1. Kto jest autorem słów „Wszystko jest liczbą”, a kto „Liczby naturalne stworzył dobry Bóg, a reszta jest dziełem człowieka”?

Odpowiedź
"Wszystko jest liczbą" $\sim$ hasło Pitagorejczycy (Pitagoras z Samos) VI w. p.n.e.

"Liczby naturalne stworzył dobry Bóg, a reszta jest dziełem człowieka" $\sim$ Leopold Kroneker

2. Czy zero jest liczbą naturalną? Podać argument za tym, by zaliczyć je do liczb naturalnych oraz za tym, by liczby naturalne zaczynać od jedynki.

Odpowiedź
Obie sytuacje są poprawne. Za $0 \in \mathbb{N}$:

- konstrukcja zbioru liczb naturalnych na bazie zbiorów
- istnienie elementu neutralnego względem dodawania
- TODO - Szukam argumenty

Przeciw $0 \in \mathbb{N}$:

- wzór na średnią, $n = 0$ nie może być w mianowniku
- aksjomatyka Peano zaczyna się od 1
- Liczby rzymskie nie mają zapisu zera
- Brak problemu z dzieleniem przez liczby naturalne
- Coraz częściej jest używany zwrot "dodatnie liczby całkowite"
- 0 nie posiada rozkładu na czynniki pierwsze

3. Podać definicję grupy.

Odpowiedź
$(G, *) \ : * \ : G \times G \longrightarrow G$

1) $\forall_{a,b,c \in G} \ (a * b) * c = a * (b * c)$ (łączność)

2) $\exists_{e \in G} \ \forall_{a \in G} \ e * a = a * e = a$ (istnieje element neutralny)

3) $\forall_{a \in G} \ \exists_{b \in G} \ a * b = b * a = e$ (istnieje element przeciwny)

4. Wytłumaczyć rolę klas równoważności w relacji równoważności.

Odpowiedź
Klasy równoważności w relacji równoważności odgrywają kluczową rolę, ponieważ każda relacja równoważności dzieli zbiór na rozłączne klasy, gdzie elementy w danej klasie są równoważne

5. Podać formalną definicję liczb całkowitych (na bazie liczb naturalnych).

Odpowiedź
$\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{\sim} \qquad (m,n) \sim (a,b) \Leftrightarrow m+b = n+a$
$(2,5) \sim (1,4)$, bo $2+4 = 5+1$ lub $2-5 = 1-4 = -3$

6. Podać uzasadnienie tego, że przyjmujemy, iż $(-a)\cdot(-b) = ab$, nie zaś $(-a)\cdot(-b) = -ab$ dla $a,b \in \mathbb{N}$.

Odpowiedź
$(-2)(-5) = -10$
$(-2)(10-5) = -2\cdot 10 + (-2)(-5)$
$-2\cdot 5 = -10$ oraz $= -20 + (-10) = -30$

7. Podać definicję pierścienia, pierścienia z jedynką.

Odpowiedź
Pierścień
$(R,+,\cdot,0), \quad R \neq \emptyset$

a) $\forall_{a,b,c\in R}\ a+(b+c) = (a+b)+c$ (łączność dodawania)
b) $\forall_{a\in R}\ a+0 = a$ (element neutralny względem $+$)
c) $\forall_{a\in R}\exists_{b\in R}\ a+b = 0$ (istnienie elementu przeciwnego $b=-a$ względem dodawania)
d) $\forall_{a,b\in R}\ a+b = b+a$ (grupa abelowa dodawania)
e) $\forall_{a,b,c\in R} a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ (łączność mnożenia)
f) $\forall_{a,b,c\in R}\ a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$ (prawo rozdzielności)
g) $\forall_{a,b,c\in R}\ (b+c)\cdot a = (b\cdot a)+(c\cdot a)$ (prawo rozdzielności)

Pierścień z jedynką
$\exists_{1\in R}\forall_{a\in\mathbb{R}} a\cdot 1 = 1\cdot a = a$

8. Podać definicję dzielników zera.

Odpowiedź
Element a pewnego pierścienia, dla którego istnieje taki element b, że $ab = 0$ oraz $b \neq 0$.

9. Podać formalną definicję liczb wymiernych (na bazie liczb całkowitych). Jakiej struktury jest to szczególny przypadek?

Odpowiedź
$\frac{\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})}{\sim} \qquad (m,n) \sim (a,b) \Leftrightarrow m\cdot b = n\cdot a$
$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ np. $(3,7) = (-6,-14) = \frac{3}{7}$
Jest to struktura ciała.

10. Podać „szkolną” definicję liczby wymiernej.

Odpowiedź
$p-$wymierna $\Leftrightarrow$ gdy można ją przedstawić w postaci ułamka o liczniku i mianowniku całkowitym.

11. Kto to był Nicolas Bourbaki?

Odpowiedź
To była grupa młodych matematyków, których celem było napisanie kompletu aktualnych podręczników do matematyki.

12. Zdefiniować „złoty podział”. Obliczyć liczbę otrzymaną w wyniku złotego podziału.

Odpowiedź
Złoty podział jest to podział pewnego odcinka w następujący sposób

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

, dla $a = 1$ $\frac{1}{b} = \frac{b+1}{1} \Leftrightarrow b(b+1) = 1 \Leftrightarrow b^2 + b - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$b_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee b_2 \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Dotyczył on w szczególności pentagramu:

$$\frac{\text{duży}}{\text{średni}} = \frac{\text{średni}}{\text{mały}}$$

13. Udowodnić, że $\sqrt{2}$ nie jest liczbą wymierną.

Odpowiedź
Niech $\sqrt{2}$ będzie liczbą wymierną, można ją zatem zapisać w postaci

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2$$

Rozważmy przypadki

1° a i b nieparzyste - dostajemy natychmiast sprzeczność

2° a nieparzyste i b parzyste - również otrzymujemy sprzeczność

3° a parzyste i b nieparzyste - zatem możemy zapisać $a = 2k$ otrzymujemy

$$2b^2 = 4k^2$$

$$b^2 = 2k^2$$

Ponieważ prawa strona równania jest parzysta, to b musi być parzyste - sprzeczność
Sytuacja, że a i b są parzyste nie może zajść z konstrukcji liczb wymiernych.

