

华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# 随机过程

*Stochastic Process*

## § 6.11 谱密度

主讲：王湘君



# Fourier变换与Fourier逆变换



设实函数 $x(t)$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$ 绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty,$$

则 $x(t)$ 的Fourier变换存在, 或者说 $x(t)$ 具有频谱

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt,$$

其Fourier逆变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$



# Parseval等式



由前面的两式有,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{i\omega t} dt \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega) \overline{F_x(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega)|^2 d\omega .\end{aligned}$$

这是著名的 **Parseval** 等式.



# Parseval等式的物理解释



$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega)|^2 d\omega .$$

若把 $x(t)$ 看作通过1欧姆电阻上的电流或电压,

- 则上式左边的积分表示消耗的能量,
- 右边的 $|F_x(\omega)|^2$ 相应地称为能谱密度.



# 截尾函数



在实际问题中,  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$  无限, 如正弦函数等. 为此, 我们考虑平均功率.

作截尾函数 
$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq T, \\ 0 & |t| > T, \end{cases}$$

Fourier  
变换

$$F_x(\omega, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt,$$

Fourier  
逆变换

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega, T) e^{i\omega t} d\omega,$$

Parseval  
等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega, T)|^2 d\omega.$$

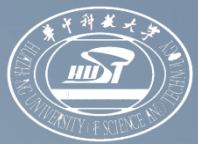


# 平均功率与功率谱密度



$$\text{所以, } \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} |F_x(\omega, T)|^2 d\omega.$$

- ▶ 左边是 $x(t)$ 消耗在1欧姆电阻上的的平均功率,
- ▶ 相应地, 称右边的被积函数 $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} |F_x(\omega, T)|^2$ 为功率谱密度.



华中科技大学

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢!