

预习报告		实验记录		分析讨论		总成绩	
25		30		25		80	
专业：		物理学		年级：		2022 级	
姓名：		戴鹏辉 & 崔瑜		学号：		2344016&22344017	
日期：		2024/6/3		教师签名：			

D4 塞曼效应

【实验报告注意事项】

- (1) 实验报告由三部分组成：
- (1) 预习报告：（提前一周）认真研读实验讲义，弄清实验原理；实验所需的仪器设备、用具及其使用（强烈建议到实验室预习），完成课前预习思考题；了解实验需要测量的物理量，并根据要求提前准备实验记录表格（第一循环实验已由教师提供模板，可以打印）。预习成绩低于 10 分（共 20 分）者不能做实验。
- (2) 实验记录：认真、客观记录实验条件、实验过程中的现象以及数据。实验记录请用珠笔或者钢笔书写并签名（**用铅笔记录的被认为无效**）。**保持原始记录，包括写错删除部分，如因误记需要修改记录，必须按规范修改。**（不得输入电脑打印，但可扫描手记后打印扫描件）；离开前请实验教师检查记录并签名。
- (3) 分析讨论：处理实验原始数据（学习仪器使用类型的实验除外），对数据的可靠性和合理性进行分析；按规范呈现数据和结果（图、表），包括数据、图表按顺序编号及其引用；分析物理现象（含回答实验思考题，写出问题思考过程，必要时按规范引用数据）；最后得出结论。

实验报告就是将预习报告、实验记录、和数据处理与分析合起来，加上本页封面。

- (2) 每次完成实验后的一周内交**实验报告**（特殊情况不能超过两周）。
- (3) 实验报告注意事项
- i. 不要用手直接触摸光学部件的光学表面，如果有污染，请用专用的清洁液和清洁布或者擦镜纸清洁。
 - ii. F-P 标准具已在出厂前进行校准，请勿自行随意调节三颗螺钉，如需调整，请在实验老师指导下进行。
 - iii. 为避免缩短笔形汞灯使用寿命，请勿频繁开关电源开关。笔形汞灯插入槽内后严禁左右晃动，以免破碎。
 - iv. 避免长时间对电磁线圈进行大电流供电，温度较高，请勿触摸。
 - v. 每次实验结束后将电流调至零后再关掉电源。

目录

1 D4 塞曼效应 预习报告 3

1.1 实验目的 3

1.2 仪器用具 3

1.3 原理概述 3

1.3.1 电子的磁矩——轨道磁矩和自旋磁矩 3

1.3.2 两个角动量的耦合（叠加） 4

1.3.3 电子的总磁矩及其在外磁场中的势能 5

1.3.4 汞原子谱线在外磁场中的能级分裂 6

1.3.5 基本测量仪器介绍 7

1.4 实验前思考题 10

2 D4 塞曼效应 实验记录 17

2.1 实验内容和步骤 17

2.1.1 实验光路搭建 17

2.1.2 观察谱线分裂 17

2.2 实验原始数据记录 20

3 D4 塞曼效应 分析与讨论 21

3.1 实验数据分析 21

3.1.1 分析塞曼分裂情况 21

3.1.2 计算荷质比 e/m 22

3.1.3 分析误差来源 23

3.2 实验总结 23

3.2.1 实验问题总结 23

3.2.2 实验分工 23

3.3 代码附件 24

D4 塞曼效应 预习报告

1.1 实验目的

- (1) 通过观察原子谱线在外磁场中的分裂现象，加深对电子“自旋”、“两个角动量的耦合”、“两个电子之间的 LS 耦合”、“角动量守恒”、“多电子原子和电子组态”、“能级跃迁”、“选择定则”等概念的理解，验证原子具有磁矩及其空间取向的量子化，进一步认识原子的内部结构；
- (2) 用 F-P 干涉仪观察汞（Hg）原子 546.1nm 谱线在外磁场中的分裂现象（即“反常塞曼效应”），测量电子的荷质比 e/m ；
- (3) 验证光子具有角动量及角动量守恒定律，了解光的偏振理论及其产生机制，学习偏振片的原理及使用方法。

1.2 仪器用具

编号	仪器用具名称	数量	主要参数（型号，测量范围，测量精度等）
1	塞曼效应	1	BEX-8501
2	电磁体（带电源）	1	可通过调节激励电流大小改变磁场的大小
3	磁感应强度测量仪	1	实验中通过电流与磁感应强度的对应关系得到磁感应强度值
4	汞放电管	1	
5	滤光片	1	能通过 546.1nm 及其自由光谱范围内的“单色光”
6	法布里-珀罗标准具	1	
7	偏振片	1	可以通过 0° 刻度线方向上的线偏振光
8	数字图像采集器	1	包含望远镜和 CCD
9	台式电脑	1	安装有“塞曼效应实验分析 VCH5.0”软件，用以分析实验数据

1.3 原理概述

1.3.1 电子的磁矩——轨道磁矩和自旋磁矩

- (1) 电子的轨道磁矩

$$\mu_l = \sqrt{l(l+1)} \frac{e\hbar}{2m_e} \equiv \sqrt{l(l+1)} \mu_B \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\mu_{l,z} = m_l \hbar \cdot \frac{e}{2m_e} = m_l \mu_B \quad m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$$

$$\text{其中 } \mu_B \equiv \frac{e\hbar}{2m_e} = 0.9274 \times 10^{23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

(2) 电子的自旋及自旋磁矩

电子除了轨道角动量外，还有自旋运动，电子的自旋是一种固有的内在属性，电子自旋角动量及其 z 方向分量大小的可能取值为：

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar \quad s = \frac{1}{2}$$

$$S_z = m_s \hbar \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

由电子自旋运动产生的自旋磁矩，其方向及大小为：

$$\vec{\mu}_s = -2\gamma \vec{S}$$

$$\mu_s = 2\sqrt{s(s+1)} \mu_B \quad s = \frac{1}{2}$$

$$\mu_{s,z} = 2m_s \mu_B \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

(3) 磁矩在外磁场中的势能

在电磁学中，磁矩为的系统，在外磁场中的势能为：

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

1.3.2 两个角动量的耦合（叠加）

(1) 同一个电子的情况

同一个电子，其轨道角动量 L 和自旋角动量 S 的叠加或耦合。此即所谓的“自旋—轨道耦合”。自旋—轨道耦合本质上是电子自旋（内禀）磁矩与电子轨道运动产生的磁场之间的相互作用，“自旋—轨道耦合”是导致氢原子和碱金属光谱双线结构的主要原因：

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

(2) 不同电子之间的耦合

- LS 耦合：即电子 1 的 L_1 和电子 2 的 L_2 耦合成 $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ ，电子 1 的 S_1 和电子 2 的 S_2 耦合成 $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ ，然后系统的总轨道角动量 \vec{L} 和总自旋角动量 \vec{S} 再耦合生成系统的总角动量 \vec{J}
- jj 耦合：即电子 1 的 L_1 和 S_1 耦合成 $\vec{J}_1 = \vec{L}_1 + \vec{S}_1$ ，即电子 2 的 L_2 和 S_2 耦合成 $\vec{J}_2 = \vec{L}_2 + \vec{S}_2$ ，然后电子 1 的总角动量 \vec{J}_1 和电子 2 的总角动量 \vec{J}_2 再耦合生成系统的总角动量 \vec{J} 。

(3) 多电子原子及电子组态

电子组态：

$$nl^{#e} \quad l = s(0), p(1), d(2), f(3) \\ \#e \leq 2(2l + 1)$$

原子态：

$$n^{2s+1}l_j \quad l = S(0), P(1), D(2), F(3)$$

1.3.3 电子的总磁矩及其在外磁场中的势能

(1) 电子的总磁矩

总磁矩 $\vec{\mu}_j$ 及其大小的一般表达式可写成：

$$\mu_j = -\sqrt{j(j+1)}g_j\mu_B$$

总磁矩 $\vec{\mu}_j$ 在 z 方向上分量的大小为：

$$\mu_{j,z} = -m_j g_j \mu_B$$

朗德因子的一般表达式为：

$$g_j = \frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

(2) 磁矩在均匀外磁场中的运动——拉莫尔进动

磁矩在均匀外磁场中不受力，但是会受到一个力矩的作用：

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}_J \times \vec{B}$$

由经典力学的知识可知，力矩会引起系统总角动量的变化：

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{\mu}_J \times \vec{B}$$

$$\frac{d\vec{\mu}_J}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\mu} \quad \vec{\omega} \equiv \gamma \vec{B}$$

式中的 $\vec{\omega}$ 称为“拉莫尔频率”， $\vec{\mu}_J$ 大小不变，绕着外磁场 B (z 轴方向) 做进动，又称“拉莫尔进动”。

(3) 弱外磁场和强外磁场的区别

- 弱外磁场：当外磁场 B_{ext} 的场强远远小于原子内部磁场 B_{int} 的场强，即为弱外磁场时，这时自旋—轨道耦合占主导，电子的总角动量 J 是守恒量，但总轨道角动量 L 和总自旋角动量 S 均不守恒，系统的守恒量（好量子数）为 $J^2, J_z, L^2, S^2 (n, L, J, m_j)$

- 强外磁场: 自旋—轨道耦合变得次要, 电子磁矩 (分为轨道磁矩和自旋磁矩) 与外磁场 B_{ext} 的相互作用则占主导。系统的总轨道角动量 L 和总自旋角动量 S 不再耦合总角动量 J (仍然可通过 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ 计算总角动量, 但此时的总角动量是非守恒量, (24) 至 (28) 式在强外磁场的情况下不适用), 此时系统的守恒量 (好量子数) 为 $L^2, L_Z, S^2, S_z (n, L, ml, ms)$ 。

(4) 电子总磁矩在外磁场中的势能

可得汞原子的总磁矩 $\vec{\mu}_J$ 在沿着 z 轴方向的外磁场 B 中的势能为:

$$U = -\vec{\mu}_J \cdot \vec{B} = m_J g_J \mu_B B$$

1.3.4 汞原子谱线在外磁场中的能级分裂

(1) 原子谱线在外磁场中的分裂

当原子处于磁感应强度为 B 的外磁场中时, 原子磁矩与磁场相互作用, 使原子系统附加了势能 $\Delta E = U$, (由 (33) 式给出), 此时原子的能级将分裂为 $2J+1$ 层, 各层能量为:

$$E = E_0 + m_J g_J \mu_B B$$

又设频率为 ν 的光子是由原子从能级 E_2 跃迁到能级 E_1 所产生, 即有:

$$h\nu = E_2 - E_1 = E_{20} - E_{10} + (m_2 g_2 - m_1 g_1) \mu_B B$$

分裂后的谱线和原来谱线之间的频率差为:

$$\Delta\nu = (m_2 g_2 - m_1 g_1) \mu_B B / h$$

波数差 (波数定义 $\tilde{\nu} = 1/\lambda$):

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{(m_2 g_2 - m_1 g_1) e B}{4\pi m c}$$

(2) 汞原子 546.1nm 谱线的量子数及朗德因子的计算

谱线是汞原子的外层 (两个) 电子从能级 (组态) $6s7s$ 到 $6s7p$ 的跃迁而产生的。

表 3 汞原子 546.1nm 谱线对应的上下两个能级的量子数及朗德因子

原子态符号	3S_1 ($6s7s$)	3P_2 ($6s7p$)
L	0	1
S	1	1
J	1	2
g_J	2	3/2
m_J	1、0、-1	2、1、0、-1、-2
$m_J g_J$	2、0、-2	3、3/2、0、-3/2、-3

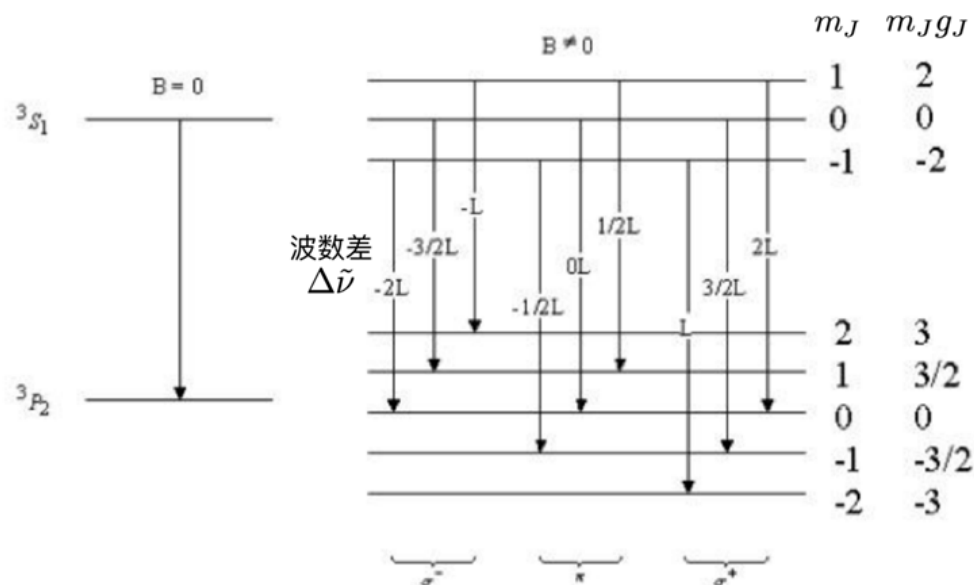


图 9 汞原子 546.1nm 谱线与能级的关系（带箭头竖线上的数字代表（39）式所示的波数差（39）式）

(3) 塞曼效应观测中的偏振效应—— σ^\pm 偏振（垂直于磁场）和 π 偏振（平行于磁场）

若有 $\Delta m = 1$ ，将观察到 σ^+ 左旋偏振光，若 $\Delta m = -1$ ，将观察到 σ^- 右旋偏振光，若 $\Delta m = 0$ ，则为 π 偏振。

1.3.5 基本测量仪器介绍

(1) 法布里—珀罗标准具

F-P 标准具由平行放置的两块平板组成的，在两块相对的平面上镀薄银膜和其他有较高反射系数的薄膜，若两平行的镀银平面的间隔不可以改变，则称该仪器为“法布里—珀罗干涉仪”。由于两镀膜面平行，若使用扩展光源，则产生等倾干涉条纹。具有相同入射角的光线在垂直于观察方向的平面上的轨迹是一组同心圆。若在光路上放置透镜，则在透镜焦平面上得到一组同心圆环图样。在透射光束中，相邻光束的光程差为：

$$\Delta = 2nd\cos\phi$$

产生亮条纹的条件为：

$$2nd\cos\phi = K\lambda$$

其中 K 为干涉条纹级数， λ 为入射光波长。

标准具的两个特征参量是自由光谱范围和分辨本领。

- 自由光谱范围：同一光源发出的具有微小波长差的单色光 λ_1 和 λ_2 ，入射后将形成各自的圆环系列。对同一级的干涉条纹，波长大的干涉圆环直径小。对于某单色光来说，越靠中心处的干涉条纹的级数 K 越大。

如果 λ_1 和 λ_2 的波数差逐渐增大，使得 λ_1 的第 m 级亮纹与 λ_2 的第 $m - 1$ 级亮纹重合，则有

$$2nd\cos\theta = m\lambda_1 = (m - 1)\lambda_2$$

$$\text{得出 } \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_2}{m}$$

由于大多数情况下, $\cos\theta \approx 1$, 可得到 $m \approx \frac{2nd}{\lambda_1}$, 得

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2nd} \approx \frac{\lambda^2}{2nd}$$

