

Sprawozdanie laboratorium lista 2 - obliczenia naukowe

Zofia Tarchalska

1 Zadanie 1

Celem zadania było powtórzenie zadania 5 z listy 1, ale z lekko zmodyfikowanymi danymi. Dokładnie chodziło o to aby usunąć ostatnią 9 z czwartej wspólrzędnej wektora x i ostatnią 7 z piątej wspólrzędnej. Wektory te prezentują się następująco:

$$x = [2.718281828, -3.141592654, 1.414213562, 0.5772156649, 0.3010299957]$$

$$y = [1486.2497, 878366.9879, -22.37492, 4773714.647, 0.000185049]$$

Po zmianie:

$$x = [2.718281828, -3.141592654, 1.414213562, 0.577215664, 0.301029995]$$

Po lewej: poprzednie uzyskane wyniki. Po prawej: nowe wyniki

| Float32 | Float32 |
|-----------------------------|---------------------------|
| real: -1.00657107000000e-11 | ----- |
| forward: -0.4999443 | forward: -0.4999443 |
| backward: -0.4543457 | backward: -0.4543457 |
| biggest_to_smallest: -0.5 | biggest_to_smallest: -0.5 |
| smallest_to_biggest: -0.5 | smallest_to_biggest: -0.5 |

| Float64 | Float64 |
|-----------------------------------|--|
| real: -1.00657107000000e-11 | ----- |
| forward: 1.0251881368296672e-10 | forward: -0.004296342739891585 |
| backward: -1.5643308870494366e-10 | backward: -0.004296342998713953 |
| biggest_to_smallest: 0.0 | biggest_to_smallest: -0.004296342842280865 |
| smallest_to_biggest: 0.0 | smallest_to_biggest: -0.004296342842280865 |

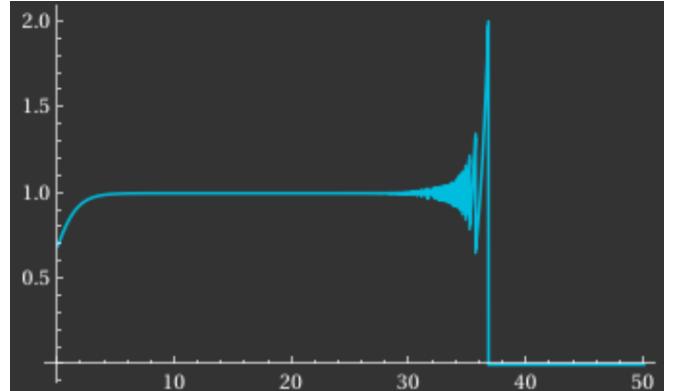
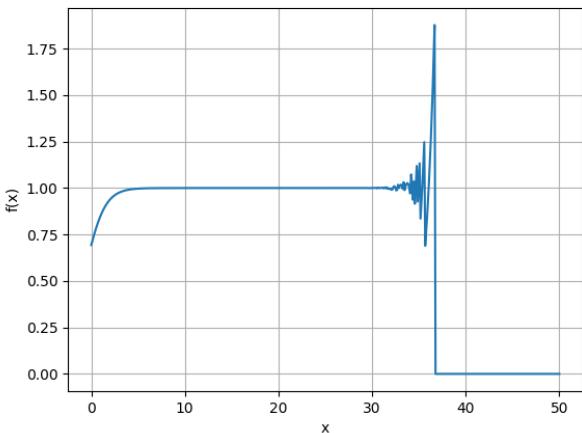
Można zauważyć, że jeśli chodzi o arytmetykę single wyniki w ogóle nie różnią się od tych uzyskanych w poprzedniej próbie. Dzieje się tak, ponieważ usuwane cyfry są na granicy precyzji. Inaczej jest w przypadku double, w tej arytmetyce otrzymujemy różne rezultaty.

Wnioski

Okazuje się, że w przypadku arytmetyki Float64 niewielka zmiana na 10 miejscu po przecinku powoduje zmianę wyniku o 7 rzędów wielkości. Najpierw wynik był rzędu 10^{-10} żeby następnie wzrosnąć rzędu 10^{-3} (dla sposobu forward i backward, ponieważ są to te bardziej precyzyjne sposoby). Widzimy zatem, że zadanie jest źle uwraunkowane (mała zmiana w danych powoduje duże zmiany wyniku).

2 Zadanie 2

W zadaniu należy narysować wykres funkcji $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ w co najmniej dwóch różnych programach do wizualizacji. Następnie trzeba policzyć jej granicę i porównać z otrzymanymi wykresami.



Po lewej widnieje wykres wygenerowany za pomocą PyPlot, a po prawej w WolframAlpha.

Teraz ręcznie policzmy granicę funkcji w nieskończoności:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \cdot \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x}}{(1 + e^{-x}) \cdot (-e^{-x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1$$

Jak widać rzeczywisty przebieg funkcji różni się od tego co zwracają nam obydwa programy.

