Sprawozdanie laboratorium lista 4
Obliczenia naukowe

Zofia Tarchalska, indeks: 279699

Wstęp do zadań 1-4

W pierwszych trzech zadaniach należy zaimplementować algortymy dotyczące interpolacji wielomianowej.
Interpolacja wielomianowa jest jednym z podstawowych narzędzi analizy numerycznej, pozwalającym na przybliżanie funkcji za pomocą wielomianów przechodzących przez zadane punkty. Szczególnie użyteczna jest postać Newtona, w której współczynniki wyznaczane są za pomocą ilorazów różnicowych. Ta reprezentacja jest wygodna obliczeniowo i umożliwia łatwe dodawanie nowych węzłów bez konieczności ponownego wyznaczania całego wielomianu.
W sprawozdaniu rozważymy trzy powiązane ze sobą algorytmy:

1. Obliczanie ilorazów różnicowych na podstawie wartości funkcji w węzłach interpolacji.
2. Wyznaczanie wartości wielomianu Newtona w punkcie t za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera, działającego w czasie liniowym $O(n)$.
3. Przekształcanie wielomianu Newtona do postaci naturalnej $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, co wymaga czasu $O(n^2)$.

Zadanie 1

Algorytm obliczania ilorazów różnicowych

Wejście

- Wektor węzłów $x = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ długości $n + 1$.
- Wektor wartości funkcji $f = [f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)]$ długości $n + 1$.

Wyjście

- Wektor $fx = [f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, \ldots, x_n]]$ długości $n+1$, zawierający kolejne ilorazy różnicowe.

Idea działania

Algorytm oblicza współczynniki dla wielomianu interpolacyjnego Newtona. Zamiast tworzyć tablicę dwuwymiarową, wszystkie obliczenia wykonuje w jednym wektorze, nadpisując jego wartości w kolejnych krokach. Pierwszy element wektora wynikowego jest wartością funkcji w pierwszym węźle, a kolejne elementy powstają poprzez iteracyjne obliczanie ilorazów różnicowych wyższych rzędów.

Opis kroków

1. Utwórz wektor fx długości $n+1$ i skopiuj do niego wartości funkcji $f(x_i)$.
2. Ustal $fx[1] = f(x_0)$.
3. Dla każdego rzędu $j = 2, 3, \ldots, n+1$:
   - Przejdź po wektorze od końca do początku.
   - Zastąp element $fx[i]$ wartością:

   $$fx[i] \leftarrow \frac{fx[i] - fx[i-1]}{x[i] - x[i-j+1]}$$

   - Pierwszy element z danego rzędu odpowiada współczynnikowi Newtona i pozostaje w $fx[j]$.
4. Po zakończeniu pętli wektor fx zawiera wszystkie ilorazy różnicowe.

Złożoność

- Czasowa: $O(n^2)$, ponieważ algorytm wykonuje podwójną pętlę.
- Pamięciowa: $O(n)$, ponieważ używany jest tylko jeden wektor długości $n+1$.

Zadanie 2

Algorytm obliczania wartości wielomianu Newtona

Wejście

- Wektor węzłów $x = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ długości $n+1$.
- Wektor ilorazów różnicowych $fx = [f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, \ldots, x_n]]$ długości $n+1$.
- Punkt $t \in \mathbb{R}$, w którym należy obliczyć wartość wielomianu interpolacyjnego Newtona.

Wyjście

- Wartość wielomianu Newtona $N_n(t)$ w punkcie t.

Idea działania

Ponieważ wielomian Newtona jest postaci:

$$N_n(t) = f[x_0] + f[x_0, x_1](t - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](t - x_0)(t - x_1) \\ + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](t - x_0)(t - x_1) \ldots (t - x_{n-1}) \quad (1)$$

Bezpośrednie obliczanie wymagałoby mnożenia coraz dłuższych iloczynów i dodawania kolejnych wyrazów, co prowadzi do kosztu rzędu $O(n^2)$. Uogólniony algorytm Hornera pozwala uniknąć tego problemu, przekształcając obliczenia w prostą procedurę rekurencyjnego „zwijania” wielomianu.
Zaczynamy od najwyższego współczynnika (ilorazu różnicowego rzędu n) i cofamy się w dół, w każdej iteracji doklejając czynnik $(t - x_i)$ oraz dodając współczynnik niższego rzędu. Dzięki temu wielomian jest budowany krok po kroku, bez potrzeby jawnego rozwijania wszystkich iloczynów.