它表明在 F-P 干涉仪中, 当给定两平面间隔 d 后, 入射光波长在 $\lambda \pm \Delta\lambda$ 内不会发生干涉圆环重叠。

- 分辨本领: 对于 F-P 标准具, 它的分辨本领为 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = KN$, K 为干涉级次, N 为精细度, 它的物理意义是在相邻两个干涉级之间能分辨的最大条纹数。 N 依赖于平板内表面反射膜的反射率 R :

$$N = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

反射率 R 越高, 精细度 N 就越高, 仪器能分辨开的条纹数就越多。

(2) 波数差与圆环直径之间的关系

通过测量干涉环的直径就可以测量各分裂谱线的波长或波长差。

如图 1 所示, 出射角为 θ 的圆环直径 D 与透镜焦距 f 间的关系为 $\tan\theta = \frac{D}{2f}$, 对于近中心的圆环 θ 很小, 可以认为 $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$, 于是有:

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{D^2}{8f^2}$$

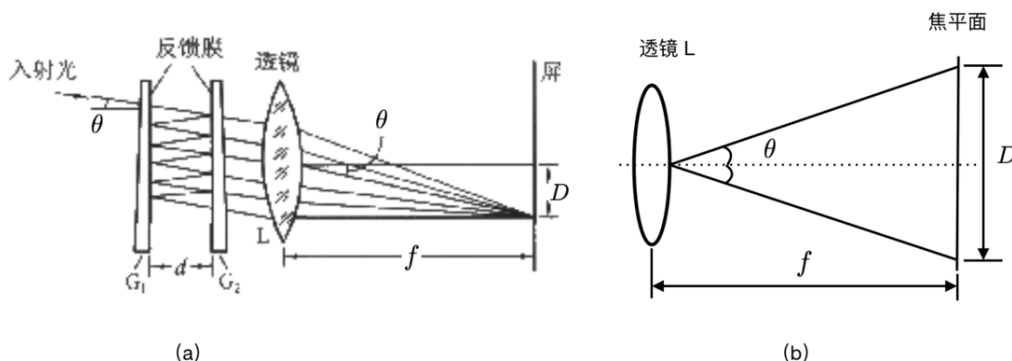


图 1: 法布里-珀罗 (F-P) 标准具光路图 (图中的透镜指的是望远镜里的透镜)

$$2nd\cos\theta = 2nd\left(1 - \frac{D^2}{8f^2}\right) = K\lambda$$

由上式可推出同一波长 λ 相邻两级 K 和 $K-1$ 级圆环直径的平方差为

$$\Delta D^2 = D_{K-1}^2 - D_K^2 = \frac{4f^2\lambda}{nd}$$

设不同波长 λ 和 λ_α 的第 K 级干涉圆环直径分别为 D_K 和 D_α

$$\lambda - \lambda_\alpha = \frac{nd}{4f^2K}(D_\alpha^2 - D_K^2) = \left(\frac{D_\alpha^2 - D_K^2}{D_{K-1}^2 - D_K^2}\right)\frac{\lambda}{K}$$

得出波长差为:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2nd} \left(\frac{D_\alpha^2 - D_K^2}{D_{K-1}^2 - D_K^2} \right)$$

波数差为:

$$\Delta\tilde{\nu} = \frac{1}{2nd} \left(\frac{D_\alpha^2 - D_K^2}{D_{K-1}^2 - D_K^2} \right)$$

(3) 通过塞曼效应计算电子荷质比 e/m

本实验只研究反常塞曼效应的线偏振 π 的谱线。

$$\frac{e}{m} = \frac{4\pi c}{ndB} \left(\frac{D_\alpha^2 - D_K^2}{D_{K-1}^2 - D_K^2} \right)$$

若已知 d 和 B ，从塞曼分裂中测量出各环的直径，就可以计算出荷质比。

1.4 实验前思考题

思考题 1.1: 光子是否具有角动量？试描述光子角动量方向与光的偏振方向之间的关系。

光子具有角动量，这是由光的波粒二象性决定的。光子的角动量可以分为两部分：轨道角动量和自旋角动量。

- 光子的自旋角动量

光子的自旋角动量与光的偏振状态密切相关。光子的自旋角动量量子数为 ± 1 ，对应光子的左旋圆偏振和右旋圆偏振。具体来说：

- 左旋圆偏振光：光子的自旋角动量沿传播方向（ z 轴）为 $+\hbar$ 。
- 右旋圆偏振光：光子的自旋角动量沿传播方向（ z 轴）为 $-\hbar$ 。
- 对于线偏振光，光子的自旋角动量可以被看作是左旋和右旋圆偏振光子的叠加，因此没有净自旋角动量。

- 光子的轨道角动量

光子的轨道角动量与光束的空间结构相关，例如涡旋光束（光学涡旋）具有轨道角动量。这些光束的电场和磁场分布呈螺旋状，光子的轨道角动量与光束的涡旋态有关。

光子的自旋角动量方向与光的偏振方向有密切关系。对于线偏振光，偏振方向就是电场振动的方向，而对于圆偏振光，电场矢量在垂直于传播方向的平面内旋转。

- 线偏振光：自旋角动量为零，因为它是左右旋圆偏振光的叠加。
- 圆偏振光：自旋角动量沿传播方向，为 $\pm\hbar$ ，对应于电场矢量在传播方向上方的旋转方向。

对于具有轨道角动量的光（如涡旋光束），轨道角动量方向与光束的螺旋相位前沿的旋转方向相关。

光子具有角动量，包括自旋角动量和轨道角动量。自旋角动量直接与光的偏振状态相关，而轨道角动量与光束的空间相位结构相关。光子的自旋角动量方向与圆偏振光的旋转方向一致，而线偏振光没有净自旋角动量。理解光子的角动量对于光与物质相互作用、光通信以及量子信息等领域具有重要意义。

思考题 1.2: 用同一级条纹的内外圈分别计算电子的荷质比，结果一样吗？试简述原因。

F-P 标准具的干涉条纹由于光束的多次反射和干涉而形成。对于不同位置的条纹，由于光程差不同，条纹的直径也不同，具体地说，内圈条纹和外圈条纹的厚度存在差异。

假设我们有两个同一级条纹，其中内圈直径为 D_1 ，外圈直径为 D_2 。

对于同一级条纹，若我们分别用内圈直径 D_1 和外圈直径为 D_2 计算电子的荷质比 $\frac{e}{m}$ ，结果会有所不同。这是因为圆环并不是等厚的。随着条纹级数 N 的增加，圆环的厚度变化 (δD) 会影响直径的测量。具体来说，随着级数的增加，圆环的厚度变化导致直径的变化，从而使得计算的结果有所偏差。

思考题 1.3: 请利用 (20) 至 (23) 式，计算汞原子 3S_1 (6s7s) 和 3P_2 (6s7p) 能级所对应的量子数 (见表 1)，并给出详细的计算过程。

(1) 先计算 3S_1 的情况:

- 由 $2S + 1 = 3$, 得 $S = 1$;
- 处在 S 轨道, 则 $L = 0$
- $J = 1$

(2) 再计算 3P_2 的情况:

- 由 $2S + 1 = 3$, 得 $S = 1$;
- 处在 P 轨道, 则 $L = 1$
- $J = 2$

思考题 1.4: 请利用 (2)、(8) 和 (20) 式, 并结合 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ 和 $\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$ (注意此时的是图 5 中的 $\vec{\mu}_J$, 详细见脚注 22), 导出朗德因子的一般表达式 (28) 式, 并给出详细的推导过程。

朗德因子定义为总磁矩和总角动量的比值, 即:

$$\mu_{Jz} = -g_J \frac{e}{2m_e} J_z$$

其中, 总角动量 z 分量 J_z 为:

$$J_z = m_J \hbar$$

因此, 总磁矩 z 分量可以表示为:

$$\mu_{Jz} = -g_J \frac{e}{2m_e} m_J \hbar$$

将上面两个关于 μ_{Jz} 的表达式相等, 并解出 g_J :

$$-g_J \frac{e}{2m_e} m_J \hbar = -\frac{e}{2m_e} m_L \hbar - g_s \frac{e}{2m_e} m_S \hbar$$

