Analüütiline Mehaanika kodutöö 1

Taavi Tammaru

September 2023

Ülesanne 1

Kontrollime induktsiooni baasi, võttes n = 1.

$$t_n = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} = \frac{(n+1)!}{2(n-1)!}$$

$$t_1 = \binom{2}{2} = \frac{(2)!}{2!(0)!} = 1$$

n=1 puhul saame $t_1 = 1$ ja 1 on tõepoolest kolmnurk arv.
Nüüd väidame, et järgmine valem on tõene mingi m puhul, kasutame siinkohal k asemel m-i kuna k on kasutusel juba kombinatsioonide valemi definitsioonis.

$$t_m = \binom{m+1}{2} = \frac{(m+1)!}{2(m-1)!}$$

Järgneb induktsiooni samm. Uurime mis juhtub järgmise liikme t_{m+1} puhul

$$t_{m+1} = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + m + (m+1)$$

Mõistame, et saame esimesed m liiget grupeerida eelneva eelduse tõttu.

$$t_{m+1} = \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + ... + m}_{\frac{(m+1)!}{2(m-1)!}} + (m+1)$$

Seega

$$t_{m+1} = \frac{(m+1)!}{2(m-1)!} + (m+1)$$

Võtame mõlemad liidetavad nimetajale $2m!$

$$t_{m+1} = \frac{m(m+1)! + 2m!(m+1)!}{2m!}$$

$$t_{m+1} = \frac{(m+1)!(m+2)}{2m!}$$

$$t_{m+1} = \frac{(m+2)!}{2m!} = \frac{((m+1)+1)!}{2((m+1)-1)!}$$

Kuna t_{m+1} on samal kujul kui t_m on sellega algne väide tõestatud kõikide naturaalarvude jaoks. □

Ülesanne 2

Kontrollime induktsiooni baasi, võttes k = 2.

$$t_{k-1} + t_k = k^2$$

$$\frac{((k-1)+1)!}{2((k-1)-1)!} + \frac{(k+1)!}{2(k-1)!} = k^2$$

$$\frac{2!}{2(0)!} + \frac{3!}{2} = 2^2$$

$$1 + 3 = 4$$

Baasjuht on tõestatud. Nüüd järgneb induktsiooni hüpotees. Oletame, et ülesandes antud seos on tõene mingi suvalise naturaalarvu m puhul.

$$t_{m-1} + t_m = m^2$$

$$\frac{((m-1)+1)!}{2((m-1)-1)!} + \frac{(m+1)!}{2(m-1)!} = m^2$$

Järgneb induktsiooni samm. Uurime mis juhtub järgmise liikme m+1 puhul.

$$t_m + t_{m+1} = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + m \quad + \quad 1 + 2 + 3 + 4 + ... + m + (m+1)$$

Märkame, et saame grupeerida mõned liidetavad

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + ... + m}_{\frac{(m+1)!}{2(m-1)!}} \quad + \quad \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + ... + m}_{\frac{(m+1)!}{2(m-1)!}} + (m+1)$$

Seega

$$t_m + t_{m+1} = \frac{(m+1)!}{2(m-1)!} + \frac{(m+1)!}{2(m-1)!} + (m+1)$$

Märkame, et üks liige on juba õigel kujul. Nüüd võtame teise ja kolmanda liikme samale alusele, mis leidub algses valemis.

$$\begin{aligned} t_m + t_{m+1} &= \frac{(m+1)!}{2(m-1)!} + \frac{m(m+1)! + 2(m+1)!}{2((m+1)-1)!} \\ &= \frac{(m+1)!}{2(m-1)!} + \frac{(m+1)!(m+2)}{2((m+1)-1)!} \\ &= \frac{(m+1)!}{2(m-1)!} + \frac{((m+1)+1)!}{2((m+1)-1)!} \end{aligned}$$

Seega kui väide on tõene m puhul siis on ka tõene m+1 puhul. Siit järeldame, et kahe järjestikkuse kolmnurkarvu summa on ruutarv iga kolmnurkarvu puhul. $\square$

Ülesanne 3

Kontrollime induktsiooni baasi, võttes n = 1.

$$S_1 = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{6} = 1$$

baasjuht on tõene, sest 1 on esimene kolmnurkarv!
Nüüd järgneb induktsiooni hüpotees. Oletame, et ülesandes antud seos on tõene mingi suvalise naturaalarvu m puhul.

$$S_m = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + ... + t_m = \frac{(m)(m+1)(m+2)}{6}$$

Järgneb induktsiooni samm. Uurime mis juhtub järgmise liikme m+1 puhul.

$$S_{m+1} = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + ... + t_m + t_{m+1}$$

