华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 6.9 各态历经性的例子

主讲：王湘君

各态历经性的例子

例6.9.1 设$X_t = a\cos(\omega t+\Phi)$, 其中$a, \omega \neq 0, \Phi \sim U(0,2\pi)$.

$$m_X(t) = aE\cos(\omega t+\Phi) = a\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+x)\frac{1}{2\pi}dx = 0,$$

$$R_X(s,t) = a^2E\cos(\omega s+\Phi)\cos(\omega t+\Phi)$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega s+x)\cos(\omega t+x)\frac{1}{2\pi}dx = \frac{a^2}{2}\cos\omega(s-t).$$

所以，$\{X_t, t\in(-\infty,+\infty)\}$为一个均方连续的平稳过程.

$$< X_t > = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a\cos(\omega t+\Phi)\,dt = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{a}{2T}\frac{\sin(\omega T+\Phi)-\sin(-\omega T+\Phi)}{\omega} = 0,$$

最后一个等式是因为 $E\left(\frac{a}{2T}\frac{\sin(\omega T+\Phi)-\sin(-\omega T+\Phi)}{\omega}\right)^2 \le \frac{a^2 4}{4T^2\omega^2} \to 0.$

所以$\{X_t\}$的均值具有各态历经性.

各态历经性的例子

$$< X_t\overline{X_{t-\tau}} >$$

$$= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{a^2}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(\omega t+\Phi)\cos(\omega(t-\tau)+\Phi)\,dt$$

$$= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{a^2}{4T}\int_{-T}^{T}(\cos\omega\tau+\cos(2\omega t-\omega\tau+2\Phi))dt$$

$$= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \left(\frac{a^2}{2}\cos\omega\tau+\frac{a^2}{4T}\frac{\sin(2\omega T-\omega\tau+2\Phi)-\sin(-2\omega T-\omega\tau+2\Phi)}{2\omega}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\omega\tau = R_X(\tau).$$

所以，$\{X_t\}$的相关函数具有各态历经性.

各态历经性的例子

例6.9.2 设$X_t = A\cos(\omega t+\Phi)$, 其中$\omega \neq 0, A\sim N(\mu,\sigma^2), \Phi\sim U(0,2\pi), A,\Phi$独立.

$$m_X(t) = E(A)E\cos(\omega t+\Phi) = \mu\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+x)\frac{1}{2\pi}dx = 0,$$

$$R_X(s,t) = E(A^2)E\cos(\omega s+\Phi)\cos(\omega t+\Phi)$$

$$= (\mu^2+\sigma^2)\int_0^{2\pi}\cos(\omega s+x)\cos(\omega t+x)\frac{1}{2\pi}dx = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2}\cos\omega(s-t).$$

所以，$\{X_t, t\in(-\infty,+\infty)\}$为一个均方连续的平稳过程.

$$< X_t > = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos(\omega t+\Phi)\,dt = \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\frac{A}{2T}\frac{\sin(\omega T+\Phi)-\sin(-\omega T+\Phi)}{\omega} = 0,$$

最后一个等式是因为 $E\left(\frac{A}{2T}\frac{\sin(\omega T+\Phi)-\sin(-\omega T+\Phi)}{\omega}\right)^2 \le \frac{(\mu^2+\sigma^2)4}{4T^2\omega^2} \to 0.$

所以$\{X_t\}$的均值具有各态历经性.

各态历经性的例子

$$< X_t\overline{X_{t-\tau}} >$$

$$= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{A^2}{2T}\int_{-T}^{T}\cos(\omega t+\Phi)\cos(\omega(t-\tau)+\Phi)\,dt$$

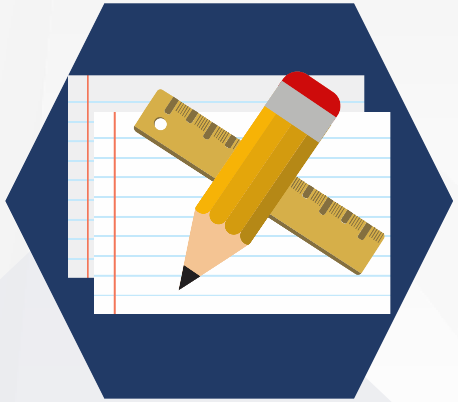
$$= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T}(\cos\omega\tau+\cos(2\omega t-\omega\tau+2\Phi))dt$$

$$= \underset{T\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \left(\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau+\frac{A^2}{4T}\frac{\sin(2\omega T-\omega\tau+2\Phi)-\sin(-2\omega T-\omega\tau+2\Phi)}{2\omega}\right)$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos\omega\tau \neq R_X(\tau).$$

所以，$\{X_t\}$的相关函数不具有各态历经性.

作业



设$X_t = A\cos\omega t + B\sin\omega t, A, B\ i.i.d \sim N(0,1), t \in \mathbb{R}$,

(1) $\{X_t\}$的均值是否具有各态历经性?

(2) $\{X_t\}$的相关函数是否具有各态历经性?

谢 谢 ！