Lahtine võistlus 2021 sügis

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Artur Avameri
Urve Kangro
Oleg Košik
Aleksei Lissitsin
Härmel Nestra
Heiki Niglas
Erik Paemurru
Martin Rahe
Ago-Erik Riet
Sandra Schumann
Hendrik Vija

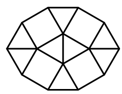
Matemaatika lahtine võistlus

25. september 2021 **Noorem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Kas leidub selline positiivne täisarv, mille
   a) numbrite summa on 100 võrra suurem tema numbrite korrutisest?
   b) numbrite korrutis on 100 võrra suurem tema numbrite summast?
   c) numbrite korrutis on 100 korda suurem tema numbrite summast?

2. Joonisel on mängulaud, mis jaotatud kolmnurkseteks ja nelinurkseteks väljadeks. Kas on võimalik nupuga mingilt väljalt alustades käia läbi kõik väljad täpselt ühe korra ja jõuda algsele väljale tagasi, kui



   a) igal sammul tohib mingilt väljalt minna vaid mõnele temaga ühist külge omavale väljale?
   b) igal sammul tohib mingilt väljalt minna vaid mõnele temaga ühist tippu, kuid mitte ühist külge omavale väljale?
   c) igal sammul tohib mingilt väljalt minna vaid mõnele temaga ühist külge või tippu omavale väljale?

3. Kas leidub selline positiivne täisarv n, et esitades arvu n kõikvõimalikel viisidel mingite positiivsete täisarvude a ja b korrutisena, esineb iga number $0, 1, \ldots, 9$ vähemalt ühe astme a^b viimase numbrina?

4. Leia avaldise

$$\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 9} + \frac{4 \cdot 6}{9 \cdot 11} + \ldots + \frac{1009 \cdot 1011}{2019 \cdot 2021}$$

väärtus.

5. Ringjoone ω keskpunkt on O ja üks diameeter on AB. Ringjoon keskpunktiga B lõikab ringjoont ω punktis C ja tema diameetrit AB punktis D. Sirge CD lõikab ringjoont ω punktis E ($E \neq C$). Sirgete OE ja BC lõikepunkt on F.
   a) Tõesta, et kolmnurk OBF on võrdhaarne.
   b) Leia suhe $\dfrac{|FB|}{|BD|}$, kui on teada, et D on lõigu OB keskpunkt.

6. *Põld* on 2020×2021 ruudustik, mille igasse ruutu on kirjutatud üks positiivne täisarv nii, et üheski reas ega üheski veerus ei esine ükski arv korduvalt. *Sibul* koosneb 4 ühes reas või ühes veerus vahetult üksteisele järgnevast ühikruudust, milles olevate arvude summa on täpselt $4 \cdot 2021$. Tee kindlaks suurim arv sibulaid, mis saab põllul olla.
Märkus. Erinevad sibulad võivad osaliselt kattuda.

Matemaatika lahtine võistlus

25. september 2021 **Vanem rühm**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.

1. Leia kõik täisarvud a, mille korral a^2 ei sisalda muid numbreid peale 0 ja 2.

2. Matemaatika harjutamiseks kirjutab Juku vihiku esimesele reale arvu 43. Igale järgmisele reale kirjutab ta ruutfunktsiooni $y = x^2 - 66x + 1122$ väärtuse kohal x, kus x väärtus on viimati vihikusse kirjutatud arv. Leia arv, mille Juku kirjutab järjekorras 2021. reale.

3. Nimetame algarvu p *nunnuks*, kui leidub algarv q, mille korral $pq - 2$ ja $pq + 2$ on samuti algarvud. Nimetame arvu p *imeliseks*, kui nii p kui ka $p + 2$ on nunnud algarvud. Leia kõik imelised arvud.

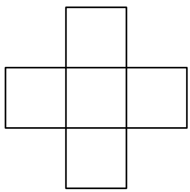
4. Funktsioon $f(x)$ on määratud kõigil reaalarvudel ja omandab reaalarvulisi väärtusi, rahuldades mistahes reaalarvude x ja y korral võrrandit

$$2f(x)\left(f(y)\right)^2 + y^2 f\left(-x|y|\right) = f\left(xy^2\right).$$

Leia kõik võimalused, mis saab olla $f(1)$.

5. Olgu H teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Olgu M külje BC keskpunkt. Olgu A' ja H' vastavalt punktide A ja H peegeldused punktist M. Tõesta, et punktid B ja C ning punkti A' peegeldused sirgetest BH' ja CH' asuvad ühel ringjoonel.

6. Olgu m ja n naturaalarvud, mis on suuremad arvust 2. Ruudustikus mõõtmetega $m \times n$ asub igal ühikruudul üks lamp, mis võib kas põleda või mitte põleda. Ümber lülitada (põlevast mittepõlevaks ja vastupidi) saab korraga viis suvalises olekus lampi, mis asuvad ristina paiknevatel ühikruutudel (vt joonis). Alguses ükski lamp ei põle. Mitu erinevat põlevate lampide asetust saab nende lülitustega tekitada? Asetused, mis saadakse üksteisest pööramise või peegeldamise teel, loetakse erinevaks.



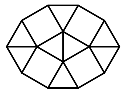
Открытое соревнование по математике

25 сентября 2021 г. **Младшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найдётся ли такое положительное целое число, у которого
   а) сумма цифр на 100 больше их произведения?
   б) произведение цифр на 100 больше их суммы?
   в) произведение цифр в 100 раз больше их суммы?

2. Игровое поле на рисунке разделено на треугольные и четырёхугольные клетки. Можно ли, начав с какой-нибудь клетки, пройти фишкой все клетки ровно по одному разу и вернутся обратно на начальную клетку, если на каждом шагу с какой-либо клетки можно перейти только на клетку,



   а) имеющую с ней общую сторону?
   б) имеющую с ней общую вершину, но не общую сторону?
   в) имеющую с ней общую вершину или общую сторону?

3. Найдётся ли такое положительное целое число n, что представляя число n всеми возможными способами произведением положительных целых чисел a и b, каждая из цифр $0, 1, \ldots, 9$ будет являться последней цифрой хотя бы одной степени a^b?

4. Найти значение выражения

$$\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 9} + \frac{4 \cdot 6}{9 \cdot 11} + \ldots + \frac{1009 \cdot 1011}{2019 \cdot 2021}.$$

5. Обозначим центр окружности ω через O, а один из её диаметров через AB. Окружность с центром в точке B пересекает окружность ω в точке C и её диаметр AB в точке D. Прямая CD пересекает окружность ω в точке E ($E \neq C$). Прямые OE и BC пересекаются в точке F.
   а) Доказать, что треугольник OBF равнобедренный.
   б) Найти отношение $\dfrac{|FB|}{|BD|}$, если известно, что D — это середина отрезка OB.

6. В каждой клетке *поля* размером 2020 × 2021 клеток записано одно положительное целое число так, что ни в одном ряду и ни в одном столбце числа не повторяются. *Луковица* состоит из расположенных в одном ряду или в одном столбце и следующих непосредственно друг за другом 4 клеток, сумма чисел в которых оказывается ровно $4 \cdot 2021$. Найти наибольшее число луковиц, которые могут находиться на поле.

Примечание. Различные луковицы могут частично перекрываться.

Открытое соревнование по математике

25 сентября 2021 г. **Старшая группа**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.

1. Найти все целые числа a, при которых a^2 не содержит никаких цифр кроме 0 и 2.

2. Упражняясь в математике, Петя записывает на первой строчке тетради число 43. На каждой из следующих строчек он записывает значение квадратичной функции $y = x^2 - 66x + 1122$ в точке x, где x — это предыдущее записанное в тетрадку число. Найти число, которое Петя запишет на 2021-й строчке.

3. Назовём простое число p *миленьким*, если найдётся такое простое число q, что как $pq - 2$, так и $pq + 2$ также будут простыми числами. Назовём число p *чудесным*, если как p, так и $p + 2$ миленькие простые числа. Найти все чудесные числа.

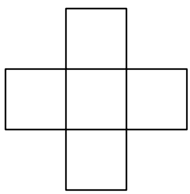
4. Функция $f(x)$ определена на всех действительных числах и принимает действительные значения, удовлетворяя при любых действительных числах x и y уравнению

$$2f(x)\left(f(y)\right)^2 + y^2 f\left(-x|y|\right) = f\left(xy^2\right).$$

Найти все возможности, чему может равняться $f(1)$.

5. Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Пусть M — середина стороны BC. Пусть A' и H' — соответственно отражения точек A и H относительно точки M. Доказать, что точки B, C и отражения точки A' относительно прямых BH' и CH' лежат на одной окружности.

6. Пусть m и n — натуральные числа, большие числа 2. В клетчатом поле $m \times n$ в каждой клетке находится по одной лампе, каждая из которых может или гореть, или не гореть. Переключить (из горящей в негорящую и наоборот) можно одновременно пять ламп в любом состоянии, находящихся в клетках, расположенных в форме креста (см. рисунок). Изначально ни одна лампа не горит. Сколько возможных расположений горящих ламп можно создать такими переключениями? Расположения, получающиеся одно из другого путём отражения или поворота, считаются различными.



Matemaatika lahtine võistlus

25. september 2021 **Noorem rühm**

Lahendused

1. *(Oleg Košik)*

Kas leidub selline positiivne täisarv, mille

a) numbrite summa on 100 võrra suurem tema numbrite korrutisest?
b) numbrite korrutis on 100 võrra suurem tema numbrite summast?
c) numbrite korrutis on 100 korda suurem tema numbrite summast?

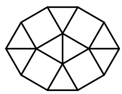
Vastus: a) jah; b) jah; c) jah.

Lahendus.

a) Sobib näiteks arv $111\ldots1$, milles on kokku 101 ühte. Tema numbrite korrutis on 1 ning numbrite summa 101.
b) Sobib näiteks arv 1111112345. Tema numbrite korrutis on 120 ning numbrite summa 20.
c) Sobib näiteks arv 1225555. Tema numbrite korrutis on 2500 ning numbrite summa 25.

2. *(Härmel Nestra)*

Joonisel on mängulaud, mis jaotatud kolmnurkseteks ja nelinurkseteks väljadeks. Kas on võimalik nupuga mingilt väljalt alustades käia läbi kõik väljad täpselt ühe korra ja jõuda algsele väljale tagasi, kui

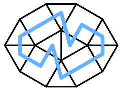


a) igal sammul tohib mingilt väljalt minna vaid mõnele temaga ühist külge omavale väljale?
b) igal sammul tohib mingilt väljalt minna vaid mõnele temaga ühist tippu, kuid mitte ühist külge omavale väljale?
c) igal sammul tohib mingilt väljalt minna vaid mõnele temaga ühist külge või tippu omavale väljale?

Vastus: a) ei; b) ei; c) jah.

Lahendus.

a) Oletame, et küsitud teekond leidub. Kolmnurksetelt väljadelt, mis piirnevad mängulaua servaga, on ligipääs ainult kahele naaberväljale, mis samuti piirnevad mängulaua servaga. Sellest tulenevalt peab vaadeldav teekond need kolmnurksed väljad koos nende naaberväljadega läbima järjest. Nii tekib teekonna neli lõiku, mis kõik algavad ja lõpevad ruudukujulisel väljal ega kasuta mängulaua keskel asuvat kahte kolmnurkset välja. Et iga ruudukujuline väli on kasutusel kahe lõigu otspunktina ja teekond saab igat välja vaid korra kasutada, peaks teekond läbima kõik need neli lõiku järjest, siis aga jääksid kaks keskmist välja läbimata.



Joonis 1

b) Oletame, et küsitud teekond leidub. Nii alumiselt kui ka ülemiselt kolmnurkselt väljalt on ligipääs vaid kahele mängulaua keskel asuvale kolmnurksele väljale. Seega teekond peaks läbima nii alumist kui ka ülemist kolmnurkset välja kahe mängulaua keskel asuva kolmnurkse välja vahel. Nii aga saaks teekond läbida kokku ainult nelja välja.

c) Üks võimalik teekond on näidatud joonisel 1 sinise joonega.

3. *(Härmel Nestra)*

Kas leidub selline positiivne täisarv n, et esitades arvu n kõikvõimalikel viisidel mingite positiivsete täisarvude a ja b korrutisena, esineb iga number $0, 1, \ldots, 9$ vähemalt ühe astme a^b viimase numbrina?

Vastus: ei.

Lahendus. Oletame, et selline arv n leidub. Ühegi täisarvu ruut ei lõpe numbriga 7. Seega a^b saab lõppeda numbriga 7 vaid paaritute astendajate b korral. Ka a peab olema paaritu, muidu oleks a^b paaris ja lõpeks paarisnumbriga. Siis aga ab ehk n on paaritu. Paaritut arvu saab aga esitada ainult paaritute tegurite korrutisena. Paaritu arvu astendamisel on võimalik saada vaid paarituid arve, mis lõpevad paaritu numbriga. Seega pole võimalik saada arvu n tegurite astendamisel tulemuseks paarisnumbriga lõppevat arvu. See on vastuolus ülesande tingimustega.

4. *(Urve Kangro)*

Leia avaldise

$$\frac{1\cdot 3}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 4}{5\cdot 7}+\frac{3\cdot 5}{7\cdot 9}+\frac{4\cdot 6}{9\cdot 11}+\ldots+\frac{1009\cdot 1011}{2019\cdot 2021}$$

väärtus.

Vastus: $\dfrac{505\cdot 1009}{2021}$ ehk $\dfrac{509545}{2021}$ ehk $252+\dfrac{253}{2021}$.

