Laboratorium 2 - sprawozdanie

Zofia Tarchalska

1 Zadanie 1

Optymalizacja dostaw paliwa

1. Opis modelu

Zmienna decyzyjna:

- $x_{s,a}$ - ilość jednostek paliwa dostarczona przez dostawcę s na lotnisko a [jednostki paliwa]

Ograniczenia:

- Dostawca nie może dostarczyć więcej niż jego maksymalna dostępność:

$$\sum_{a \in A_s} x_{s,a} \leq \text{supply}_s \quad \forall s \in S$$

  gdzie S to zbiór wszystkich dostawców

- Każde lotnisko musi otrzymać dokładnie tyle paliwa, ile potrzebuje:

$$\sum_{s \in S_a} x_{s,a} = \text{demand}_a \quad \forall a \in A$$

  gdzie A to zbiór wszystkich lotnisk

- Dostawy są możliwe tylko dla dozwolonych par (s, a).

Funkcja celu:

$$\min \sum_{(s,a) \in D} c_{s,a} \cdot x_{s,a}$$

gdzie:

- $c_{s,a}$ - koszt jednostkowy zakupu i dostawy paliwa od dostawcy s na lotnisko a [zł/jednostkę]
- D - zbiór dozwolonych par dostawca - lotnisko

2. Opis danych i wyników

Dane wejściowe zostały wczytane z pliku `data_ex1.json`. Uwzględniono:

- 3 dostawców paliwa o dostępności: 275000, 550000, 660000 jednostek
- 4 lotniska o zapotrzebowaniu: 110000, 220000, 330000, 440000 jednostek
- Koszty dostawy zależne od pary dostawca - lotnisko

Model został rozwiązany za pomocą solvera GLPK. Uzyskano wyniki:

```
Min cost: 8.525e6

Company F1, limit = 275000
Supplier F1 → Airport L1: 0.0
Supplier F1 → Airport L2: 165000.0
Supplier F1 → Airport L3: 0.0
Supplier F1 → Airport L4: 110000.0

F1 delivered 275000.0 in total.

Company F2, limit = 550000
Supplier F2 → Airport L1: 110000.0
Supplier F2 → Airport L2: 55000.0
Supplier F2 → Airport L3: 0.0
Supplier F2 → Airport L4: 0.0

F2 delivered 165000.0 in total.

Company F3, limit = 660000
Supplier F3 → Airport L1: 0.0
Supplier F3 → Airport L2: 0.0
Supplier F3 → Airport L3: 330000.0
Supplier F3 → Airport L4: 330000.0

F3 delivered 660000.0 in total.
```

Wnioski

Okazuje się że minimalny koszt wynosi 8525000. Optymalny plan dostaw wskazuje, ile jednostek paliwa należy zakupić od każdego dostawcy i dostarczyć na każde lotnisko, aby spełnić zapotrzebowanie przy minimalnym koszcie. Wyniki są zgodne z ograniczeniami dostępności. Zauważmy, że nie wszystkie firmy muszą dostarczyć paliwo, aby otrzymać optymalne rozwiązanie. Jednak aż dwie firmy F1 i F3 wyczerpały możliwości dostaw (wysłały wszystko co mogły).

2 Zadanie 2

Optymalizacja produkcji w fabryce

1. Opis modelu

- **Zmienna decyzyjna:**

  x_p – Liczba kilogramów produktu $p \in P$ wyprodukowana w danym tygodniu [kg]

- **Ograniczenia:**

  – Ograniczenia czasowe dla każdej maszyny $m \in M$:

  $$\sum_{p \in P} t_{p,m} \cdot x_p \leq T_m \quad \forall m \in M$$

  gdzie:

  * $t_{p,m}$ – liczba godzin pracy maszyny m potrzebna do wyprodukowania 1 kg produktu p
  * T_m – maksymalna liczba godzin pracy maszyny m w tygodniu

  – Ograniczenia popytu dla każdego produktu $p \in P$:

  $$x_p \leq D_p \quad \forall p \in P$$

  gdzie:

  * D_p – maksymalny tygodniowy popyt na produkt p

- **Funkcja celu:**

  $$\max \sum_{p \in P} \left(r_p - c_p - \sum_{m \in M} w_m \cdot t_{p,m} \right) \cdot x_p$$

  gdzie:

  – r_p – cena sprzedaży 1 kg produktu p [zł/kg]

  – c_p – koszt materiałowy produkcji 1 kg produktu p [zł/kg]

  – w_m – koszt pracy maszyny m [zł/godz.]

  – $t_{p,m}$ – liczba godzin pracy maszyny m na 1 kg produktu p

Wynik działania solvera:

```
Optimal production strategy:
Product P1: 125.0 kg
Product P2: 100.0 kg
Product P3: 150.0 kg
Product P4: 500.0 kg

Max profit: 3632.5 zł
```

Wnioski

Model określa optymalną ilość produkcji każdego z produktów, uwzględniając ograniczenia czasowe maszyn oraz maksymalny popyt. Funkcja celu maksymalizuje zysk, który uwzględnia przychód ze sprzedaży, koszt materiałowy oraz koszt pracy maszyn. Okazuje sie, że wszystkie produkty oprócz $P1$ należy wyprodukować w liczbie równej maksymalnemu popytowi. Najwyższy możliwy zysk to 3632.5 zł.