两边同时除以 $-\frac{e}{2m_e} \hbar$:

$$g_J m_J = m_L + g_s m_S$$

根据角动量合成规则, 有:

$$m_J = m_L + m_S$$

所以:

$$g_J m_J = m_L + g_s (m_J - m_L)$$

化简后得到:

$$g_J m_J = g_s m_J + (1 - g_s) m_L$$

两边同时除以 m_J :

$$g_J = g_s + (1 - g_s) \frac{m_L}{m_J}$$

根据量子力学中的角动量耦合理论, 期望值为:

$$\frac{\langle m_L \rangle}{m_J} = \frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2J(J+1)}$$

因此, 朗德因子的最终表达式为:

$$g_J = g_s \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} + \frac{J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)}{2J(J+1)}$$

将 $g_s = 2$ 代入, 得到:

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

这就是朗德因子的一般表达式。

思考题 1.5: 请利用单电子情况下的 (36) 式, 并结合钠双黄线的平均波长及其波长差 ($\lambda_1 = 589.0$ nm, $\lambda_2 = 589.6$ nm), 估算一下钠原子内部的磁感应强度 B_{int} 的值 (提示: 单电子情况下, 两谱线的能级差为势能的两倍, 即有 $\Delta E = \Delta U = 2\mu_B B$; 另需要利用到光子波长和频率之间的关系式。答案: 钠原子内部的磁感应强度 B_{int} 的值为 18.5T)。

由 $\nu = \frac{c}{\lambda}$, 得 $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda$; 再由 $\Delta E = \Delta U = 2\mu_B B$, 得

$$B = \frac{h\Delta\nu}{2\mu_B} = \frac{hc\Delta\lambda}{2\mu_B\lambda^2} = \frac{1240\text{eV} \cdot \text{nm} \times 0.6\text{nm}}{2 \times 0.5788 \times 10^{-4}\text{eV} \cdot \text{T}^{-1} \times (589.3\text{nm})^2} \approx 18.5\text{T}$$

思考题 1.6: 请结合第 5 题的计算结果, 说明弱外磁场 $B_{ext} \ll B_{int}$ 成立时弱外磁场 B_{ext} 的取值范围, 并确认本实验中电磁体的磁感应强度符合弱外磁场 $B_{ext} \ll B_{int}$ 条件。

当外磁场 $B_{ext} \ll B_{int}$ 时, 可认为是弱磁场, 此处可取 $B_{ext} \approx 0.1\text{T}$

思考题 1.7: 请结合力与势能的关系式 $\vec{F} = -\nabla U$ 并利用 (11) 式, 试推导磁矩在非均匀外磁场中的受力大小为 $F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$ ($B_x = B_y = 0$) (设外磁场方向在 z 轴方向, F_z 为力在 z 方向上分量的大小) (提示: 请利用郭硕鸿《电动力学》(第二版) 一书附录中的矢量运算公式)。

由 $\vec{F} = -\nabla U$ $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, 得 $\vec{F} = \nabla(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \nabla(\mu_z B_z) \Rightarrow F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$

思考题 1.8: 请结合朗德因子的一般表达式 (28) 式, 以及两个角动量耦合的一般规则 (20) 至 (23) 式, 计算表 3 中汞原子 546.1nm 谱线对应的上下两个能级的各量子数及不同谱线 (能级跃迁) 的朗德因子 (见图 9)。用 “格罗春图” 33 (Grotrian 图) 来表示汞原子 546.1nm 谱线不同能级之间可能的跃迁。

思考题 1.9: 请回答什么是 “反常塞曼效应” 和 “正常塞曼效应”, 两者之间的区别是什么。请思考什么是 “帕邢-巴克效应” 及其形成的原因。

塞曼效应是指在磁场作用下, 光谱线发生分裂的现象。根据分裂的特征和具体情况, 塞曼效应可以分为正常塞曼效应和反常塞曼效应。

- 正常塞曼效应

正常塞曼效应是最简单的情况, 出现在某些特定条件下:

- 光谱线在弱磁场中分裂为三个分量, 即一个不变的中心线和两个对称移动的旁线。
- 这种分裂的光谱线对应于自旋为零的原子, 只有轨道角动量的贡献。
- 旁线的频率偏移量与磁场强度成正比, 且偏移量相等, 表现为均匀分裂。
- 在正常塞曼效应中, 电子的轨道角动量与磁场相互作用导致能级分裂, 而电子自旋不参与。结果, 在原来未分裂的能级上观察到三个分立的能级, 其分裂间隔与外加磁场成正比。

- 反常塞曼效应

反常塞曼效应比正常塞曼效应更复杂, 出现的条件如下:

- 光谱线在磁场中分裂为多个分量, 且这些分量的数目和位置不能简单地用正常塞曼效应解释。
- 这种效应出现在电子具有非零自旋的原子中, 电子的轨道角动量和自旋角动量共同作用导致能级分裂。
- 分裂的具体特征依赖于电子的自旋和轨道角动量的组合, 导致复杂的分裂模式。
- 在反常塞曼效应中, 自旋角动量与轨道角动量耦合, 导致更多能级分裂, 并且这些分裂间隔不再是均匀的。这种效应需要采用量子力学中的自旋-轨道耦合理论进行解释。

正常塞曼效应与反常塞曼效应的区别:

- (1) 自旋贡献: 正常塞曼效应中没有电子自旋贡献 (电子自旋为零), 而反常塞曼效应中有自旋贡献 (电子自旋非零)。
- (2) 分裂数量: 正常塞曼效应的光谱线分裂为三个分量, 而反常塞曼效应的分裂数量更为复杂且不固定。
- (3) 分裂间隔: 正常塞曼效应的分裂间隔是均匀的, 反常塞曼效应的分裂间隔不均匀。

帕邢-巴克效应

帕邢-巴克效应是另一种光谱分裂现象, 出现在强磁场条件下:

- 在非常强的磁场中，电子的轨道运动和自旋运动的耦合被强磁场打破，轨道角动量和自旋角动量相互独立地与外加磁场作用。
- 这种效应发生时，能级分裂的方式发生改变，从塞曼效应的分裂模式转变为帕邢-巴克效应的分裂模式。
- 帕邢-巴克效应的分裂特征更复杂，因为需要考虑轨道角动量和自旋角动量分别与外加磁场的相互作用。
- 形成原因：帕邢-巴克效应的形成是因为在强磁场中，自旋-轨道耦合效应变得不再显著，电子的轨道角动量和自旋角动量分别与磁场相互作用，导致能级分裂方式的改变。这种效应出现在非常强的磁场中，通常是比塞曼效应中使用的磁场强度高得多的条件下。

总结

- 正常塞曼效应：简单的三重分裂，适用于自旋为零的情况。
- 反常塞曼效应：复杂的多重分裂，适用于有自旋贡献的情况。
- 帕邢-巴克效应：在强磁场中发生的复杂分裂，轨道角动量和自旋角动量分别与磁场相互作用。

思考题 1.10: 请回答电子的“自旋-轨道耦合”的本质是什么？它与电子之间的“LS 耦合”的区别是什么？

电子的“自旋-轨道耦合”的本质是指电子的自旋角动量（自旋）与其轨道角动量（轨道运动）之间的相互作用。这种相互作用的本质可以从相对论效应来解释，当电子在绕核运动时，它的轨道运动会产生一个有效磁场，这个磁场与电子的自旋磁矩相互作用，导致自旋和轨道角动量之间的耦合。

具体来说，电子在核周围运动时，感受到的核电场在电子参考系中会表现为一个磁场。这个磁场与电子的自旋磁矩相互作用，导致能级的分裂，并影响电子的能量状态和光谱特性。

LS 耦合（Russell-Saunders 耦合）是描述多电子原子中电子之间相互作用的一种方法。LS 耦合中，多个电子的轨道角动量首先相加成总轨道角动量 L ，多个电子的自旋角动量相加成总自旋角动量 S ，然后再考虑总轨道角动量 L 与总自旋角动量 S 之间的相互作用，形成总角动量 J 。