Lahendus 1. Summa koosneb 1009 liidetavast, kusjuures järjekorras i-s liidetav avaldub kujul $\dfrac{i(i+2)}{(2i+1)(2i+3)}$. Olgu otsitav summa s. Paneme tähele, et

$$\frac{i(i+2)}{(2i+1)(2i+3)}=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(2i+1)(2i+3)}=\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{1}{2i+1}-\frac{1}{2i+3}\right).$$

Seega

$$\begin{aligned}
s &= 1009 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \cdot \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{2019} - \frac{1}{2021} \right) \right) = \\
&= \frac{1009}{4} - \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2021} \right) = \\
&= \frac{1009}{4} - \frac{3}{8} \cdot \frac{2021 - 3}{3 \cdot 2021} = \frac{1009}{4} - \frac{2018}{8 \cdot 2021} = \frac{1009}{4} - \frac{1009}{4 \cdot 2021} = \\
&= \frac{1009}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{2021} \right) = \frac{1009}{4} \cdot \frac{2020}{2021} = \frac{505 \cdot 1009}{2021} = \frac{509545}{2021}.
\end{aligned}$$

Lahendus 2. Paneme tähele, et liites järjest kokku summa esimesi liidetavaid, saame vahetulemusteks $\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{6}{9}, \frac{10}{11}$ jne ehk üldiselt n esimese liidetava puhul on lugejas arv $1 + \ldots + n$ ehk $\frac{n(n+1)}{2}$ ja nimetajas arv $2n + 3$. Tõestame selle väite matemaatilise induktsiooniga. Tähistagu s_n esimese n liidetava summat; vaja on tõestada valem

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2(2n+3)}. \tag{1}$$

Ilmselt $s_1 = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{1}{5}$ ning samuti $\frac{1 \cdot (1+1)}{2 \cdot (2 \cdot 1 + 3)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, seega valem (1) kehtib juhul $n = 1$. Oletame nüüd, et valem (1) kehtib mingi suvalise naturaalarvu $n = k$ jaoks, ja näitame, et ta kehtib ka järgmise naturaalarvu $n = k + 1$ korral. Ühelt poolt, kasutades valemi (1) kehtivust $n = k$ jaoks, saame

$$\begin{aligned}
s_{k+1} &= s_k + \frac{(k+1)((k+1)+2)}{(2(k+1)+1)(2(k+1)+3)} = s_k + \frac{(k+1)(k+3)}{(2k+3)(2k+5)} = \\
&= \frac{k(k+1)}{2(2k+3)} + \frac{(k+1)(k+3)}{(2k+3)(2k+5)} = \frac{k(k+1)(2k+5) + 2(k+1)(k+3)}{2(2k+3)(2k+5)} = \\
&= \frac{(k+1)\,(k(2k+5) + 2(k+3))}{2(2k+3)(2k+5)} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{2(2k+3)(2k+5)}.
\end{aligned}$$

Teisalt aga

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2(2(k+1)+3)} &= \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+5)} = \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{2(2k+5)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{2(2k+3)(2k+5)}.
\end{aligned}$$

Järelikult kehtib valem (1) ka $n = k + 1$ korral.

Valemist (1) tulenevalt $s_{1009} = \frac{1009 \cdot 1010}{2(2 \cdot 1009 + 3)} = \frac{1009 \cdot 505}{2021}$.

5. *(Sandra Schumann, Oleg Košik)*

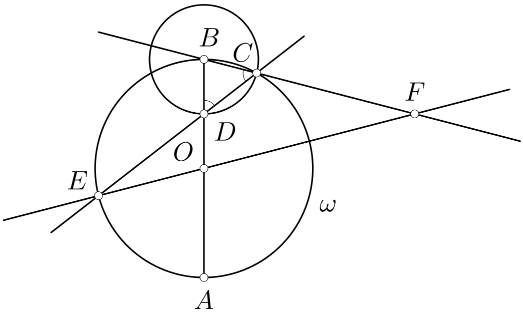
Ringjoone ω keskpunkt on O ja üks diameeter on AB. Ringjoon keskpunktiga B lõikab ringjoont ω punktis C ja tema diameetrit AB punktis D. Sirge CD lõikab ringjoont ω punktis E ($E \neq C$). Sirgete OE ja BC lõikepunkt on F.

a) Tõesta, et kolmnurk OBF on võrdhaarne.

b) Leia suhe $\frac{|FB|}{|BD|}$, kui on teada, et D on lõigu OB keskpunkt.

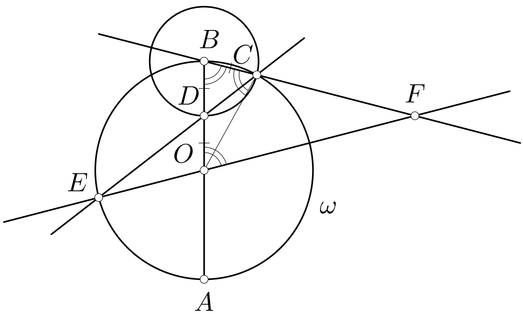
Vastus: b) 4.

Lahendus.



Joonis 2

a) Kuna võrdsetest raadiustest $|BC| = |BD|$, on kolmnurk BCD võrdhaarne (joonis 2). Olgu $\angle BCD = \alpha$; siis kolmnurgast BCD saame ka $\angle BDC = \alpha$ ja $\angle CBD = 180^\circ - 2\alpha$. Piirde- ja kesknurga vahelisest seosest saame $\angle BOE = 2\angle BCE = 2\angle BCD = 2\alpha$, mistõttu $\angle BOF = 180^\circ - 2\alpha$. Et eelneva põhjal ka $\angle OBF = \angle CBD = 180^\circ - 2\alpha$, on kolmnurk OBF võrdhaarne.



Joonis 3

b) Võrdsete raadiuste tõttu on võrdhaarne ka kolmnurk OBC, kusjuures võrdhaarsel kolmnurgal OBF on selle kolmnurgaga ühine alusnurk tipu B juures (joonis 3). Seega kolmnurgad OBF ja CBO on sarnased tunnuse NN alusel. Ülesande tingimuste põhjal $|OB| = 2|BD| = 2|BC|$, seega sarnasuse tõttu ka $|FB| = 2|OB|$. Kokkuvõttes $|FB| = 4|BD|$, kust $\frac{|FB|}{|BD|} = 4$.

6. *(Erik Paemurru)*

Põld on 2020×2021 ruudustik, mille igasse ruutu on kirjutatud üks positiivne täisarv nii, et üheski reas ega üheski veerus ei esine ükski arv korduvalt. *Sibul* koosneb 4 ühes reas või ühes veerus vahetult üksteisele järgnevast ühikruudust, milles olevate arvude summa on täpselt $4 \cdot 2021$. Tee kindlaks suurim arv sibulaid, mis saab põllul olla.

Märkus. Erinevad sibulad võivad osaliselt kattuda.

Vastus: $1009 \cdot 4041$.

Lahendus. Ühte veergu pikkusega 2020 mahub 2017 erinevat 4×1 alamruudustikku. Kaks järjestikust 4×1 alamruudustikku ei saa olla mõlemad sibulad, sest neil on 3 ühist ruutu, millest tulenevalt peaksid kummagi sibula ülejäänud ruutudel olema samad arvud, see on aga vastuolus tingimusega, et kõik arvud samas veerus on erinevad. Seega ei saa üheski veerus olla rohkem kui 1009 sibulat. Analoogselt ei saa ka üheski reas pikkusega 2021 olla rohkem kui 1009 sibulat. Et ridu ja veerge on kokku $2020 + 2021$ ehk 4041, ei saa põllul olla rohkem kui $1009 \cdot 4041$ sibulat.

