# 1.序列（sequence）

奇数和偶数显然是独立的，我们只考虑其中一种即可。

如果没有要求字典序最小的话，则显然相对位置不变的方案是最优的，那么我们可以直接得到一种合法方案以及最小代价。

我们用 $x_i$ 表示第 $i$ 个数是往左，往右还是不变，那么按 $x_i$ 分段后显然每一段是独立的，否则代价一定大了。 那么我们考虑 $x_i$ 相同的一段。如果他们都是向左的，那么我们可以按照从大到 小的顺序，每个数字都尽可能向后面放。而如果都是向右的，我们按照从小到大的顺 序每个数字都尽可能往前面放即可。可以发现，这样的两种放法都可以最小化字典序， 因此都是对的。

时间复杂度：$O(n \log n)$。

# 2.游戏（game）

先考虑必胜的条件。首先我们对于每棵树，假设走完这棵树，移到起始点是必胜或者必败的，分别求出先手是否必胜。这个可以用一个简单 dp 求出来。对于每棵树，我们记作 $(a, b)$ ，如果移到起始点是必胜， 那么 $a = 1$ 则先手必胜，$a = 0$ 则先手必败；类似的，如果移到起始点是必败， 那么 $b = 1$ 则先手必胜，$b = 0$ 则先手必败。

假设存在一棵树是 $(1, 1)$，那么先手一定必胜，因为移到无论移到起始点是必胜或者必败，先手都能必胜。

如果一棵树是 $(1, 0)$，那么我们发现它不会改变游戏的胜负状态。

如果一棵树是 $(0, 1)$，那么刚好会改变游戏的胜负状态。

如果一棵树是 $(0, 0)$，那么我们一定不会选择这棵树，也就是当最后只剩 $(0, 0)$ 就先手必败了。

由于一开始什么都没有也是先手必败的，所以先手必败的充要条件是 $(0, 1)$ 的个数是偶数个，且没有 $(1, 1)$。

计数的部分十分简单，时间复杂度 $O(n)$。

# 3.灯（light）

类似于树上的点边容斥，极长亮灯区间数等于 亮着的路灯数 减去 相邻连续亮着的路灯对数。

前者显然可以非常方便地维护，考虑如何维护这个连续亮着的路灯数。

设阈值 $B$，则我们可以把所有开关按照对应路灯个数和 $B$ 的关系分为大小两种。

若翻转的是小的开关，则我们直接可以暴力枚举这种开关管理的所有点，然后计算连续亮着的路灯数。

否则如果翻转的是大的开关，则和它相邻的颜色有两种：小的和大的。如果是大的，那么因为大的开关只有 $\frac{n}{B}$ 种，所以只要先预处理出任意两种大的开关之间有多少相邻的路灯，然后直接枚举这个另外的大的开关即可。

对于小的的情况，我们考虑在小的那里处理。即，在枚举小的点的时候，如果 周围遇到了一个大的开关，则我们就在这个大的开关上打一个标记，表示如果它翻转了那么会造成多大的改变即可。 时间复杂度：$O(q(B + \frac{n}{B}))$，取 $B = \sqrt{n}$ 即可做到时间复杂度 $O(q\sqrt{n})$。

# 4.比赛（contest）

对于某个 $k$，若存在这样的 $k$ 个人，那么必定唯一。

证明：如果存在某两个大小相同的合法集合 $S$ 以及 $T$，一定存在 $u \in S$ 而 $u \notin T$ 以及 $v \in T$ 而 $v \notin S$。根据合法集合的定义，我们从 $S$ 的定义可得 $u$ 胜过 $v$，而从 $T$ 的定义可得 $v$ 胜过 $u$，矛盾。

因此这样的集合一定唯一。 设 $F_{n,k}$ 表示 $n$ 个人中存在这样 $k$ 个人的概率，考虑转移。

考虑如何计算 $F_{n+1,k}$，如果 $n+1$ 在集合外，那么他一定要输给前面的这 $k$ 个人， 而这 $k$ 个人的编号都比他小，因此概率为 $p^k$。如果他在集合内，那么他要赢前面的 $n-k+1$ 个人，因此概率为 $q^{n-k+1}$，其中 $q = 1 - p$。因此，我们有

$$F_{n+1,k} = F_{n,k} \cdot p^k + F_{n,k-1} \cdot q^{n-k+1}$$

同时，我们也可以通过考虑 $1$ 这个人来做出转移。如果 $1$ 在集合外，那么他要输给后面的这 $k$ 个人，而这 $k$ 个人的编号都比他大，因此概率为 $q^k$。如果他在集合内， 那么他要赢后面的 $n-k+1$ 个人，因此概率为 $p^{n-k+1}$。因此，我们又有

$$F_{n+1,k} = F_{n,k} \cdot q^k + F_{n,k-1} \cdot p^{n-k+1}$$

所以，我们有

$$F_{n,k} \cdot p^k + F_{n,k-1} \cdot q^{n-k+1} = F_{n,k} \cdot q^k + F_{n,k-1} \cdot p^{n-k+1}$$

也就是：

$$F_{n,k} \cdot (p^k - q^k) = F_{n,k-1} \cdot (p^{n-k+1} - q^{n-k+1})$$

此外 $F_{n,0} = 1$，所以如果 $p \neq q$，即 $p \neq \frac{1}{2}$，我们就可以在 $O(n)$ 的时间内递推算出所有的 $F_{n,k}$，从而得到答案。 而剩下的情况是 $p = q$，则此时和下标无关，任意两个人之间一个人胜利的概率 都是 $\frac{1}{2}$。因此，我们考虑选出 $k$ 个人作为最后的胜者，则有 $F_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^{k(n-k)}}$。

两种情况的时间复杂度都是 $O(n)$ 或 $O(n \log n)$。