Wnioski

Znow zadanie charakteryzuje się silnym uwarunkowaniem numerycznym. Niedokładności wynikające z ograniczonej precyzji, prowadzą do odchyleni wartości funkcji od prawidłowego wyniku, szczególnie w zakresie $x \in [30, 36]$. Dla argumentów > 36 funkcja zbiega do 0, ponieważ zachodzi przybliżenie $1 + e^{-x} \approx 1$ zatem $\ln(1 + e^{-x}) \approx 0$. Jest to sprzeczne z rzeczywistym przebiegiem funkcji i wyznaczoną granicą analityczną. Zaburzenie występuje w obydwu programach zewnętrznych, co oznacza złe uwarunkowanie zadania.

3 Zadanie 3

Zadanie polegało na rozwiązyaniu układu równań liniowych dwoma różnymi sposobami oraz porównaniu ich pod kątem policzonych błędów względnych.

Mamy równanie liniowe postaci: $Ax = b$, gdzie:

- A to macierz współczynników. Generujemy ją na dwa sposoby:
 - $A = H_n$, gdzie H_n jest macierzą Hilberta stopnia n
 - $A = R_n$, gdzie R_n to losowa macierz stopnia n z podanym wskaźnikiem uwarunkowania c
- b to wektor prawych stron

Układ ten będziemy rozwiązywać dwoma metodami:

- metodą eliminacji Gauss'a - $x = A \setminus b$
- metodą z macierza odwrotną - $x = \text{inv}(A) * b$

Nasz dokładny x to $x = (1, \dots, 1)^T$. Z jego pomocą będziemy obliczać błąd względny. Na następnych stronach zamieszczone zostają wartości zwracane przez funkcje `rank(A)` i `cond(A)` oraz policzone błędy względne dla obu metod.

Macierz Hilberta

| n | cond(A) | rank(A) | error Gauss | error inv |
|----|-----------------------|---------|------------------------|------------------------|
| 1 | 1.0 | 1 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 19.28147006790397 | 2 | 5.661048867003676e-16 | 1.4043333874306803e-15 |
| 3 | 524.0567775860644 | 3 | 8.022593772267726e-15 | 0.0 |
| 4 | 15513.73873892924 | 4 | 4.137409622430382e-14 | 0.0 |
| 5 | 476607.2502422687 | 5 | 1.6828426299227195e-12 | 3.3544360584359632e-12 |
| 6 | 1.49510586424659e7 | 6 | 2.618913302311624e-10 | 2.0163759404347654e-10 |
| 7 | 4.753673565921816e8 | 7 | 1.2606867224171548e-8 | 4.713280397232037e-9 |
| 8 | 1.5257575538072489e10 | 8 | 6.124089555723088e-8 | 3.07748390309622e-7 |
| 9 | 4.931537556012197e11 | 9 | 3.8751634185032475e-6 | 4.541268303176643e-6 |
| 10 | 1.602441350036382e13 | 10 | 8.67039023709691e-5 | 0.0002501493411824886 |
| 11 | 5.222703245009594e14 | 10 | 0.00015827808158590435 | 0.007618304284315809 |
| 12 | 1.760619121841585e16 | 11 | 0.13396208372085344 | 0.258994120804705 |
| 13 | 3.1905581877988255e18 | 11 | 0.11039701117868264 | 5.331275639426837 |
| 14 | 9.27636978936766e17 | 11 | 1.4554087127659643 | 8.71499275104814 |
| 15 | 3.67568286586649e17 | 12 | 4.696668350857427 | 7.344641453111494 |
| 16 | 7.063115212292111e17 | 12 | 54.15518954564602 | 29.84884207073541 |
| 17 | 8.07124989431416e17 | 12 | 13.707236683836307 | 10.516942378369349 |
| 18 | 1.4135073701749765e18 | 12 | 10.257619124632317 | 24.762070989128866 |
| 19 | 5.190132496359103e18 | 13 | 102.15983486270827 | 109.94550732878284 |
| 20 | 1.3193976166344822e18 | 13 | 108.31777346206205 | 114.34403152557572 |
| 21 | 3.2903033202156175e18 | 13 | 44.089455838364245 | 34.52041154914292 |
| 22 | 8.482350008309597e18 | 13 | 17.003425713362045 | 102.60161611995359 |
| 23 | 6.101209031674573e17 | 13 | 25.842511917947366 | 22.272314298730727 |
| 24 | 1.8162451419244399e19 | 13 | 39.638573210187644 | 43.34914763015038 |
| 25 | 1.3309197553221074e18 | 13 | 7.095757204652332 | 21.04404299195525 |
| 26 | 7.779515179373411e18 | 14 | 63.80426636186403 | 100.78434642499187 |
| 27 | 4.28683702161786e18 | 14 | 27.43309009053957 | 35.68974530952139 |
| 28 | 5.937872779302876e18 | 14 | 276.91498822022265 | 290.1167291705239 |
| 29 | 8.277434084408434e18 | 14 | 60.095450394724104 | 43.40383683199056 |
| 30 | 3.8719824664564173e18 | 14 | 24.80615905441871 | 59.97231132227779 |
| 31 | 9.796434738176467e18 | 14 | 21.45662601984968 | 23.74575780277118 |
| 32 | 4.2803982785172644e18 | 14 | 36.582441571177284 | 67.4381226943068 |
| 33 | 1.1705168465593727e19 | 14 | 37.556822732776205 | 32.88969741379979 |
| 34 | 5.546235957952042e18 | 14 | 88.87380459381126 | 95.99116506490785 |
| 35 | 2.552419613144824e19 | 14 | 31.166902974731222 | 36.723963451169304 |
| 36 | 4.227992561870757e18 | 15 | 15.563379312608328 | 19.599011323097056 |
| 37 | 5.859007350289631e18 | 15 | 13.974714130452178 | 16.39248770656996 |
| 38 | 8.652991891691735e18 | 15 | 72.12122789133323 | 95.5655782183542 |
| 39 | 1.8383449979886094e19 | 15 | 118.2033650158989 | 263.5309838641091 |
| 40 | 6.581732387647914e18 | 15 | 23.926484807638683 | 140.97274594056717 |
| 41 | 1.5426903357896567e19 | 15 | 41.348771577098454 | 40.75749340255354 |
| 42 | 2.9056333619025285e19 | 15 | 229.6423260398746 | 333.75226335487844 |
| 43 | 1.4838416581923312e19 | 15 | 53.18930954995267 | 54.52704305417691 |
| 44 | 2.6895334840373182e19 | 15 | 124.67413636996756 | 94.88356401052424 |
| 45 | 1.214705872715781e19 | 15 | 244.58124814685374 | 179.92316617880468 |
| 46 | 1.5097027936171698e19 | 15 | 69.14584939886464 | 109.17112219679052 |

