KVANT KT2

TAAVI TAMMARU

2.1 Kvantsüsteemil, mille algseisund on $|0_x\rangle$, viiakse läbi mõõtmine σ_z baasis. Millised on mõõtmistulemused? Arvuta iga mõõtmistulemuse tõenäosus.

Oletame, et järgmiseks viiakse läbi sama mõõtmine, kuid algseisundiks on üks σ_z omaolekutest. Milline on nüüd mõõtmistulemuste tõenäosus?

a)

$|0_x\rangle$ jaoks mõõtmine σ_z baasis

mõõtmistulemused saavad olla σ_z omaväärtused.

kas 1 või -1

$$p(m_i) = \langle\psi| P_{|m_i\rangle} |\psi\rangle$$

$$p(1) = \langle 0_x | P_{|1\rangle} | 0_x\rangle = \langle 0_x | 1\rangle\langle 1 | 0_x\rangle$$

$$= |\langle 0_x | 1\rangle|^2$$

$$= \left| \begin{bmatrix} \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right|^2$$

$$= |\sqrt{2}^{-1}|^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$p(-1) = 1 - p(1) = \frac{1}{2}$$

b)

kui algseisundiks on üks σ_z omaolekutest siis on sellele mõõtmise tulemuse tõenäosus 100%-liselt antud omaolekule vastav omaväärtus.

2.2

Kvantsüsteemil, mille algseisund on $|0\rangle$, viiakse läbi mõõtmine σ_x baasis. Millised on mõõtmistulemused? Arvuta iga mõõtmistulemuse tõenäosus.

$$p(m_i) = \langle \psi | P_{|m_i\rangle} | \psi \rangle$$

$$= |\langle \psi | m_i \rangle|^2$$

σ_x omaväärtused on 1 ja -1

$$p(1) = |\langle 0 | \sigma_x \rangle|^2$$

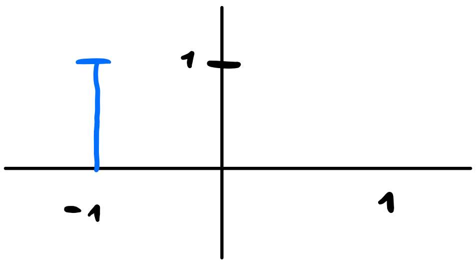
$$= |\sqrt{2}^{-1} (\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle)|^2 = |\sqrt{2}^{-1}|^2 = \frac{1}{2}$$

$$p(-1) = 1 - p(1) = \frac{1}{2}$$

2.3

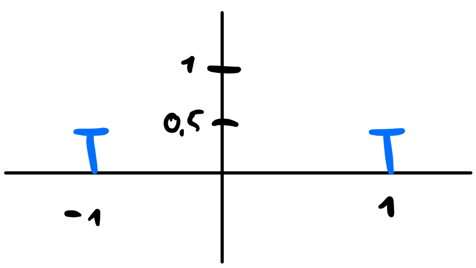
Olgu kvantseisund $|\psi\rangle$ ühes Pauli operaatori omaolekus. Kuidas näevad sel juhul välja kõigi kolme Pauli operaatori mõõtmise tõenäosusjaotused? Millega võrduvad nende jaotuste keskväärtused?

- Selle Pauli operaatori baasis, mille omaolekus on kvantseisund, on tõenäosused järgnevad.



jaotuse keskväärtus on täielikult omaolekule vastav omaväärtus (1 või -1)

- mõlema teise Pauli maatriksi baasis on jaotused järgnevad:

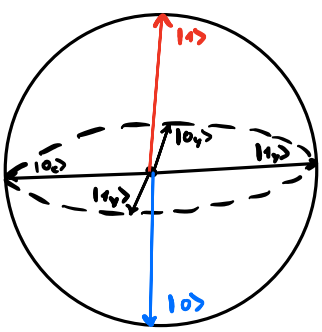


$p(1) = 0,5$

$p(-1) = 0,5$

jaotuse keskväärtus on 0

Seda saab seletada Blochi sfääri abil.



kui meie kvantseisund on tähistatud punasega siis on näha, et üks pauli omavektor langeb sellega täielikult kokku aga meie kvantseisund on 90-kraadi all iga teise pauli omavektori paariga, mis annab tõenäosuseks $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{2}$.