3 Zadanie 3

3.1 Opis modelu

(a) Zmienne decyzyjne

- x_normal_j – liczba jednostek wyprodukowanych w okresie j w trybie normalnym [jednostki]
- x_extra_j – liczba jednostek wyprodukowanych w okresie j w trybie ponadwymiarowym [jednostki]
- x_stored_j – liczba jednostek magazynowanych po okresie j [jednostki]

(b) Ograniczenia

- Produkcja normalna w każdym okresie nie może przekroczyć 100 jednostek:

$$x\_normal_j \leq 100$$

- Produkcja ponadwymiarowa w każdym okresie nie może przekroczyć limitu a_j:

$$x\_extra_j \leq a_j$$

- Liczba jednostek magazynowanych po każdym okresie nie może przekroczyć 70:

$$x\_stored_j \leq 70$$

- Bilans zapasów w każdym okresie musi spełniać:

$$x\_normal_j + x\_extra_j + x\_stored_{j-1} = d_j + x\_stored_j$$

gdzie $s_0 = 15$ to początkowy stan magazynu, a d_j to zapotrzebowaniew danym okresie

(c) Funkcja celu

$$\min \sum_{j=1}^{4} (c_j \cdot x\_normal_j + o_j \cdot x\_extra_j + s_{cost} \cdot x\_stored_j)$$

gdzie:

- c_j – koszt jednostkowy produkcji normalnej w okresie j [zł]
- o_j – koszt jednostkowy produkcji ponadwymiarowej w okresie j [zł]
- s_{cost} – koszt magazynowania jednej jednostki przez jeden okres [zł]

3.2 Opis danych i interpretacja wyników

Rozważany przypadek obejmuje 4 kolejne okresy produkcyjne. W każdym okresie firma może wyprodukować do 100 jednostek w trybie normalnym oraz dodatkowe jednostki w trybie ponadwymiarowym (zgodnie z limitem a_j). Popyt d_j oraz koszty c_j, o_j są znane dla każdego okresu. Firma może magazynować do 70 jednostek między okresami, przy początkowym stanie magazynu równym 15 jednostek.

Uzyskany plan produkcji

```
Production plan:

Period J1:
normal production = 100.0
additional_production = 15.0
stored= 0.0

Period J2:
normal production = 100.0
additional_production = 50.0
stored= 70.0

Period J3:
normal production = 100.0
additional_production = 0.0
stored= 45.0
```

```
Period J4:
normal production = 100.0
additional_production = 50.0
stored= 0.0

Min cost: 3.8425e6
```

3.3 Wnioski

- Minimalny łączny koszt produkcji i magazynowania wynosi 3 842 500 zł.
- Produkcja ponadwymiarowa została zaplanowana w okresach J1, J2 oraz J4.
- Magazyn osiągnął maksymalną pojemność (70 jednostek) w okresie J2.

4 Zadanie 4

4.1 Opis problemu

Dany jest skierowany graf $G = (N, A)$, gdzie N to zbiór miast (wierzchołków), a A to zbiór połączeń (łuków). Każda krawędź $(i, j) \in A$ posiada koszt przejazdu c_{ij} oraz czas przejazdu t_{ij}. Celem jest znalezienie ścieżki z miasta początkowego i° do miasta końcowego j°, której całkowity koszt jest minimalny, a całkowity czas przejazdu nie przekracza zadanego limitu T.

4.2 Model matematyczny

Zmienne decyzyjne:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{dla każdej } (i, j) \in A$$

$x_{ij} = 1$ oznacza, że krawędź (i, j) należy do wybranej ścieżki.

Funkcja celu:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

Ograniczenie czasu:

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} \cdot x_{ij} \leq T$$

Ograniczenia przepływu:

$$\sum_{i:(i,v)\in A} x_{iv} - \sum_{j:(v,j)\in A} x_{vj} = \begin{cases} -1 & \text{jeśli } v = i^\circ \\ 1 & \text{jeśli } v = j^\circ \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

4.3 Parametry instancji

- Liczba miast: $|N| = 10$
- Miasto początkowe: $i^\circ = 1$
- Miasto końcowe: $j^\circ = 10$
- Limit czasu: $T = 15$

4.4 Wyniki - zadanie z polecenia

```
Optimal path found:
Total cost: 13.0
Total time: 15.0
Edges in the path:
1 → 2 (cost: 3, time: 4)
2 → 3 (cost: 2, time: 3)
3 → 5 (cost: 2, time: 2)
5 → 7 (cost: 3, time: 3)
7 → 9 (cost: 1, time: 1)
9 → 10 (cost: 2, time: 2)
```

4.5 Wyniki - mój przykład

```
Optimal path found:
Total cost: 4.0
Total time: 15.0
Edges in the path:
1 → 2 (cost: 1, time: 5)
2 → 9 (cost: 2, time: 5)
9 → 10 (cost: 1, time: 5)
```

4.6 Wnioski

Model skutecznie znajduje najtańszą ścieżkę spełniającą ograniczenie czasowe.