| | | | | |
|----|-----------------------|----|--------------------|--------------------|
| 47 | 1.9943467382012723e20 | 15 | 41.43803149349301 | 83.82203728470039 |
| 48 | 1.0925283248003965e19 | 15 | 58.952689545073156 | 156.78973560359313 |
| 49 | 6.093374357739825e18 | 16 | 24.150620097509638 | 35.92139018094681 |
| 50 | 1.0993264246156683e19 | 16 | 63.36958239742337 | 69.99768122728986 |

Macierz losowa

| n | c | rank(A) | error Gauss | error inv |
|----|-----------------------|---------|------------------------|------------------------|
| 5 | 1.0000000000000001 | 5 | 1.4043333874306804e-16 | 2.2752801345137457e-16 |
| 5 | 9.999999999999996 | 5 | 2.482534153247273e-16 | 2.432376777795247e-16 |
| 5 | 1000.0000000000236 | 5 | 2.9790409838967276e-16 | 4.203627514058621e-15 |
| 5 | 9.999999998130372e6 | 5 | 5.799015982916193e-11 | 1.377444663806729e-10 |
| 5 | 9.999322361505425e11 | 5 | 8.767946479620035e-6 | 1.101328684658636e-5 |
| 5 | 4.3389446864305475e15 | 4 | 0.5593130377167642 | 0.5591916598984644 |
| 10 | 1.0000000000000001 | 10 | 5.15985034193911e-16 | 3.3121136700345433e-16 |
| 10 | 9.999999999999993 | 10 | 2.8737410463596867e-16 | 2.4575834280036907e-16 |
| 10 | 999.9999999999911 | 10 | 2.293995889930822e-14 | 2.7609708695270473e-14 |
| 10 | 9.999999990916912e6 | 10 | 2.0955792024649492e-10 | 1.81840723377465e-10 |
| 10 | 9.99976991136977e11 | 10 | 4.196755515487614e-5 | 3.614790502971321e-5 |
| 10 | 1.7803773341590864e16 | 9 | 0.14037179426228394 | 0.13931683203224224 |
| 20 | 1.00000000000000016 | 20 | 5.382005793715205e-16 | 3.9409007944299576e-16 |
| 20 | 10.0 | 20 | 7.854386543748146e-16 | 6.309740391678007e-16 |
| 20 | 1000.0000000000028 | 20 | 3.120208680502288e-14 | 3.6192861929420846e-14 |
| 20 | 9.9999999564815e6 | 20 | 1.603342362471366e-10 | 1.5697362145029217e-10 |
| 20 | 1.0000134366492958e12 | 20 | 1.6168699871775732e-5 | 1.4716047607150038e-5 |
| 20 | 8.563256185085127e15 | 19 | 0.3290975485091718 | 0.32066957992953976 |

Wnioski

Możemy zauważyć, że macierze Hilberta osiągają bardzo duże wartości współczynnika uwarunkowania (parametr $\text{cond}(A)$) już przy stosunkowo niewielkich rozmiarach n. Wysoki wskaźnik uwarunkowania oznacza, że układ $Ax = b$ jest źle uwarunkowany, czyli nawet niewielkie błędy w danych (w macierzy A lub w b) mogą prowadzić do dużych błędów w rozwiązaniu. Eksperymenty pokazują, że możemy to zaobserrować zarówno dla metody eliminacji Gauss'a jak i metody z użyciem odwrotności macierzy. Oznacza to, że numeryczne rozwiązanie układu Hilberta jest trudne do uzyskania z dużą dokładnością.