Opis kroków

1. Ustaw zmienną pomocniczą $w \leftarrow fx[n+1]$, czyli najwyższy współczynnik.
2. Dla $i = n, n-1, \ldots, 1$ wykonaj:

$$w \leftarrow w \cdot (t - x[i]) + fx[i].$$

3. Po zakończeniu pętli zmienna w zawiera wartość wielomianu Newtona w punkcie t.

Złożoność

- Czasowa: $O(n)$, ponieważ wykonujemy dokładnie n kroków.
- Pamięciowa: $O(1)$, ponieważ używana jest tylko jedna zmienna pomocnicza w.

Zadanie 3

Algorytm przekształcania wielomianu Newtona do postaci naturalnej

Wejście

- Wektor węzłów $x = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ długości $n + 1$.
- Wektor ilorazów różnicowych $fx = [f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, \ldots, x_n]]$ długości $n + 1$.

Wyjście

- Wektor współczynników postaci naturalnej $a = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$, gdzie

$$N_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Idea działania

Wielomian Newtona zapisany jest w postaci iloczynowej z ilorazami różnicowymi jako współczynnikami. Aby uzyskać jego postać naturalną, należy kolejno rozwijać czynniki $(x - x_i)$ i aktualizować współczynniki wielomianu. Algorytm działa iteracyjnie: zaczyna od najwyższego współczynnika $fx[n+1]$, a następnie w każdej iteracji „dokleja" kolejny czynnik $(x - x_k)$, przesuwając współczynniki w dół i dodając odpowiedni iloraz różnicowy. Dzięki temu po n krokach powstaje pełny wektor współczynników postaci naturalnej.

Opis kroków

1. Utwórz wektor a długości $n + 1$ i wypełnij zerami.
2. Ustaw $a[n + 1] \leftarrow fx[n + 1]$ (najwyższy współczynnik Newtona).
3. Dla $k = n, n - 1, \ldots, 1$:
   (a) Dla $j = k, k - 1, \ldots, 1$ wykonaj:
   $$a[j] \leftarrow a[j] - x[k] \cdot a[j + 1].$$
   (b) Następnie zaktualizuj:
   $$a[k] \leftarrow a[k] + fx[k].$$
4. Po zakończeniu pętli wektor a zawiera współczynniki postaci naturalnej.

Złożoność

- Czasowa: $O(n^2)$, ponieważ każda z n iteracji wymaga aktualizacji do n współczynników.
- Pamięciowa: $O(n)$, ponieważ przechowywany jest tylko wektor wynikowy a.

Zadanie 4

Algorytm rysowania wielomianu interpolacyjnego Newtona

Wejście

- Funkcja $f(x)$ zadana jako anonimowa funkcja.

- Przedział interpolacji $[a, b]$.
- Stopień wielomianu interpolacyjnego n.

Wyjście

- Wykres przedstawiający na jednym rysunku:
  1. interpolowaną funkcję $f(x)$,
  2. wielomian interpolacyjny Newtona $N_n(x)$.

Idea działania

Algorytm konstruuje wielomian interpolacyjny Newtona na podstawie wartości funkcji w wybranych węzłach interpolacji. Węzły są równoodległe w przedziale $[a, b]$. Najpierw obliczane są wartości funkcji w tych punktach, a następnie ilorazy różnicowe, które stanowią współczynniki postaci Newtona. Do obliczania wartości wielomianu w dowolnym punkcie wykorzystuje się funkcję `warNewton`, która działa w czasie liniowym $O(n)$.
Aby narysować przebieg funkcji i wielomianu, algorytm tworzy gęstą siatkę punktów w przedziale $[a, b]$, oblicza w nich wartości zarówno funkcji $f(x)$, jak i interpolantu $N_n(x)$, a następnie rysuje oba przebiegi na jednym wykresie. Dzięki temu można wizualnie porównać jakość interpolacji.

Opis kroków

1. Utwórz wektory x i y długości $n + 1$.
2. Wyznacz równoodległe węzły $x_k = a + k \cdot h$, gdzie $h = \frac{b-a}{n}$, oraz oblicz wartości $y_k = f(x_k)$.
3. Oblicz współczynniki Newtona c za pomocą funkcji `ilorazyRoznicowe`.
4. Utwórz gęstą siatkę punktów xs w przedziale $[a, b]$.
5. Dla każdego punktu $xs[i]$ oblicz:
   - wartość wielomianu Newtona $poly[i] = warNewton(x, c, xs[i])$,
   - wartość funkcji $func[i] = f(xs[i])$.
6. Narysuj wykres funkcji i wielomianu interpolacyjnego na tym samym rysunku.

