

Sprawozdanie laboratorium lista 3 - obliczenia naukowe

Zofia Tarchalska, indeks: 279699

Zadania 1-3

Celem zadań jest oprogramowanie funkcji, które będą obliczały miejsca zerowe na 3 różne sposoby. Należało umieścić je w jednym module. Funkcje zwracają:

- r - przybliżenie pierwiastka funkcji,
- v - wartość $f(r)$,
- it - liczba wykonanych operacji,
- err - sygnalizacja błędu, różne wartości dla różnych błędów w zależności od zadania i specyficznych ograniczeń każdej z funkcji.

Zadanie 1

Zaimplementowanie funkcji rozwiązującej $f(x) = 0$ metodą bisekcji. Wymaga ona aby:

- funkcja f była ciągła na przedziale $[a, b]$, w którym szukamy miejsca zerowego,
- oraz żeby miała różne znaki wartości na końcach przedziału, czyli $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Argumenty funkcji:

- $f(x)$ - funkcja
- a, b - początek i koniec przedziału początkowego,
- δ - dokładność w argumentach,
- ϵ - dokładność w wartościach funkcji.

Sposób działania

Konsekwentnie dzielimy przedział na pół. Jeśli trafimy na wartość równą 0 - znaleźliśmy rozwiązanie. W przeciwnym razie wybieramy podprzedział, w którym wartości funkcji na krańcach mają przeciwne znaki.

Zadanie 2

W tym zadaniu zaimplementowana funkcja wylicza miejsca zerowe metodą Newtona. Funkcja musi spełniać poniższe wymagania:

- jest określona,
- jest ciągła,
- pierwsza pochodna $f'(x)$ jest różna od zera.

Argumenty funkcji:

- $f(x)$ i $f'(x)$, czyli funkcja oraz jej pochodna,
- x_0 - przybliżenie początkowe,
- δ, ϵ - dokładności obliczeń, tak samo jak zdefiniowane powyżej,
- maxit - maksymalna dopuszczalna liczba operacji.

Sposób działania

Jest to metoda iteracyjna. Zaczynamy od przybliżenia początkowego x_0 i w każdej iteracji zastępujemy funkcję jej styczną w punkcie x_i , wyznaczając przecięcie tej stycznej z osią OX jako nowe przybliżenie x_{i+1} .

Zadanie 3

W tym zadaniu, do obliczenia miejsc zerowych funkcji, należy posłużyć się metodą siecznych. Funkcja musi spełniać poniższe warunki:

- jest ciągła,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$
- pierwsza pochodna $f'(x)$ jest różna od zera. Nie istnieje zatem minimum lub maksimum lokalne. Ten warunek gwarantuje nam, iż sieczna nie będzie równoległa do osi OX, co uniemożliwiłoby wyznaczenie jej punktu przecięcia z tą osią.

Jako argumenty funkcji podane są:

- f - funkcja,
- x_0, x_1 - przybliżenia krańców przedziału, w którym na pewno znajduje się miejsce zerowe,
- δ, ϵ - dokładności obliczeń, tak samo jak zdefiniowane w zadaniu 1,
- maxit - maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Sposób działania

Jest to metoda iteracyjna, która przybliża krzywą funkcji na każdym kroku sieczną przechodzącą przez dwa ostatnie przybliżenia i przyjmuje przecięcie tej siecznej z osią OX jako nowe przybliżenie. Działa podobnie jak w zadaniu drugim tylko tutaj pomijamy potrzebę używania jawnego wzoru na pochodną.

Oto wzór:

$$x_i = x_{i-1} - f(x_{i-1}) \cdot \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}$$

Zadanie 4

W zadaniu 4 należy przetestować wszystkie 3 metody obliczania miejsc zerowych dla funkcji $f(x) = \sin(x) - (\frac{1}{2} \cdot x)^2$. Dla wywołań:

```
delta = 1/2 * 10^-5
```

```
epsilon = 1/2 * 10^-5
```

```
mbisekcji(f, 1.5, 2.0, delta, epsilon)
```

```
mstycznych(f, df, 1.5, delta, epsilon, 50)
```

```
msiecznych(f, 1.0, 2.0, delta, epsilon, 50)
```

otrzymujemy wyniki:

```
metoda bisekcji
```

```
r = 1.9337501525878906
```

```
v = 4.772428664701067e-6
```

```
it = 17
```

```
err = 0
```

```
metoda stycznych
```

```
r = 1.933753779789742
```

```
v = -2.2423316314856834e-8
```

```
it = 4
```

```
err = 0
```

```
metoda siecznych
```

```
r = 1.933753644474301
```

```
v = 1.564525129449379e-7
```

```
it = 4
```

```
err = 0
```