Dla losowych macierzy z ustalonym współczynnikiem uwarunkowania c, błędy względne są małe i podobne dla obu metod. Oznacza to, że algorytmy są stabilne numerycznie dla macierzy dobrze uwarunkowanych.

4 Zadanie 4

Podpunkt a

W zadaniu 4 mamy do czynienia z dwoma różnymi postaciami tego samego wielomianu. Mowa tutaj o wielomianie Wilkinsona. Jego postać iloczynowa wygląda tak:

$$p(x) = (x - 20) \cdot (x - 19) \cdot (x - 18) \cdot \dots \cdot (x - 3) \cdot (x - 2) \cdot (x - 1)$$

Z tej postaci od razu łatwo policzyć wszystkie miejsca zerowe:

$$x_0 \in 1, 2, 3, \dots, 18, 19, 20$$

Druga postać tego wielomianu to postać naturalna (współczynnikowa):

$$\begin{aligned}
 P(x) = & x^{20} - 210x^{19} + 20615x^{18} - 1256850x^{17} + 53327946x^{16} - 1672280820x^{15} + 40171771630x^{14} \\
 & - 756111184500x^{13} + 11310276995381x^{12} - 135585182899530x^{11} + 1307535010540395x^{10} \\
 & - 10142299865511450x^9 + 63030812099294896x^8 - 311333643161390640x^7 + 1206647803780373360x^6 \quad (1) \\
 & - 3599979517947607200x^5 + 8037811822645051776x^4 - 12870931245150988800x^3 \\
 & + 13803759753640704000x^2 - 8752948036761600000x + 2432902008176640000
 \end{aligned}$$

Ta postać wynika bezpośrednio z wymnożenia wszystkich nawiasów z poprzedniej postaci. Liczenie miejsc zerowych jest w jej przypadku znacznie bardziej skomplikowane. Poniżej znajduje się porównanie rzeczywistych pierwiastków równania wraz z wyliczonymi pierwiastkami z wielomianu $P(x)$, wartością wielomianu p i P dla obliczonego miejsca zerowego, oraz różnicę między rzeczywistym a wyliczonym m. zer.

| k | z_k | $ P(z_k) $ | $ p(z_k) $ | $ z_k - k $ |
|----|---------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| 1 | 0.9999999999998084 | 23323.616390897252 | 23310.180819556477 | 1.9162449405030202e-13 |
| 2 | 2.00000000000114264 | 64613.550791712885 | 73156.18130995684 | 1.1426415369442111e-11 |
| 3 | 2.9999999998168487 | 18851.098984644806 | 130289.20977428104 | 1.8315127192636282e-10 |
| 4 | 3.999999983818672 | 2.6359390809003003e6 | 2.0313511850413054e6 | 1.6181327833209025e-8 |
| 5 | 5.000000688670983 | 2.3709842874839526e7 | 2.1613359049100634e7 | 6.88670983350903e-7 |
| 6 | 5.999988371602095 | 1.2641076289358065e8 | 1.2165063267640364e8 | 1.162839790502801e-5 |
| 7 | 7.000112910766231 | 5.2301629899144447e8 | 5.061885949319773e8 | 0.00011291076623098917 |
| 8 | 7.999279406281878 | 1.798432141726085e9 | 1.7402728325721796e9 | 0.0007205937181220534 |
| 9 | 9.003273831140774 | 5.121881552672067e9 | 5.263758084354485e9 | 0.003273831140774064 |
| 10 | 9.989265687778465 | 1.4157542666785017e10 | 1.4147808356077827e10 | 0.010734312221535092 |
| 11 | 11.027997558569794 | 3.586354765112257e10 | 3.692632803664625e10 | 0.027997558569794023 |
| 12 | 11.94827395840048 | 8.510931555828575e10 | 8.162184753413098e10 | 0.051726041599520656 |
| 13 | 13.082031971969954 | 2.2136146301419052e11 | 2.04374354285492e11 | 0.08203197196995404 |
| 14 | 13.906800565193148 | 3.812024574451268e11 | 3.8519295444834576e11 | 0.09319943480685211 |
| 15 | 15.081439299377482 | 8.809029239560208e11 | 9.126025022282091e11 | 0.0814392993774824 |
| 16 | 15.942404318674466 | 1.6747434633806333e12 | 1.6751148968378867e12 | 0.05759568132553383 |
| 17 | 17.026861831476396 | 3.3067827086376123e12 | 3.5115331717998135e12 | 0.02686183147639537 |
| 18 | 17.99048462339055 | 6.166202940769282e12 | 6.644365795060319e12 | 0.009515376609449788 |
| 19 | 19.001981084996206 | 1.406783619602919e13 | 1.274643243051272e13 | 0.001981084996206306 |
| 20 | 19.999803908064397 | 3.284992217648231e13 | 2.3837033672895914e13 | 0.00019609193560299332 |

Wnioski

Wyliczone miejsca zerowe są bardzo zbliżone do rzeczywistych miejsc zerowych. Jednak po podstawieniu ich z powrotem do wzoru otrzymujemy bardzo rozbieżne wyniki. Jak sama nazwa wskazuje miejsce zerowe to taki argument, dla którego funkcja osiąga wartość 0. Żadna z policzonych $P(z_k), p(z_k)$ nie jest nawet bliska 0. Otrzymujemy wartości od rzędu 10^4 aż do 10^{13} . Dzieje się tak, , ponieważ wielomian w postaci naturalnej przechowywany jest niedokładnie z uwagi na ograniczenia arytmetyki Float64. Niektóre współczynniki wielomianu przy niższych potęgach x są dużymi liczbami, których zapis pomija killka cyfr znaczących. Nie bez powodu wielomian jest nazwany złośliwym. Nawet bardzo małe oddalnie od precyzyjnej wartości miejsca zerowego, powoduje ogromne zaburzenia wyniku. Sugeruje to złe uwarunkowanie sposobu obliczania pierwiastków wielomianu.

Podpunkt b

Celem eksperymentu Wilkinsoна będącego tematem podpunktu b było zaburzenie jednego ze współczynników i obserwacja zachodzących zmian. Współczynnikiem, który uległ zmianie był -210 . Teraz przyjmuje wartość $-210 - 2^{-23}$. Analogiczna tabela jak w przykładzie powyżej tym razem dla wielomianu o zaburzonym współczynniku.

| k | z_k | $ P(z_k) $ | $ p(z_k) $ | $ z_k - k $ |
|----|---|----------------------|-----------------------|------------------------|
| 1 | 0.999999999999805 + 0.0im | 2168.9361669986724 | 2376.9361669985137 | 1.9539925233402755e-14 |
| 2 | 1.9999999999985736 + 0.0im | 29948.438957395843 | 9132.438957447212 | 1.4264145420384011e-12 |
| 3 | 3.00000000105087 + 0.0im | 239010.53520956426 | 74756.28518912957 | 1.0508705017286957e-10 |
| 4 | 3.999999950066143 + 0.0im | 939293.8049425513 | 626853.3644463811 | 4.993385704921138e-9 |
| 5 | 5.00000034712704 + 0.0im | 7.44868039679552e6 | 1.0894298660834588e6 | 3.4712703822492585e-8 |
| 6 | 6.00005852511414 + 0.0im | 1.4689332508961653e7 | 6.12250863773296e7 | 5.852511414161654e-6 |
| 7 | 6.999704466216799 + 0.0im | 5.817946400915084e7 | 1.3252981745917735e9 | 0.00029553378320112955 |
| 8 | 8.007226654064777 + 0.0im | 1.3954205929609105e8 | 1.7380734718418133e10 | 0.0072266540647767386 |
| 9 | 8.917396943382494 + 0.0im | 2.459617755654851e8 | 1.3487291517349089e11 | 0.082603056617506 |
| 10 | 10.09529034477879 - 0.6432770896263527im | 2.291018560461982e9 | 1.4824347490765474e12 | 0.6502965968281023 |
| 11 | 10.09529034477879 + 0.6432770896263527im | 2.291018560461982e9 | 1.4824347490765474e12 | 1.110092326920887 |
| 12 | 11.793588728372308 - 1.6522535463872843im | 2.077690789102519e10 | 3.2939582416936758e13 | 1.6650968123818863 |
| 13 | 11.793588728372308 + 1.6522535463872843im | 2.077690789102519e10 | 3.2939582416936758e13 | 2.0458176697496047 |
| 14 | 13.99233053734825 - 2.5188196443048287im | 9.390730597798799e10 | 9.545412818924855e14 | 2.5188313205122075 |
| 15 | 13.99233053734825 + 2.5188196443048287im | 9.390730597798799e10 | 9.545412818924855e14 | 2.7129043747424584 |
| 16 | 16.73073008036981 - 2.8126272986972136im | 9.592356563898315e11 | 2.7420705762218132e16 | 2.906000476898456 |
| 17 | 16.73073008036981 + 2.8126272986972136im | 9.592356563898315e11 | 2.7420705762218132e16 | 2.8254873227453055 |
| 18 | 19.50243895868367 - 1.9403320231930836im | 5.050467401799687e12 | 4.2524547099295936e17 | 2.4540193937292005 |
| 19 | 19.50243895868367 + 1.9403320231930836im | 5.050467401799687e12 | 4.2524547099295936e17 | 2.004328632592893 |
| 20 | 20.84690887410499 + 0.0im | 4.858653129933677e12 | 1.374367214153433e18 | 0.8469088741049902 |

Wnioski

Wykonany powyżej eksperyment potwierdza tezę, że zadanie jest źle uwarunkowane. Tym razem, niewielkie zaburzenie danych, powoduje pojawienie się pierwiastków zespolonych. Jest to coś kompletnie innego niż spodziewane wyniki. Wartości funkcji dla tych rzekomych pierwiastków są jeszcze większe niż w przypadku podpunktu a.

