华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

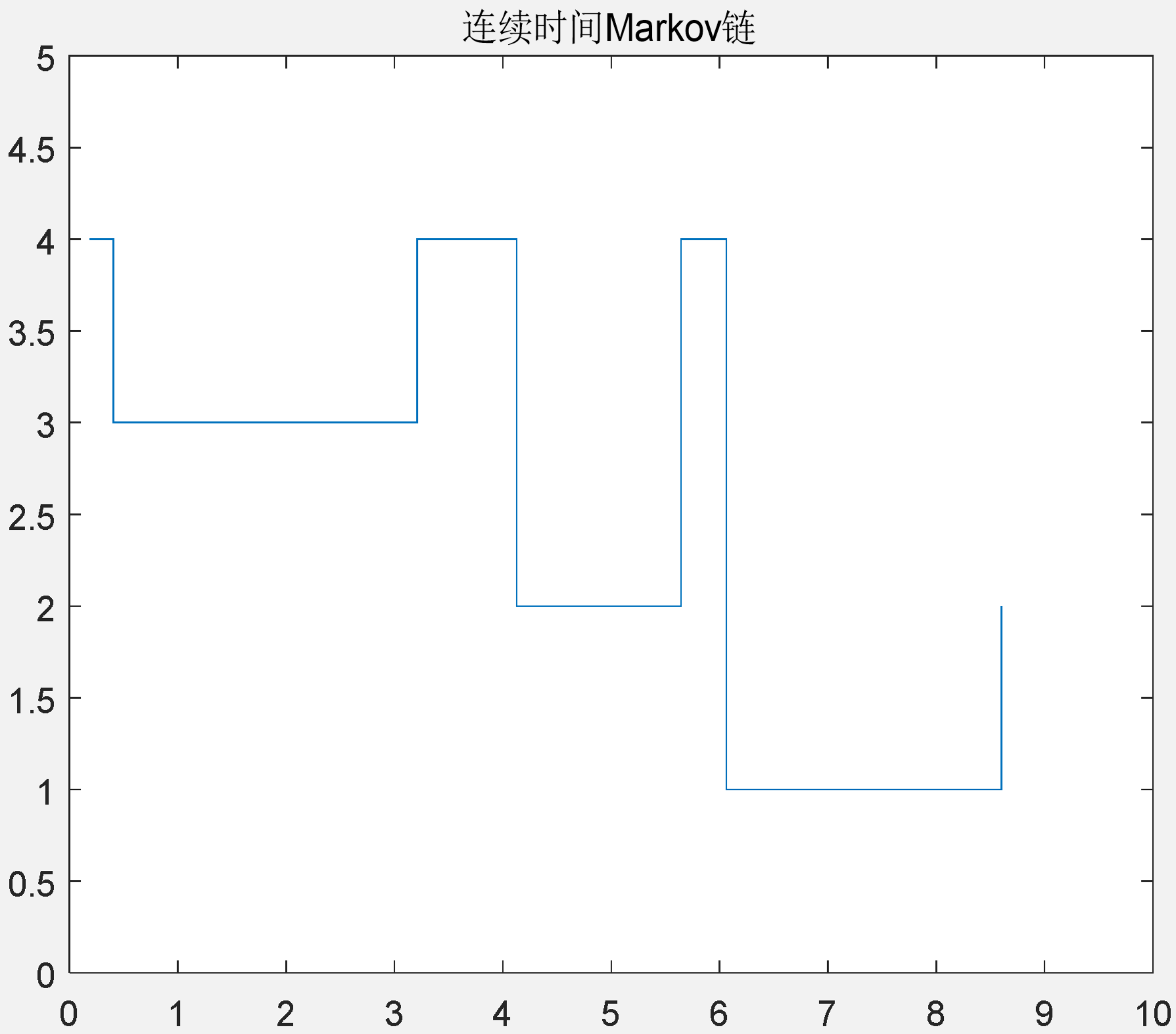
# 随机过程

Stochastic Process

## § 5.2 连续时间的Markov链的停留时间

主讲：王湘君

# 连续时间Markov链的轨道图



# 停留时间的分布

以$\tau_i$记$\{X_t, t \geq 0\}$到达状态$i$后在$i$上的停留时间.

由于我们讨论的是齐次Markov链, $\tau_i$的分布只与状态$i$有关，与时刻无关，

又由Markov性，

$$P(\tau_i > s + t | \tau_i > s) = P(\tau_i > t),$$

即$\tau_i$具有无记忆性，

所以

$$\tau_i \sim E(v_i), 0 \leq v_i \leq +\infty.$$

$$v_i = 0,\ P(\tau_i = +\infty) = 1, i \text{ 为吸收态;}$$

$$v_i = +\infty,\ P(\tau_i = 0) = 1, i \text{ 为瞬时态.}$$

# 正则性条件

瞬时态的存在会使问题的讨论相当麻烦，我们附加一个条件，$0 \le v_i < +\infty$.

用转移概率来描述这个条件，

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij}.$$

写成矩阵的形式，即

$$\lim_{t \to 0} \mathbb{P}(t) = E.$$

我们称之为连续性条件或正则性条件.

# C-K方程

**定理5.2.1** 设$\{X_t, t \geq 0\}$为一连续时间Markov链，$\mathbb{P}(t) = \big(p_{ij}(t)\big)$为其转移概率矩阵，则

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in I} p_{ik}(s) p_{kj}(t), \qquad \forall i, j \in I, s, t \geq 0,$$

其等价的矩阵形式是

$$\mathbb{P}(s+t) = \mathbb{P}(s)\mathbb{P}(t), \qquad \forall s, t \geq 0.$$

我们猜测一下，$\mathbb{P}(t)$会有怎样的形式呢?

# 初始分布与绝对分布

**定义5.2.2** 设$\{X_t, t \geq 0\}$为一连续时间Markov链，

记$P(X_0 = j) \triangleq p_j$，我们称$\{p_j\}$为$\{X_t\}$的初始概率分布，称$P^T(0) = (\cdots, p_j, \cdots)$为$\{X_t\}$的初始概率分布向量；

记$P(X_t = j) \triangleq p_j(t)$，我们称$\{p_j(t)\}$为$\{X_t\}$的绝对概率分布，称$P^T(t) = (\cdots, p_j(t), \cdots)$为$\{X_t\}$的绝对概率分布向量.

**定理5.2.3** $P^T(t) = P^T(0)\mathbb{P}(t) = P^T(s)\mathbb{P}(t-s), \qquad \forall 0 \leq s < t.$

# 作业

设$\{X_t, t \geq 0\}$的状态空间

$I = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \tau_i \sim E\left(i^2 + 1\right), P^T(0) = \left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10}, 0\right)$ ,

模拟$\{X_t, t \geq 0\}$的轨道.

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# 谢　谢　！