14. Podać definicję ciała.

Odpowiedź
Ciało $\mathbb{K}$ to struktura $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$ z działaniami odpowiednio $+$ i $\cdot$ (dodawanie i mnożenie) o własnościach

1) $\forall_{a,b,c\in\mathbb{K}} a + (b + c) = (a + b) + c$ (łączność dodawania)
2) $\forall_{a,b\in\mathbb{K}} a + b = b + a$ (przemienniość dodawania)
3) $\forall_{a\in\mathbb{K}} a + 0 = a$ (istnienie zera)
4) $\forall_{a\in\mathbb{K}} \exists_{b\in\mathbb{K}} : a + b = 0$ (itnienie elementu przeciwnego)
5) $\forall_{a,b,c\in\mathbb{K}} a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (łączność mnożenia)
6) $\forall_{a,b\in\mathbb{K}} a \cdot b = b \cdot a$ (przemienność mnożenia)
7) $\forall_{a\in\mathbb{K}} a \cdot 1 = a$ (element neutralny mnożenia)
8) $\forall_{a\in\mathbb{K}\setminus\{0\}} \exists_{b\in\mathbb{K}} : a \cdot b = 1$ (element odwrotny względem mnożenia)
9) $\forall_{a,b,c\in\mathbb{K}} a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania)

15. Opisać „algebraiczne” przyczyny, dla których ciało $\mathbb{Q}$ wymaga „rozszerzenia”.

Odpowiedź
Możliwość rozwiązania równań typu

$$x^2 - 2 = 0$$

16. Opisać przyczyny związane z analizą matematyczną, dla których ciało $\mathbb{Q}$ wymaga „rozszerzenia”.

Odpowiedź
Z tw o przyjmowaniu wartości pośrednich
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ciągła, $f(a) < f(b)\ \forall_{y\in[f(a),f(b)]} \exists_{\xi\in[a,b]} : f(\xi) = y$

badamy funkcję $f : [0, 3] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x^2 < 2 \\ 1 & x^2 > 2 \end{cases}$$

17. Opisać przyczyny dotyczące struktury, dla których ciało $\mathbb{Q}$ wymaga „rozszerzenia”.

Odpowiedź
$\{x : x^2 < 2\}$ - brak kresu górnego (w $\mathbb{Q}$)

18. Podać definicję częściowego porządku i porządku.

Odpowiedź
Relacje $\prec$ nazywamy częściowym porządkiem na X, gdy spełnia

i) $\forall_{x\in X}\ x \prec x$ (zwrotność)

ii) $\forall_{x,y,z\in X}\ x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$ (przechodniość)

iii) $\forall_{x,y\in X}\ x \prec y \wedge y \prec x \Rightarrow x = y$ (antysymetryczność)

Porządek jest liniowy, gdy dodatkowo jest spójny. $(\forall_{a,b\in X} a \prec b \vee b \prec a)$

19. Podać definicję zbioru ograniczonego z góry i kresu górnego.

Odpowiedź
$A-$ ograniczony z góry $\Leftrightarrow \exists_c : \forall_{x\in A} x \leq c$
$p-$ kres górny $A \overset{\mathbf{def}}{\Leftrightarrow} p = \min\{b : \forall_{x\in A} : x \leq b\}$

20. Podać definicję porządku ciągłego.

Odpowiedź
Liniowy porządek jest ciągły $\Leftrightarrow \forall_{A\neq\emptyset}$ A ograniczony z góry, wsród ograniczeń istnieje ograniczenie najmniejsze

21. Podać interpretację geometryczną zbioru liczb rzeczywistych.

Odpowiedź
Linia $\longrightarrow$ o taka

22. Opisać (podać schemat) konstrukcji Cantora zbioru liczb rzeczywistych.

Odpowiedź
$\mathbb{Q}$ (x_n) - ciąg Cauch'ego $\Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\exists_k\forall_{n,m\geq k}|x_n - x_m| < \epsilon$
$\frac{X}{\sim} : (a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n\geq N}|a_n - b_n| < \epsilon$
$[(a_n)]$ - granica (liczba rzeczywista)

23. Jak się definiuje sumę liczb rzeczywistych, iloczyn liczb rzeczywistych oraz własność „$a < b$" dla liczb rzeczywistych według konstrukcji Cantora?

Odpowiedź
Jak wyżej mamy, że $[(a_n)]$ - granica (liczba rzeczywista)
Porządek $(a_n) < (b_n) \Leftrightarrow \exists_{\epsilon>0}\exists_{k_0}\forall_{k>k_0} a_k + \epsilon < b_k$

$(a_n) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (a_n)$ zbieżny (w $\mathbb{R}$)

$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ - klasy

24. Podać definicję przekroju Dedekinda, klasy górnej, klasy dolnej.

Odpowiedź
$(E, \leq)$ - zbiór uporządkowany liniowo

Przkrój Dedekinda zbioru $E = (A, B)$ $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$ $\forall_{a \in A, b \in B} a < b, A \cup B = E$

A - klasa dolna, B - klasa górna

25. Określić, co to znaczy, że przekrój Dedekinda daje lukę.

Odpowiedź
Przekrój Dedekinda daje lukę $\Leftrightarrow$w klasie dolnej nie ma elementu największego lub w klasie górnej nie ma elementu najmniejszego.

26. Opisać (podać schemat) konstrukcji Dedekinda zbioru liczb rzeczywistych.

Odpowiedź
$\mathbb{R}$ - zbiór wszystkich przekrojów Dedekinda $\mathbb{Q}$ z utorzsamieniem "$\sim$".

27. Jak się definiuje sumę liczb rzeczywistych, iloczyn liczb rzeczywistych oraz własność „$a < b$" dla liczb rzeczywistych według konstrukcji Dedekinda?

Odpowiedź
$(A, B) \sim (A', B') \Leftrightarrow$ element największy A = emelent największy B'

np. $((-\infty, 3] \cap \mathbb{Q}, (3, \infty) \cap \mathbb{Q}) \sim ((-\infty, 3) \cap \mathbb{Q}, [3, \infty) \cap \mathbb{Q})$

Niech będą dane przekroje Dedekinda $\underbrace{(A, B)}_{\alpha}\underbrace{(C, D)}_{\gamma}$

Wówczas $\alpha < \gamma \Leftrightarrow A \subset C,\ A \neq C$

$(A, B) + (C, D) = (A + C, B + D)$

28. Co można powiedzieć o sumie i iloczynie dwóch liczb wymiernych, dwóch liczb niewymiernych, liczby wymiernej i liczby niewymiernej?

Odpowiedź

- $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$ (ciało)
- $a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \notin \mathbb{Q}$, bo gdyby $a + b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b - a = b \in \mathbb{Q}$ sprzeczność
- $a, b \notin \mathbb{Q}$, to $a+b$ może być i wymierne i niewymierne $\sqrt{2}+\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ oraz $\sqrt{2}+1-\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
- $a \in \mathbb{Q}, b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a \cdot b \notin \mathbb{Q}$, bo gdyby $a \cdot b \in \mathbb{Q}$, to $b = \frac{1}{a} \cdot ab \in \mathbb{Q}$ sprzeczność
- $a, b \notin \mathbb{Q}$, to $a \cdot b$ może być wymierne lub niewymierne $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ oraz $\sqrt{2}\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