5 Zadanie 5

W tym zadaniu mamy rozważyć problem rekurencyjny dotyczący wzrostu populacji. Mamy równanie:

$$p_{n+1} := p_n + r \cdot p_n \cdot (1 - p_n)$$

określone dla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ oraz r będącej pewną stałą. Należało wykonać doświadczenie, w którym $p_0 = 0.01$ a $r = 3.0$. Liczba iteracji w każdym przypadku wynosiła 40, z tym, że rekurencję należało policzyć na dwa sposoby:

- sposób 1 zakładał policzenie rekurencji klasycznie, w pętli 40-krotnie
- sposób drugi zakładał obcięcie wyniku do trzech cyfr po przecinku po wykonaniu 10 iteracji i następnie policzenie już klasycznie do końca.

Wyniki dla arytmetyki `Float32` zawarte są w dwóch pierwszych kolumnach. Pierwsza to sposób 1, druga sposób 2. W kolumnie trzeciej znajdują się wyniki dla sposobu 1 i arytmetyki `Float64`

| Iter | p | Iter | p (modified) | Iter | p |
|------|-------------|------|--------------|------|-----------------------|
| 1 | 0.0397 | 1 | 0.0397 | 1 | 0.0397 |
| 2 | 0.15407173 | 2 | 0.15407173 | 2 | 0.15407173000000002 |
| 3 | 0.5450726 | 3 | 0.5450726 | 3 | 0.5450726260444213 |
| 4 | 1.2889781 | 4 | 1.2889781 | 4 | 1.2889780011888006 |
| 5 | 0.1715188 | 5 | 0.1715188 | 5 | 0.17151914210917552 |
| 6 | 0.5978191 | 6 | 0.5978191 | 6 | 0.5978201201070994 |
| 7 | 1.3191134 | 7 | 1.3191134 | 7 | 1.3191137924137974 |
| 8 | 0.056273222 | 8 | 0.056273222 | 8 | 0.056271577646256565 |
| 9 | 0.21559286 | 9 | 0.21559286 | 9 | 0.21558683923263022 |
| 10 | 0.7229306 | 10 | 0.7229306 | 10 | 0.722914301179573 |
| | cut | | 0.722 | | |
| 11 | 1.3238364 | 11 | 1.3241479 | 11 | 1.3238419441684408 |
| 12 | 0.037716985 | 12 | 0.036488414 | 12 | 0.03769529725473175 |
| 13 | 0.14660022 | 13 | 0.14195944 | 13 | 0.14651838271355924 |
| 14 | 0.521926 | 14 | 0.50738037 | 14 | 0.521670621435246 |
| 15 | 1.2704837 | 15 | 1.2572169 | 15 | 1.2702617739350768 |
| 16 | 0.2395482 | 16 | 0.28708452 | 16 | 0.24035217277824272 |
| 17 | 0.7860428 | 17 | 0.9010855 | 17 | 0.7881011902353041 |
| 18 | 1.2905813 | 18 | 1.1684768 | 18 | 1.2890943027903075 |
| 19 | 0.16552472 | 19 | 0.577893 | 19 | 0.17108484670194324 |
| 20 | 0.5799036 | 20 | 1.3096911 | 20 | 0.5965293124946907 |
| 21 | 1.3107498 | 21 | 0.09289217 | 21 | 1.3185755879825978 |
| 22 | 0.088804245 | 22 | 0.34568182 | 22 | 0.058377608259430724 |
| 23 | 0.3315584 | 23 | 1.0242395 | 23 | 0.22328659759944824 |
| 24 | 0.9964407 | 24 | 0.94975823 | 24 | 0.7435756763951792 |
| 25 | 1.0070806 | 25 | 1.0929108 | 25 | 1.315588346001072 |
| 26 | 0.9856885 | 26 | 0.7882812 | 26 | 0.07003529560277899 |
| 27 | 1.0280086 | 27 | 1.2889631 | 27 | 0.26542635452061003 |
| 28 | 0.9416294 | 28 | 0.17157483 | 28 | 0.8503519690601384 |
| 29 | 1.1065198 | 29 | 0.59798557 | 29 | 1.2321124623871897 |
| 30 | 0.7529209 | 30 | 1.3191822 | 30 | 0.37414648963928676 |
| 31 | 1.3110139 | 31 | 0.05600393 | 31 | 1.0766291714289444 |
| 32 | 0.0877831 | 32 | 0.21460639 | 32 | 0.8291255674004515 |
| 33 | 0.3280148 | 33 | 0.7202578 | 33 | 1.2541546500504441 |
| 34 | 0.9892781 | 34 | 1.3247173 | 34 | 0.29790694147232066 |
| 35 | 1.021099 | 35 | 0.034241438 | 35 | 0.9253821285571046 |
| 36 | 0.95646656 | 36 | 0.13344833 | 36 | 1.1325322626697856 |
| 37 | 1.0813814 | 37 | 0.48036796 | 37 | 0.6822410727153098 |
| 38 | 0.81736827 | 38 | 1.2292118 | 38 | 1.3326056469620293 |
| 39 | 1.2652004 | 39 | 0.3839622 | 39 | 0.0029091569028512065 |
| 40 | 0.25860548 | 40 | 1.093568 | 40 | 0.011611238029748606 |