Näitame, et leidub põld $1009 \cdot 4041$ sibulaga. Selleks konstrueerime algul 2020×2020 ruudustiku, valides esimesse kahte ritta järjest arvud

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots, & \ldots, & 1009, & -1009, & 1010, & -1010, \\ -1, & 1, & -2, & 2, & -3, & 3, & \ldots, & \ldots, & -1009, & 1009, & -1010, & 1010. \end{array}$$

Järgmisse kahte ritta valime samad arvud nihutatult tsükliliselt kahe ruudu võrra vasakule:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr} 2, & -2, & 3, & -3, & \ldots, & \ldots, & 1009, & -1009, & 1010, & -1010, & 1, & -1, \\ -2, & 2, & -3, & 3, & \ldots, & \ldots, & -1009, & 1009, & -1010, & 1010, & -1, & 1. \end{array}$$

Samamoodi jätkates täidame ka ülejäänud read. Seejärel lisame parempoolseima veeru arvudega

$$1011, -1011, 1012, -1012, \ldots, 2019, -2019, 2020, -2020.$$

Soovitud põllu saame, asendades kõik negatiivsed arvud $-a$ vastava positiivse arvuga $2 \cdot 2021 - a$.

Lahendused

1. *(Hendrik Vija)*

Leia kõik täisarvud a, mille korral a^2 ei sisalda muid numbreid peale 0 ja 2.

Vastus: 0.

Lahendus 1. Oletame, et leidub positiivne täisarvu ruut, mis ei sisalda muid numbreid peale 0 ja 2. Olgu a^2 sellistest vähim. Vastavalt ülesande tingimustele saavad arvu a^2 kaks viimast numbrit olla kas 00, 02, 20 või 22.

Kui arvu a^2 viimased kaks numbrit on 02 või 22, siis ta jagub 2-ga, aga mitte 4-ga. Kuid iga täisruut, mis jagub 2-ga, peab jaguma ka 4-ga, vastuolu.

Kui arvu a^2 viimased kaks numbrit on 20, siis arv jagub 5-ga, kuid mitte 25-ga. Kuid iga täisruut, mis jagub 5-ga, peab jaguma ka 25-ga, vastuolu.

Seega on arvu viimased kaks numbrit 00. Kuid siis $a^2 = 100b^2$, kus b^2 on omakorda positiivse täisarvu ruut. See aga annab vastuolu eeldusega, et a^2 on vähim ülesande tingimusi rahuldav positiivne täisarvu ruut. Seega selliseid arve ei leidu ehk ainus võimalus on $a^2 = 0$. Siis ka $a = 0$.

Lahendus 2. Vaatame nullist erinevat täisarvu a. Olgu a^2 viimased n numbrit nullid ja neile eelnev number 2. Siis saame avaldada $a^2 = m \cdot 10^n$, kus m on numbriga 2 lõppev naturaalarv.

Arvu m viimased kaks numbrit on kas 02 või 22, mõlemal juhul m jagub 2-ga, kuid mitte 4-ga. Lõppemisest 2-ga on ilmne, et m ei jagu 5-ga. Seega algarvu 5 astendaja arvu a^2 kanoonilises esituses on n ja algarvu 2 oma $n+1$.

Täisruudu kanoonilises esituses on kõigi algtegurite astendajad paaris, kuid n ja $n+1$ on erineva paarsusega. Seega a^2 ei saa olla täisruut ehk ainus võimalus on $a = 0$, mis ilmselgelt sobib.

2. *(Heiki Niglas)*

Matemaatika harjutamiseks kirjutab Juku vihiku esimesele reale arvu 43. Igale järgmisele reale kirjutab ta ruutfunktsiooni $y = x^2 - 66x + 1122$ väärtuse kohal x, kus x väärtus on viimati vihikusse kirjutatud arv. Leia arv, mille Juku kirjutab järjekorras 2021. reale.

Vastus: $10^{2^{2020}} + 33$.

Lahendus. Tähistagu x_i arvu, mille Juku kirjutab vihiku i-ndale reale; siis iga $i = 1, 2, \ldots$ korral $x_{i+1} = x_i^2 - 66x_i + 1122$. Paneme tähele, et viimane valem on viidav samaväärsele kujule $x_{i+1} - 33 = x_i^2 - 66x_i + 1089 = (x_i - 33)^2$. Tähistades $a_n = x_n - 33$, kehtib niisiis $a_{i+1} = a_i^2$ iga $i = 1, 2, \ldots$ korral, mis annab $a_1 = 43 - 33 = 10$, $a_2 = a_1^2 = 10^2$, $a_3 = a_2^2 = 10^4$ ning üldiselt $a_i = 10^{2^{i-1}}$. Seega $x_{2021} = a_{2021} + 33 = 10^{2^{2020}} + 33$.

3. *(Oleg Košik)*

Nimetame algarvu p *nunnuks*, kui leidub algarv q, mille korral $pq - 2$ ja $pq + 2$ on samuti algarvud. Nimetame arvu p *imeliseks*, kui nii p kui ka $p + 2$ on nunnud algarvud. Leia kõik imelised arvud.

Vastus: 3 ja 5.

Lahendus. Olgu p suvaline nunnu algarv. Arvud $pq-2$, pq ja $pq+2$ annavad 3-ga jagades kõik erinevad jäägid. Seega üks neist arvudest jagub 3-ga. Kui $pq - 2$ jaguks 3-ga, siis saaksime $pq - 2 = 3$ ehk $pq = 5$, mis pole võimalik, sest 5 on algarv, mitte kahe algarvu korrutis. Samuti kui $pq + 2$ jaguks 3-ga, siis saaksime $pq + 2 = 3$ ehk $pq = 1$, mis pole võimalik. Järelikult pq jagub 3-ga, millest tulenevalt kas p ise või q on võrdne 3-ga. Et juhul $p = 3$ sobib ka $q = 3$ (7 ja 11 on algarvud), siis on sellega tõestatud, et algarv p on nunnu parajasti siis, kui $3p - 2$ ja $3p + 2$ on algarvud.

Eelnevast tulenevalt on p imeline, kui p, $p+2$, $3p-2$, $3p+2$, $3p+4$ ja $3p+8$ on kõik algarvud. Arvud $3p - 2$, $3p$, $3p + 2$, $3p + 4$ ja $3p + 6$ annavad 5-ga jagades kõik erinevad jäägid. Seega üks neist arvudest jagub 5-ga. Kui 5-ga jagub $3p - 2$, $3p + 2$ või $3p + 4$, saame algarvulisusest vastavalt $3p - 2 = 5$, $3p + 2 = 5$ ja $3p + 4 = 5$, kuid ühegi variandi korral pole p algarv. Kui 5-ga jagub $3p$ või $3p+6$, siis peab 5-ga jaguma ka vastavalt p või $p+2$. Siit saame variandid $p = 3$ ja $p = 5$. Kontroll näitab, et mõlemad sobivad.

4. *(Erik Paemurru)*

Funktsioon $f(x)$ on määratud kõigil reaalarvudel ja omandab reaalarvulisi väärtusi, rahuldades mistahes reaalarvude x ja y korral võrrandit

$$2f(x)\left(f(y)\right)^2 + y^2 f\left(-x|y|\right) = f\left(xy^2\right).$$

Leia kõik võimalused, mis saab olla $f(1)$.

Vastus: -1, 0, 1.