29. Podać i udowodnić zasadę Archimedesa.

Odpowiedź
Zasada Archimedesa (tw o małych piechurach)

$$\forall_{p>0}\forall_{\alpha>0}\exists_{n\in\mathbb{N}} : n\cdot\alpha > p$$

D: Niech $p > 0$, $\alpha > 0$

Hp. $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ n\cdot\alpha \leq p$

$A = \{n\cdot\alpha : n\in\mathbb{N}\}$ - ograniczony z góry, K - kres górny zbioru A, $\forall_n\ n\cdot\alpha \leq K$

$$\exists_{n_0} : K-\alpha < n_0\cdot\alpha$$

$$K < n_0\cdot\alpha+\alpha = (n_0+1)\alpha$$

sprzeczność

30. Podać definicję zbioru uporządkowanego w sposób gęsty.

Odpowiedź
Zbiór jest uporządkowany w sposób gęsty $\Leftrightarrow \forall_{a,b\in X\ a<b}\exists_{c\in X} : a<c<b$

31. Udowodnić, że zbiór liczb wymiernych jest uporządkowany gęsto.

Odpowiedź
$\mathbb{Q}$ uporządkowany gęsto, ponieważ

$$a,b\in\mathbb{Q} : a<b \qquad c := \frac{a+b}{2} \qquad a<c<b$$

32. Udowodnić, że między dowolne dwie liczby rzeczywiste można wstawić liczbę wymierną.

Odpowiedź

$$\forall_{a,b\in\mathbb{R},\,a<b}\ \exists_{p\in\mathbb{Q}} : a<p<b$$

D: $\frac{1}{b-a} > 0\ \exists_{n\in\mathbb{N}} : n > \frac{1}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{n} < b-a$

$k := max\{k\in\mathbb{Z} : k\leq na\} \Rightarrow a < \frac{k+1}{n} \qquad (?)\ \frac{k+1}{n} < b$

$$n > \frac{1}{b-a}$$

$$n\cdot(b-a) > 1$$

$$nb > 1+na \geq k+1 \Rightarrow \frac{k+1}{n} < b$$

33. Udowodnić, że między dowolne dwie liczby wymierne można wstawić liczbę niewymierną.

Odpowiedź

$$\forall_{a,b\in\mathbb{Q},a<b}\exists_{p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} a<p<b$$

$\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, $\frac{\sqrt{2}}{b-a}\notin\mathbb{Q}$

$\exists_{n\in\mathbb{N}}: n>\frac{\sqrt{2}}{b-a}\Rightarrow b-a>\frac{\sqrt{2}}{n}\Rightarrow b>a+\frac{\sqrt{2}}{n}$

$$a<a+\frac{\sqrt{2}}{n}<b$$

34. Udowodnić, że między dowolne dwie liczby rzeczywiste można wstawić liczbę niewymierną.

Odpowiedź

$$\forall_{a,b\in\mathbb{R},\,a<b}\ \exists_{\ p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\ a<p<b$$

D: $x,y\in\mathbb{R}$

$\exists_{\ a\in\mathbb{Q}}: x<a<y$ $\quad$ $\exists_{\ b\in\mathbb{Q}}: a<b<y$ $\quad$ $\exists_{\ p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\ x<a<p<b<y$

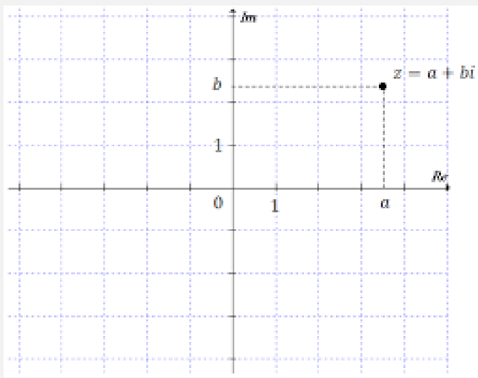
35. Zdefiniować zbiór liczb zespolonych.

Odpowiedź

Liczby zespolone są rozszerzeniem zbioru liczb rzeczywistych.

i – jednostka urojona, $\quad i^2=-1$.

$z=(a,b)=a+bi$, przy czym jeśli $b=0$, to $z\in\mathbb{R}$.



36. Podać postać trygonometryczną liczby zespolonej; zdefiniować moduł liczby zespolonej.

Odpowiedź

$$z=a+ib$$

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

37. Uzasadnić, dlaczego niewłaściwym jest zapis liczby i jako $\sqrt{-1}$.

Odpowiedź
$\sqrt{-1}$ jest to zbiór elementowy $\{i, -i\}$, a nie jedna liczba.

38. Podać „dowód” błędnego faktu, że $1 = -1$ z wykorzystaniem zapisu „$\sqrt{-1}$” i pokazać błąd w tym dowodzie.

Odpowiedź

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$
$$\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$$
$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$
$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{1} \cdot \sqrt{1}$$
$$-1 = 1$$

39. Określić (ogólnie) historię znajdywania wzorów ogólnych na rozwiązywanie równań n-tego stopnia (co zrobili: Tartaglia, Cardano, Ferrari, Abel, Galois).

Odpowiedź
Tartaglia – w XVI wieku odkrył metodę rozwiązywania równań sześciennych w szczególnym przypadku (tzw. równania zredukowanego). Przekazał swój sposób Girolamo Cardano pod warunkiem zachowania go w tajemnicy.

Cardano – opublikował w 1545 r. w Ars Magna ogólny wzór na pierwiastki równań sześciennych, wykorzystując metodę Tartaglii i własne uogólnienia. Jego praca zapoczątkowała rozwój algebry symbolicznej.

Ferrari – uczeń Cardana, rozwiązał ogólnie równania czwartego stopnia (równania bikwadratowe) – jego metoda opiera się na sprowadzeniu równania czwartego stopnia do dwóch równań kwadratowych.

Abel – w 1824 roku udowodnił, że nie istnieje ogólny wzór (wyrażony przez pierwiastki) dla równań algebraicznych stopnia piątego i wyższego. To był przełom w rozumieniu granic klasycznej algebry.

Galois – rozwinął teorię grup i stworzył podstawy teorii Galois, która pozwala precyzyjnie określić, kiedy dane równanie algebraiczne da się rozwiązać przez pierwiastki. Pokazał, że rozwiązanie zależy od struktury grupy permutacji pierwiastków równania.

40. Sformułować zasadnicze twierdzenie algebry.

Odpowiedź
Dowolny wielomian n-tego stopnia ma dokładnie n pierwiastków zespolonych wraz z krotnościami.

41. Zdefiniować kwaterniony.

Odpowiedź
$\mathbb{R}^4$ $\begin{bmatrix} a+ib+jc+kd \\ i^2=j^2=k^2=ijk=-1 \end{bmatrix} \Rightarrow ij=k, ik=j, jk=i, ijk=-1, ijkk=-k, -ij=-k, ij=k$

42. Zdefiniować liczby naturalne na bazie zbiorów.

Odpowiedź

- $\emptyset$ - 0 elementów
- $\{\emptyset\}$ - 1 element
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ - 2 elementy
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ - 3 elementy
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$ - 4 elementy
- itd.

43. Zdefiniować liczby naturalne wg aksjomatów Peano.

Odpowiedź
$\mathbb{N}$, operacja następnika $a \to N(a)$

1) $1 \in \mathbb{N} \qquad (0 \in \mathbb{N})$
2) $\forall_{a\in\mathbb{N}} N(a) \neq 1$
3) $\forall_{a\in\mathbb{N}} a$ ma dokładnie jeden następnik
4) $N(a) = N(b) \Leftrightarrow a = b$
5) $\begin{bmatrix} A \subset \mathbb{N} \\ 1 \in A \\ n \in A \Rightarrow n+1 \in A \end{bmatrix} \Rightarrow A = \mathbb{N}$

44. Zdefiniować liczby naturalne wg aksjomatów Wilkosza.

Odpowiedź

1) $\exists_n : n \in \mathbb{N}$ $(\neq \emptyset)$
2) $\forall_{k\in\mathbb{N}} \exists_{n\in\mathbb{N}} : k < n$ (nie ograniczony z góry)
3) $\forall_{k,n\in\mathbb{N}} k < n \Rightarrow \sim (n < k)$ (antysymetria)
4) $(A \subset \mathbb{N}, \exists_{k\in A})(\neq \emptyset) \Rightarrow \exists_{i\in A} \forall_{n\in A} i \leq n$ (zasada minimum)
5) $(A \subset \mathbb{N}, \exists_{k\in A})(\neq \emptyset)$ oraz $(\exists_{i\in\mathbb{N}} \forall_{m\in A} m \leq i) \Rightarrow \exists_{j\in A} \forall_{l\in A} l \leq j$ (ograczinony z góry ma element największy)

45. Sformułować zasadę indukcji matematycznej z użyciem zapisu „T_n” (własność prawdziwa dla liczby naturalnej n).

Odpowiedź
$A \subset \mathbb{N}$

$$\begin{bmatrix} 1) & n_0 \in A \\ 2) & \forall_{n \geq n_0} n \in A \Rightarrow n + a \in A \end{bmatrix} \Rightarrow A \supset \mathbb{N}_{n_0}$$

T_n - własność dotycząca liczby naturalnej n jest prawdziwe

$$\begin{bmatrix} 1) & T_n \\ 2) & \forall_{n \geq n_0} T_n \Rightarrow T_{n+1} \end{bmatrix} \Rightarrow \forall_{n \geq n_0} T_n$$

46. Sformułować zasadę indukcji matematycznej zapisaną za pomocą należenia liczb naturalnych do pewnego zbioru.

Odpowiedź
$A \subset N$
$$\begin{bmatrix} 1^\circ & n_0 \in A \\ 2^\circ & \forall_{n \geq n_0} n \in A \Rightarrow n + 1 \in A \end{bmatrix} \Rightarrow A \supset \mathbb{N}_{n_0}$$

47. Sformułować zasadę indukcji matematycznej z założeniem w drugim kroku dotyczącym „wszystkich poprzedzających liczb”.

Odpowiedź
Tak zwana **zasada indukcji zupełnej**
$$\begin{bmatrix} 1) & 0 \in B \\ 2) & (indukcja)\ n \in B \Rightarrow 0, \ldots, n \in B \end{bmatrix} \Rightarrow B = \mathbb{N}$$

48. Sformułować zasadę indukcji matematycznej „z przeskokiem o dwie liczby”.

Odpowiedź
$$\begin{bmatrix} 1) & T_0, T_1 \\ 2) & \forall_{n \geq 0} \left(T_n \Rightarrow T_n + 2\right) \end{bmatrix} \Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} T_n$$

49. Sformułować zasadę indukcji matematycznej w wersji indukcji wstecznej.

Odpowiedź

$$\begin{bmatrix} 1) & T_0 \\ 2) & \exists_{n_k}, n_k \to \infty (k \to \infty), n_0 = 0, (n_k) \text{ - silnie rosnący } T_{n_k} \Rightarrow T_{n_{k+1}} \\ 3) & \forall_{n \geq 1}\, T_n \Rightarrow T_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}}\, T_n$$

50. Udowodnić równoważność zasady indukcji matematycznej z zasadą minimum.

Odpowiedź

Zasada minimum $\Leftrightarrow$ Zasada indukcji matematycznej

"$\Rightarrow$"

$$\begin{bmatrix} 0 \in A \\ \forall_{n \geq 0} n \in A \Rightarrow n+1 \in A \end{bmatrix} \overset{?}{\Rightarrow} A = \mathbb{N}$$

Hp. $A \neq \mathbb{N}$

$B := \mathbb{N} \setminus A, B \neq \emptyset$

$0 \in A \Rightarrow 0 \notin B$

Niech $k_0 := minB, k_0 > 0$

$k_0 - 1 \in \mathbb{N}, k_0 - 1 \in B, k_0 - 1 \in A$

$k_0 - 1 + 1 = k_0 \in A$ sprzeczność

"$\Leftarrow$"

$A \subset \mathbb{N}$, w A nie ma elementu najmniejszego $\overset{?}{\Rightarrow} A = \emptyset$

$0 \notin A$, bo byłby najmniejszy

$B := \{m \in \mathbb{N} : \forall_{k \leq m} k \notin A\}$

I $0 \in B$

II (indukcja) $n \in B \Rightarrow 0, \ldots, n \notin A$

$n+1 \notin A$ (bo gdyby $n+1 \in A$ to $n+1$ byłby najmniejszy)

$n+1 \in B$

$\overset{\text{indukcja}}{\Rightarrow} B = \mathbb{N}, \forall_{k \in \mathbb{N}} k \notin A \Rightarrow A = \emptyset$

51. Udowodnić indukcyjnie, że zbiór n-elementowy ma 2^n podzbiorów. Zwrócić szczególną uwagę na sformułowanie drugiego kroku indukcyjnego i odpowiednie podejście do jego dowodu.

Odpowiedź

1° $X = \emptyset$

2° Z: $\forall_X \#X = n \Rightarrow \#P(X) = 2^n$

T: $\forall_Y : \#Y = n+1 \Rightarrow \#P(Y) = 2^{n+1}$

D: Niech Y taki, że $\#Y = n+1$ oraz $a \in Y$

$X := Y \setminus \{a\}, \#X = n$

Niech $B \subset Y$, wtedy

- $a \in B \Rightarrow B = \{a\} \cup C$ - takich jest 2^n
  lub
- $a \notin B \Rightarrow B \subset X$ - takich jest 2^n

Czyli $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

52. Udowodnić nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną za pomocą indukcji wstecznej.

Odpowiedź
$a_1, \ldots, a_n \geq 0 \Rightarrow \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n}$

I) $n = 1$

$L = a_1 \; P = a_1$ ok

II) $\forall_{n\geq 1} T_m \Rightarrow T_{2n}$

Z:$x_1, \ldots, x_n > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$

T:$y_1, \ldots, y_{2n} > 0 \Rightarrow \sqrt[2n]{y_1 \cdot \cdots \cdot y_{2n}} \leq \frac{y_1+\cdots+y_{2n}}{2n}$