具体区别如下：

- 耦合对象：
 - 自旋-轨道耦合：单个电子的自旋角动量与其轨道角动量之间的相互作用。
 - LS 耦合：多个电子的总轨道角动量与总自旋角动量之间的相互作用。
- 适用范围：
 - 自旋-轨道耦合：描述单个电子在原子核电场中的相互作用。
 - LS 耦合：描述多电子原子中电子之间的相互作用，特别是轻原子中的多电子系统。
- 相对强度：

- 在轻原子中，电子之间的库仑相互作用比自旋-轨道耦合强，因此 LS 耦合适用。
- 在重原子中，自旋-轨道耦合变得更强，可能需要使用 jj 耦合来描述。

总结：

- 自旋-轨道耦合描述的是单个电子的自旋和轨道角动量之间的相互作用。
- LS 耦合描述的是多电子原子中电子的总轨道角动量与总自旋角动量之间的相互作用。
- 自旋-轨道耦合适用于描述单电子系统，而 LS 耦合适用于描述轻原子中的多电子系统。

思考题 1.11: 请结合多电子原子及电子组态的相关知识，思考为什么像汞原子一样有两个价电子的元素（氦 He 和镁 Mg 等第二族（碱土族）元素），会有两套不同的谱线（一套是单线结构，一套是双线结构）。

在多电子原子中，尤其是像汞原子一样有两个价电子的元素（例如氦（He）和镁（Mg）等第二族（碱土族）元素），会出现两套不同的谱线结构（单线结构和双线结构）。这种现象与电子的自旋-轨道耦合和电子组态有关。

自旋-轨道耦合与谱线结构

电子的自旋-轨道耦合导致能级的分裂，从而影响光谱线的结构。对于有两个价电子的元素，电子的自旋-轨道耦合使得这些电子的能级分裂为多个子能级，因此我们会观察到不同的谱线结构。

单线结构

单线结构通常是由电子跃迁中不涉及自旋-轨道耦合的跃迁引起的。这种情况常见于：

- 电子的自旋和轨道角动量之间的耦合较弱或者可以忽略不计。
- 电子跃迁发生在没有自旋-轨道耦合分裂的能级之间。
- 对于氦（He）和镁（Mg）等第二族元素，在某些电子跃迁过程中，自旋-轨道耦合的效应很小，导致我们观察到单线结构的谱线。

双线结构

双线结构通常是由自旋-轨道耦合导致的能级分裂引起的。这种情况常见于：

- 电子的自旋和轨道角动量之间的耦合较强。
- 电子跃迁发生在经历自旋-轨道耦合分裂的能级之间。
- 对于有两个价电子的元素，自旋-轨道耦合使得原本简并的能级分裂为两个或多个子能级。例如，在汞（Hg）原子中，两个价电子的自旋和轨道角动量耦合导致 1P_1 态和 $^3P_{0,1,2}$ 态的能级分裂，从而在跃迁时产生多条谱线，即双线结构或多线结构。

总结来说，第二族元素（如氦和镁）会有两套不同的谱线结构，主要是因为自旋-轨道耦合在不同电子跃迁中起不同的作用。自旋-轨道耦合导致能级的分裂，从而在光谱中产生双线结构或多线结构，而在没有自旋-轨道耦合分裂的情况下，则表现为单线结构。

思考题 1.12: 设 F-P 标准具两反射面之间的距离为 $d=2\text{ mm}$, 请根据 (47) 式估计汞原子 546.1nm 谱线的自由光谱范围。

由 $\Delta\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2nd} \approx \frac{\lambda^2}{2nd}$, 得自由光谱范围为:

$$\Delta\lambda = \frac{(546.1\text{nm})^2}{2 \times 1 \times 2\text{mm}} \approx 0.074\text{nm}$$

即, 入射光波长在 $(546.1 \pm 0.074)\text{nm}$ 间变化, 所产生的干涉圆环不发生重叠。

思考题 1.13: 请根据 (38) 式, 估计在外磁场为 $B=1\text{T}$ 时观察汞原子 546.1nm 谱线分离所要求的仪器分辨率的 $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, 并讨论用 F-P 标准具观测的必要性 (一般棱镜摄谱仪的理论分辨率为 10^3 10^4 , F-P 标准具的理论分辨率为 10^5 10^7 , 实际分辨率比理论值要略低一些)。

思考题 1.14: 仔细观察垂直磁场方向观察, 旋转偏振片至 45° 角的纪录, 会发现同一级条纹在磁场中分离成不只三条, 请解释出现这一现象的原因。

思考题 1.15: 本实验要求精度为实验测量误差小于等于 5%, 请分析本实验误差的主要来源, 并提出相应的修正方法。

思考题 1.16: 请尝试计算钠双黄线 (又称 “钠 D 线”, 是由钠原子从 $^2P_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}$ 到 $^2S_{\frac{1}{2}}$ 态的跃迁所产生) 谱线的塞曼分裂 (如图 21), 可能的话, 设计具体实验步骤并进行观察验证。

专业:	物理学	年级:	2022 级
姓名:	戴鹏辉 & 崔瑜	学号:	22344016&22344017
室温:	26°C	实验地点:	A508
学生签名:		评分:	
实验时间:	2024/6/6	教师签名:	

D4 塞曼效应 实验记录

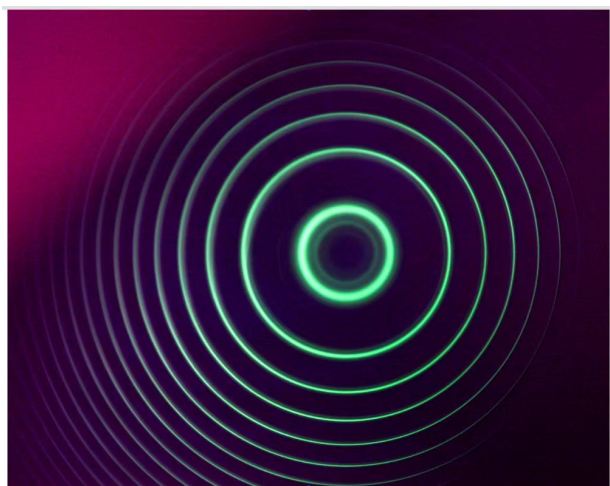
2.1 实验内容和步骤

2.1.1 实验光路搭建

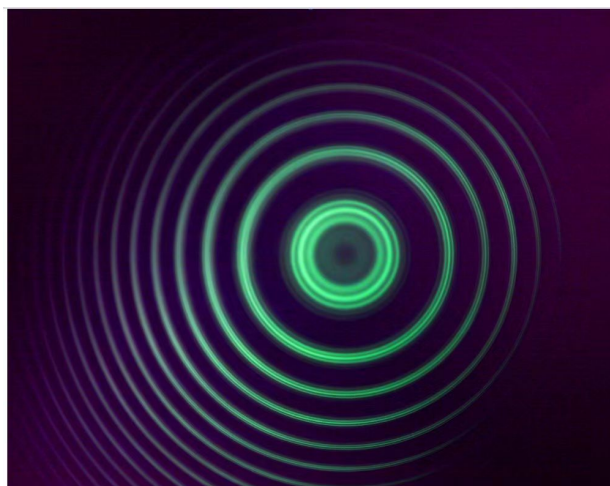
- (1) 调整相机模块
 - 将相机固定在光学导轨上的另一端约 520 mm 处，并锁紧托板。
 - 松开升降调节架的螺钉，调整杆的高度，并通过旋转来微调升降调节架，确保相机与汞灯处于同一高度，此时汞灯图像位于屏幕中心。
 - 调节镜头上的焦距和光圈，使图像清晰。
- (2) 调整聚光透镜和偏振片模块
 - 将聚光透镜和偏振片固定在相机右侧的导轨上，并以同样方法调节高度，此时光斑将充满整个视频窗口。
 - 松开偏振片旋钮，旋转偏振片，使竖直白色刻度对准 90° 刻线。
- (3) 调节 F-P 标准具和干涉滤光片模块
 - 将干涉滤光片和 F-P 标准具置于相机和偏振片之间，调节高度一致，并使标准具尽可能靠近相机镜头（避免杂散光），此时视频窗口会出现干涉圆环。
 - 适当调节聚光透镜的位置和相机镜头光圈，使图像亮度适中。
 - 调节精密调整架的 XY 旋钮，使干涉圆环处于视频窗口中心。
 - 调节相机镜头后焦，获得清晰干涉图像。

