Esitamise tähtaeg: 06.06.2024, kell 15:15.
Palun laadige lahendused üles keskkonnas Moodle. Skaneeritud või pildistatud lahendused peavad olema pdf vormingus ja hästi loetavad.

Taavi Pärt Tammaru

EKSAM[1]

Lahendused peavad olema ilma täiendavate materjalideta loetavad st peavad sisaldama kasutatavaid põhivalemeid ja selgitavaid kommentaare. Lahenduskäigud peavad olema detailsed ja näitama tehtu mõistmist. Hindamisele ei kuulu mitte ainult lahenduse lõpptulemus, vaid kindlasti ka kogu ülesande lahenduskäik.

Palun kontrollige, et Moodle keskkonnas üleslaetav pdf fail sisaldab kõiki hindamisele esitatavaid lahenduskäike. Õppejõu e-posti aadressile pärast esitamise tähtaega saabuvad lahenduskäigud punkte ei anna.

Lahendamiseks vajalike õpiku valemite tuletuskäike pole vaja kopeerida.

Ülesanne 1.1. [18 punkti] On vaja leida funktsioon $u(x,t)$, mis rahuldab võrrandit ($a, \alpha, \beta, \gamma = \mathrm{const} > 0$.)

$$\frac{1}{6a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\sqrt{2}\gamma}{a}\frac{\partial u}{\partial t} + 3\gamma^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,; \quad 0 < x < L\,; \quad t > 0$$

ja lisatingimusi

$$u(x,0) = \alpha \sin\left(\frac{0.5\pi}{L}x\right) + \beta \sin\left(\frac{1.5\pi}{L}x\right)\,, \qquad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\,; \quad 0 \le x \le L\,,$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0\,,\ t \ge 0\,,$$
$$u(0,t) = 0\,,\ t \ge 0.$$

◇ Lahendage see ülesanne muutujate eraldamise meetodil.
Märkus. Sturmi-Liouville'i rajaülesannet võrrandiga

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2} = -\lambda X\,,$$

homogeense I liiki rajatingimusega punktis $x = 0$ ja homogeense II liiki rajatingimusega punktis $x = L$, ei ole vaja lahendada. Vajalikud omaväärtused ja omafunktsioonid on järgmised:

$$\lambda_n = \left[\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{L}\right]^2\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{L}x\right)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

[1] Ülesannete koostamisel on lähtutud käesolevas kursuses sissetoodud definitsioonidest ja tähistustest.

Ülesanne 1.2. [18 punkti] On vaja leida funktsioon $u(x,t)$, mis rahuldab $0 < x < L$ ja $t > 0$ korral võrrandit $(A, \alpha, u_0 = \text{const} > 0)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A\left[1 - \alpha \exp(-\alpha t)\right]$$

ning lisatingimusi

$$u(x,0) = u_0 \ ; \quad 0 \le x \le L \ ,$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \ ; \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \ ; \quad t \ge 0 \ .$$

◇ Lahendage see ülesanne. Selleks kasutage sobivat teadaolevat Greeni funktsiooni. Arvutage kõik vajalikud integraalid.

Ülesanne 1.3. [10 punkti] Rajaülesande

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0; \quad r_1 < r < r_2; \quad 0 < \phi < 2\pi,$$

$$u(r_1,\phi) = \mu_1(r_1,\phi); \quad u(r_2,\phi) = \mu_1(r_2,\phi); \quad 0 < \phi < 2\pi$$

üldlahend on kujul

$$u(r,\phi) = C_{10} + C_{20}\ln(r) \quad + \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[B_{1n}r^n + B_{2n}r^{-n}\right]\cos(n\phi) + \left[B_{3n}r^n + B_{4n}r^{-n}\right]\sin(n\phi)\right\},$$

kus C_{10}, C_{20}, B_{1n}, B_{2n}, B_{3n} ja B_{4n} on konstandid. Konstandid B_{1n} ja B_{2n} saab leida võrrandisüsteemist

$$B_{1n}r_1^n + B_{2n}r_1^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu_1(r_1,\phi)\cos(n\phi)\,\mathrm{d}\phi,$$

$$B_{1n}r_2^n + B_{2n}r_2^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu_1(r_2,\phi)\cos(n\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

◇ Pange kirja üksikasjalik tuletuskäik selle võrrandisüsteemi jaoks.