KVANT KT TAAVI TAMMARU

1

Näita, et

$$\langle\alpha|X^2|\alpha\rangle = \int dx\, x^2\, |\psi_\alpha(x)|^2$$

kus $\psi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$, tehes eksplitsiitselt läbi arvutuse kõik etapid (st mitte kasutades juba saadud tulemusi (3.39), (3.40) ja (3.41)).

$$\langle \alpha | x^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | x \cdot x | \alpha \rangle$$

$$= \langle x^2 \rangle_\alpha = \int dq\, \psi^*_\alpha(x)\, \psi_\alpha(x)\, x^2$$

$$= \int dx\, x^2 |\psi_\alpha(x)|^2$$

2 Näita, et pannes seisundi

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

ajast sõltuvasse Schrödingeri võrrandisse, saame $\psi(x)$ jaoks energia omaväärtusvõrrandi

$$H(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

ajast sõltuv Schrödingeri võrrand

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = H(x)\psi(x,t)$$

arendame lainefunktsiooni sellesse võrrandisse. (loodame, et saame soovitud kuju)

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \psi(x) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-iE/\hbar}\right)$$

$$= -\frac{iE}{\hbar}\psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = E\psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

Saame

$$E\psi(x)e^{-iEt/\hbar} = H(x)\psi(x)e^{-iEt/\hbar}$$

jagame mõlemad pooled $e^{-iEt/\hbar}$ -ga

ja saame

$$E\psi(x) = H(x)\,\psi(x)$$

qed

<u>3</u>

Näidata, et potentsiaaliaugu puhul lahend kvantarvuga $n = 0$ (st $k = 0$) langeb ära, sest sel juhul normeerimistingimus (3.97) pole täidetav.

Teame et

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\psi(x)|^2 = \int_{-a}^{a} dx\,|\psi(x)|^2 = 1$$

kus $\psi_n(x) = A\left(e^{ik_n x} - (-1)^n e^{-ik_n x}\right)$

juhul $n=0 \Rightarrow k=0$ on meil $\psi(x)$

kujuga $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = A+B = 0$

seega $B = -A$

seega $\psi(x) = A - A = 0$

$\Rightarrow$ normeeritus tingimus enam ei saa kehtida.

$$\int_{-a}^{a} dx \cdot 0 \neq 1$$

seega $n=0$ lahend langeb ära

<u>4</u>

Kontrolli, kas funktsioon $\psi(x) = \sin \frac{\pi}{3} x$ on ruumi $L_2[0,3]$ element. (Vihje: kas $\psi(x)$ norm on lõplik?)

uurime kas $\psi(x) = \sin(\frac{\pi}{3}x)$ kuulub

ruumi $L_2[0,3]$

selle jaoks me peame kontrollima, kas L_2 norm

on lõplik intervallil $[0,3]$

L_2 norm on defineeritud kui

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

seega meie juhul

$$\|\psi\|_{L_2} = \left(\int_0^3 \left|\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \text{ning } \sqrt{\frac{3}{2}} < \infty$$

Seega $\psi(x)$ on ruumi $L_2[0,3]$

element.

5

Leia funktsiooni $\delta(ax)$ Fourier transformatsioon, kus $\delta(x)$ on Diraci deltafunktsioon.

(Funktsiooni $f(x)$ Fourier transformatsiooniks nimetatakse funktsiooni $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) e^{-ikx}$.

$$\hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \delta(x) e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|a|} \cdot 1 = \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}}$$