Wnioski

Możemy zauważyc, że wyniki dla sposobu 1 pokrywają się dość dokładnie w obydwu arytmatykach. Dopiero w iteracji 18 występuje różnica na 2 miejscu znaczącym , a w iteracji 23 na pierwszym. W okolicach 19 iteracji model na którym zastosowaliśmy sposób 2, czyli sposób z obcięciem, zaczyna mocno odstawać od wyników w pozostałych dwóch kolumnach. Jest to spowodowane faktem, że nasze rygorystyczne obcięcie (do trzeciego miejsca po przecinku) kumuluje

się w kolejnych iteracjach. Program działa rekurencyjnie, a więc nasze uproszczenie zastosowane po kroku 10 nie daje o sobie zapomnieć w kolejnych iteracjach. Zwłaszcza, że we wzorze wartość p_n jest podnoszona do kwadratu. Nasza utrata precyzji jest przez to jeszcze większa.

Wobec tego zauważamy, że zarówno zastosowane uproszczenie w sposobie 2 jak i stosowana arytmetyka mają znaczenie w precyzyi obliczeń. Najbardziej godne zaufania i zapewne bliskie prawdy są obliczenia we `Float64` bez obcięć, jednak nawet ta arytmetyka i ten konkretny sposób nie gwarantują nam 100-procentowej dokładności.

6 Zadanie 6

W zadaniu 6 znów spotykamy się z rekurencją:

$$x_{n+1} := x_n^2 + c$$

dla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, gdzie c jest pewną daną stałą. Eksperymenty mamy przeprowadzić dla danych:

- $c = -2$ i $x_0 \in \{1, 2, 1.9999999999999\}$
- $c = -1$ i $x_0 \in \{1, -1, 0.75, 0.25\}$

Poniżej wartości otrzymane dla $c = -2$

| x = 1.0 | x = 2.0 | x = 1.999999999999999 |
|-----------|----------|---------------------------|
| Iter x | Iter x | Iter x |
| 1 -1.0 | 1 2.0 | 1 1.999999999999996 |
| 2 -1.0 | 2 2.0 | 2 1.9999999999998401 |
| 3 -1.0 | 3 2.0 | 3 1.9999999999993605 |
| 4 -1.0 | 4 2.0 | 4 1.999999999997442 |
| 5 -1.0 | 5 2.0 | 5 1.9999999999897682 |
| 6 -1.0 | 6 2.0 | 6 1.9999999999590727 |
| 7 -1.0 | 7 2.0 | 7 1.999999999836291 |
| 8 -1.0 | 8 2.0 | 8 1.9999999993451638 |
| 9 -1.0 | 9 2.0 | 9 1.9999999973806553 |
| 10 -1.0 | 10 2.0 | 10 1.999999989522621 |
| 11 -1.0 | 11 2.0 | 11 1.999999580904841 |
| 12 -1.0 | 12 2.0 | 12 1.999998323619383 |
| 13 -1.0 | 13 2.0 | 13 1.999993294477814 |
| 14 -1.0 | 14 2.0 | 14 1.9999973177915749 |
| 15 -1.0 | 15 2.0 | 15 1.9999892711734937 |
| 16 -1.0 | 16 2.0 | 16 1.9999570848090826 |
| 17 -1.0 | 17 2.0 | 17 1.999828341078044 |
| 18 -1.0 | 18 2.0 | 18 1.9993133937789613 |
| 19 -1.0 | 19 2.0 | 19 1.9972540465439481 |
| 20 -1.0 | 20 2.0 | 20 1.9890237264361752 |
| 21 -1.0 | 21 2.0 | 21 1.9562153843260486 |
| 22 -1.0 | 22 2.0 | 22 1.82677862987391 |
| 23 -1.0 | 23 2.0 | 23 1.3371201625639997 |
| 24 -1.0 | 24 2.0 | 24 -0.21210967086482313 |
| 25 -1.0 | 25 2.0 | 25 -1.9550094875256163 |
| 26 -1.0 | 26 2.0 | 26 1.822062096315173 |
| 27 -1.0 | 27 2.0 | 27 1.319910282828443 |
| 28 -1.0 | 28 2.0 | 28 -0.2578368452837396 |
| 29 -1.0 | 29 2.0 | 29 -1.9335201612141288 |
| 30 -1.0 | 30 2.0 | 30 1.7385002138215109 |
| 31 -1.0 | 31 2.0 | 31 1.0223829934574389 |
| 32 -1.0 | 32 2.0 | 32 -0.9547330146890065 |
| 33 -1.0 | 33 2.0 | 33 -1.0884848706628412 |
| 34 -1.0 | 34 2.0 | 34 -0.8152006863380978 |
| 35 -1.0 | 35 2.0 | 35 -1.3354478409938944 |
| 36 -1.0 | 36 2.0 | 36 -0.21657906398474625 |
| 37 -1.0 | 37 2.0 | 37 -1.953093509043491 |
| 38 -1.0 | 38 2.0 | 38 1.8145742550678174 |
| 39 -1.0 | 39 2.0 | 39 1.2926797271549244 |
| 40 -1.0 | 40 2.0 | 40 -0.3289791230026702 |