Wnioski

Po wrzuceniu tej funkcji do programu Wolfram Alpha otrzymujemy wynik:

$$x \approx 1.93375$$

Widzimy, że wszystkie 3 sposoby są całkiem precyzyjne. Pokrywają się z wynikiem podanym przez Wolframa do 5 miejsc po przecinku. Najdokładniejsze wyniki zwróciła metoda stycznych. W jej przypadku wartość funkcji jest najbliższej zera. Metoda bisekcji potrzebowała aż czterokrotnie więcej iteracji, niż dwie pozostałe, aby znaleźć precyzyjny wynik. Stąd możemy założyć, że w przypadku gdy znamy pochodną funkcji (jest ona łatwa do wyliczenia oraz nie ma złośliwych ekstremów lokalnych) warto posługiwać się metodą stycznych. Metoda siecznych "obchodzi" te problemy i oferuje również całkiem dobre rozwiązanie w podobnej liczbie iteracji. Jeśli jednak na pewno chcemy znaleźć wynik ponad cenę szybkości działania metoda bisekcji będzie pod tym kątem niezawodna.

Zadanie 5

Celem zadania 5 jest wyznaczenie wartości zmiennej x , dla której przecinają się wykresy funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$. Jak wiemy funkcje przecinają się w tym samym punkcie kiedy przyjmują te same wartości dla tych samych argumentów. Czyli przyrównujemy wzory funkcji, aby znaleźć x , dla których przyjmują te same wartości.

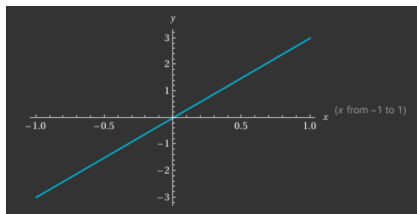
$$3x = e^x$$

Ostatecznie otrzymujemy takie równanie.

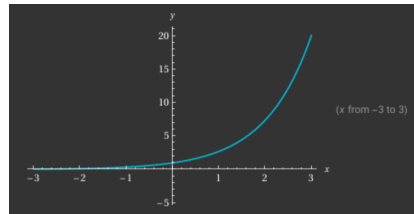
$$3x - e^x = 0$$

Teraz możemy, zgodnie z poleceniem zadania, metodą bisekcji, policzyć miejsca zerowe funkcji $g(x) = 3x - e^x$

Do tego potrzebujemy jednak przedziałów, w których znajdują się potencjalne miejsca zerowe.



Rysunek 1: $y = 3x$



Rysunek 2: $y = e^x$

Funkcje wyglądają tak jak powyżej. Ze względu na ich kształt widzimy, że będą miały one dwa punkty wspólne.

Dla $x \leq 0$ mamy $3x \leq 0 < e^x$. Wtedy nasza funkcja $g(x)$ jest cały czas ujemna. Zatem od nieskończoności do zera nie ma żadnych punktów wspólnych.

Dla $x = 1$ mamy $e = 2,7... < 3$, więc $g(x)$ jest dodatnie, natomiast dla $x = 3$ mamy $e^3 = 20,08... > 3 * 3 = 9$, czyli $g(x)$ jest znów ujemne.

Tym sposobem znalezione zostały dwa przedziały, w których na krańcach funkcja przyjmuje wartości o przeciwnych znakach. Są to $[0, 1]$ oraz $[1, 3]$.

Po wywołaniu funkcji mbisekcji dla tych przedziałów z $\delta = 10^{-4}$ i $\epsilon = 10^{-4}$ otrzymujemy poniższe wyniki:

Przedział $[0, 1]$	
Punkt wspólny x	0.61907958984375
$3x - e^x$	2.091677592419572e-5
Liczba iteracji	14
Kod błędu	0
Przedział $[1, 3]$	
Punkt wspólny x	1.51214599609375
$3x - e^x$	-1.7583570236290313e-5
Liczba iteracji	15
Kod błędu	0

Wnioski

Wyniki wg Wolfram Alpha:

$$x \approx 0.619061$$

$$x \approx 1.51213$$

Dokładność używanych przez nas wyników w porównaniu z Wolframem to 4 miejsca po przecinku. Są to wyniki precyzyjne lecz aby je uzyskać potrzebowalibyśmy dokładnej analizy problemu. Należało przyjrzeć się przebiegom funkcji i w przybliżeniu określić ich zachowanie na przedziałach. To pozwoliło nam posłużyć się metodą bisekcji i tym razem już precyzyjnie określić wynik. Metoda bisekcji, pod warunkiem spełnienia warunków początkowych, zawsze zapewni nam znalezienie pierwiastka. Jednak, aby wyliczyć wszystkie pierwiastki potrzebujemy posiłkować się wiedzą z analizy matematycznej/rozszerzonej matematyki w liceum. Im węższy przedział uda nam się znaleźć tym bardziej zaoszczędzimy liczbę iteracji algorytmu.

Zadanie 6

Celem zadania jest znalezienie miejsc zerowych funkcji:

$$f_1(x) = e^{1-x} - 1$$

$$f_2(x) = x \cdot e^{-x}$$

za pomocą wszystkich trzech metod: bisekcji, stycznych i siecznych. Przyjmujemy: $\delta = 10^{-5}$ i $\epsilon = 10^{-5}$.

