

2023 年第十三届 MathorCup 高校数学建模挑战赛题目

A 题 量子计算机在信用评分卡组合优化中的应用

在银行信用卡或相关的贷款等业务中，对客户授信之前，需要先通过各种审核规则对客户的信用等级进行评定，通过评定后的客户才能获得信用或贷款资格。规则审核过程实际是经过一重或者多重组合规则后对客户进行打分，这些规则就被称为信用评分卡，每个信用评分卡又有多种阈值设置（但且只有一个阈值生效），这就使得不同的信用评分卡在不同的阈值下，对应不同的通过率和坏账率，一般通过率越高，坏账率也会越高，反之，通过率越低，坏账率也越低。

对银行来说，通过率越高，通过贷款资格审核的客户数量就越多，相应的银行获得的利息收入就会越多，但高通过率一般对应着高坏账率，而坏账意味着资金的损失风险，因此银行最终的收入可以定义为：

$$\text{最终收入} = \text{贷款利息收入} - \text{坏账损失}$$

下表举例 3 个不同的信用评分卡，可以看到每种信用评分卡有 10 个阈值，每种阈值对应不同的坏账率和通过率：

信用评分卡 1			信用评分卡 2			信用评分卡 3		
阈值	通过率	坏账率	阈值	通过率	坏账率	阈值	通过率	坏账率
1	5%	0.50%	1	5%	0.50%	1	5%	0.50%
2	10%	1.00%	2	10%	1.00%	2	10%	1.00%
3	25%	1.50%	3	25%	1.50%	3	20%	1.70%
4	30%	2.00%	4	30%	2.00%	4	33%	2.00%
5	40%	2.50%	5	45%	2.50%	5	40%	2.70%
6	50%	3.00%	6	50%	2.70%	6	52%	3.00%
7	60%	3.50%	7	65%	3.50%	7	62%	3.70%
8	70%	4.00%	8	70%	4.00%	8	73%	4.00%
9	80%	4.50%	9	82%	4.70%	9	82%	4.70%
10	93%	5.00%	10	90%	5.00%	10	95%	5.00%

赛题说明 1：流程简化及示例

由于银行场景的复杂性，往往需要采用选择多个不同的信用评分卡进行组合来实现最佳的风险控制策略。而实际中的信用评分卡组合是一个非常复杂的过程，为便于建模，我们将该问题进行做如下简化（本简化只适用本次比赛赛题，不能完全代表实际场景）。

假设贷款资金为 1000000 元，银行贷款利息收入率为 8%，并以上面列举的三个信用评分卡作为选定的信用评分卡组合来测算银行最终收入。

由于每一信用评分卡有且只可选择 1 个阈值，假设信用评分卡 1 的阈值设置为 8，则通过表格可知，对应通过率为 70%，坏账率为 4.00%，信用评分卡 2 的阈值设置为 6，则通过率为 50%，坏账率为 2.70%，信用评分卡 3 的阈值设置为 7，则通过率为 62%，坏账率为 3.70%。

例如如果我们选择三重信用卡组合策略，那么这三种信用评分卡组合后的总通过率为所有信用评分卡通过率相乘，即：

$$0.7 \times 0.5 \times 0.62 = 0.217$$

总坏账率为三种信用评分卡对应坏账率的平均值，即：

$$1/3 \times (0.04 + 0.027 + 0.037) = 0.0367$$

基于以上条件可求得，本次贷款利息收入为：

贷款资金 \times 利息收入率 \times 总通过率 \times (1 - 总坏账率)，即：

$$1000000 \times 0.08 \times (0.7 \times 0.5 \times 0.62) \times (1 - 1/3 \times (0.04 + 0.027 + 0.037)) = 16758.18(\text{元})$$

由坏账带来的坏账损失为：

贷款资金 \times 总通过率 \times 总坏账率，即：

$$1000000 \times (0.7 \times 0.5 \times 0.62) \times (1/3 \times (0.04 + 0.027 + 0.037)) = 7522.666 (\text{元})$$

那么银行的最终收入为：

贷款利息收入—坏账损失，即

$$16758.18 - 7522.666 = 9235.514 (\text{元})$$

由此可见，选择不同的信用评分卡，不同的阈值组合，会给银行带来不同的收入与损失，由此决定银行最终收入。因此，银行的目标是**选择最合理的信用评分卡组合以及其阈值，使得银行最终收入最多。**

赛题说明 2：QUBO 模型简介

QUBO 模型是指二次无约束二值优化 (Quadratic Unconstrained Binary Optimization) 模型，它是一种用于解决组合优化问题的数学模型。在 QUBO 模型中，**需要将问题转化为一个决策变量为二值变量**，目标函数是一个二次函数形式优化模型。

QUBO 模型可以运行在量子计算机硬件上，通过量子计算机进行毫秒级的加速求解。这种模型和加速方式在未来各行业中将得到广泛的实际应用。因此现阶段研究基于 QUBO 模型的量子专用算法十分有应用价值。例如典型的图着色、旅行商问题、车辆路径优化问题等，都可以转化为 QUBO 模型并借助于量子计算机求解。

相关的 QUBO 的转化方法与例子可参考附件 2 中的参考文献。

赛题说明 3：赛题数据

附件 1 中共包含 100 张信用评分卡，每张卡可设置 10 种阈值之一，并

对应各自的通过率与坏账率共 200 列，其中 t_1 代表信用评分卡 1 的通过率共 10 项， h_1 代表信用评分卡 1 的坏账率共 10 项，依次类推 t_{100} 代表信用评分卡 100 的通过率， h_{100} 代表信用评分卡 100 的坏账率。

根据上面的赛题说明及附件 1 中的数据，请你们团队通过建立数学模型完成如下问题 1 至问题 3。

问题 1: 在 100 个信用评分卡中找出 1 张及其对应阈值，使最终收入最多，请针对该问题进行建模，将该模型转为 QUBO 形式并求解。

问题 2: 假设赛题说明 3 目前已经选定了数据集中给出的信用评分卡 1、信用评分卡 2、信用评分卡 3 这三种规则，如何设置其对应的阈值，使最终收入最多，请针对该问题进行建模，将模型转为 QUBO 形式并求解。

问题 3: 从所给附录中 100 个信用评分卡中任选取 3 种信用评分卡，并设置合理的阈值，使得最终收入最多，请针对该问题进行建模，并将模型转为 QUBO 形式并求解。