2.1.2 观察谱线分裂

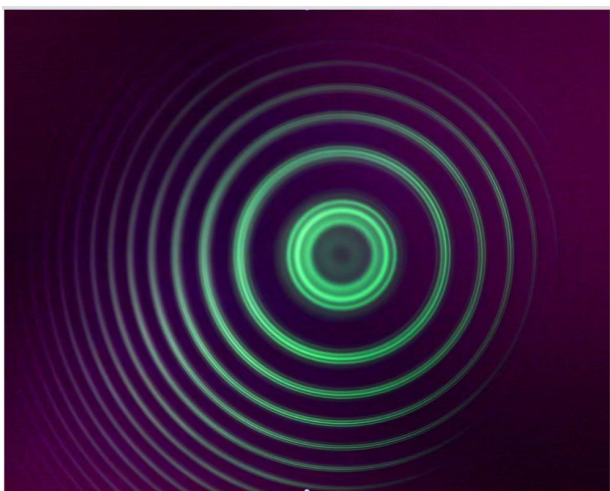
首先观察垂直磁场方向的分裂情况，如图 2：
在观察平行磁场方向的塞曼效应分裂情况，如图 3：



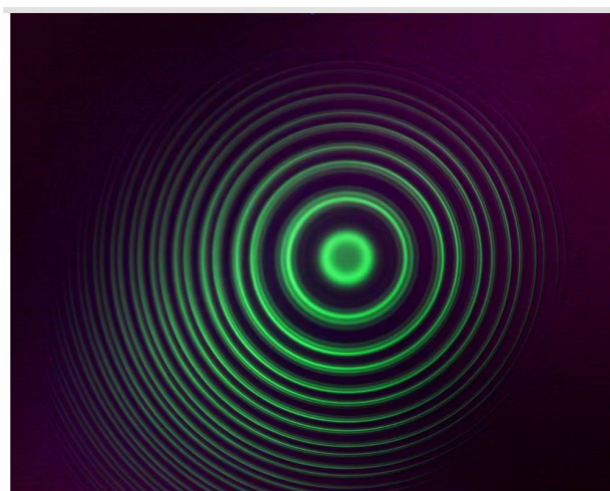
(a) 0A 电流，垂直磁场方向，偏振片 90°



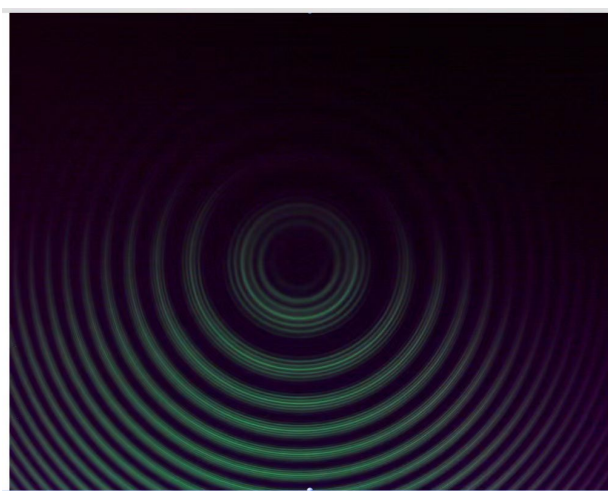
(b) 3.15A 电流，垂直磁场方向，偏振片 90°



(c) 4A 电流，垂直磁场方向，偏振片 90°

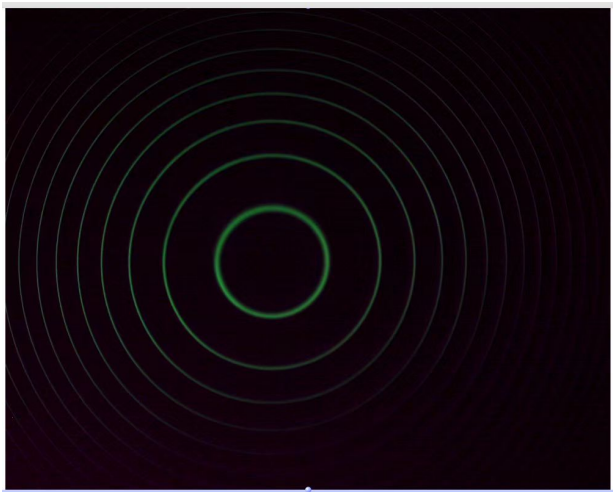


(d) 3.15A 电流，垂直磁场方向，偏振片 0°

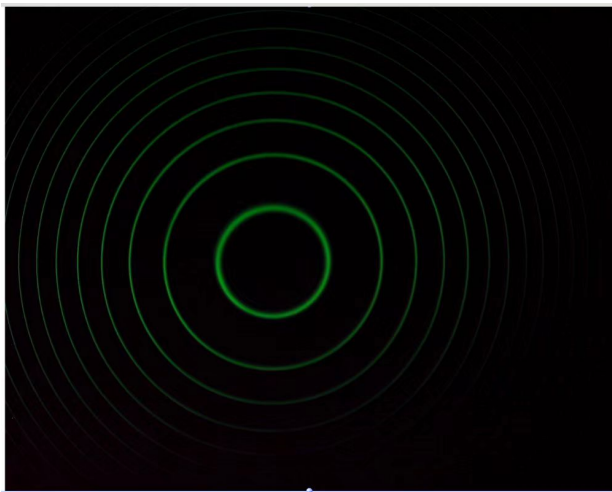


(e) 4.5A 电流，垂直磁场方向，偏振片 45°

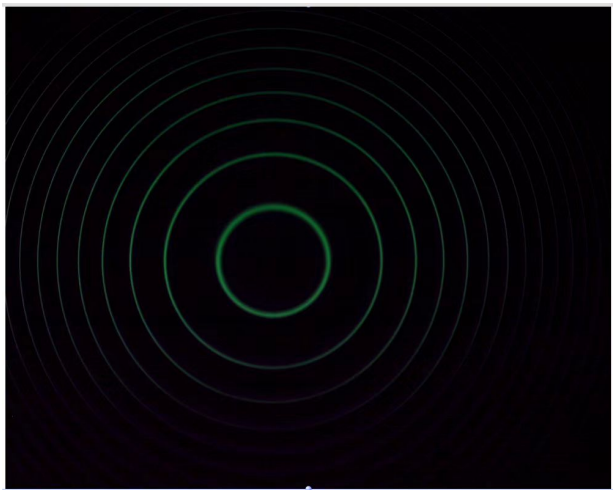
图 2: 垂直磁场方向的塞曼效应分裂情况



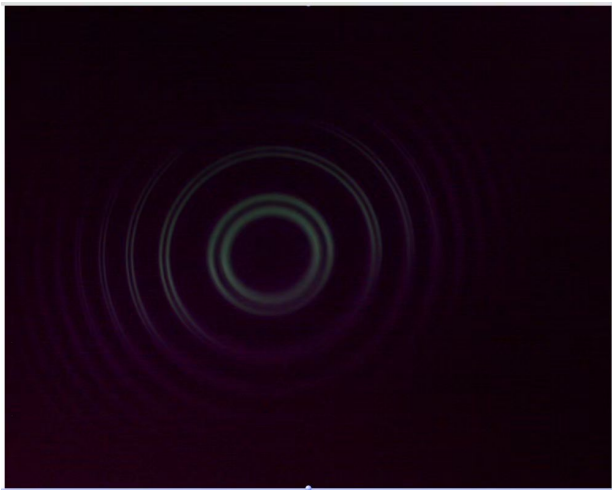
(a) 0A 电流，平行磁场方向，偏振片 90°



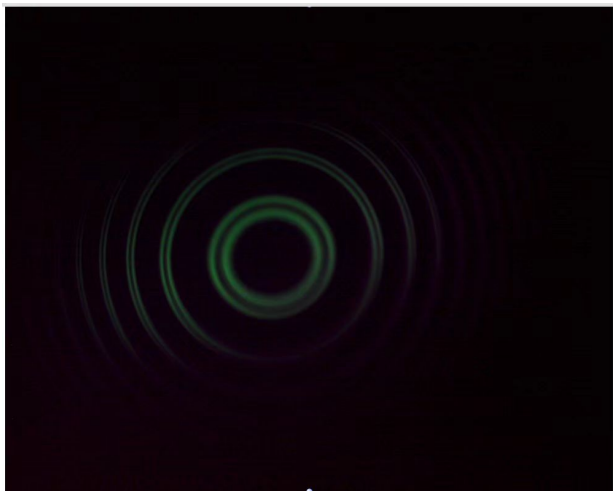
(b) 0A 电流，平行磁场方向，偏振片 45°



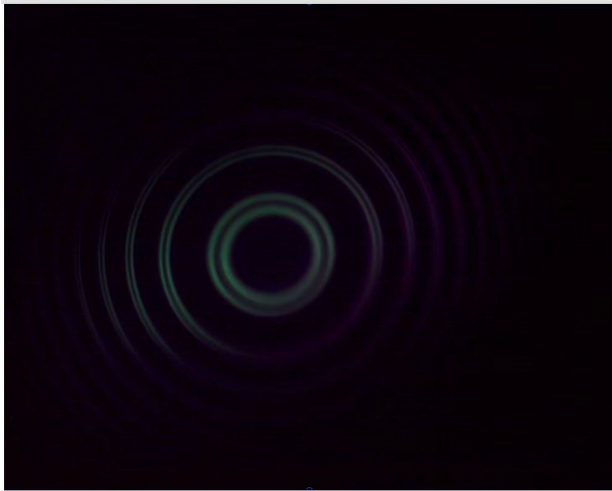
(c) 0A 电流，平行磁场方向，偏振片 0°



(d) 1A 电流，平行磁场方向，偏振片 0°



(e) 1A 电流，平行磁场方向，偏振片 45°



(f) 1A 电流，平行磁场方向，偏振片 90°

图 3: 平行磁场方向的塞曼效应分裂情况

2.2 实验原始数据记录

实验所图像见图 2、图 3，数据记录见图 4

No. _____
Date. _____

塞曼 徐俞

图1: 哈 无磁场 (垂直)

一、垂直 磁场方向.

图1: 0A, 90°, 垂直

图2: 0A, 90°, 垂直

图3: 3.15A, 90°, 垂直

图4: 3.15A, 0°, 垂直

图5: 3.15A, 45°, 垂直

图6: 4.00A, 90°, 垂直

图7: 0A, 90°, 平行

图8: 0A, 45°, 平行

图9: 0A, 0°, 平行

图10: 1A, 0°, 平行

图11: 1A, 45°, 平行

图12: 1A, 90°, 平行

图13: 4A, 45°, 垂直

图14: 4.5A, 45°, 垂直

$D_0 = 0.217849m$
 $D_{K1} = 0.4287546$
 $D_K = 0.1813809m$
 $D_{K-1} = 0.4226564m$
 $D_{K-2} = 0.5679719m$
 $D_K = 0.1833029m$
 $\beta = 0.887$
 $D_{K+1} = 0.218529m$
 $\beta = 0.965T$
 $D_{K+1} = 0.4389280m$
 $D_{K+2} = 0.4488$
 $D_{K+1} = 0.4220824m$
 $D_{K+2} = 0.5650358m$
 $D_{K+1} = 0.4223425m$
 $D_{K+2} = 0.573119m$