Grupeerime esimesed m liiget ja saame

$$S_{m+1} = \underbrace{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + ... + t_m}_{\frac{(m)(m+1)(m+2)}{6}} + t_{m+1}$$

$$S_{m+1} = \frac{(m)(m+1)(m+2)}{6} + t_{m+1}$$

$$S_{m+1} = \frac{(m)(m+1)(m+2)}{6} + \frac{((m+1)+1)!}{2((m+1)-1)!}$$

Nüüd kirjutame ümber mõlemad pooled ja saame:

$$S_{m+1} = \frac{(m+2)!}{6m!} + \frac{3(m+2)!}{6m!}$$

$$S_{m+1} = \frac{(m+2)! + 3(m+2)!}{6m!}$$

$$S_{m+1} = \frac{(m+2)(m+1)m! + 3(m+2)(m+1)m!}{6m!}$$

$$S_{m+1} = \frac{((m+2)(m+1) + 3(m+2)(m+1)}{6}$$

$$S_{m+1} = \frac{(m+2)(m+1)(m+3)}{6}$$

$$S_{m+1} = \frac{((m+1))((m+1)+1)((m+1)+2)}{6}$$

Seega kui väide on tõene m puhul siis on ka tõene m+1 puhul. Seega on tõestatud, et algne väide kehtib iga täisarvbu puhul. □

Ülesanne 4

Kontrollime induktsiooni baasi, võttes n = 1.

$$T_1 = 1^2 = \frac{1*2*3}{6} = \frac{2*3*4}{24} = 1$$

Baasjuht on tõene!
Nüüd järgneb induktsiooni hüpotees. Nüüd oletame, et ülesandes antud seos on tõene mingi suvalise naturaalarvu m puhul.

$$T_m = 1^2 + 2^2 + 3^2 ... m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} = \frac{2m(2m+1)(2m+2)}{24} = 1$$

Järgneb induktsiooni samm. Uurime mis juhtub järgmise liikme m+1 puhul.

$$T_{m+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 ... m^2 + (m+1)^2$$

Märkame, et saadud rida koosneb kahest kolmnurkarvude jada summast. Millest esimene kuni arvuni m ja teine arvuni m+1.

$$T_{m+1} = \frac{(m)(m+1)(m+2)}{6} + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$$

$$T_{m+1} = \frac{(m)(m+1)(m+2) + (m+1)(m+2)(m+3)}{6}$$

$$T_{m+1} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

$$T_{m+1} = \frac{(m+1)((m+1)+1)(2(m+1)+1)}{6}$$

Seega kui väide on tõene m puhul siis on ka tõene m+1 puhul. Seega on tõestatud algne seos. □

Ülesanne 5

Kontrollime induktsiooni baasi, võttes n = 1.

$$1^3 = \left(\frac{1 * (1+1)}{2}\right)^2$$

$$1 = 1$$

Baasjuht on tõene!
Nüüd järgneb induktsiooni hüpotees. Nüüd oletame, et ülesandes antud seos on tõene mingi suvalise naturaalarvu m puhul.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + m^3 = \left(\frac{m * (m+1)}{2}\right)^2$$

Järgneb induktsiooni samm. Uurime mis juhtub järgmise liikme m+1 puhul.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + m^3 + (m+1)^3$$

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + m^3}_{(\frac{m*(m+1)}{2})^2} + (m+1)^3$$

$$\left(\frac{m*(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3$$

$$\frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)^2(m+1)$$

$$\frac{m^2(m+1)^2 + 4(m+1)^2(m+1)}{4}$$

$$\frac{(m+1)^2(4(m+1)+m^2)}{4}$$

$$\frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

$$\left(\frac{(m+1)((m+1)+1)}{2}\right)^2$$

Seega kui väide on tõene m puhul siis on ka tõene m+1 puhul. Seega on tõestatud algne seos iga naturaalarvu puhul. □

Ülesanne 6

Kontrollime induktsiooni baasi, võttes n = 1.

$$1^3 = 1^3 - 0^3$$
$$1 = 1$$

Baasjuht on tõene!
Nüüd järgneb induktsiooni hüpotees. Nüüd oletame, et ülesandes antud seos on tõene mingi suvalise naturaalarvu m puhul.

$$m^3 = k^2 - l^2$$

Järgneb induktsiooni samm. Uurime mis juhtub järgmise liikme m+1 puhul.

$$(m+1)^3$$

Ja nagu vihjes juba öeldud, märkame et $(m+1)^3$ on kahe kuupide jada vahe.

$$(m+1)^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + m^3 + (m+1)^3 \quad - \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + m^3$$

Ning eelmisest ülesandest teame, et

$$(m+1)^3 = \underbrace{1^3+2^3+3^3+4^3+...+m^3+(m+1)^3}_{\left(\frac{(m+1)((m+2))}{2}\right)^2} - 1^3 + \underbrace{1^3+2^3+3^3+4^3+...+m^3}_{\left(\frac{m*(m+1)}{2}\right)^2}$$

$$(m+1)^3 = \left(\frac{(m+1)((m+2))}{2}\right)^2 - \left(\frac{m*(m+1)}{2}\right)^2$$

Kui m on negatiivne, siis kehtib sama seos

$$(m-1)^3 = \left(\frac{m*(m+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(m+1)((m+2))}{2}\right)^2$$

Ehk iga täisarvu kuup on võimalik kirjutada kahe ruudu vahena. $\square$