Złożoność - zastanowić się jeszcze

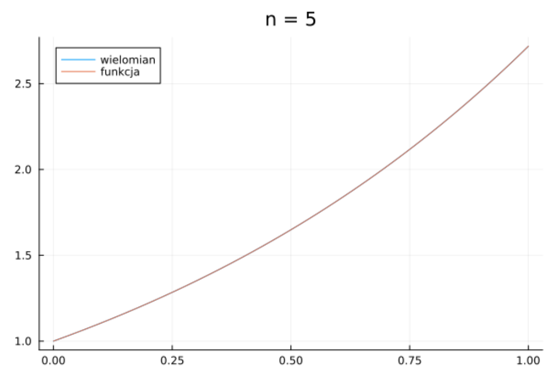
- Obliczanie ilorazów różnicowych: $O(n^2)$.
- Obliczanie wartości wielomianu w siatce: $O(n \cdot m)$, gdzie m to liczba punktów siatki.
- Pamięciowa: $O(n + m)$, na przechowywanie węzłów, wartości funkcji i wyników interpolacji.

Zadanie 5

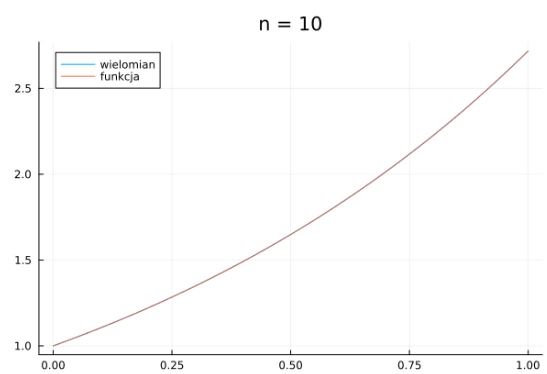
Celem zadania było wykorzystanie napisanej wcześniej funkcji `rysujNnfx(f, a, b, n, wezly)` do zaprezentowania na wykresie wyników interpolacji dla funkcji:

- $f(x) = e^x$ na przedziale $[0, 1]$
- $f(x) = x^2 \cdot sin(x)$ na przedziale $[-1, 1]$

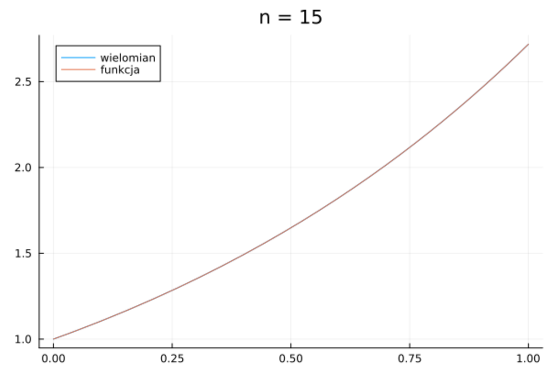
Stopnie wielomianu: 5, 10, 15. Węzły - równoodległe.
Poniżej znajdują się wykresy dla $f(x) = e^x$.