D:$y_1, \ldots, y_{2n} > 0$

$b_k := \frac{y_{2k-1}+y_{2k}}{2}.c_k := \sqrt{y_{2k-1} \cdot y_{2k}} \Rightarrow c_k \leq b_k$ (bo $a, b > 0 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$)

$\sqrt[2n]{y_1 \cdot \cdots \cdot y_{2n}} = (y_1 \cdot \cdots \cdot y_{2n})^{\frac{1}{2n}} = ((y_1 \cdot y_2)^{\frac{1}{2}} \cdot \cdots \cdot (y_{2n-1} \cdot y_{2n})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{n}} = (c_1 \cdot \cdots \cdot c_n)^{\frac{1}{n}} \underset{\text{z indukcji}}{\leq} \frac{c_1+\cdots+c_n}{n} \leq \frac{b_1+\cdots+b_n}{n} = \frac{y_1+\cdots+y_{2n}}{2n}$

III) $T_n \Rightarrow T_{n-1}, n \geq 2$

Z: $x_1, \ldots, x_n > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{2}$

T:$a_1, \ldots, z_{n-1} > 0 \Rightarrow \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}} \leq \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$

D:$a_1, \ldots, a_{n-1} > 0$

$x_i = a_i \; i = 1, \ldots, n-1$

$x_n := \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}} = (a_1 \ldots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} = (x_1 \ldots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \Rightarrow x_1 \ldots x_{n-1} = x_n^{n-1}$

$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq (x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} = (x_n^n)^{\frac{1}{n}} = x_n$

$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_n}{n} \geq x_n$

$\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n} \geq x_n(1 - \frac{1}{n}) = x_n \frac{n-1}{n}$

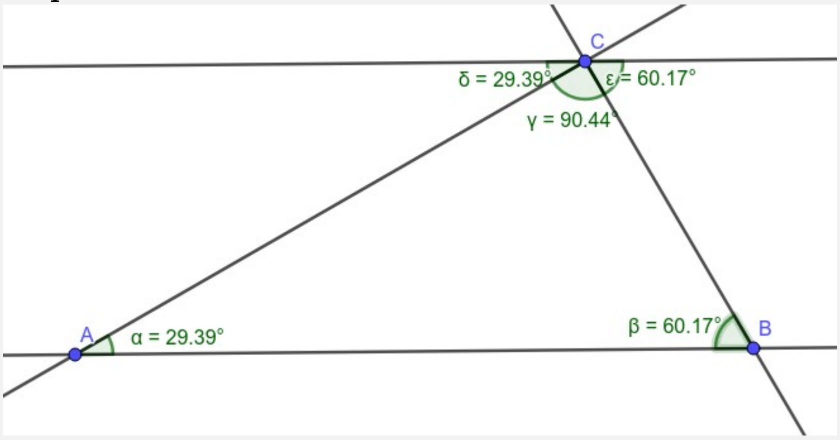
$\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geq x_n = \sqrt[n-1]{x_1 \ldots x_{n-1}}$

$\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}}$

Indukcja wsteczna kończy dowód.

53. Udowodnić, że suma kątów w trójkącie wynosi 180°.

Odpowiedź

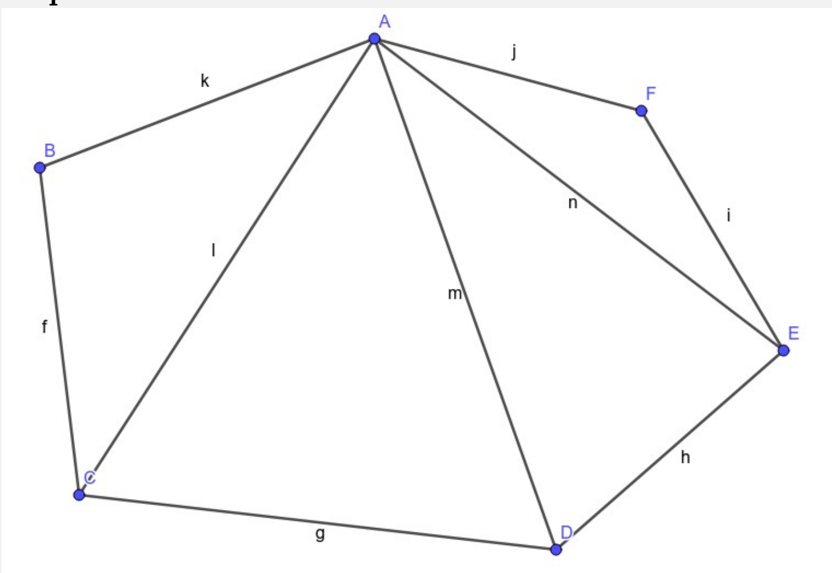


Kąty α i δ oraz β i ϵ są odpowiednio sobie równe na podstawie katów naprzemianległych wewnętrznie.

Suma kątów $\delta + \gamma + \epsilon$ jest kątem półpełnym, czyli ma 180°.

54. Udowodnić, że suma kątów w n-kącie wypukłym wynosi $(n-2) \cdot 180°$.

Odpowiedź



Dowolny wielokąt wypukły o n wierzchołkach można podzielić na $n-2$ trójkątów (w których kąty na siebie nie zachodzą), co daje nam w sumie $(n-2) \cdot 180°$.

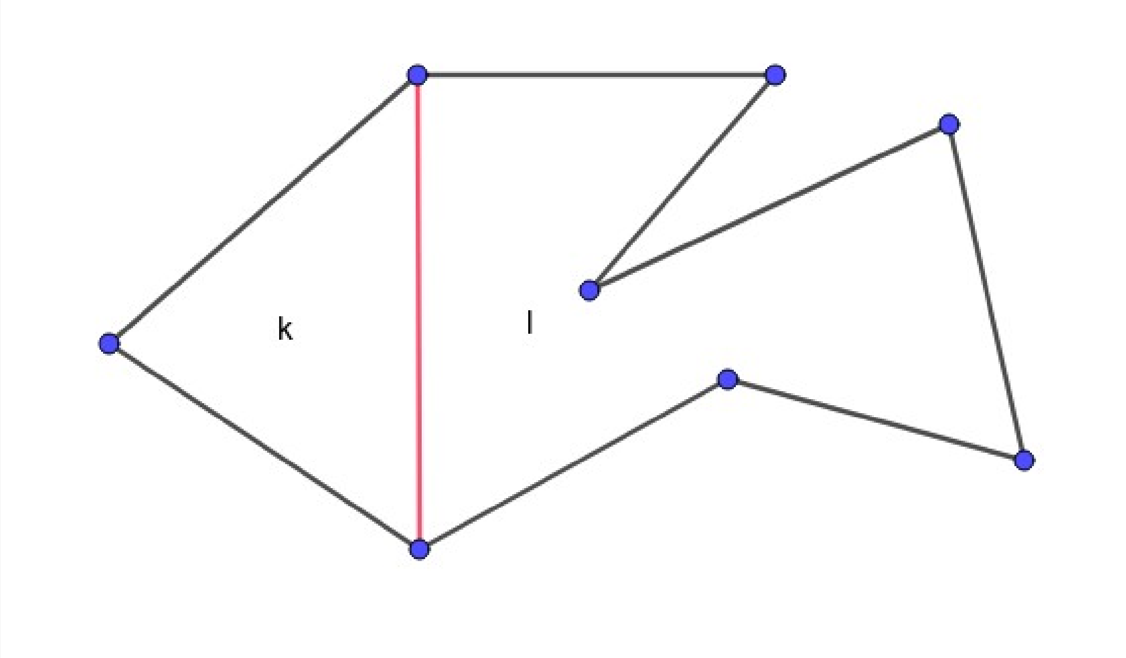
55. Udowodnić, że suma kątów w n-kącie wynosi $(n-2)\cdot 180°$, wykorzystując twierdzenie o istnieniu przekątnej zawartej w wielokącie.