 $D_K = 0.1908868m$
 $D_{K+1} = 0.4193929m$
 $D_{K+1} = 0.4484802m$
 $D_{K+1} = 0.4542885m$
 $D_K = 0.2436780m$

柳奎
2021.6.6

图 4: 原始数据记录

专业:	物理学	年级:	2022 级
姓名:	戴鹏辉 & 崔瑜	学号:	22344016&22344017
日期:	2024/6/8	评分:	

D4 塞曼效应 分析与讨论

3.1 实验数据分析

3.1.1 分析塞曼分裂情况

如图 2a 所示，在不加外磁场的情况下，能较为清晰的看到圆环。

- 首先在磁场横向（垂直）方向上观察，将观察到三个偏振光， σ^+ 左旋偏振光和 σ^- 右旋偏振光的投影和 π 偏振光， σ^+ 左旋偏振光和 σ^- 右旋偏振光的投影与磁场方向 B 垂直， π 偏振光与磁场 B 平行。
 - (1) 电流 3.15A，偏振片 90° 时，如图 2b 所示，谱线分裂为 3 条，只有一个线偏振光透过偏振片，综合偏振片置于 0° 时的图像分析，该线偏振光为 π 偏振光。
 - (2) 电流 3.15A，偏振片 0° 时，如图 2d 所示，谱线明显的分为两份圆环，且每份圆环还分裂为较模糊的三条谱线，谱线总共分裂为 6 条，此时透过 0° 偏振片的是 σ^+ 左旋偏振光和 σ^- 右旋偏振光的投影。
 - (3) 电流 4.5A，偏振片 45° 时，如图 2e 所示，三个线偏振光都有通过，谱线应分裂为九条，但因为仪器有误差，导致有两条重叠，实际中只观察到 7 条。
- 然后在磁场竖向（平行）方向上观察，将观察到两个圆偏振， σ^+ 左旋偏振光和 σ^- 右旋偏振光。
 - (1) 电流为 0，如图 3a、图 3b、图 3c，无论偏振片角度如何变化，图像都没有发生改变，判断此时透过的光为圆偏振光。
 - (2) 电流为 1A，如图 3d、图 3e、图 3f，无论偏振片角度如何变化，图像都没有发生改变，判断此时透过的光为圆偏振光，谱线分裂为两条粗环，分别代表 σ^+ 左旋偏振光和 σ^- 右旋偏振光，理论上应能看到六条分裂谱线，但因为仪器有限，只能看到两条粗环。

测量次数	D_K	D_{K-1}	D_α	$\frac{e}{m}/(C \cdot kg)$	相对误差
1	169.2909	229.0737	176.317	1.99159E+11	13.29%
2	169.712	229.0494	176.5046	1.94136E+11	10.43%
3	170.3164	229.3905	176.3256	1.72312E+11	-1.98%
4	169.6316	228.1239	176.7532	2.07102E+11	17.81%
5	169.8434	228.8916	176.395	1.88189E+11	7.05%
平均	169.7589	228.9058	176.4591	1.92158E+11	9.31%
标准差	0.372638	0.473123	0.180774		

表 1: 各圆环半径测量结果

3.1.2 计算荷质比 e/m

对垂直磁场方向观察、4A 电流（即 0.965T 的磁感应强度），偏振片 90° 放置的情况详细讨论，即图 2c。测量其各环的半径（对于测量圆环半径，我完成了一个 python 程序用以辅助，具体代码附后，测量效果图如图 5）。测量结果如表 1：