Rysunek 1: n = 5

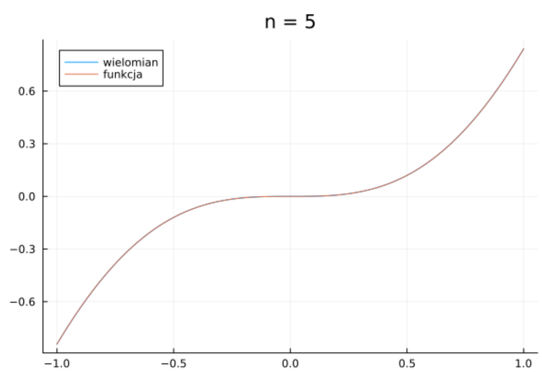


Rysunek 2: n = 10

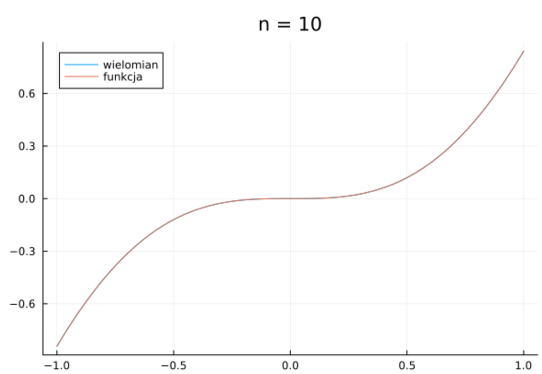


Rysunek 3: n = 15

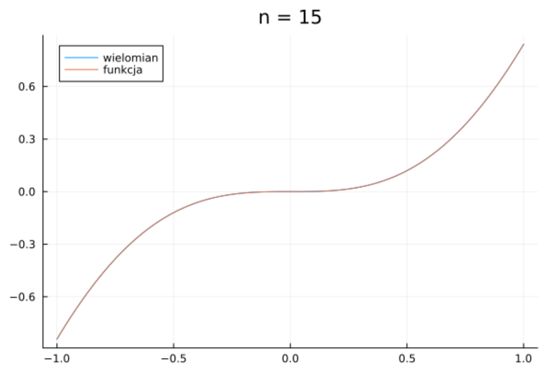
A oto wyniki dla $f(x) = x^2 \cdot sin(x)$



Rysunek 4: n = 5



Rysunek 5: n = 10



Rysunek 6: n = 15

Wnioski

Możemy zauważyć, że obydwie testowane funckje udaje się bardzo dokładnie interpolować. Wartości wielomianów interpolacyjnych dla każdego ze sprawdzanych stopni (5, 10, 15) niemal praktycznie idealnie pokrywają się z wartościami funkcji na całym przedziale.

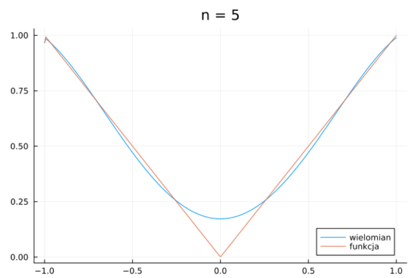
Zadanie 6

W tym zadaniu również należało użyć `rysujNnfx(f, a, b, n, wezly)` jednak tym razem dla funkcji:

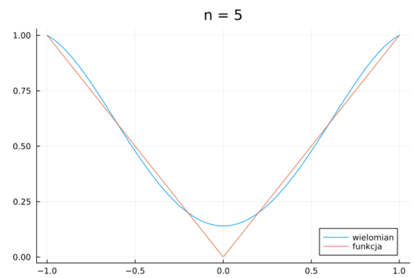
- $f(x) = |x|,\ x \in [-1, 1]$
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x \in [-5, 5]$

Stopnie wielomianu, tak jak w poprzednim zadaniu: 5, 10, 15. Węzły - równoodległe i Czebyszewa.

