華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§6.11 谱密度

主讲：王湘君

Fourier变换与Fourier逆变换

设实函数$x(t), t \in (-\infty, +\infty)$绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty,$$

则$x(t)$的Fourier变换存在，或者说$x(t)$具有频谱

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt\,,$$

其Fourier逆变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega\,,$$

Parseval等式

由前面的两式有，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{i\omega t}dt\right)d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega)\,\overline{F_x(\omega)}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega)|^2\,d\omega\ .
\end{aligned}
$$

这是著名的 **Parseval** 等式.

Parseval等式的物理解释

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega)|^2 \, d\omega \ .$$

若把$x(t)$看作通过1欧姆电阻上的电流或电压，

- 则上式左边的积分表示消耗的总能量，
- 右边的$|F_x(\omega)|^2$相应地称为能谱密度.

截尾函数

在实际问题中，$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$无限，如正弦函数等. 为此，我们考虑平均功率.

作截尾函数 $x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \le T, \\ 0 & |t| > T, \end{cases}$

Fourier 变换

$$F_x(\omega, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T}^{T} x(t) e^{-i\omega t} dt,$$

Fourier 逆变换

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega, T) e^{i\omega t} d\omega,$$

Parseval 等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-T}^{T} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega, T)|^2 \, d\omega \, .$$

平均功率与功率谱密度

所以，$\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2d\omega$.

- 左边是$x(t)$消耗在1欧姆电阻上的的平均功率，
- 相应地，称右边的被积函数$\lim\limits_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}|F_x(\omega,T)|^2$为功率谱密度.

谢 谢 ！