均值不等式 题解

解法一

爆搜，获得 20 分。

解法二

观察一下性质，对于一个质因子，操作一次等价于把 i 的幂次变成二者中较小的，j 的幂次变为二者中较大的。

这样容易发现每个质因子是独立的而且幂次只能被交换而不能改变，所以枚举一下每个质因子的幂次排列的顺序即可，配合解法一获得 40 分。

解法三

其实题目名称给了一些提示：均值不等式的一种应用是在积不变的时候差的越远和越大。

一个小学五年级的奥数知识：$\gcd(x,y)\times \operatorname{lcm}(x,y)=x\times y$。证明很简单，对于每个质因子的幂次最大公约数取较小的那个，最小公倍数取较大的那个，乘起来就是他俩自己。

那么一个直观的想法是让所有的幂次都从高到低排列是最优的，事实也的确如此，对于两个数 $x<y$，若它们存在公因子 k，那么有 $\frac{x}{k}+ky>(k-1)y+y>x+y$，因此只需要对每个质因子从大到小排列即可，如果使用桶排那么时间复杂度 $O(n\omega(V))$，但事实上远远达不到这个上界所以 sort 也能通过。

树差 题解

解法一

暴力模拟每个操作，时间复杂度 $O(n^2)$，可以获得 30 分。

解法二

对于菊花图，如果修改不在根相当于单点加，否则相当于一个全局加和一个单点加，而撤销操作可以在每个点记下之前的操作然后直接改回去，如果撤销根相当于直接清零。

解法三

如果没有操作 3，把操作 1 拆成两部分，一部分是子树加，另一部分是一个标记，查询的时候标记的贡献是它乘上这个点的深度。

而把深度差的贡献转化成深度的贡献也是简单的，直接给常数部分减掉一个 $b\times dep_x$ 即可。

这样问题完全变成子树加单点求和，容易用树状数组实现，时间复杂度 $O(m\log n)$。

解法四

此时存在操作 3，延续菊花图的思路，把每个位置的操作存下来，同时用一个 set 按照 dfs 序维护哪些点还有未撤销的操作，撤销时遍历 set 然后做权值取反的子树加即可，然后把这些操作删除。由于每一个操作最多撤销一次，所以时间复杂度 $O(m\log n)$，可以通过。

今天我们都是龙 题解

解法一

爆搜，可以根据实现不同得到 $10 \sim 20$ 分。

解法二

考虑状压 dp，记 $f_{i,j,s}$ 表示过了 i 天，第 i 天在 j，已经拜访了的天龙集合是 s 的方案数，转移直接枚举下一天去哪个点即可，时间复杂度 $O(n^2d2^k)$，可以得到 40 分。

解法三

对于 $k=0$ 的情况，相当于无向图上长度为 d 的路径计数，直接对邻接矩阵做矩阵快速幂即可，时间复杂度 $O(n^3\log d)$，结合解法二可以得到 50 分。

解法四

对于 $k=1$ 的情况，可以考虑用总路径数减掉不经过天龙所在点的路径数，做两次矩阵快速幂，时间复杂度 $O(n^3\log d)$，结合解法二、三可以得到 60 分。

解法五

如果你愿意，还可以做一些更复杂的分类讨论得到 $k=2$ 的分数。

解法六

优化解法二，注意到这个路径是有结合律的，于是可以通过倍增的方式优化，记 $f_{i,x,y,s}$ 表示走了 2^i 步，路径的起点是 x，终点是 y，拜访过的天龙集合是 s 的方案数，转移的时候枚举中间走的是哪一条边，然后 $f_{i,x,y,s}\times f_{i,a,b,t}\to f_{i+1,x,b,s\cup t}$。这样预处理完所有走 2^i 步的答案后把 d 二进制拆分后做类似的转移即可。时间复杂度 $O(n^2m4^k\log d)$，大概可以通过 $k=4$ 的测试点。

解法七

优化解法六，发现这是一个转移到并集的形式，直接在一开始做一遍 FMT，最后 iFMT 还原回去即可，时间复杂度 $O(n^2m2^k\log k)$，卡一卡常数可以得到 100 分。

解法八

考虑容斥，每次钦定一个集合不被经过，然后每次跑解法三，时间复杂度 $O(n^32^k\log k)$，可以得到 100 分。

开放世界游戏 题解

解法一

按照题意模拟，$O(nm)$，获得 30 分。

解法二

可能存在一些树分块的做法，$O(m\sqrt{n})$ 可以得到 50 分。

解法三

考虑没有修改怎么做。

这个时候可以直接把长度是 0 的边缩起来，这样就有若干联通块，然后每次询问的答案就是所在联通块和周围相邻联通块的大小之和，可以直接预处理。

解法四

然后加上修改操作，这个时候不能预处理了。

把 0 变 1 等价于把联通块断开，把 1 变 0 等价于把两个联通块缩起来，显然后者可以并查集，而前者较难实现。

于是考虑离线下来线段树分治，这样就只有缩联通块操作，合并的时候维护答案，具体来说钦定一个点为根，然后每个联通块处维护自己联通块的大小、所有儿子（这里的儿子是联通块缩起来后的儿子）的联通块大小之和、父亲的联通块大小。

时间复杂度 $O(n\log^2 n)$，可以通过。

解法五

如果你会 LCT，可以直接实现断开联通块的操作而不需要线段树分治，时间复杂度 $O(n\log n)$，但是由于众所周知的原因两个做法效率相差不大。