華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 4.6 常返态的判别

主讲：王湘君

首次进入分解定理

引理4.6.1 对$i,j\in I$,
$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}. \qquad (4.6.1)$$

证明

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= P(X_{m+n}=j|X_m=i)=P\left(X_{m+n}=j,T_{ij}\le n\middle|X_m=i\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n} P\left(X_{m+n}=j,T_{ij}=k\middle|X_m=i\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n} P\left(T_{ij}=k\middle|X_m=i\right)P\left(X_{m+n}=j\middle|X_m=i,T_{ij}=k\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P(X_{m+n}=j\,|X_m=i,X_{m+1}\ne j,\cdots,X_{m+k-1}\ne j,X_{m+k}=j)\\
&=\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P(X_{m+n}=j\,|X_{m+k}=j)=\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}.
\end{aligned}$$

常返与非常返的判别准则

定理5.3.6 对任意$i \in I$, i常返的充要条件是 $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty.$

证明 在(5.3.1)中，取$i = j$，并对n从1到N求和，有

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)},$$

交换求和次序，有

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=k}^{N} f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left(f_{ii}^{(k)} \sum_{m=0}^{N-k} p_{ii}^{(m)} \right). \quad (4.6.2)$$

充分性

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^{N}\left(f_{ii}^{(k)} \sum_{m=0}^{N-k} p_{ii}^{(m)}\right)$$

若$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$, 由(4.6.2)，

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)} \le \sum_{k=1}^{N}\left(f_{ii}^{(k)} \sum_{m=0}^{N} p_{ii}^{(m)}\right) = \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{(k)} \sum_{m=0}^{N} p_{ii}^{(m)},$$

所以,

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}}{1 + \sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)}} \le \sum_{k=1}^{N} f_{ii}^{(k)},$$

令$N \to +\infty$, 有

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_{ii}^{(k)} = 1.$$

必要性

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^{N}\left(f_{ii}^{(k)} \sum_{m=0}^{N-k} p_{ii}^{(m)}\right)$$

若$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}^{(n)} = \alpha < +\infty$，由(4.6.2)，取$N' < N$，有

$$\sum_{n=1}^{N} p_{ii}^{(n)} \geq \sum_{k=1}^{N'}\left(f_{ii}^{(k)} \sum_{m=0}^{N-k} p_{ii}^{(m)}\right)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{N'}\left(f_{ii}^{(k)} \sum_{m=0}^{N-N'} p_{ii}^{(m)}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N'} f_{ii}^{(k)} \sum_{m=0}^{N-N'} p_{ii}^{(m)},$$

先令$N \to +\infty$，有$\frac{\alpha}{1+\alpha} \geq \sum_{k=1}^{N'} f_{ii}^{(k)}$，

再令$N' \to +\infty$，有$1 \geq$ …

关于判别准则的说明

定义

$$I_n(i)=\begin{cases}1, & X_n=i,\\ 0, & X_n\neq i,\end{cases}\qquad S(i)=\sum_{n=0}^{+\infty} I_n(i),$$

则，

$$\begin{aligned}E(S(i)|X_0=i)&=\sum_{n=0}^{+\infty}E(I_n(i)|X_0=i)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X_n=i|X_0=i)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}p_{ii}^{(n)}\ .\end{aligned}$$

作业

证明

若i为非常返态，

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}.$$

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