華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 2.4 随机过程的分类（二）

主讲：王湘君

正态过程

定义2.4.1 设$\{X_t,\ t\in T\}$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个S.P.，若X_T的任意有限维分布为正态分布，则我们称X_T为正态过程（或Gauss过程）.

注2.4.2

由于正态分布完全由其均值向量和协方差矩阵决定，所以正态过程的分布完全由其均值函数和相关函数所决定.

例2.4.3 §2.2作业2中X_T和Y_T，例0.2中X_T.

分数Brown运动

例2.4.4 设$\{B_t^H, t \in \mathbb{R}_+\}$为一正态过程，其中$0 < H < 1$,且

$$E(B_t^H) = 0, \qquad E(B_s^H B_t^H) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}),$$

我们称$\{B_t^H, t \in \mathbb{R}_+\}$为一Hurst指数为$H$的分数Brown运动.

由于

$$E(B_s^H - B_t^H) = 0,$$

$$E(B_s^H - B_t^H)^2 = R_{B^H}(s,s) + R_{B^H}(t,t) - 2R_{B^H}(s,t) = |s-t|^{2H},$$

所以，$B_s^H - B_t^H \sim N(0, |s-t|^{2H})$, $\{B_t^H, t \in \mathbb{R}_+\}$为平稳增量过程.

当且仅当$H = \frac{1}{2}$时，$\{B_t^H, t \in \mathbb{R}_+\}$为独立平稳增量过程，我们留作练习.

Wiener过程

定义2.4.5 若$\{W_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个S.P.，满足：

1. $W_0=0$;
2. $\{W_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为一独立增量过程;
3. $\{W_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为一平稳增量过程，$W_t-W_s\sim N(0,\sigma^2|t-s|)$,

则我们称$\{W_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\sigma^2$的Wiener过程（或Brown运动）.

特别地，若$\sigma=1$，我们称之为标准Brown运动.

注 以后，我们都取$\sigma=1$.

历史人物介绍（一）

Robert Brown

(1773 - 1858)
苏格兰植物学家

1827年
水中悬浮花粉颗粒的无规则运动

Albert Einstein

(1879—1955)
瑞士、美国物理学家

1905年
对BM作了物理解释

Norbert Wiener

(1894—1964)
美国数学家，
控制论创始人

1923年
构造了BM的数学模型

历史人物介绍（二）

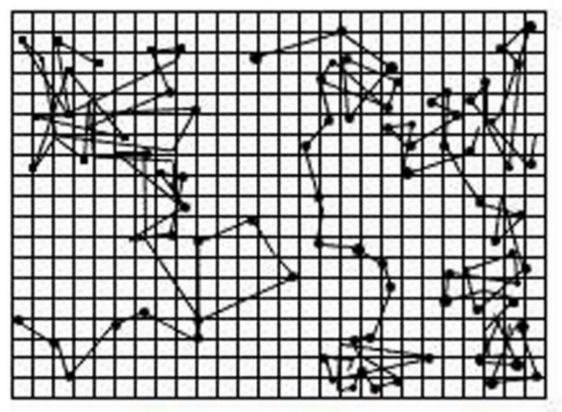
Kiyoshi Itô

(1915 - 2008)
日本数学家

1944年建立对BM的随机积分

Louis Bachelier (1870-1946)

- 法国数学家，现代金融数学领域奠基人.
- 1900年在博士论文《投机理论》中，首次将BM原理运用于金融资产，提出了有效市场、股价随机漫步等思想原型，但一直未能引起学术界重视，直至50多年后被P. Samuelson发现才受到大力推崇.



做布朗运动的微粒的运动路线是无规则的。

Wiener过程的归类

定理2.4.6 若$\{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个标准Brown运动.

1. 令$X_t = \sigma W_t$, 则$\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\sigma^2$的Wiener过程;
2. $\{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个正态过程， 且
$$m_W(t) = 0, R_W(s,t) = s \wedge t\,;$$
即$\{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为$H = \frac{1}{2}$的分数Brown运动;
3. $\{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个Markov过程.

Wiener过程的有限维密度

定理2.4.6 若$\{W_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个标准Brown运动，对$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $(W_{t_1}, W_{t_2}, \cdots, W_{t_n})$的联合密度

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n\,;\, x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}),$$

其中$t_0 = 0, x_0 = 0$, 且$p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}$.

证明： 对$0 < s < t$,

$$P(W_t \le y | W_s = x) = P(W_t - W_s \le y - x) = \Phi\left(\frac{y-x}{\sqrt{t-s}}\right),$$

$$\therefore\ f_{W_t|W_s=x}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right\}.$$

双边Brown运动

定义2.4.7 若$\{W_1(t), t \in \mathbb{R}_+\}, \{W_2(t), t \in \mathbb{R}_+\}$是两个独立的标准Brown运动，令

$$B_t = \begin{cases} W_1(t), & t \geq 0, \\ W_2(-t), & t < 0, \end{cases}$$

我们称$\{B_t, t \in \mathbb{R}\}$为一个（双边） Brown运动.

容易证明

1. $B_0 = 0$;
2. $\{B_t, t \in \mathbb{R}\}$为一独立增量过程;
3. $\{B_t, t \in \mathbb{R}\}$为一平稳增量过程，$B_t - B_s \sim N(0, \sigma^2|t-s|)$.

多维Brown运动

定义2.4.8

若$\{W_i(t), t \in \mathbb{R}_+\}, i = 1,2,\cdots,n$ 是n个相互独立的标准Brown运动，令

$$B_t = \left(W_1(t), W_2(t), \cdots, W_n(t)\right)^T,$$

我们称$\{B_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个$n$维Brown运动.

作业

1 证明：$p(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}$ 满足热方程$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$.

2 做2维和3维Brown运动的轨道模拟图.

3 证明：当$H=\frac{1}{2}$时，$\{B_t^H, t\in\mathbb{R}_+\}$为独立平稳增量过程.

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！