dt\right)$$

$$= E\left(\underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}X_s\,\overline{X_t}\,dsdt\right)$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(s-t)\,dsdt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)R_X(\tau)\,d\tau.$$

上式的计算做了一个变量替换$\tau = s - t, v = s + t$.

均值各态历经的判别准则

令$B_X(\tau)=R_X(\tau)-|m_X|^2$，则我们有一个充分条件.

推论 6.10.2

设$\{X_t,t\in(-\infty,+\infty)\}$为一个均方连续的平稳过程, 若$\lim\limits_{|\tau|\to\infty} B_X(\tau)=0$,

则 $\{X_t\}$的均值具有各态历经性.

例6.10.3

若$R_X(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|}$, 则直接由推论6.10.2可以得到$\{X_t\}$的均值具有各态历经性.

若$R_X(\tau)=\cos\omega\tau$, 则需要由定理6.10.1才可以得到$\{X_t\}$的均值具有各态历经性.

相关函数各态历经的判别准则

注6.10.4

$\{X_t\}$的相关函数的各态历经性也有一个判别准则，但需要用到4阶矩.

定理6.10.5 设$\{X_t, t\in(-\infty,+\infty)\}$为一个均方连续的平稳过程. 则$\{X_t\}$的相关函数具有各态历经性当且仅当下面的式子成立

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{2T}\right)\left(B(\tau_1)-|R_X(\tau)|^2\right)d\tau_1=0.$$

其中，

$$B(\tau_1)=E\left[X_t\,\overline{X_{t-\tau}\ X_{t-\tau_1}}X_{t-\tau-\tau_1}\right].$$

華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！