Lahendus. Tähistame $f(1) = a$ ja $f(-1) = b$. Valides algses võrrandis kõigepealt $x = y = 1$ ja siis $x = y = -1$, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2a^3 + b = a \\ 2b^3 + a = b \end{cases}$$

Liites võrrandid, saame pärast sarnaste liikmete koondamist $2b^3 = -2a^3$. Seega $b = -a$. Asendades selle esimesse võrrandisse, saame $2a^3 - 2a = 0$ ehk $2a(a-1)(a+1) = 0$. Seega $f(1)$ on üks arvudest -1, 0, 1. Need väärtused on saavutatavad vastavalt funktsioonidega $f(x) = -x|x|$, $f(x) = 0$ ja $f(x) = x|x|$. Kontroll näitab, et kõik need funktsioonid rahuldavad algset võrrandit. Tõepoolest, $f(x) = 0$ puhul on see ilmne ning $f(x) = x|x|$ puhul taandub algse võrrandi vasak pool kujule $2x|x|y^4 - x|x|y^4$ ja parem pool kujule $x|x|y^4$, mis on võrdsed. Kolmanda funktsiooni kontrollimiseks piisab lihtsast tähelepanekust, et kui $f(x)$ rahuldab antud võrrandit, siis rahuldab seda ka $-f(x)$.

5. *(Hendrik Vija)*

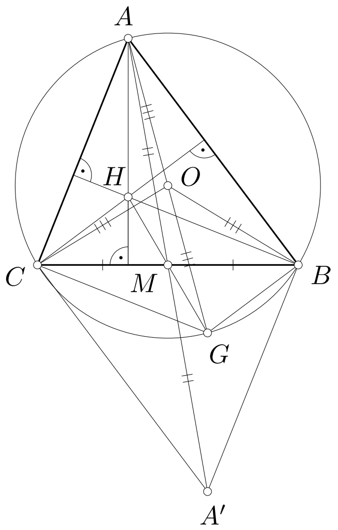
Olgu H teravnurkse kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Olgu M külje BC keskpunkt. Olgu A' ja H' vastavalt punktide A ja H peegeldused punktist M. Tõesta, et punktid B ja C ning punkti A' peegeldused sirgetest BH' ja CH' asuvad ühel ringjoonel.

Lahendus 1. Olgu O kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt ning olgu G kiire AO teine lõikepunkt kolmnurga ABC ümberringjoonega (joonis 4). Kuna AG on kolmnurga ABC ümberringjoone diameeter, siis Thalese teoreemi põhjal $BG \perp AB$ ja $CG \perp AC$. Et ka $CH \perp AB$ ja $BH \perp AC$, siis saame neist vastavalt $CG \parallel BH$ ja $BG \parallel CH$. Seega $BHCG$ on rööpkülik. Kuna rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis diagonaali BC keskpunkt M on ühtlasi lõigu HG keskpunkt. Lähtuvalt punkti H' definitsioonist $H' = G$.

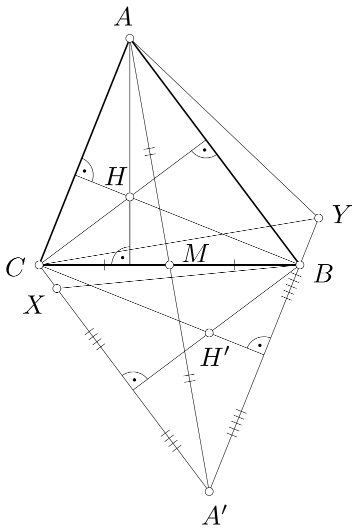
Seega eelneva põhjal $BH' \perp AB$ ja $CH' \perp AC$. Vastavalt punkti A' valikule on $ABA'C$ rööpkülik, sest diagonaalid AA' ja BC poolitavad teineteist. Järelikult $A'B \parallel AC$ ja $A'C \parallel AB$. Seega $A'B \perp CH'$ ja $A'C \perp BH'$, millest tulenevalt paiknevad punkti A' peegeldused sirgetest BH' ja CH' vastavalt kiirtel $A'C$ ja $A'B$; olgu need punktid vastavalt X ja Y (joonis 5). Eelneva põhjal ja ülesande tingimustest tulenevalt siis $CX \parallel AB$ ja $|BX| = |BA'| = |AC|$ ning analoogselt $BY \parallel AC$ ja $|CY| = |CA'| = |AB|$. Seega nelinurgad tippudega A, B, C, X ja A, B, C, Y (mitte tingimata selles järjestuses) on võrdhaarsed trapetsid kas kahe mitteparalleelse külje või diagonaalide võrdsuse tunnusel (erijuhul, kui $X = C$ või $Y = B$, on tegu võrdhaarse kolmnurgaga). Et võrdhaarne trapets on kõõlnelinurk, asuvad nii X kui ka Y kolmnurga ABC ümberringjoonel. Sellest ilmselt järeldub ülesande väide.

Lahendus 2. Paneme tähele, et nelinurgas $ABA'C$ kehtivad konstruktsiooni põhjal $|BM| = |MC|$ ja $|AM| = |MA'|$ (joonis 6). Seega tema diagonaalid poolitavad üksteist, mistõttu $ABA'C$ on rööpkülik. Sümmeetria tõttu on kolmnurgad ABC ja $A'CB$ võrdsed ning H' on kolmnurga $A'CB$ kõrguste lõikepunkt.

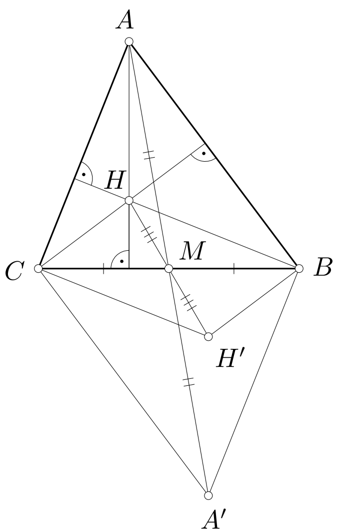
Olgu punkti A' peegeldused sirgetest BH' ja CH' vastavalt X ja Y (joonis 7). Siis $A'X \perp BH'$ ja $A'Y \perp CH'$ ning kuna H' on kolmnurga $A'CB$ kõrguste



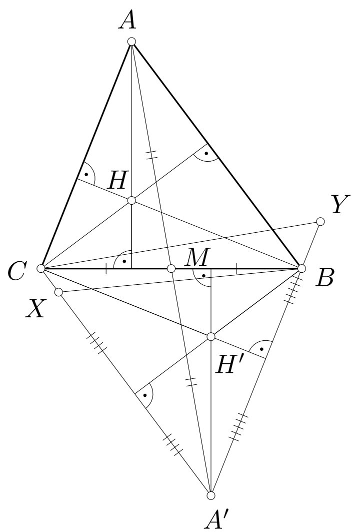
Joonis 4



Joonis 5



Joonis 6



Joonis 7

lõikepunkt, siis ka $A'C \perp BH'$ ja $A'B \perp CH'$. Seega asuvad X ja Y vastavalt sirgetel $A'C$ ja $A'B$.

Tähistame kolmnurga ABC tippude A, B, C juures olevate nurkade suurused vastavalt kui α, β, γ. Sümmeetria tõttu $\angle H'BA' = \angle HCA = 90^\circ - \alpha$ ja $\angle CBH' = \angle BCH = 90^\circ - \beta$; esimesest võrdusest tuleneb omakorda $\angle XBH' = 90^\circ - \alpha$. Seega $\angle CBX = \alpha - \beta$ või $\angle CBX = \beta - \alpha$ vastavalt sellele, kas X asub lõigul $A'C$ või selle pikendusel üle C.

Kolmnurgast CXB saame, et $\angle CXB = 180^\circ - \angle CBX - \angle XCB$. Kui X asub lõigul $A'C$, siis $\angle XCB = \angle A'CB = \angle ABC = \beta$, millest tulenevalt $\angle CXB = 180^\circ - (\alpha - \beta) - \beta = 180^\circ - \alpha$. Seega X asub kolmnurga ABC ümberringjoonel. Kui X asub lõigu $A'C$ pikendusel, siis analoogselt $\angle XCB = 180^\circ - \angle A'CB = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \beta$, millest tulenevalt $\angle CXB = 180^\circ - (\beta - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha$. Seega jällegi X asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.

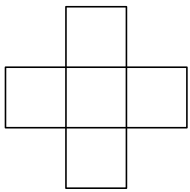
Sarnaselt saame tõestada, et Y asub kolmnurga ABC ümberringjoonel. Seega B, C, X ja Y asuvad ühel ja samal ringjoonel.

Lahendus 3. Olgu punkti A' peegeldused sirgetest BH' ja CH' vastavalt X ja Y; sarnaselt lahendusega 2 näitame, et punktid X ja Y asuvad vastavalt sirgetel $A'C$ ja $A'B$.

Kuna X ja Y on punkti A peegeldused vastavalt üle sirgete $H'B$ ja $H'C$, on kolmnurgad $A'BX$ ja $A'CY$ võrdhaarsed. Seega on nurgad $A'XB$ ja $A'YC$ võrdsed nurgaga $BA'C$. Sellest tulenevalt on B, C, X ja Y ühel ringjoonel, mida tahtsimegi tõestada.

6. *(Ago-Erik Riet)*

Olgu m ja n naturaalarvud, mis on suuremad arvust 2. Ruudustikus mõõtmetega $m \times n$ asub igal ühikruudul üks lamp, mis võib kas põleda või mitte põleda. Ümber lülitada (põlevast mittepõlevaks ja vastupidi) saab korraga viis suvalises olekus lampi, mis asuvad ristina paiknevatel ühikruutudel (vt joonis). Alguses ükski lamp ei põle. Mitu erinevat põlevate lampide asetust saab nende lülitustega tekitada? Asetused, mis saadakse üksteisest pööramise või peegeldamise teel, loetakse erinevaks.



Vastus: $2^{(n-2)(m-2)}$.

Lahendus. Lihtsuse mõttes eeldame, et lüliti, mis mõjutab ristikujuliselt paiknevat lampide hulka, asub selle risti keskmisel ruudul. Siis lülitid asuvad parajasti kõigil ühikruutudel peale ääreruutude. Ruudustikul mõõtmetega $m \times n$ on täpselt $(m-2)(n-2)$ mitteääreruutu.

Ilmselt määrab iga lambi lõppoleku see, kas teda mõjutavaid lülitusi tehakse kokku paaris- või paaritu arv. Seega ühe ja sama lüliti kahekordsed vajutused võib ära jätta. Järelikult on iga võimalik põlevate lampide asetus tekitatav nii, et ühtki lülitit ei vajutata korduvalt. Vajutatavate lülitite kombinatsiooni valikuks on aga $2^{(m-2)(n-2)}$ võimalust. Kokkuvõttes on võimalikke põlevate lampide asetusi ülimalt $2^{(m-2)(n-2)}$.

Vaatleme kaht suvalist kombinatsiooni, mis erinevad vähemalt ühe vajutatava lüliti poolest. Olgu L vasakpoolseim ruut, millel asuvat lülitit ühes kombinatsioonis vajutatakse ja teises mitte (kui leidub mitu vasakpoolseimat sellise omadusega ruutu, siis olgu L neist suvaline). Tulemusena jääb ruudu L vasakpoolsel naaberruudul K olev lamp erinevatesse olekutesse, sest ruudu L valiku põhjal mõjutavad temast vasakul paiknevates veergudes olevate lülitite vajutused ruutu K ühtemoodi ja ülejäänud lülititest on L ainus, mis ruudul K oleva lambi olekut mõjutab. Sellega on näidatud, et erinevad vajutatavate lülitite kombinatsioonid annavad erinevad põlevate lampide lõppasetused. Sellest tulenevalt on võimalike põlevate lampide asetuste arv täpselt $2^{(m-2)(n-2)}$.

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Kadi Siigur)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Lahendatud ülesande osa a), sealhulgas toodud sobiv näide: 2 p
- Lahendatud ülesande osa b), sealhulgas toodud sobiv näide: 2 p
- Lahendatud ülesande osa c), sealhulgas toodud sobiv näide: 3 p

2. *(Jaan Kristjan Kaasik)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Osa a) lahendus: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste osaliste lahenduste eest:
  - Jõuga läbi proovitud ligikaudu kaks kolmandikku võimalikest teedest: *2 p*
  - Jõuga läbi proovitud ligikaudu üks kolmandik võimalikest teedest: *1 p*
  - Põhjenduseta sõnastatud kasulik tähelepanek: *1 p*
  - Tehtud õige tähelepanek ühe konkreetse tee jaoks: *0 p*
  - Tehtud liiga üldine tähelepanek, et olla kasulik: *0 p*
  - Kirjeldatud ühel konkreetsel teel tekkinud probleeme ilma suurema üldistuseta: *0 p*
- Osa b) lahendus: 2 p
- Osa c) lahendus: 2 p

Igas osas võeti 1 punkt maha väikeste puuduste eest, mis muutsid lahenduse mittetäielikuks, kui oldi õigele lahendusele lähedal.

Tihti uuriti, et millistelt väljadelt võiks tee alata, ja siis vaadati läbi konkreetseid näiteid. Kui midagi kavalat ei maini (nt et sümmeetria tõttu piisab vaadelda ühte kujundi veerandit või et kinnise tee korral ei ole üldse alguspunkti vaja fikseerida), siis tuleb ju kõik võimalikud algusruudud läbi vaadata. Julm läbiproovimine toob edu väga-väga harva, kavalus viib sihile palju kiiremini!

3. *(Karl Paul Parmakson)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud arvu viimaste numbrite ja arvu astmete viimaste numbrite vastavused, või väidetud, et paarisarvu astmed ei lõpe paaritute arvudega, või leitud, et n peab olema paarisarv: 1 p
- Leitud, et paarisastmed ei lõpe 3-ga ega 7-ga, või leitud, et ainult kindlad 3-ga ja/või 7-ga lõppevate arvude paaritud astmed lõpevad 3-ga või 7-ga: 3 p
- Leitud, et selleks, et mõni arv kujul a^b lõppeks 3-ga või 7-ga, peab n olema paaritu: 1 p
- Leitud vastuolu n leidumisel: 2 p

4. *(Urve Kangro)*

Žürii lahenduse 1 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Liidetavate üldkuju kirjapanek: 1 p
- Liidetava lahutus osamurdudeks: 3 p
- Summa arvutamine: 3 p

Žürii lahenduse 2 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Summa valemi hüpoteesi püstitus: 3 p
- Tõestamine, et kui valem kehtib $n = k$ korral, siis ta kehtib ka $n = k + 1$ korral: 3 p
- Lõppvastuse leidmine: 1 p

Paljud õpilased ei olnud ilmselt ülesandest aru saanud. Esines arvamusi, et kolme punkti asemele võib kirjutada ükskõik mida, ja siis vastus on ka ükskõik mis, näiteks 1. Murdude liitmise asemel liideti mitmetes töödes lugejaid ja nimetajaid eraldi, või isegi lugejate ja nimetajate tegureid eraldi. Vastuseid oli seinast seina, alates arvust $\frac{1}{2021}$ kuni tohutult suurte arvudeni. Mitmetes töödes püüti kasutada aritmeetilise jada summa valemit, või leiti kuidagi jada liikmete „aritmeetiline keskmine“, mida siis liikmete arvuga korrutati.

Mitmetes töödes esines tähelepanek, et liidetavad on väiksemad kui $\frac{1}{4}$ või lähenevad suurusele $\frac{1}{4}$, mis võimaldab saada ligikaudse vastuse. Kui niimoodi oli saadud, et vastus on väiksem kui $252\frac{1}{4}$ (või $252\frac{1}{5}$, kui esimene liidetav eraldi arvesse võtta), siis sai selle eest ühe punkti. Kui aga selle alusel väideti, et vastus on (täpselt) $252\frac{1}{4}$ või näiteks 250, siis selle eest punkti ei saanud.

5. *(Sandra Schumann)*

Žürii lahendusega sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Osa a): 3 p

  Sealhulgas:
  - Leitud nurkade omavahelised seosed ja võrdhaarsus kolmnurgas BCD: *1 p*
  - Leitud nurkade $\angle DCB$ ja $\angle EOB$ omavaheline seos: *1 p*
  - Nurkade $\angle EOB$ ja $\angle DBC$ kaudu eelneva põhjal tõestatud kolmnurga OBF võrdhaarsus: *1 p*
- Osa b): 4 p

  Sealhulgas:
  - Leitud sarnased võrdhaarsed kolmnurgad OCB ja FOB: *2 p*
  - Sarnastest võrdhaarsetest kolmnurkadest järeldatud võrdus $|FB| = 4|BD|$: *2 p*

Ülesanne osutus raskeks, mida võis ka arvata. Sellegipoolest oli ka elegantseid täislahendusi nii ühele osale kui ka kogu ülesandele.

Sageli põhjendati võrdhaarsust väitega, et kõrgus, nurgapoolitaja ja mediaan FD (või mingi kahene kombinatsioon neist kolmest) ühtivad. Väide, et selles kolmnurgas need kolm tõepoolest omavahel ühtivad, vajab aga omakorda tõestust. Muuhulgas on osas a) vaja ülesanne lahendada ka juhu jaoks, kus D ei ole OB keskpunkt.

Kuna ülesanne oli keeruline, siis võivad kõik, kes sellest mõnegi punkti on saanud, enda üle uhked olla.

6. *(Artur Avameri)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et rohkem kui $4041 \cdot 1009$ sibulat põllul olla ei saa: 4 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et viie järjestikuse arvu seas ei saa kahte sibulat olla: *2 p*
  - Järeldatud, et igas reas/veerus on maksimaalselt 1009 sibulat: *1 p*
  - Eelnevast järeldatud, et suurim sibulate arv on $4041 \cdot 1009$: *1 p*
- Toodud konstruktsioon $4041 \cdot 1009$ sibulaga: 3 p

  Sealhulgas:
  - Toodud idee konstrueerida 2×2 kaste, kus iga rea ja veeru summa on 4042: *1 p*
  - Selgitatud, kuidas kaste tsükliliselt või muul viisil sobivalt paigutada: *1 p*
  - Selgitatud, kuidas viimast, 2021. veergu täita: *1 p*

Ülesanne osutus raskeks. Selliste tõestusülesannete puhul, kus küsitud on millegi maksimaalset väärtust, tuleb alati meeles pidada, et täislahendus koosneb kahest osast: lisaks optimaalse konstruktsiooni kirjeldamisele tuleb ka näidata, et see tõepoolest on parim võimalik. Paljud lahendajad kirjeldasid vaid enda (tüüpiliselt ebaoptimaalset) konstruktsiooni, kuid ei üritanudki tõestada, et nende konstruktsioon tõepoolest optimaalne on. Antud ülesande lahendamise seisukohast oli palju kasulikum esmalt leida ülemtõke, millest suuremat sibulate arvu olla ei saa, kuna see aitab kaasa konstruktsiooni leidmisele. Seetõttu anti muu kasuliku puudumisel üks punkt selle eest, kui väideti, et optimaalse paigutuse saamiseks peavad igal kahel järjestikusel sibulal kaks ruutu kattuma.

Hindamisskeemid ja kontrollijate kommentaarid

1. *(Martin Rahe)*

Žürii lahendusega 1 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et a^2 viimane number peab olema 0: 2 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et a^2 on paaris, järeldatud, et a on paaris ja a^2 jagub 4-ga: *1 p*
  - Näidatud, et täisarvu ruutu tõstmisel ei teki 10-ga jagamisel jääki 2: *1 p*
- Järeldatud, et a viimane number peab olema 0: 1 p
- Vaadatud arvu a asemel $\frac{a}{10}$, vaadatud a paremalt teist numbrit või tehtud midagi ekvivalentset ja näidatud, et sellele kehtivad samad tingimused, mis a viimasele numbrile: 2 p
- Saadud vastuolu vähima positiivse a vaatamisel, induktsiooniga näidatud, et a kõik numbrid on nullid, või tehtud midagi ekvivalentset: 1 p
- Arusaadavalt välja toodud, et ainuke sobiv täisarv on $a = 0$: 1 p

  Sealhulgas:
  - Kirja pandud, et $a = 0$ sobib, aga pole öeldud, et see on ainus: *0 p*

Žürii lahendusega 2 sarnaste mõttekäikude allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Jagatud arv a^2 teguriteks m ja 10^n, kus m on nullidest ja kahtedest koosnev naturaalarv, mille viimane number on 2: 2 p
- Tõestatud, et m jagub 2-ga, kuid ei jagu 4-ga: 2 p

  Sealhulgas:
  - Arusaadavalt väidetud, et m jagub 2-ga ja ei jagu 4-ga (või $\frac{m}{2}$ lõppeb 1-ga): *1 p*
- Saadud, et algtegurite 2 ja 5 astendajad arvu a^2 kanoonilises esituses on erineva paarsusega ja järeldatud vastuolu: 2 p

  Sealhulgas:

  - Avaldatud 2 ja 5 astendajad a^2 kanoonilises esituses: *1 p*
- Arusaadavalt välja toodud, et ainuke sobiv täisarv on $a = 0$: 1 p

  Sealhulgas:
  - Kirja pandud, et $a = 0$ sobib, aga pole öeldud, et see on ainus: *0 p*

Ülesanne oli ootuspäraselt lihtne, peaaegu pooled esitatud töödest olid täislahendused. Mitu lahendajat kaotas ühe punkti, kuna unustas lahendiks sobivat nulli vaadata.

Mitme töö puhul oli õpilane korrektselt näidanud, et a viimane number on 0, kuid ei olnud sealt õigesti eelnevate numbrite peale liikunud.

Žürii lahendusega 2 sarnastes lahendustes oli levinuimaks veaks ilma tõestuseta eeldamine, et m ei jagu neljaga. Kuigi seda väidet on väga lihtne tõestada, on see siiski lahenduse oluline osa ning seda ei saa põhjenduseta eeldada.

2. *(Joonas Jürgen Kisel)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Sõnastatud induktsiooni hüpotees: 2 p
- Induktsioon läbi viidud: 4 p
- Esitatud õige vastus: 1 p

Ülesanne osutus oodatust mõnevõrra raskemaks: vaid ligi veerand esitatud töödest olid täislahendused. Kõige sagedasemaks komistuskiviks olid arvutusvead: nii mõnigi osaleja arvutas kolmandale või neljandale reale tulema pidanud arvud valesti ning seega kas ei leidnud mustrit, mille põhjal oma hüpotees sõnastada, või leidis sarnase seaduspära, mis oleks ilmnenud, kui 43 asemel oleks olnud mõni teine arv, ning sellest tulenevalt jõudis vale vastuseni. Samuti esines töid, kus sõnastati küll õige hüpotees ja sellest tulenevalt õige vastus, aga tõestus sellele väitele puudus (paaril juhul oli tõestus vaid mustandis; kuna hindaja otsustas mustandeid arvesse võtta, said sellised tööd ikkagi täispunktid). Paar võistlejat kaotas punkti eeldades, et $10^{2^{2020}} = 10^{4040}$, ning sellest tulenevalt vale lõppvastuse esitades.

3. *(Oleg Košik)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Kontrollitud, et $p = 3$ ja $p = 5$ on imelised: 1 p
- Leitud, et kui p on nunnu, siis kas $p = 3$ või $q = 3$: 3 p
- Selle abil näidatud, et muud algarvud peale 3 ja 5 pole imelised: 3 p

Kui on saadud, et mingi avaldis jagub 3- või 5-ga, siis see ei pruugi üldjuhul tähendada, et selle avaldise väärtus ei ole algarv, juhul kui see väärtus ongi 3 või 5. Töödelt, mis välistasid mõnel juhul algarvuks olemise üksnes 3- või 5-ga jaguvuse põhjal, võeti 1 punkt vähemaks.

Mitu õpilast vaatasid lahenduse teises osas 5-ga jaguvuse asemel arvu viimast numbrit (mis 5-ga jaguvusega üsna samaväärne).

Ainult õige vastuse eest ilma selgituseta, miks on 3 ja 5 imelised arvud, punkte ei antud. Esines kahjuks ka mitu tööd, kus ekslikult arvati, et 1 on algarv.

4. *(Kaur Aare Saar)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Saadud kaks sõltumatut seost $f(1)$ ja $f(-1)$ jaoks: 3 p

  Sealhulgas:
  - Saadud üks seos $f(1)$ ja $f(-1)$ jaoks: *1 p*
- Lahendatud võrrandisüsteem ja saadud, et $f(1)$ saab olla vaid -1, 0 või 1: 2 p
- Iga võimaliku $f(1)$ jaoks pakutud välja funktsioon, mille korral $f(1)$ on vastava väärtusega, ning kontrollitud, et esialgne võrrand rahuldab neid funktsioone: 2 p

Paljud õpilased olid proovinud sisse asendada (x, y) kohale $(1, 0)$ või $(1, 0)$. Niimoodi üldiselt kaugele ei jõutud, sest, kui $f(0) = 0$, siis saadud võrrandid kehtivad mistahes $f(1)$ väärtuste korral, mistõttu ei ole võimalik midagi $f(1)$ võimalike väärtuste kohta järeldada. Teiseks tüüpveaks osutus lahenduskäigu lõpetamine, kui järeldati, et $f(1)$ ei saa võtta muid väärtusi kui -1, 0 või 1. Ülesandes küsiti, milliseid väärtusi saab $f(1)$ omandada, mis tähendab, et tuleb veenduda, et vastavad funktsioonid, mille korral $f(1)$ neid väärtusi võtab, ka päriselt eksisteerivad ning et need rahuldavad esialgset võrrandit.

5. *(Hendrik Vija)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et punktid X ja Y asuvad vastavalt sirgetel $A'C$ ja $A'B$: 3 p

  Sealhulgas:
  - Leitud, et H' on kolmnurga $A'BC$ kõrguste lõikepunkt või et $BH' \perp A'C$ ja $CH' \perp A'B$: *1 p*
- Pandud tähele, et kolmnurgad $A'BX$ ja $A'CY$ on võrdhaarsed ja kirjutatud välja vastavad alusnurkade võrdused: 2 p

  Sealhulgas:
  - Leitud, et kolmnurgad $A'BX$ ja $A'CY$ on võrdhaarsed: *1 p*
- Lahendus lõpuni viidud: 2 p

Ülesanne osutus natuke lihtsamaks kui lahtise võistluse geomeetriaülesanded tavaliselt. Siiski polnud tegemist väga lihtsa ülesandega.

Tüüpiline puudujääk, mille korral lahendus maksimumpunkte ei saanud, oli see, kui jooniselt oli nähtud, et punktid A', X ja C asuvad ühel sirgel ja punktid A', Y ja B asuvad ühel sirgel, kuid seda ei tõestatud, vaid lihtsalt eeldati, et see on nii.

Üks teine viga, mille eest punkte maha ei võetud (kui see ülejäänud lahendust ei mõjutanud), kuid mida esines väga palju, oli väide, et kolmnurgad ABC ja $A'BC$ on võrdsed. (See ei kehti, sest näiteks ei ole võrdse pikkusega küljed AB ja $A'B$.) Tegemist on võrdsete kolmnurkadega küll, kuid kolmnurkade võrdsust/sarnasust välja tuues on väga oluline tippude järjekord. Selles ülesandes oleks korrektne öelda, et võrdsed on kolmnurgad ABC ja $A'CB$.

6. *(Ago-Erik Riet)*

Ülesande allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestus, et otsitavaid konfiguratsioone ei saa olla rohkem kui $2^{(m-2)(n-2)}$: 4 p

  Sealhulgas:
  - Paarsusele taandamine: *2 p*
  - Keskpunktide asetuste loendamine: *2 p*
- Tõestus, et $2^{(m-2)(n-2)}$ nõutud konfiguratsiooni leidub: 3 p

Õige arutluse, aga vale vastuse korral lahutati 1 punkt. Ainult õige vastuse eest punkte ei saanud. Õige vastus ja mõned tähelepanekud lahenduse suunas andsid 1 punkti. Paljud lahendajad polnud aru saanud, et on vaja näidata, et erinevad keskpunktide valikud annavad erinevad lampide konfiguratsioonid ehk et otsitavate konfiguratsioonide arv on vähemalt $2^{(m-2)(n-2)}$. Vektorruumide (üle kaheelemendilise korpuse), näiteks lampide poolt indekseeritud (mn)-mõõtmelise vektorruumi lampide konfiguratsioonide poolt moodustatava alamruumina, või Abeli rühmade kaudu üles ehitatud lahendustes oli samuti vaja tõestada mõlemapoolsed tõkked alamruumi mõõtmele, mida tihti polnud tehtud.