Teraz przeprowadźmy analizę. Łatwo zauważyć, że $f_1(1) = 0$. Funkcja ta jest również funkcją malejącą, ponieważ $f_1(x) = e^{1-x}$ jest malejąca, a -1 tylko obniża ją jeszcze o 1. Wobec tego $x = 1$ to jedyne miejsce zerowe f_1 . Dla funkcji f_2 miejscem zerowym jest $x = 0$, ponieważ we wzorze funkcji występuje mnożenie przez x . Jest to jedyne miejsce zerowe, ponieważ e^{-x} nigdy nie osiągnie wartości

0. Wystarczy spojrzeć na wykres w zadaniu 5, żeby to zrozumieć. Tam mamy zobrazowany przebieg funkcji e^x , która miejsc zerowych nie posiada. Otrzymamy z niej e^{-x} poprzez symetryczne odbicie względem osi OY. Podsumowując:

$$f_1(1) = 0$$

$$f_2(0) = 0$$

Funckja f_1

Dla metody bisekcji:

Przedział [0.0, 2.0]

x = 1.0

f1(x) = 0.0

Liczba iteracji 1

Kod błędu 0

Przedział [0.0, 3.0]

x = 1.0000019073486328

f1(x) = -1.9073468138230965e-6

Liczba iteracji 19

Kod błędu 0

Przedział [0.0, 10.5]

x = 1.0000011920928955

f1(x) = -1.1920921849650767e-6

Liczba iteracji 21

Kod błędu 0

Wyniki prezentują się następująco. W przypadku pierwszego przedziału był on symetryczny względem prawdziwego miejsca zerowego. Kolejne były coraz bardziej asymetryczne.

Dla metody stycznych:

Przybliżenie x = 0.0

x = 0.9999984358892101

f1(x) = 1.5641120130194253e-6

Liczba iteracji 4

Kod błędu 0

Przybliżenie x = 1.0

x = 1.0

f1(x) = 0.0

Liczba iteracji 0

Kod błędu 0

Przybliżenie $x = -2.0$
 $x = 0.999999999251376$
 $f_1(x) = 7.486256059507923e-11$
Liczba iteracji 7
Kod błędu 0

Przybliżenie $x = 1.0e6$
 $x = 1.0e6$
 $f_1(x) = -1.0$
Liczba iteracji 1
Kod błędu 2

Dla metody siecznych:

Przybliżenia $x_1 = 0.0, x_2 = 2.0$
 $x = 1.0000017597132702$
 $f_1(x) = -1.7597117218937086e-6$
Liczba iteracji 6
Kod błędu 0

Przybliżenia $x_1 = 0.0, x_2 = 3.0$
 $x = 0.999999739048799$
 $f_1(x) = 2.6095123506486573e-7$
Liczba iteracji 9
Kod błędu 0

Przybliżenia $x_1 = 0.0, x_2 = 10.5$
 $x = \text{NaN}$
 $f_1(x) = \text{NaN}$
Liczba iteracji 50
Kod błędu 1

Funkcja f_2

Metoda bijekcji:

Przedział $[-1.0, 1.0]$
 $x = 0.0$
 $f_2(x) = 0.0$
Liczba iteracji 1
Kod błędu 0

Przedział $[-1.0, 2.0]$
 $x = 7.62939453125e-6$
 $f_2(x) = 7.62933632381113e-6$
Liczba iteracji 17
Kod błędu 0

Przedział [-1.0, 9.5]
x = -3.814697265625e-6
f2(x) = -3.814711817567984e-6
Liczba iteracji 17
Kod błędu 0

Metoda stycznych:

Przybliżenie x = -1.0
x = -3.0642493416461764e-7
f2(x) = -3.0642502806087233e-7
Liczba iteracji 5
Kod błędu 0

Przybliżenie x = 0.0
x = 0.0
f2(x) = 0.0
Liczba iteracji 0
Kod błędu 0

Przybliżenie x = 3.0
x = 14.787436802837927
f2(x) = 5.594878975694858e-6
Liczba iteracji 10
Kod błędu 0

Przybliżenie x = 1.0e6
x = 1.0e6
f2(x) = 0.0
Liczba iteracji 0
Kod błędu 0

Metoda siecznych:

Przybliżenia x1 = -1.0, x2 = 1.0
x = 1.744165849924562e-8
f2(x) = 1.7441658195034172e-8
Liczba iteracji 18
Kod błędu 0

Przybliżenia x1 = -1.0, x2 = 2.0
x = 14.310428368676307
f2(x) = 8.72393778926339e-6
Liczba iteracji 15
Kod błędu 0

Przybliżenia $x_1 = -1.0$, $x_2 = 9.5$
 $x = 14.314813369417385$
 $f_2(x) = 8.68842855838761e-6$
Liczba iteracji 7
Kod błędu 0

TO DO EKSPERYMENTY DODATKOWE I WNIOSKI