Ograniczenie na całkowitoliczbowość zmiennej decyzyjnej w tym przykładzie jest koniecze. W moim problemie zmienną decyzyjną jest zmienna binarna, w zależności czy dołączamy krawędź do rozwiązania czy nie, przyjmuje wartości 1 lub 0. Dopuszczenie zmiennych niecałkowitych byłoby kompletnie sprzeczne z logiką programu. Mogłyby nam wyjść wartości ułamkowe a nie da się tego interpretować w przypadku ścieżek w grafie lub jako watość true/false.

Jeśli chodzi o przypadek, w którym usunęlibyśmy ograniczenie na całkowitoliczbowość zmiennej decyzyjnej oraz na czasy przejazdu to właśnie ze względu na brak ograniczenia całkowitoliczbowości nie otrzymamy zawsze akceptowalnego rozwiązania.

5 Zadanie 5

Optymalny przydział radiowozów

5.1 Opis modelu

- x_{ij} – liczba radiowozów przypisana do dzielnicy i podczas zmiany j [szt.]

Ograniczenia

- Dla każdej dzielnicy i i zmiany j:

$$\min_{ij} \leq x_{ij} \leq \max_{ij}$$

- Dla każdej zmiany j:

$$\sum_i x_{ij} \geq r_j$$

- Dla każdej dzielnicy i:

$$\sum_j x_{ij} \geq d_i$$

Funkcja celu

$$\min \sum_{i,j} x_{ij}$$

czyli minimalizacja całkowitej liczby radiowozów.

5.2 Wyniki i interpretacja

```
District p1
Shift s1: 2.0
Shift s2: 7.0
Shift s3: 5.0

District p2
Shift s1: 3.0
Shift s2: 6.0
Shift s3: 7.0

District p3
Shift s1: 5.0
Shift s2: 7.0
```

```
Shift s3: 6.0

Min number of vehicles: 48.0
```

5.3 Wnioski

- Łączna liczba radiowozów: 48
- Wszystkie wymagania dotyczące minimalnych i maksymalnych przydziałów zostały spełnione.
- Przydział jest efektywny i zgodny z przepisami dla każdej zmiany i dzielnicy.

6 Zadanie 6

Optymalne rozmieszczenie kamer

6.1 Opis problemu

Firma przeładunkowa składuje kontenery z cennym ładunkiem na siatce o wymiarach $m \times n$. Każdy kontener zajmuje dokładnie jeden kwadrat. Celem jest rozmieszczenie kamer w pustych kwadratach tak, aby każdy kontener był monitorowany przez co najmniej jedną kamerę, a liczba użytych kamer była minimalna.
Zasięg kamery obejmuje k pól w górę, dół, lewo i prawo (czyli w formie krzyża). Kamera nie może być umieszczona w polu zajętym przez kontener.

6.2 Zmienne decyzyjne

- $c_{ij} \in \{0, 1\}$ – czy kamera znajduje się w komórce (i, j)
- K – zbiór współrzędnych kontenerów

6.3 Ograniczenia

- Kamera nie może być umieszczona na kontenerze:

$$c_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in K$$

- Każdy kontener musi być monitorowany przez co najmniej jedną kamerę w zasięgu:

$$\sum_{(p,q) \in \text{krzyż}(i,j)} c_{pq} \geq 1 \quad \forall (i, j) \in K$$

  gdzie krzyż(i, j) to zbiór pól w zasięgu k od kontenera (i, j) w pionie i poziomie.

6.4 Funkcja celu

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}$$

czyli minimalizacja liczby użytych kamer.

6.5 Wyniki dla siatki 6×6

```
X - represents camera
O - represents container
. - represents empty cell


k = 1
Min number of cameras: 3.0

Map:
 .  .  .  .  .  .
 .  O  .  .  .  .
 .  X  O  O  X  O
 .  .  .  .  O  .
 .  .  .  X  O  .
 .  .  .  .  .  .


k = 2
Min number of cameras: 2.0

Map:
 .  .  .  .  .  .
 X  O  .  .  .  .
 .  .  O  O  X  O
 .  .  .  .  O  .
 .  .  .  .  O  .
 .  .  .  .  .  .
```

6. Wnioski

Zwiększenie zasięgu kamery (k) pozwala na zmniejszenie liczby potrzebnych urządzeń. Dla $k = 2$ wystarczyło 2 kamery zamiast 3 (dla $k = 1$), co pokazuje korzyści z większego pola widzenia. Wszystkie kontenery zostały skutecznie objęte monitoringiem.