Dowód nieregularności języka $L = \{ww^R : w \in \{0,1\}^+, w \neq \varepsilon\}$

Zofia Tarchalska

Rozważamy język:

$$L = \{ww^R : w \in \{0,1\}^+, w \neq \varepsilon\},$$

gdzie $w^R$ oznacza słowo $w$ zapisane w odwrotnej kolejności.

## Twierdzenie

Język $L$ nie jest regularny.

## Dowód

Załóżmy nie wprost, że $L$ jest regularny. Wtedy spełnia lemat o pompowaniu dla języków regularnych. Niech $p$ będzie długością pompowania wynikającą z lematu o pompowaniu.
Weźmy słowo:

$$s = 0^p 1 1 0^p,$$

które należy do $L$, ponieważ można je zapisać jako $s = ww^R$ dla $w = 0^p 1$.
Zgodnie z lematem o pompowaniu istnieje rozkład $s = xyz$ taki, że:

$$|xy| \leq p, \quad |y| > 0.$$

Warunek $|xy| \leq p$ oznacza, że zarówno $x$, jak i $y$ składają się wyłącznie z pierwszego segmentu zer. Zatem:

$$y = 0^k \quad \text{dla pewnego } k \geq 1.$$

Napompujmy słowo, biorąc $i = 2$. Otrzymujemy słowo:

$$s' = xy^2z = 0^{p+k} 1 1 0^p.$$

Jeśli $s'$ należałoby do $L$, to musiałoby mieć postać $uu^R$, co wymaga, aby liczba zer przed środkowymi jedynkami była równa liczbie zer po nich. Jednak:

$$p + k \neq p,$$

co prowadzi do sprzeczności.
Zatem założenie, że $L$ jest regularny, jest fałszywe.

$\square$