序列 (sequence)

注意到当 i 为奇数时，$a_i + a_{i+1} = n+1$；当 i 为偶数时，$a_i + a_{i+1} = n+2$。那么：

- 若 l 是奇数，r 是偶数，那么 $\sum_{i=l}^{r} a_i = (n+1)\frac{r-l+1}{2}$。判断 s 是否是 $n+1$ 的倍数即可。
- 若 l 是偶数，r 是奇数，那么 $\sum_{i=l}^{r} a_i = (n+2)\frac{r-l+1}{2}$。判断 s 是否是 $n+2$ 的倍数即可。
- 若 l 是奇数，r 是奇数，那么 $\sum_{i=l}^{r} a_i = (n+1)\frac{r-l}{2} + a_r$。根据 s 模 $n+1$ 的余数可以确定 a_r，从而确定 r。
- 若 l 是偶数，r 是偶数，那么 $\sum_{i=l}^{r} a_i = (n+2)\frac{r-l}{2} + a_r$。根据 s 模 $n+2$ 的余数可以确定 a_r，从而确定 r。

时间复杂度 $O(q)$。

函数 (function)

做法一

当 $R < 2^{20}$ 时，考虑对每个 $y \in [0, 2^{20})$ 预处理出是否存在 x 使得 $f(x) = y$。

这里根据做法二中的分析可以证明（但事实上选手可以猜），一个 $y \in [0, 2^{20})$ 如果存在对应的 x，就一定能在 $[0, 2^{21})$ 范围内找到一个 x。

那么直接对每个 $x \in [0, 2^{21})$ 算出它们的 $f(x)$ 即可。时间复杂度 $O(T+R)$。可以获得 40 分。

做法二

注意到 x 和 $f(x)$ 的 popcount 最多相差 1。假设 $b = \operatorname{popcount}(y)$。若存在 x 使得 $f(x) = y$，则必然是以下两种情况之一：

- x 第 $b+1$ 位（最低位是第 0 位）原来是 1，然后将这一位异或之后变成了 y。
- x 第 $b-1$ 位原来是 0，然后将这一位异或之后变成了 y。

容易发现这就是等价条件。也就是说，y 合法当且仅当 y 的第 $b+1$ 位为 0 或第 $b-1$ 位为 1。

为了方便，我们用 $[0, R]$ 的答案减去 $[0, L)$ 的答案。然后对于 $[0, R]$，可以像数位 DP 一样将其划分为 $O(\log R)$ 个区间，使得每个区间的数形如 “低 k 位 $0/1$ 任取，而高位已经被确定”。然后我们枚举 b，硬点好 y 的第 $b+1$ 位和第 $b-1$ 位后，剩下的位的填法就是一个组合数问题。

时间复杂度 $O(T \log^2 R)$。

游戏 (game)

假设 Alice 在 n 个商店中分别购买了 $c_1, \ldots, c_n$ 件商品，而 Bob 在 m 个商店中分别购买了 $d_1, \ldots, d_m$ 件商品。那么接下来 Alice 和 Bob 玩的就是 nim 游戏，Alice 必胜当且仅当 $c_1 \oplus \cdots \oplus c_n \oplus d_1 \oplus \cdots \oplus d_m \neq 0$。那么在 Alice 已经购买好商品的情况下，Bob 为了要赢，就是要看是否存在 $d_1, \ldots, d_m$ 使得 $d_1 \oplus \cdots \oplus d_m = c_1 \oplus \cdots \oplus c_n$ 且 $d_1 + \cdots + d_m \le m$。但注意到 $d_1 \oplus \cdots \oplus d_m \le d_1 + \cdots + d_m \le m$，所以 Bob 能赢当且仅当 $c_1 \oplus \cdots \oplus c_n \le m$。

那么现在问题变为，统计 $c_1, \ldots, c_n \ge 0$ 的数量，使得 $\sum c_i a_i \le k$ 且 $\bigoplus c_i > m$。

考虑按位 DP。假设已经确定了 $c_1, \ldots, c_n$ 的低 b 位，我们只需记录 $\sum c_i a_i$ 低 b 位和 k 低 b 位的大小关系，当前 $\sum c_i a_i$ 往第 b 位以后的进位是多少，以及 $\bigoplus c_i$ 低 b 位和 m 低 b 位的大小关系。注意到当前的 c_i 都小于 2^b，而它们乘上 a_i 再累加后，往第 b 位以后的进位不会超过 $\sum a_i$。于是第二维的大小只有 $\sum a_i$ 级别。

对于第 $b+1$ 位依次 DP 每个 c_i 在这位的取值并做转移，注意此时记录进位的那一维大小要翻倍（c_i 变成小于 2^{b+1}，但我们过程中记录的仍是第 b 位以后的进位）。时间复杂度 $O(n \cdot \sum a_i \cdot \max(\log k, \log m))$。

硬币 (coin)

题目是自适应的，那么根据信息论可知我们至少需要 $\lceil \log_2(2n+1) \rceil$ 次称量，因为每一次称量会有两种不同的结果，那么 M 次称量只能区分至多 2^M 种结果。发现数据范围确实要求达到这个操作次数下界，那么就要求我们每次称量都能排除差不多一半的情况。具体地，我们要在过程中一直保证 $2^{剩余操作数} \geq 剩余情况数$。

为了方便，我们下面先考虑 $n = 2^{k-1} - 1$ 的情况，这样 $k = \lceil \log_2(2n+1) \rceil$ 且 n 尽可能大。对 $n < 2^{k-1} - 1$ 的情况，可以想象将硬币补为 $2^{k-1} - 1$ 个，且我们还另外知道补充的硬币都是真的。

设 $h = \lceil \frac{n}{2} \rceil, q = \lceil \frac{h}{2} \rceil$。首先，将 $1, 2, \ldots, h$ 放在左盘、$h+1, h+2, \ldots, n$ 放在右盘。如果左右盘数量不同（$2 \nmid n$），就用 0 号硬币补齐右盘。

如果天平偏向右侧，那么我们就知道一定有假币了。进一步地，如果假币在左盘，它一定比真币更轻；如果假币在右盘，它一定比真币更重。从而在 $2n+1$ 种情况中，我们排除了 $n+1$ 种情况。

如果天平偏向左侧，那么我们还不知道是否一定有假币，但我们还是能知道：左盘的硬币不可能是更轻的假币，右盘的硬币不可能是更重的假币。那么还是有 n 种情况被排除。由于 $2^k \geq 2n+1$，那么 $2^k \geq 2n+2$，从而 $2^{k-1} \geq n+1$，条件仍然保持。

接着，我们将左盘中的 $1, 2, \ldots, q$ 和右盘的 $h+1, h+2, \ldots, h+q$ 交换位置，再进行称量。

如果天平的偏向和原来不同，那么假币一定在我们刚刚交换的部分，还剩 $2q$ 种情况；如果天平的偏向和原来的相同，那么我们刚刚交换的部分中一定没有假币，排除了 $2q$ 种情况。而 $2q = 2^{k-2}$，故条件仍然保持。

接着我们就可以递归地做上述过程：对于天平的偏向和原来不同的情况，对 $1, 2, \ldots, q$ 和 $h+1, h+2, \ldots, h+q$，我们已经知道了它们之间的称量关系，那么再将它们各自划分为两部分，并将第一部分交换；对于天平的偏向和原来相同的情况，对 $q+1, q+2, \ldots, h$ 和 $h+q+1, \ldots, n$ 做类似的事情。

时间复杂度 $O(n)$。