

Analüütiline Mehaanika kodutöö 9

Taavi Tammaru

Jaanuar 2023

Näitamiseks, et piirkonna pindala faasiruumis väheneb eksponentsiaalselt leiame \dot{q} ja \dot{p}

$$\begin{aligned}\dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\alpha p - \beta q\end{aligned}$$

Leiame \dot{q} ja \dot{p} divergentsi

$$\nabla \cdot (\dot{q}, \dot{p}) = \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = -\alpha$$

kasutame divergentsusteoreemi

$$\frac{d}{dt}s(t) = \int \int (\nabla \cdot (\dot{q}, \dot{p})) dA = -\alpha \int \int dA = -\alpha s(t)$$

Saame lihtsa diferentsiaalvõrrandi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}s(t) &= -\alpha s(t) \\ s(t) &= s(0)e^{-\alpha t}\end{aligned}$$

1.

Tulemus ei ole vastuolus Liouville'i teoreemiga, sest Liouville'i teoreem eeldab, et süsteemis kehtib energia jäävuse seadus. Ühedimensioonilise sumbuva võnkumise puhul, teame, et süsteemi koguenergia järjest väheneb.

2.

Defineerime vektori x kui

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}$$

Siis saame algse liikumisvõrrandi kirjutada kui:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\beta x_1 - \alpha x_2 \end{pmatrix} = F(x, t)$$

Ehk liikumisvõrrandid dünaamilise süsteemina on:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 - \alpha x_2 \end{cases}$$

(kui ma küsimusest õigesti aru sain, ma pole päris kindel)

3.

Leiame Jacobi maatriksi eelnevate liikumisvõrrandite kaudu:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}$$

Et leida tasakaalutingimusi siis leiame omavektorid. Selleks võtame determinandi omaväärtusvõrrandist.

$$\det(J - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta & -\alpha - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Sellest saame:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta &= 0 \\ \lambda_1 &= -\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \\ \lambda_2 &= -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \end{aligned}$$

4.

Joonistada ei oska, vabandan :(