華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

随机过程

Stochastic Process

§ 6.1 平稳过程定义与例子

主讲：王湘君

平稳过程

定义6.1.1 设 $\{X_t,\ t\in T\}$为$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个随机过程，

1. 若X_T的任意有限维分布在时间平移下不变，即对任意$n\in\mathbb{N},t_1,t_2,\cdots,t_n,\tau\in T$，$(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})\sim(X_{t_1+\tau},\cdots,X_{t_n+\tau})$，则我们称$X_T$为一个严（狭义）平稳过程；

2. 若X_T为一个二阶矩过程，且一阶、二阶矩在时间平移下不变，即

$$m_X(t)=m_X,\qquad R_X(s,t)=R_X(s-t),$$

则我们称X_T为一个（宽、广义）平稳过程.

注

本章讨论宽平稳过程.

离散白噪声

例6.1.2

- 设 $\{\varepsilon_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}, E(\varepsilon_n) = 0, \mathrm{cov}(\varepsilon_m, \varepsilon_n) = \delta_{mn}\sigma^2$, 我们称$\{\varepsilon_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$为离散白噪声 (White Noise in discrete time);
- 特别地，如果$\{\varepsilon_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ $i.i.d \sim N(0, \sigma^2)$,我们称$\{\varepsilon_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$为离散Gauss白噪声 (Gaussian White Noise in discrete time).

注

我们在统计学如回归分析、方差分析等中常常见到离散白噪声.
回归模型中，常用的假设就是

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, \qquad \{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n}\ i.i.d \sim N(0, \sigma^2).$$

MA(q)模型

例6.1.3

设 $\{\varepsilon_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$为离散白噪声，$q \in \mathbb{N}, b_0, b_1, \cdots, b_q$为常数，令

$$X_n = \sum_{k=0}^{q} b_k \varepsilon_{n-k} \, ,$$

我们称$\{X_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$为离散白噪声的有限滑动和. 在时间序列里, 这是一个MA(q)模型. $\{X_n\}$平稳.

由于$E(X_n) = 0$, 对$m \in \mathbb{N}_0$,

$$E(X_n X_{n+m}) = E\left(\sum_{k=0}^{q} b_k \varepsilon_{n-k} \sum_{l=0}^{q} b_l \varepsilon_{m+n-l}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{q} \sum_{l=0}^{q} b_k b_l E(\varepsilon_{n-k} \varepsilon_{m+n-l}) = \sigma^2 \sum_{\substack{0 \le k \le q \\ 0 \le m+k \le q}} b_k b_{m+k} \, .$$

AR(1) 模型

例6.1.4

设$\{\varepsilon_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$为离散白噪声，且满足

$$X_n = aX_{n-1} + \varepsilon_n, \qquad |a| < 1,$$

我们称$\{X_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$为一个1阶自回归过程.

1 当初始条件为$X_0 = 0$时，$\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$非平稳.

2 当初始条件为$X_{-\infty} = 0$时，$\{X_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$平稳.

证明

我们证(1), (2) 留作练习. 递推有

$$X_n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \varepsilon_{n-k}.$$

显然，$E(X_n) = 0.$

AR(1) 模型

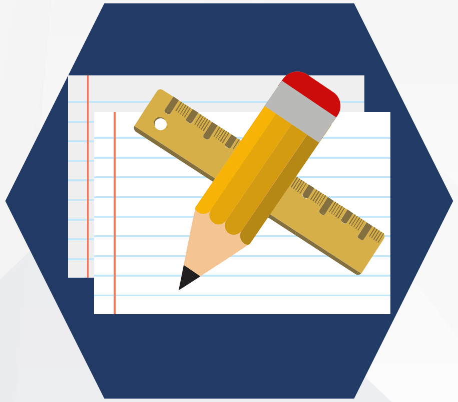
设$m \geq 0$, 有

$$E(X_n X_{n+m}) = E\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k \varepsilon_{n-k} \sum_{l=0}^{n+m-1} a^l \varepsilon_{n+m-l}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n+m-1} a^k a^l E(\varepsilon_{n-k}\, \varepsilon_{n+m-l})$$

$$= \sigma^2 \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{m+k} = \sigma^2 a^m \frac{1-a^{2n}}{1-a^2}.$$

作业



1 设 $\{\varepsilon_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$为离散白噪声, 令$X_n = 2\varepsilon_{n-1} + 3\varepsilon_n + 4\varepsilon_{n+1}$, 求$\{X_n\}$的相关函数.

2 证明对例6.1.4中的1阶自回归过程当初始条件为$X_{-\infty} = 0$时，$\{X_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$平稳.

3 设$\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$为严平稳过程, m_X =0，其相关函数为$R_X(\tau)$，令

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \geq 0, \\ -1, & X(t) < 0, \end{cases}$$

(1)证明$\{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$为平稳过程，并求其相关函数;

(2) 若$\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$为平稳过程，(1)的结论是否成立?

华中科技大学
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

谢 谢 ！