



华中科技大学  
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# 随机过程

*Stochastic Process*

A diagram illustrating a stochastic process. It shows a coordinate system with a vertical axis and a horizontal axis. A curve starts at the origin and moves upwards and to the right, representing a random path. There are also some decorative white circles and a line on the right side of the slide.

## § 3.3 Poisson过程的基本性质

主讲：王湘君



# Poisson过程的数字特征



## 定理3.3.1

设 $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个参数为 $\lambda$ 的Poisson过程, 则

- 1  $m_N(t) = \lambda t$ ;
- 2  $R_N(s, t) = \lambda^2 st + \lambda(s \wedge t)$ ;
- 3 对 $s < t$ ,  $\phi_{N_t - N_s}(u) = \exp\{-\lambda(t - s)(1 - e^{iu})\}$ .

**证**

**明**

只计算 (2), 不妨设 $s \leq t$ ,

$$\begin{aligned} R_N(s, t) &= E(N_s(N_t - N_s + N_s)) \\ &= E(N_s)E(N_t - N_s) + E(N_s^2) = \lambda^2 st + \lambda s. \end{aligned}$$

# Poisson过程的可加性

## 定理3.3.2

定理3.3.2 设 $\{N_1(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ ,  $\{N_2(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ 为两个独立的Poisson过程, 参数分别为 $\lambda_1, \lambda_2$ , 若令 $N_t = N_1(t) + N_2(t)$ , 则 $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的Poisson过程.

**证 明**

$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 的零初值、独立平稳增量性很容易由定义得到验证, 其增量的分布可以由例1.3.9得到. 下面我们采用直接来证明定义3.1.3的 (3) .

$$\begin{aligned} & P(N_{t+h} - N_t = 1) \\ &= P(N_1(t+h) - N_1(t) = 1)P(N_2(t+h) - N_2(t) = 0) \\ &+ P(N_1(t+h) - N_1(t) = 0)P(N_2(t+h) - N_2(t) = 1) \\ &= (\lambda_1 h + o(h))(1 - \lambda_2 h + o(h)) + (1 - \lambda_1 h + o(h))(\lambda_2 h + o(h)) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)h + o(h). \end{aligned}$$

# Poisson过程的可分解性质


## 定理3.3.2

设 $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个参数为 $\lambda$ 的Poisson过程,  $N_t$ 表示在时间区间 $[0, t]$ 内“随机事件 $A$ ”发生的次数. 若我们以概率 $p$ 将“ $A$ ”发生独立记录下来, 并以 $X_t$ 表示在时间区间 $[0, t]$ 内记录下来的“ $A$ ”的次数, 则 $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个参数为 $\lambda p$ 的Poisson过程.

**证 明**  $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 的零初值、独立增量性很容易由定义得到验证, 下证定义3.1.3的(3).

$$\begin{aligned} & P(X_{s+t} - X_s = k) \\ &= \sum_{l=k}^{+\infty} P(N_{s+t} - N_s = l) P(X_{s+t} - X_s = k | N_{s+t} - N_s = l) \\ &= \sum_{l=k}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^l}{l!} C_l^k p^k (1-p)^{l-k} \\ &= e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

# 作业

- 
- 1 按定义3.1.3证明定理3.3.2.
  - 2 设 $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个参数为 $\lambda$ 的Poisson过程, 对任意给定 $s > 0$ , 令 $X_t = N_{s+t} - N_s$ , 证明 $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个参数为 $\lambda$ 的Poisson过程.
  - 3 设 $\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个参数为 $\lambda$ 的Poisson过程, 对任意给定 $s > 0$ , 令 $X_t = N_{s+t} - N_t$ , 证明 $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ 为一个平稳过程.

思考: 2, 3的结论是只对Poisson过程成立吗? 能推广到什么条件?





华中科技大学  
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢谢

