AHELA KUJU ET TEMA MASSIKESKME KÕRGUS OLEKS MINIMAALNE?

Kui massikeskme kõrgus on minimaalne siis on ka potentsiaalne energia minimaalne.

- Leiame potentsiaalse energia valemi

Liidame kõik ahela väikeste juppide potentsiaalse energia kokku.

Väikse ahelajupi pikkus on dS

$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (mis tuleb pythagorase teoreemist)

teeme algebrat

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

Võtame μ kui ahela konstantse tiheduse

$$U = \int \mu g h \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

meile on teada ahela algus- ja lõpppunkt
Seega seame integratsiooni piirid x_1 ja x_2

$$U(y) = \int_{x_1}^{x_2} \mu g h \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Seega saime avaldise potentsiaalse energia jaoks
On näha, et see on funktsionaal, argument on ~~tulet~~ funktsioon ja ~~voor~~ väljund on reaalarv

funktsionaalide absoluutse miinimumi leidmiseks on välja töötatud võrrand millest mina aru ei saa. Nimelt Euler-Lagrange võrrand.

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial y'}\right) = 0$$

Nüüd kasutame trikki, mida ma ka veel ei mõista. Aga tuleb välja, et kui funktsionaalis integreeritav otseselt ei sõltu muutujast mille suhtes integreeritakse siis saame kasutada Beltrami samasust.

$$U - y'(x)\frac{\partial U}{\partial y'} = c$$

muudame funktsionaali natuke

$$U(y) = \int_{x_1}^{x_2} \mu g h \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \mu g \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Nüüd arendame U(y) beltrami samasus võrrandisse

Aga peame arvestama ka piirtingimust et ahela pikkus on konstantne

$$F = U + \lambda J \qquad F = \int_{x_1}^{x_2}\left(\mu g\, y(x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \lambda\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)dx$$

$$\mu g\, y(x)\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\mu g y(x)\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right) =$$
$$= C_1$$

$$\frac{d}{dy'}\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\cdot 2y' = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Seega saame diferentsiaalvõrrandi saame kirjutada kui

$$\mu g y(x)\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2} - y'\left(\frac{\mu g y(x) y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = C_1$$

$$\mu g y(x)\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2} - \frac{\mu g y(x) y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

$$\frac{\mu g y(x)(1+\cancel{y'^2})}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\lambda(1+\cancel{y'^2})}{\sqrt{1+y'^2}} - \cancel{\frac{\mu g y(x) y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}} - \cancel{\frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}} = C_1$$

$$\frac{\mu g y(x)}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

$$\frac{\mu g y(x) + \lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

see on lihtne teise astme differentsiaal-võrrand, mille lahendamisel leiame funktsiooni, mis kirjeldab ahela kuju et massikeskme ~~kõrgu~~ kõrgus oleks minimaalne

KUI KASUTADA EULER-LAGRANGE VÕRRANDIT

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\mu g \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu g\, y(x)\, y' + \lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

$$\mu g \sqrt{1+y'^2} = 0$$

TAAVI TAMMARU

KODUTÖÖ 3