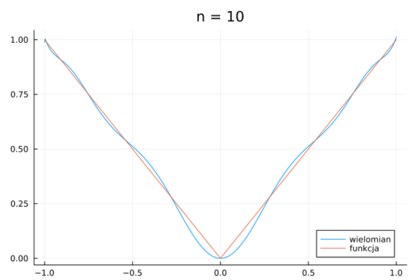
Wyniki dla $f(x) = |x|$



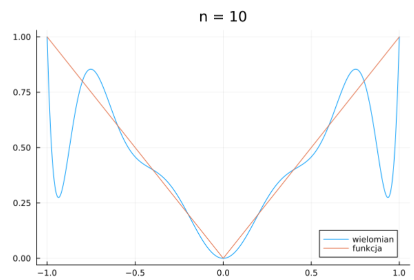
Rysunek 7: czebyszew, n = 5



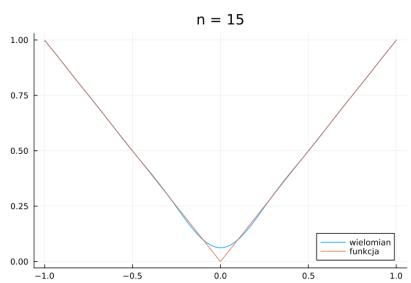
Rysunek 8: równoodległe, n = 5



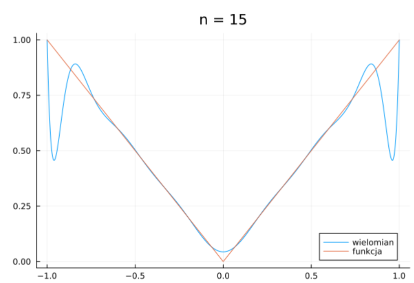
Rysunek 9: czebyszew, n = 10



Rysunek 10: równoodległe, n = 10

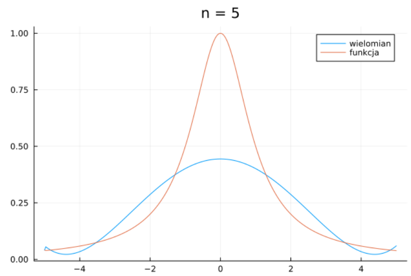


Rysunek 11: czebyszew, n = 15

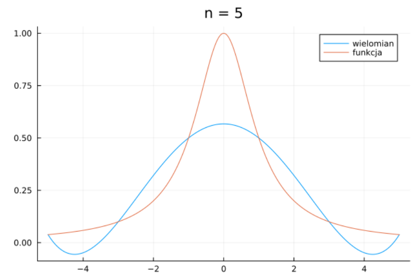


Rysunek 12: równoodległe, n = 15

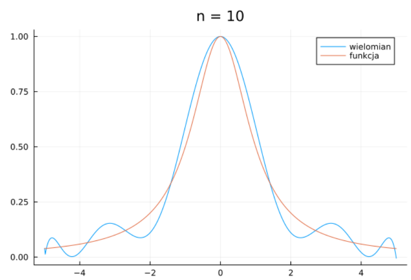
Wyniki dla $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$



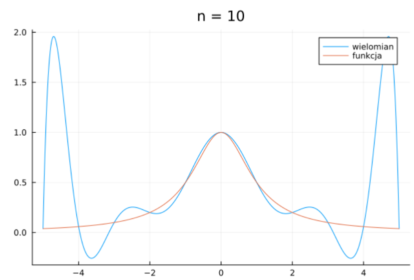
Rysunek 13: czebyszew, n = 5



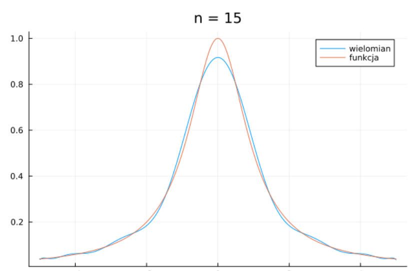
Rysunek 14: równoodległe, n = 5



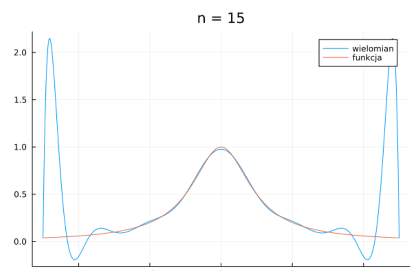
Rysunek 15: czebyszew, n = 10



Rysunek 16: równoodległe, n = 10



Rysunek 17: czebyszew, n = 15



Rysunek 18: równoodległe, n = 15

W przeciwieństwie do poprzedniego zadania funckje nie są zbyt dokładnie interpolowane. W przypadku $|x|$ problelem jest nieróżniczkowalność takiej funkcji. Widzimy, że największy problem jest z dokładnym odwzorowaniem ostrego czubka na wykresie wartości bezwzględnej z x. Dla drugiej funkcji zauważamy zwiększenie rozbieżności między funkcją a interpolacją. Jest to tak zwane zjawisko Rungego. Pojawia się ono tylko w przypadku węzłów równoodległych. Zwiększyć dokładność mogłoby pomóc zwiększenie liczby węzłów na krańcach przedziału.

Wnioski

Okazuje się, że interpolacja lepiej sprawdza się w przypadku gładkich funkcji np. takich jak w zadaniu 5. Jednak nawet gdy kształt funkcji wydaje się być pożądany, tak jak w podpunkcie b w zadaniu 6, może się okazać, że trzeba również rozsądnie przemyśleć rozstawienie węzłów interpolacji. Zwiększanie stopnia wielomianu w tym wypadku nic nie pomoże, a dokładniejsze wyniki uzyskamy korzystając z innej metody wyznaczania węzłów (w przypadku zadania 6 jest to metoda Czebyszewa).