2.4 Näita, et kui Q ja P on hermiitilised operaatorid, siis ka $QP + PQ$ ja $i\,(QP - PQ)$ on hermiitilised (ja seega nende keskväärtused reaalsed).

a)

$$(QP + PQ)^\dagger = (QP)^\dagger + (PQ)^\dagger = P^\dagger Q^\dagger + Q^\dagger P^\dagger =$$

$$= PQ + QP = QP + PQ$$

b)

$$(i(QP - PQ))^\dagger = i^\dagger (QP - PQ)^\dagger = -i(QP - PQ)^\dagger$$

$$= -i((QP)^\dagger - (PQ)^\dagger) = -i(P^\dagger Q^\dagger - Q^\dagger P^\dagger)$$

$$= -i(PQ - QP)$$

$$= i(QP - PQ)$$

2.5 Olgu kvantsüsteem seisundis $|0_x\rangle$. Arvuta standardse määramatuse relatsiooni parem pool kõigi kolme paari Pauli maatriksitega,

$$\frac{1}{2}\left|\langle 0_x|[\sigma_i, \sigma_j]|0_x\rangle\right|, \quad i = 1, 2, 3.$$

Interpreteeri tulemusi.

a)

$$\frac{1}{2}|\langle 0_x|[\sigma_i, \sigma_j]|0_x\rangle = \frac{1}{2}|\langle 0_x|\, 2i\sigma_z\, |0_x\rangle|$$

$$= \frac{1}{2}|\langle 0_x|2i(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}|\langle 0_x|\sqrt{2}\,i(|0\rangle - |1\rangle)|$$

$$= \frac{1}{2}|\sqrt{2}\,i(\langle 0_x|0\rangle - \langle 0_x|1\rangle)|$$

$$= \frac{1}{2}|\sqrt{2}\,i(\sqrt{2}^{-1} - \sqrt{2}^{-1})|$$

$$= \frac{1}{2}|\sqrt{2}\,i(0)| = 0$$

b) $\frac{1}{2}|\langle 0_x[\sigma_1, \sigma_3]|0_x\rangle = \frac{1}{2}|\langle 0_x|-2i\sigma_y|0_x\rangle$

$$= \frac{1}{2}|\langle 0_x|-2i(\tfrac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle - \tfrac{i}{\sqrt{2}}|0\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}|\langle 0_x|\sqrt{2}i(|0\rangle - |1\rangle)|$$

$$= \frac{1}{2}|\sqrt{2}i(\langle 0_x|1\rangle - \langle 0_x|0\rangle)|$$

$$= \frac{1}{2}|\sqrt{2}i(\sqrt{2}^{-1} - \sqrt{2}^{-1})|$$

$$= \frac{1}{2}|\sqrt{2}i(0)| = 0$$

c) $\frac{1}{2}|\langle 0_x|[\sigma_i, \sigma_j]|0_x\rangle = \frac{1}{2}|\langle 0_x|2i\sigma_x|0_x\rangle|$

$$= \frac{1}{2}|\langle 0_x|2i(\tfrac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}|\langle 0_x|\sqrt{2}i(|1\rangle + |0\rangle)|$$

$$= \frac{1}{2}|\sqrt{2}i(\langle 0_x|1\rangle + \langle 0_x|0\rangle)|$$

$$= \frac{1}{2}|\sqrt{2}i(\sqrt{2}^{-1} + \sqrt{2}^{-1})|$$

$$= \frac{1}{2}|\sqrt{2}i(\tfrac{2}{\sqrt{2}})| = |i| = 1$$

Kui me saame vastuseks 0 siis meie valem ei anna mingit adekvaatset alumist piiri vaatlemise täpsuse kohta. Kui saame vastuseks 1 siis saame juba öelda, mis on kahe vaatluse miinimaalne ebatäpsus.

2.6

—