华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 3.3 Poisson过程的基本性质

主讲：王湘君

Poisson过程的数字特征

定理3.3.1 设$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\lambda$的Poisson过程，则

1. $m_N(t) = \lambda t$；
2. $R_N(s,t) = \lambda^2 st + \lambda(s \wedge t)$;
3. 对$s < t$，$\phi_{N_t - N_s}(u) = \exp\{-\lambda(t-s)(1-e^{iu})\}$.

证明 只计算（2），不妨设$s \le t$，

$$R_N(s,t) = E(N_s(N_t - N_s + N_s))$$

$$= E(N_s)E(N_t - N_s) + E(N_s^2) = \lambda^2 st + \lambda s.$$

Poisson过程的可加性

定理3.3.2 定理3.3.2设$\{N_1(t), t\in\mathbb{R}_+\}, \{N_2(t), t\in\mathbb{R}_+\}$为两个独立的的Poisson过程，参数分别为$\lambda_1, \lambda_2$, 若令$N_t = N_1(t) + N_2(t)$，则$\{N_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\lambda_1+\lambda_2$的Poisson过程.

证明 $\{N_t, t\in\mathbb{R}_+\}$的零初值、独立平稳增量性很容易由定义得到验证，其增量的分布可以由例1.3.9得到. 下面我们采用直接来证明定义3.1.3的（3）.

$$
\begin{aligned}
&P(N_{t+h} - N_t = 1)\\
&= P(N_1(t+h) - N_1(t) = 1)P(N_2(t+h) - N_2(t) = 0)\\
&+ P(N_1(t+h) - N_1(t) = 0)P(N_2(t+h) - N_2(t) = 1)\\
&= \big(\lambda_1 h + o(h)\big)\big(1-\lambda_2 h + o(h)\big) + \big(1-\lambda_1 h + o(h)\big)\big(\lambda_2 h + o(h)\big)\\
&= (\lambda_1+\lambda_2)h + o(h).
\end{aligned}
$$

Poisson过程的可分解性质

定理3.3.2 设$\{N_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\lambda$的Poisson过程, N_t表示在时间区间$[0,t]$内"随机事件A" 发生的次数. 若我们以概率将"A" 发生独立记录下来，并以X_t表示在时间区间$[0,t]$内记录下来的"A" 的次数，则$\{X_t, t\in\mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\lambda p$的Poisson过程.

证明 $\{X_t, t\in\mathbb{R}_+\}$的零初值、独立增量性很容易由定义得到验证，下证定义3.1.3的(3).

$$
\begin{aligned}
&P(X_{s+t}-X_s=k)\\
&=\sum_{l=k}^{+\infty}P(N_{s+t}-N_s=l)P(X_{s+t}-X_s=k\mid N_{s+t}-N_s=l)\\
&=\sum_{l=k}^{+\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^l}{l!}\mathrm{C}_l^k p^k(1-p)^{l-k}\\
&=e^{-\lambda p t}\frac{(\lambda p t)^k}{k!}\,.
\end{aligned}
$$

作业

1. 按定义3.1.3证明定理3.3.2.
2. 设$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\lambda$的Poisson过程，对任意给定$s > 0$，令$X_t = N_{s+t} - N_s$，证明$\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\lambda$的Poisson过程.
3. 设$\{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个参数为$\lambda$的Poisson过程，对任意给定$s > 0$，令$X_t = N_{s+t} - N_t$，证明$\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$为一个平稳过程.

思考：2, 3的结论是只对Poisson过程成立吗？能推广到什么条件？

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