Odpowiedź

I ok

II W dolownym wielokącie istnieje przekątna zwarta w tym wielokącie.

$T_3.\ldots, T_n \Rightarrow T_{n+1}$



Przekątna dzieli $(n+1)$-kąt na k-kąt i l-kąt $(k, l \leq n, k+l = n+3)$.

Suma kątów w k-kącie wynosi $(k-2)\cdot 180°$, podobnie w l-kącie wynosi $(l-2)\cdot 180°$.

W $(n-1)$-kącie $(k-2)\cdot 180° + (l-2)\cdot 180° = (k+l-4)\cdot 180° = (n+3-4)\cdot 180° = (n-1)\cdot 180° = ((n+1)-2)\cdot 180°$.

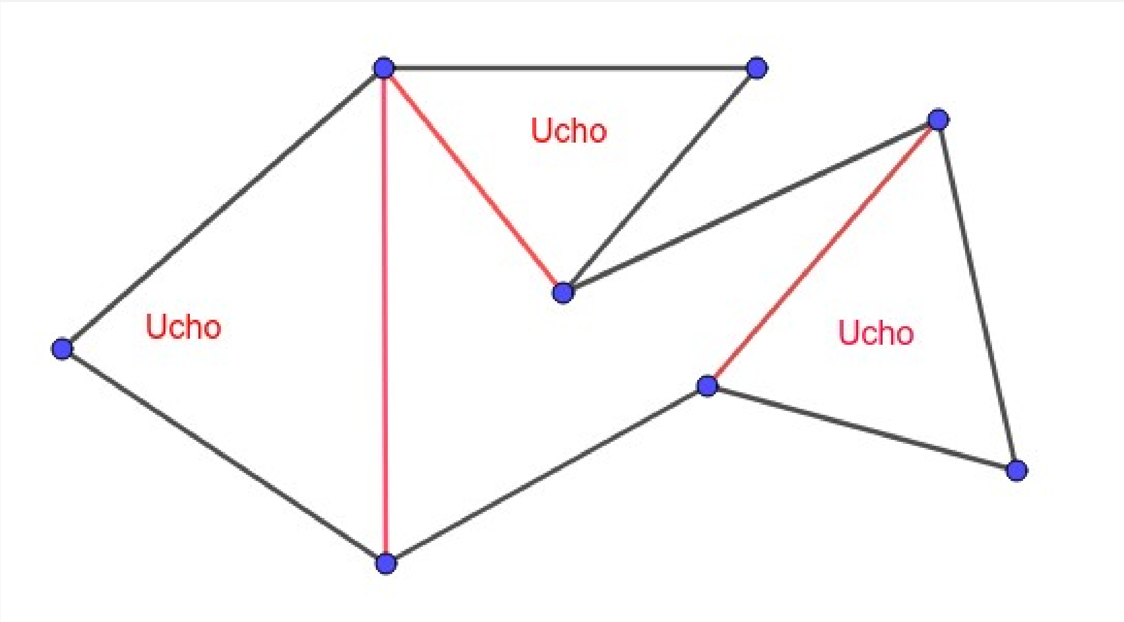
Indukcja kończy dowód.

56. Udowodnić, że suma kątów w n-kącie wynosi $(n-2) \cdot 180°$, wykorzystując twierdzenie o uchach (Two Ears Theorem).

Odpowiedź

I ok

II W każdym wielokącie istnieją co najmniej 2 "ucha".



Bierzemy $(n+1)$-kąt. Ma in ucho $\Rightarrow$ odcinamy je. Powstaje n-kąt.

$(n-2) \cdot 180° + 180° = (n-1) \cdot 180° = ((n+1)-2) \cdot 180°$

Indukcja kończy dowód.

57. Pokazać, na czym polega błąd w indukcyjnym „dowodzie”, że suma kątów w n-kącie wynosi $(n-2) \cdot 180°$, jeśli dowód przeprowadza się według schematu dodania trójkąta do n-kąta.

Odpowiedź

TODO - Mam coś zapisane, ale brakuje mi dlaczego jest fałszywy - pewnie chodzi o "zepsucie" wypukłości wielokąta

Od Przemka: gdy dodamy trójkąt, to może się okazać, że otrzymamy wielokąt o tej samej liczbie wierzchołków co na początku - czyli nie ma właściwej realizacji kroku indukcyjnego

58. Podać błędny indukcyjny „dowód” tego, że wszystkie dziewczęta mają ten sam kolor oczu (lub wszystkie koty są tego samego koloru, itp.) i pokazać błąd w dowodzie.

Odpowiedź
Wszystkie dziewczęta mają ten sam kolor oczu.

1° Jedna dziewczyna - ok

2° Mam zbiór n dziewczyn, dołączamy jedną dziewczynę tworząc zbiór $n+1$ elemetowy, następnie zabieramy dziewczynę z tej grupy (ale inną niż tą, która dołączaliśmy). Otrzymujemy zbiór n elementowy, co z założeń indukcji daje nam, że wszystkie dziewnczyny mają ten sam kolor oczu. Czyli dołączona dziewczyna ma ten sam kolor oczu co pozostałe.

Błąd polega na tym, że z $T_1 \Rightarrow T_2$ mamy możliwą zamianę koloru oczu, ponieważ wymieniamy cały zbiór.

59. Uzasadnić, że „tricku” w „dowodzie” poprzedniej własności nie można stosować w „dowodzie” tego, że wszystkie koty są czarne. Pokazać błąd w „dowodzie” własności, że wszystkie koty są czarne.

Odpowiedź
To co wyżej.

60. Podać błędny indukcyjny „dowód” tego, że wszystkie liczby naturalne są równe i pokazać błąd w dowodzie.

Odpowiedź
$\forall_{m,n\in\mathbb{N}} : m = n$

D (fałszywy): Chcemy pokazać, że $\forall_{k\in\mathbb{N}}\forall_{m,n\in\mathbb{N}} \max\{m,n\} = k \Rightarrow m = n$

1° $k = 0 \Rightarrow \max\{m,n\} = 0 \Rightarrow m = n = 0$ ok

2° "$T_k \Rightarrow T_{k+1}$"
$\max\{m,n\} = k + 1$
$\max\{m-1, n-1\} = k \overset{\text{zał ind}}{\Rightarrow} k = m - 1 = n - 1 \Rightarrow m = n$

Indukcja kończy dowód.

