華中科技大學

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 2.1 S.P.的基本概念

主讲：王湘君

S.P.的定义

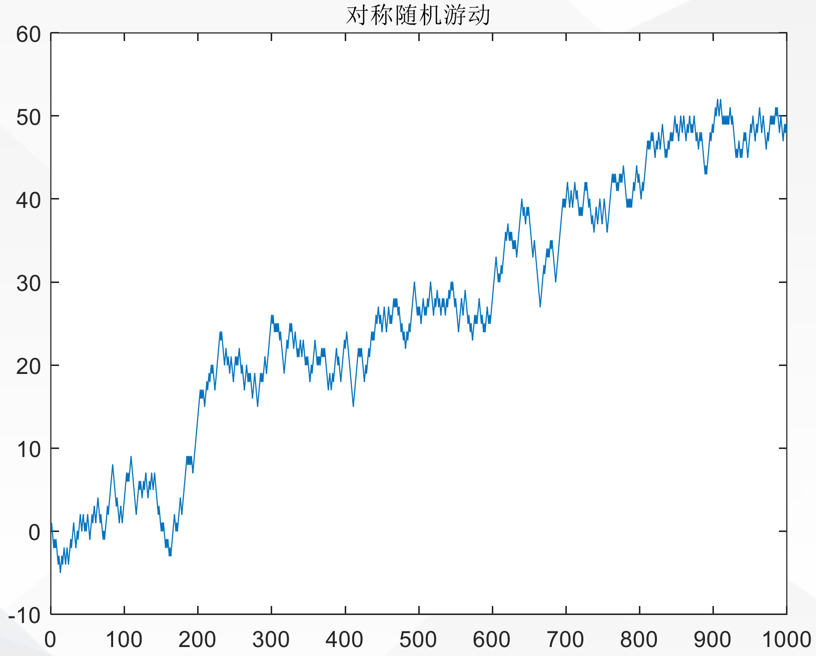
定义2.1.1 设$(\Omega,\mathcal{F},P)$为一个概率空间，T为一个参数集合，若$\forall t\in T$,都存在$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个R.V. X_t，则我们称$\{X_t,\ t\in T\}$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个随机过程.

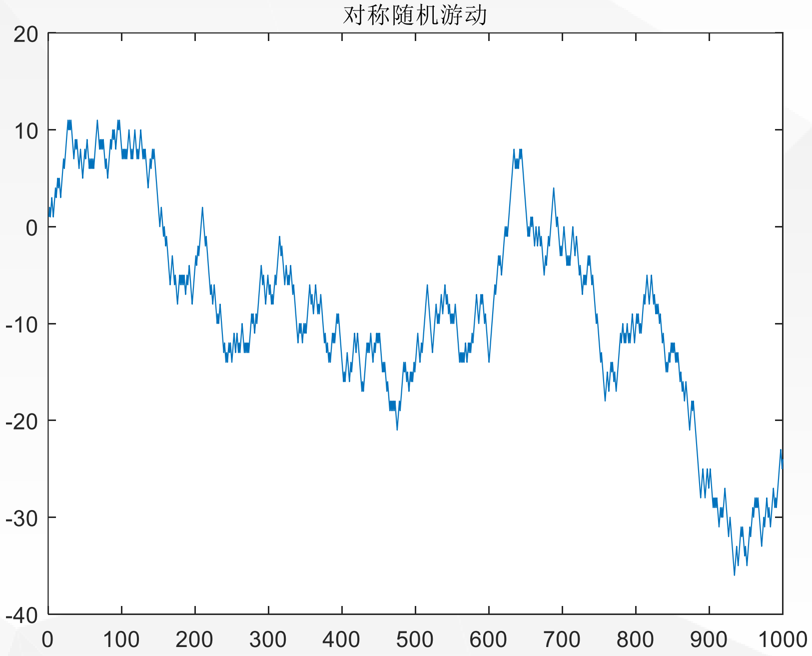
注2.1.2

1. 我们这里采用了初等的定义，没有用测度论里面的定义.
2. 以I 记$\{X_t,\ t\in T\}$（以后简记为X_T）所有可能取值的集合,称之为状态空间.
3. 按T与I离散与否可以把S.P.s 分成四类，这种分类没有任何概率统计的含义.
4. 对任意给定的$e\in\Omega$，$X_{\cdot}(e):T\to I$,称为X_T的一条轨道或一个样本函数.
5. 以后我们一般取$T=\mathbb{N}_0,\mathbb{Z},\mathbb{R}^+,\mathbb{R}$. 对于时间参数是多维情形的 S.P.（例0.5，例0.6），我们称之为随机场，本课程中我们不予讨论.

对称随机游动的模拟

```
t=[1:1000]
r=unidrnd(2,1,1000)
xi=(r-1.5)*2
x=cumsum(xi)
plot(t,x)
title('对称随机游动')
```





S.P.的分布的困难所在

对多维R.V.我们可以用联合分布函数来描述其统计规律性，那将S.P.视作一个无穷维的R.V.，能不能定义出一个所谓的“无穷维”分布函数?

设$\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$相互独立，则

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots) = \prod_{n=1}^{+\infty} P(X_n \leq x_n) ???$$

S.P.的分布函数族

定义2.1.3 设 $\{X_t,\ t\in T\}$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个S.P.，对任意$n\in\mathbb{N},t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$,我们用$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}$表示$(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})$的联合分布函数，记

$$\mathbb{F}=\left\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}|n\in\mathbb{N},t_1,t_2,\cdots,t_n\in T\right\},$$

称之为X_T的有限维分布函数族.

注2.1.4

我们当然也可以定义 等价的有限维特征函数族、分布列族、密度函数族等等.

S.P.的分布函数族

例2.1.5 对例0.1, 0.2，我们可以采用有限维特征函数族：

$$\phi_{(X_1,\cdots,X_n)}(u_1,\cdots,u_n)=E\left(\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}u_kX_k\right\}\right)$$
$$=\phi(u_1+\cdots+u_n)\phi(u_2+\cdots+u_n)\cdots\phi(u_n).$$

对§1.6作业 2, 我们可以采用密度函数族:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\chi_{[0,1]}(x_1)\chi_{[x_1,x_1+1]}(x_2)\cdots\chi_{[x_{n-1},x_{n-1}+1]}(x_n).$$

分布函数族的性质

定理2.1.6 分布函数族具有如下的性质:

对称性

对$(1,2,\cdots,n)$ 的任一排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$, 有

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F_{t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n}}\left(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n}\right);$$

相容性

对$m<n$，有

$$\begin{aligned}&F_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)\\&=F_{t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty).\end{aligned}$$

Kolmogorov定理

定理2.1.7 （Kolmogorov，1931）

设分布函数族$\mathbb{F}=\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}|n\in\mathbb{N},t_1,t_2,\cdots,t_n\in T\}$满足定理2.1.6的对称性和相容性，则存在概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$及其上的一个随机过程$\{X_t,\ t\in T\}$, 使得

$$\mathbb{F}_{X_T}=\mathbb{F}.$$

注2.1.8

- 这个定理说明一个随机过程的有限维分布函数族完全决定了这个随机过程的分布，也说明了随机过程的存在性问题.
- 定理的证明需要测度论，很复杂，我们省略.有兴趣的同学可以看见：

[1] 王梓坤，随机过程论，科学出版社，1965.

作业

1. 补充完成例2.1.5的细节.

2. 做非对称随机游动（可以分别取$p = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$）的轨道图，观察有没有什么规律性的东西.

谢 谢 ！