Teraz wartości dla c = -1

| x = 1.0 | x = -1.0 |
|-----------|-----------|
| Iter x | Iter x |
| 1 0.0 | 1 0.0 |
| 2 -1.0 | 2 -1.0 |
| 3 0.0 | 3 0.0 |
| 4 -1.0 | 4 -1.0 |
| 5 0.0 | 5 0.0 |
| 6 -1.0 | 6 -1.0 |
| 7 0.0 | 7 0.0 |
| 8 -1.0 | 8 -1.0 |
| 9 0.0 | 9 0.0 |
| 10 -1.0 | 10 -1.0 |
| 11 0.0 | 11 0.0 |
| 12 -1.0 | 12 -1.0 |
| 13 0.0 | 13 0.0 |
| 14 -1.0 | 14 -1.0 |
| 15 0.0 | 15 0.0 |
| 16 -1.0 | 16 -1.0 |
| 17 0.0 | 17 0.0 |
| 18 -1.0 | 18 -1.0 |
| 19 0.0 | 19 0.0 |
| 20 -1.0 | 20 -1.0 |
| 21 0.0 | 21 0.0 |
| 22 -1.0 | 22 -1.0 |
| 23 0.0 | 23 0.0 |
| 24 -1.0 | 24 -1.0 |
| 25 0.0 | 25 0.0 |
| 26 -1.0 | 26 -1.0 |
| 27 0.0 | 27 0.0 |
| 28 -1.0 | 28 -1.0 |
| 29 0.0 | 29 0.0 |
| 30 -1.0 | 30 -1.0 |
| 31 0.0 | 31 0.0 |
| 32 -1.0 | 32 -1.0 |
| 33 0.0 | 33 0.0 |
| 34 -1.0 | 34 -1.0 |
| 35 0.0 | 35 0.0 |
| 36 -1.0 | 36 -1.0 |
| 37 0.0 | 37 0.0 |
| 38 -1.0 | 38 -1.0 |
| 39 0.0 | 39 0.0 |
| 40 -1.0 | 40 -1.0 |

| x = 0.75 | x = 0.25 |
|------------------------------|-----------------------------|
| Iter x | Iter x |
| 1 -0.4375 | 1 -0.9375 |
| 2 -0.80859375 | 2 -0.12109375 |
| 3 -0.3461761474609375 | 3 -0.9853363037109375 |
| 4 -0.8801620749291033 | 4 -0.029112368589267135 |
| 5 -0.2253147218564956 | 5 -0.9991524699951226 |
| 6 -0.9492332761147301 | 6 -0.0016943417026455965 |
| 7 -0.0989561875164966 | 7 -0.9999971292061947 |
| 8 -0.9902076729521999 | 8 -5.741579369278327e-6 |
| 9 -0.01948876442658909 | 9 -0.99999999999670343 |
| 10 -0.999620188061125 | 10 -6.593148249578462e-11 |
| 11 -0.0007594796206411569 | 11 -1.0 |
| 12 -0.9999994231907058 | 12 0.0 |
| 13 -1.1536182557003727e-6 | 13 -1.0 |
| 14 -0.9999999999986692 | 14 0.0 |
| 15 -2.6616486792363503e-12 | 15 -1.0 |
| 16 -1.0 | 16 0.0 |
| 17 0.0 | 17 -1.0 |
| 18 -1.0 | 18 0.0 |
| 19 0.0 | 19 -1.0 |
| 20 -1.0 | 20 0.0 |
| 21 0.0 | 21 -1.0 |
| 22 -1.0 | 22 0.0 |
| 23 0.0 | 23 -1.0 |
| 24 -1.0 | 24 0.0 |
| 25 0.0 | 25 -1.0 |
| 26 -1.0 | 26 0.0 |
| 27 0.0 | 27 -1.0 |
| 28 -1.0 | 28 0.0 |
| 29 0.0 | 29 -1.0 |
| 30 -1.0 | 30 0.0 |
| 31 0.0 | 31 -1.0 |
| 32 -1.0 | 32 0.0 |
| 33 0.0 | 33 -1.0 |
| 34 -1.0 | 34 0.0 |
| 35 0.0 | 35 -1.0 |
| 36 -1.0 | 36 0.0 |
| 37 0.0 | 37 -1.0 |
| 38 -1.0 | 38 0.0 |
| 39 0.0 | 39 -1.0 |
| 40 -1.0 | 40 0.0 |