Błąd polega na tym, że $m-1$ oraz $n-1$ nie muszą być naturalne.

61. Sformułować twierdzenie Pitagorasa.

Odpowiedź
W trójkącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątej.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

62. Sformułować i wykazać twierdzenie o odcinkach stycznych.

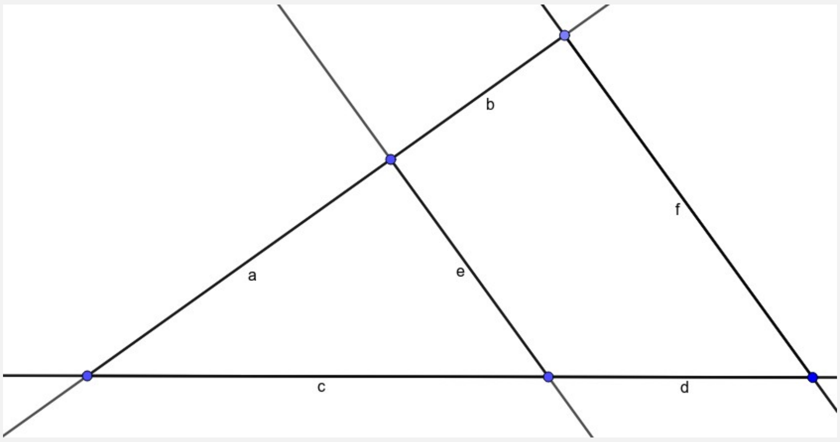
Odpowiedź
Niesłusznie zwane "najmocniejszym twierdzeniem algebry".

Dany jest okrąg oraz punkt P leżacy poza okręgiem. Z punktu P poprowadzono dwie półproste styczne do okręgu odpowiednio w punktach A i B. Wowczas:

$$|PA| = |PB|$$

63. Sformułować twierdzenie Talesa (z wszystkimi możliwymi proporcjami).

Odpowiedź
Dane są dwie proste nierównoległe oraz dwie proste równoległe przecinające te proste (zobacz rysunek).

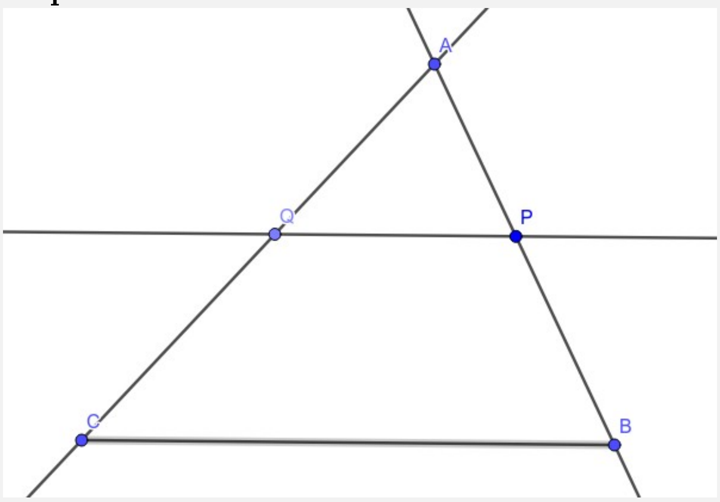


Wówczas zachodzi:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} \qquad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$$

64. Udowodnić twierdzenie Talesa metodą z „Elementów” Euklidesa.

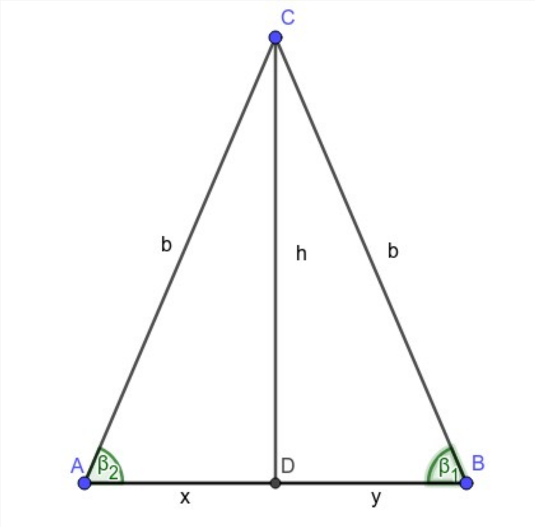
Odpowiedź



$$\frac{AP}{BP} = \frac{P_{\Delta APQ}}{P_{\Delta BPQ}} = \frac{P_{\Delta APQ}}{P_{\Delta QPC}} = \frac{AQ}{CQ}$$

65. Wykazać, że jeśli w trójkącie dwa boki są równe, to i dwa kąty są równe.

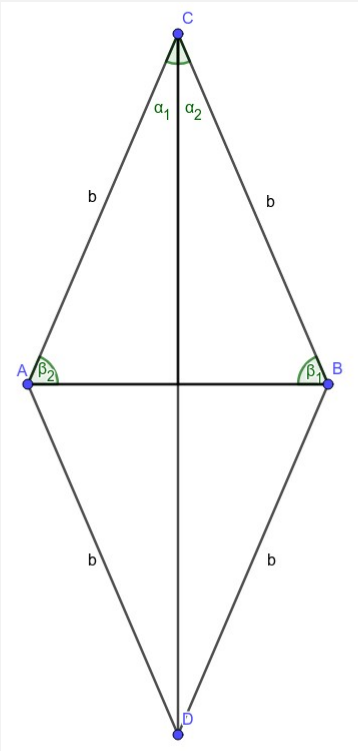
Odpowiedź



$x = \sqrt{b^2 - h^2} = y \Rightarrow x = y \Rightarrow \beta_1 = \beta_2$, bo tą przystające.

66. Wykazać, że jeśli w trójkącie dwa boki są równe, to i dwa kąty są równe bez wykorzystywania Aksjomatu V Euklidesa (czyli bez twierdzenia Pitagorasa).

Odpowiedź



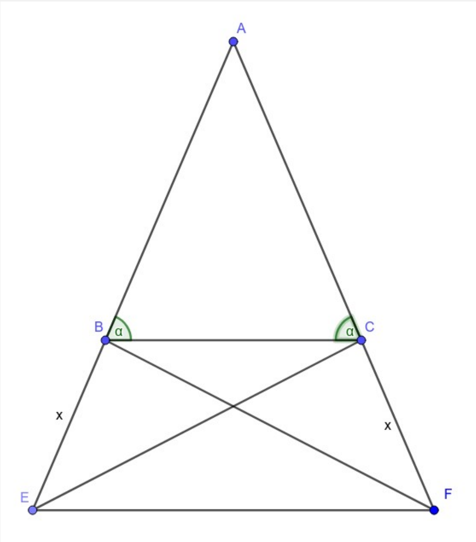
ΔACD i ΔBCD przystające (cecha BBB) $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow$ trójkąty u góry są przystające (cecha BKB) $\Rightarrow \beta_1 = \beta_2$

67. Wykazać, że jeśli w trójkącie dwa kąty są równe, to i dwa boki są równe.

Odpowiedź
$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \Delta$ przystające $\Rightarrow b_1 = b_2$

68. Wykazać, że jeśli w trójkącie dwa kąty są równe, to i dwa boki są równe bez wykorzystywania Aksjomatu V Euklidesa (czyli bez korzystania z tego, że suma kątów w trójkącie wynosi 180°).

