KODUTÖÖ 3

Taavi Tammaru

1

teeme kindlaks funktsiooni $t = \phi(\tau)$ analüütilise kuju.

kui keerame graafikut külili siis saame funktsiooni τ jaoks t järgi.

$$\tau = f(t) = \frac{\alpha}{2} + bt^2$$

kus b on lineaarliige

teame seost $f(\alpha) = \alpha$, seega $\frac{\alpha}{2} + b\alpha^2 = \alpha$

$$b\alpha^2 = \frac{\alpha}{2}$$

$$b = \frac{1}{2\alpha}$$

asendame tagasi avaldisse

$$\tau = f(t) = \frac{\alpha}{2} + \frac{t^2}{2\alpha}$$

avaldame t

$$\tau - \frac{\alpha}{2} = \frac{t^2}{2\alpha}$$

$$2\alpha\left(\tau - \frac{\alpha}{2}\right) = t^2$$

$$t = \sqrt{2\alpha\left(\tau - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

kasutame seost $\phi(\tau) = f^{-1}(\tau)$

$$\phi(\tau) = f^{-1}(\tau) = \sqrt{2\alpha\left(\tau - \frac{\alpha}{2}\right)}^{\,-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\alpha\left(\tau - \frac{\alpha}{2}\right)}}$$

b)

tõestame, et τ muutumisvahemik on suurem kui t muutumisvahemik

peame põhiliselt näitama $\frac{d\tau}{dt} > 1$ antud vahemikes, aga ei ole lubatud tuletisi kasutada.

2

Cauchy teoreem kehtiks peale $f(z)$ olema holomorfne ja sile.

kontrollime kas C_1 on pidev vahemikus $[0;1]$

$$\lim_{x \to 0^+} x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

sest siinuse väärtus muutub ainult 1 ja −1 vahemikus

ja x^3 läheneb 0-le

seega C_1 on pidev

saame teada kas C_1 on sile kui vaatame kas tuletis on pidev.

$$z'(x) = 1 + i\left(3x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$$

nüüd peame vaatama kas

$z'(x)$ on punktis 0 pidev

selleks vaatame $\lim_{x \to 0} 3x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$

seega ka $z'(x)$ on pidev ja C_1 sile.

meile on öeldud, et C_2 on sirglõik, millest saab järeldada, et ta on pidev ja sile

Ning C_3 jaoks on ette öeldud, et ta on sile.

Cauchy – Goursat teoreem ütleb et kinnisel joonel C

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

seega

$$\int_{C_3+C_2} f(z)\,dz = 0 \qquad \int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = -\int_{C_2} f(z)\,dz$$

mis on ülesandes soovitud tulemus

Lisaks

$$\int_{C_3} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

lahutame teise võrrandi esimesest ja saame

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{C_3} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz$$

Nagu ülesandes soovitud!

3

Saame endiselt väita $\int_C f(z)\,dz = 0$ kui ka uus C_1 definitsioon on pidev punkti 0 ümber.

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

kasutame "squeeze" teoreemi

$$-x^2 < x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) < x^2$$

$$\lim_{x \to 0} -x^2 = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

seega

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

seega saame väita $\oint_C f(z)\,dz = 0$ ka uue C_1 definitsiooni puhul