KVANT KT 7

TAAVI TAMMARU

1

a) leia olek $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$

nii öelda "avame sulud" oleku $|\psi\rangle$ jaoks

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle)$$

leiame $|\psi'\rangle$

rakendame U teguri kaupa

$$U(|0\rangle \otimes |0\rangle) = (|0\rangle\langle 0| \otimes 1)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

$$U(|1\rangle \otimes |0\rangle) = (|1\rangle\langle 1| \otimes X)(|1\rangle \otimes |0\rangle) = |1\rangle \otimes X|0\rangle$$
$$= |1\rangle \otimes |1\rangle$$

paneme tegurid kokku ja saame

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$$

b) tõenäosus $|\psi'\rangle$ mõõtmisel saada seisund $|00\rangle$

näeme, et olekus $|\psi'\rangle$ on $|00\rangle$

amplituud $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ja tõenäosus on amplituudi ruut

$$p(|00\rangle) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

2

a) tõenäosus mõõta teine bit seisundis $|1\rangle$

liidame kokku olekute tõenäosused kus teine bit on $|1\rangle$

$$p(|1\rangle) = \left|\frac{2}{3}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{2}}{3}\right|^2 = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$$

b) mis on süsteemi seisund pärast sellise mõõtmistulemuse saamist?

normaliseerime $|\psi\rangle$ osa kus teine

bit on väärtusega $|1\rangle$

$$|\psi\rangle = \frac{\frac{2}{3}|01\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3}|11\rangle}{\sqrt{p(|1\rangle)}}$$

$$|\psi\rangle = \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{3}|01\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3}|11\rangle\right)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle$$

## 3

a) hamiltonian on antud kui

$$H = H_1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes H_2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes H_3$$

kus iga $H_i$ on antud:

$$H_i = \frac{1}{2m}(P_i^2 + m^2 \omega_i^2 Q_i^2)$$

omaväärtuse võrrandi valem $H_i$

jaoks on

$$H_i|n_i\rangle = \omega(n_i + \tfrac{1}{2})|n_i\rangle \quad n_i = 0,1,2\ldots$$

kogu hamiltoniaan rakendatakse üle

hilberti ruumi $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$

kus baasolekud on antud kui

$$|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle = |n_1, n_2, n_3\rangle$$

omaväärtuse võrrand kogu hamiltoniaani

jaoks on siis:

$$H|n_1, n_2, n_3\rangle = E|n_1, n_2, n_3\rangle$$

kus $E$ on koguenergi

$$E = \omega(n_1 + n_2 + n_3 + \tfrac{3}{2})$$

b)

koguenergia on määratud kvantarvude poolt $n = n_1 + n_2 + n_3$, kus $n$ on kvantarvude summa kolmes dimensioonis

Süsteemi kõdu $g(n)$ on antud selle järgi mitu täisarvulisi lahendeid on võrrandile

$$n_1 + n_2 + n_3 = n$$

kombinatoorikast teame et

$$g(n) = \binom{n+3-1}{3-1} = \binom{n+2}{2}$$

seega süsteemi kõdu annab valem

$$g(n) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

c) erijuhud $n=1$ ja $n=2$

$n=1$ puhul:

$E = \omega\left(1+\frac{3}{2}\right) = \omega\frac{5}{2}$

$n_1, n_2, n_3 = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

$g(1) = 3$

$n=2$ puhul:

$E = \omega\left(2+\frac{3}{2}\right) = \omega\frac{7}{2}$

$(n_1, n_2, n_3) = (2,0,0), (0,2,0), (0,0,2)$
$(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$

4

a) kui Slateri determinant on defineeritud kui 4.21

kui me vahetame omavahel read i ja j siis determinandi omadus ütleb:

determinant pärast rea vahetust = - originaalne determinant

seega

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_N) = -\psi(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_N)$$

b)

Kui kaks rida või tulpa on võrdsed siis determinant võrdub nulliga. See väljendab kahte osakest samas kvant olekus ehk kaks identset ühe osakese lainefunktsiooni.

See kinnitab Pauli tõrjutuse printsiipi.