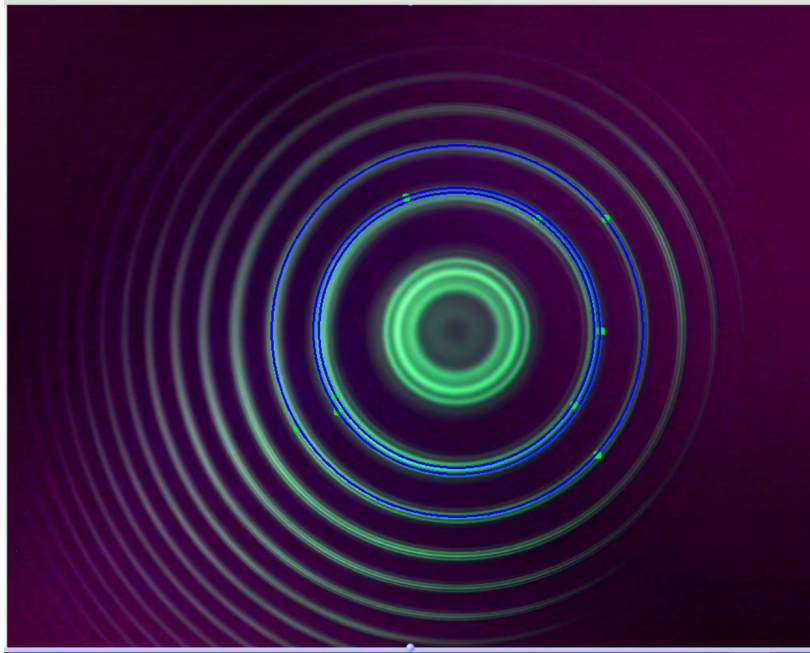


图 5: python 程序实现的测量半径的效果图

可以看到，测量值相较公认值 $1.758 \times 10^{11}/(C \cdot kg)$ 有一定的差距，下面详细分析测量误差。由误差传递公式：

$$\sigma_{\frac{e}{m}} = \sqrt{\left(\frac{\partial(\frac{e}{m})}{\partial D_\alpha} \cdot \sigma_{D_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\frac{e}{m})}{\partial D_K} \cdot \sigma_{D_K}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\frac{e}{m})}{\partial D_{K-1}} \cdot \sigma_{D_{K-1}}\right)^2}$$

其中各项的值为：

$$\frac{\partial \left(\frac{e}{m}\right)}{\partial D_{\alpha}} = \frac{8\pi c D_{\alpha}}{ndB(D_{K-1}^2 - D_K^2)} = 29235304771$$

$$\frac{\partial \left(\frac{e}{m}\right)}{\partial D_K} = \frac{8\pi c D_K(D_{\alpha}^2 - D_K^2)}{ndB(D_{K-1}^2 - D_K^2)^2} = 2766906464$$

$$\frac{\partial \left(\frac{e}{m}\right)}{\partial D_{K-1}} = \frac{8\pi c D_{K-1}(D_K^2 - D_{\alpha}^2)}{ndB(D_{K-1}^2 - D_K^2)^2} = -3730944971$$

可得间接测量量 e/m 的标准差为：

$$\begin{aligned}\sigma_{e/m} &= \sqrt{(29235304771 \times 0.180773994)^2 + (2766906464 \times 0.372637827)^2 + (-3730944971 \times 0.473122503)^2} \\ &= 5666570886 = 5.67 \times 10^9\end{aligned}$$

展伸不确定度 $U = k\sigma_{e/m}$ ，置信概率取 95 % 时， $k = 1.96$ ，则 $U = k\sigma_{e/m} = 1.11 \times 10^{10}$

则最后测量结果为： $e/m = (1.92 \pm 0.11) \times 10^{11} C \cdot kg$

3.1.3 分析误差来源

- (1) 在测量半径时，即使是使用了自己所编写的程序以期望更精确的测量，但从测量结果来看，每次测量之间仍然有不小的测量误差。主要的原因是成像不够清晰，以及圆环本身的宽度较宽，导致选择点的时候偏差较大。
- (2) 在计算传递误差时，我们认为除了三个半径之外的量都为常数，但实际上，磁感应强度是通过“电流-磁感应强度”对照表得到的，这其中可能有一定的误差。

3.2 实验总结

3.2.1 实验问题总结

- (1) 由于不同光具的高度不同，以及光源的限制，基本无法得到一个即各光具都共轴、又能够在全屏幕范围成像的图像。最多只能得到图像一半清晰，一半黑的图像。
- (2) 在观察平行磁场方向的塞曼效应分裂情况时，由于孔径很小，得到的图像只有部分看得到像，但是这部分的像很清晰。

3.2.2 实验分工

实验过程由两人合作完成，报告部分分工如下。

- (1) 戴鹏辉：实验思考题部分，分析讨论中的荷质比计算、误差分析部分。
- (2) 崔瑜：实验原理部分，分析讨论中的塞曼效应偏振情况分析。



图 6: 整理后实验桌照片

3.3 代码附件

代码所使用的方法也是通过选取圆上的三个点，计算出圆的半径。

```
1  import cv2
2  import numpy as np
3  from scipy.optimize import least_squares
4
5  # 用于存储选定点的列表
6  points = []
7  zoom_factor = 2 # 放大倍数
8
9  def calculate_circle(points):
10     """ 通过选定的三个点计算圆心和半径 """
11     def calc_R(c):
12         """ 计算点到圆心 (c[0], c[1]) 的距离 """
13         return np.sqrt((points[:, 0] - c[0])**2 + (points[:, 1] - c[1])**2)
14
15     def f_2(c):
16         """ 计算到圆心的距离差的平方和 """
17         Ri = calc_R(c)
18         return Ri - Ri.mean()
19
20     # 初始估计
21     x_m = np.mean(points[:, 0])
22     y_m = np.mean(points[:, 1])
23     center_estimate = (x_m, y_m)
24     result = least_squares(f_2, center_estimate)
25     center_2 = result.x
```



```
27     # 计算半径
    Ri = calc_R(center_2)
29     R = Ri.mean()
    return center_2, R
31
32 def on_mouse(event, x, y, flags, param):
33     global points
34     global zoom_factor
35     global zoom_window_open
36
37     if event == cv2.EVENT_MOUSEMOVE:
38         if zoom_window_open:
39             # 放大区域并显示
            zoom_img = img[max(0, y-50):min(img.shape[0], y+50), max(0, x-50):min(img.shape[1],
101 x+50)]
            zoom_img = cv2.resize(zoom_img, (0, 0), fx=zoom_factor, fy=zoom_factor)
            # 绘制光标
            cv2.line(zoom_img, (zoom_img.shape[1]//2 - 10, zoom_img.shape[0]//2),
102                    (zoom_img.shape[1]//2 + 10, zoom_img.shape[0]//2), (255, 0, 0), 1)
            cv2.line(zoom_img, (zoom_img.shape[1]//2, zoom_img.shape[0]//2 - 10),
103                    (zoom_img.shape[1]//2, zoom_img.shape[0]//2 + 10), (255, 0, 0), 1)
            cv2.imshow("Zoom", zoom_img)
104
105 elif event == cv2.EVENT_LBUTTONDOWN:
            zoom_window_open = True
            # 显示放大镜窗口
            cv2.namedWindow("Zoom")
            cv2.moveWindow("Zoom", x + 50, y + 50)
106
107 elif event == cv2.EVENT_LBUTTONUP:
            zoom_window_open = False
            cv2.destroyWindow("Zoom")
            # 添加点
            points.append((x, y))
            print(f"Point selected: {(x, y)}")
            cv2.circle(img, (x, y), 5, (0, 255, 0), -1)
            cv2.imshow("Image", img)
108
109 # 如果已经选择了三个点, 则计算圆
110 if len(points) == 3:
            points_np = np.array(points)
            center, radius = calculate_circle(points_np)
            print(f"Circle center: {center}, radius: {radius}")
            cv2.circle(img, (int(center[0]), int(center[1])), int(radius), (255, 0, 0), 2)
            cv2.imshow("Image", img)
            points.clear() # 清空点列表以便继续选择新的点
```

```
73  # 读取图像
    img = cv2.imread("6.jpg")
75
    # 初始放大镜窗口状态
77  zoom_window_open = False
79
    # 显示图像并绑定鼠标事件
    cv2.imshow("Image", img)
81  cv2.setMouseCallback("Image", on_mouse)
83
    cv2.waitKey(0)
    cv2.destroyAllWindows()
85
87
```

Listing 1: 测量圆环半径所用的代码