KVANT KT3

TAAVI TAMMARU

Olgu kahetasemelise süsteemi ajaline evolutsioon antud seisundiga

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\omega t}|1\rangle\right).$$

1

Näita, et tõenäosus leida ajahetkel t mõõtes süsteemi olevat σ_y omaolekus $|0_y\rangle$ on

$$p(0_y) = \frac{1}{2}(1 + \sin\omega t).$$

tõenäosuse saab leida järgnevalt

$$p(0_y) = \langle \psi(t) | P_{|0_y\rangle} | \psi(t) \rangle =$$

$$= \langle \psi(t) | 0_y\rangle\langle 0_y | \psi(t)\rangle$$

$$= |\langle \psi(t) | 0_y \rangle|$$

$$= \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + e^{-i\omega t}\langle 1|)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)\right)\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{2}(1 + i e^{-i\omega t})\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}(1 + i e^{-i\omega t})(1 - i e^{i\omega t})$$

$$= \frac{1}{4}(1 + i e^{-i\omega t} + 1 - i e^{i\omega t})$$

$$= \frac{1}{4}(i e^{-i\omega t} - i e^{i\omega t} + 2)$$

$$= \frac{1}{4}(i\cos(\omega t) + \sin(\omega t) - i\cos(\omega t) + \sin(\omega t) + 2)$$

$$= \frac{1}{4}(2\sin(\omega t) + 2)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \sin(\omega t))$$

q.e.d

2

Olgu tegu magnetväljas asuva spinniga osakesega nagu kirjeldatud peatükis "Spinni käitumine magnetväljas". Näita, et kui kahetasemelise süsteemi **algolek** on σ_y omaolek $|0_y\rangle$, siis hakkab olekuvektor pöörlema — näita, et

1. algseisund taastub perioodiliselt ning
2. seisund muutub vahepeal σ_x omaolekuteks $|0_x\rangle$ ja $|1_x\rangle$.

1) algseisund taastub perioodiliselt

üldiselt avaldub blochi vektor

kujul $r(t) = (\sin(\theta)\cos\omega_0 t, \sin(\theta)\sin(\omega t), \cos(\theta))$

aga kui süsteemi algolek on σ_y

omaolek $|0_y\rangle$

Siis avaldub Blochi vektor kujul:

$r(i\cos(\omega_0 t), i\sin(\omega_0 t), 0)$

nagu näha on z-komponent 0

ning x ja y komponent muutuvad perioodiliselt

ajas.

Ta jõuab algseisundisse $|0_y\rangle$ tagasi kui

seisundi ja algoleku skalaarkorrutis on võrdne

ühega.

$$\langle 0_y | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2}(1 + e^{i\omega_0 t}) = 1$$

seega

$$t_n = \frac{2\pi n}{\omega_0}$$

2)

$$\langle 1_x | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2}\left(1 - ie^{\omega_0 t}\right) = 1$$

$$-ie^{\omega_0 t} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{\omega_0 t} = i$$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi\left(2n + \frac{1}{2}\right)}{\omega}$$

Samasugune tõestus teise vektori puhul

$$\langle 0_x | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2}\left(1 + ie^{\omega_0 t}\right) = 1$$

$$\Rightarrow ie^{\omega_0 t} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{\omega_0 t} = -i$$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi\left(1{,}5 + 2n\right)}{\omega_0}$$

3

Arvuta $\langle \sigma_y \rangle_\psi$ kahetasemelise süsteemi jaoks, mille ajaline areng antud eelmise ülesande seisundiga $|\psi(t)\rangle$.

$$\langle \sigma_y \rangle_\psi = \langle \psi(t) | \sigma_y | \psi(t) \rangle$$

$$= \langle \psi(t) | (i|1\rangle\langle 0| - i|0\rangle\langle 1|) | \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{ie^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}|1\rangle\rangle$$

$$= \langle \psi(t) | (\frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}|0\rangle)\rangle$$

$$= \langle \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{ie^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}|1\rangle | (\frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}|0\rangle)\rangle$$

$$= \frac{e^{i\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{-i\omega_0 t}}{2} = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} = \cos(\omega t)$$

<u>4</u>

Arvuta spinni operaatori komponentidest koostatud (formaalse) vektori $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ruudu keskväärtus $\langle \boldsymbol{\sigma}^2 \rangle$ ülesande 3.2 seisundis $|\psi(t)\rangle$.

teame, et

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

seega

$$\sigma^2 = 3\mathbb{I}$$

$$\langle \sigma^2 \rangle = \langle \psi(t) | \sigma^2 | \psi(t) \rangle = 3 \langle \psi(t) | \mathbb{I} | \psi(t) \rangle$$

$$= 3 \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 3$$

seega $\langle \sigma^2 \rangle = 3$ vaatamata seisundist