Odpowiedź



Trójkąty BCE i BCF są przystające (cecha BKB). $\Rightarrow \angle BEC = \angle BFC \Rightarrow |CE| = |CF| \Rightarrow |AB| = |AC|$

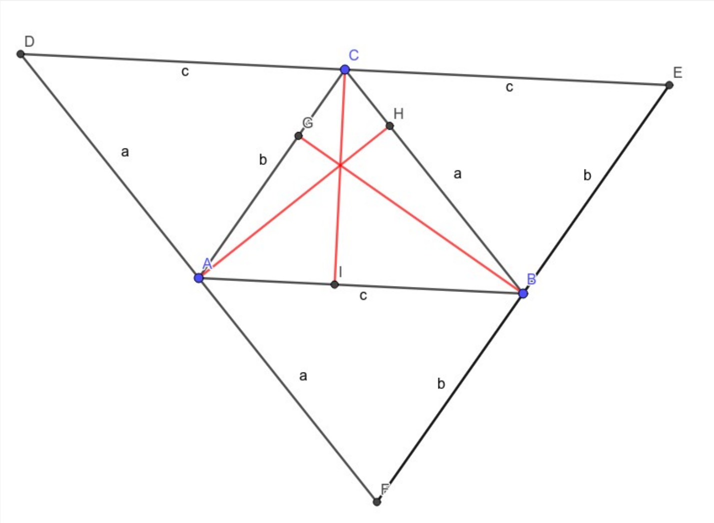
69. Udowodnić, że symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Odpowiedź
Niech punkt O oznacza przecięcie się dwóch symetralnych - boku AB i BC. Wówczas

$$\begin{bmatrix} \text{sym}AB \Rightarrow |AO| = |OB| \\ \text{sym}BC \Rightarrow |OB| = |OC| \end{bmatrix} \Rightarrow |AO| = |OC| \Rightarrow O \in \text{sym}AC.$$

70. Udowodnić, że wysokości w trójkącie (precyzyjnie: proste zawierające wysokości w trójkącie) przecinają się w jednym punkcie.

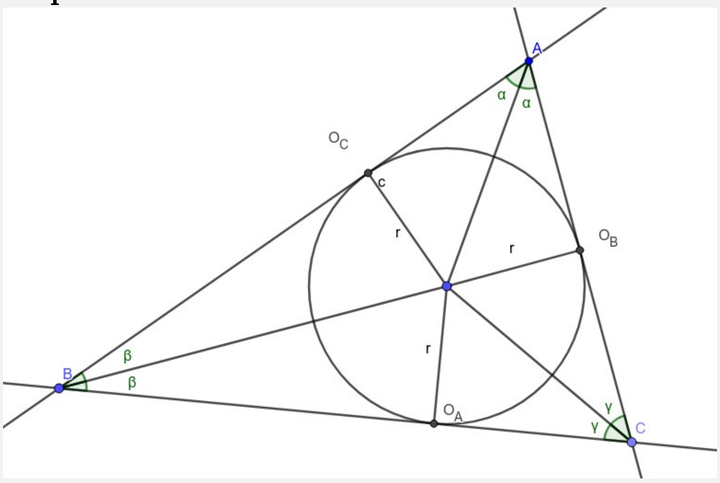
Odpowiedź



Tworzymy proste równoległe do podtaw jak rysunek wyżej. Czerwone linie zawierają się w symetrialych $\Rightarrow$ przecinają się w jednym punkcie.

71. Udowodnić, że dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Odpowiedź

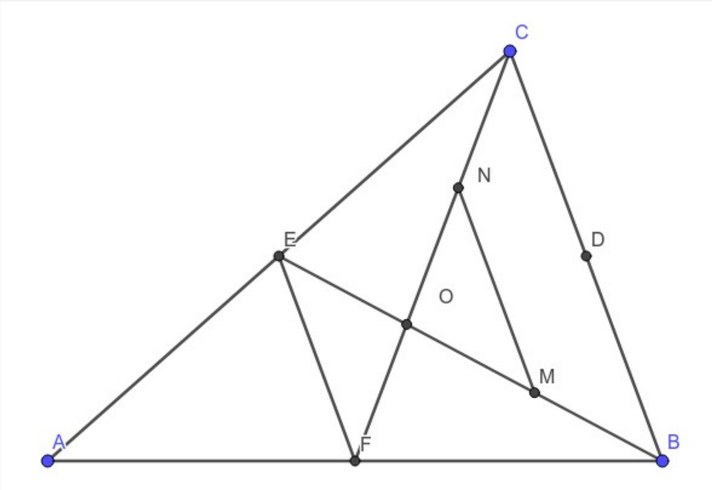


Dwusieczne kątów $\angle ABC$ i $\angle ACB$ musza się przecinać.

Wówczas $OO_B = OO_A \wedge OO_C = OO_A \Rightarrow OO_C = OO_B$, czyli jest to dwusieczna kąta $\angle BAC$

72. Udowodnić, że środkowe w trójkącie przecinają się w jednym punkcie, dzielącym każdą ze środkowych w stosunku 1 : 2.

Odpowiedź



Dorysowywuje odcinek EF równoległy do BC (odwrotne tw. Talesa)

Dziele AO i CO w połowie (punkty M i N) ($MN \mid\mid EF$)

Z twierdzenia Talesa $\frac{FE}{BC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = EF \Rightarrow MNEF$ jest równoległobokiem.

O - środek równoległoboku, przekątne przecinają się w połowie.

Czyli O dzieli CF, BE w stosunku 1 : 2

73. Zdefiniować funkcję, dziedzinę funkcji, przeciwdziedzinę funkcji.

Odpowiedź
X, Y - zbiory, $X, Y \neq \emptyset$

$f : X \to Y \Leftrightarrow \forall_{x \in X} \exists!_{y \in Y} : (x, y) \in f$

X - dziedzina

Y - przeciwdziedzina

74. Zdefiniować obraz i przeciwobraz (przy danej funkcji).

Odpowiedź
$f(A) := \{f(x) : x \in A\}, A \subset X$ nazywamy obrazem zbioru A

$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}, b \subset B$ nazywamy przeciwobrazem zbioru B

75. Wyjaśnić różnicę między symbolami "$\longrightarrow$" i „$\longmapsto$”.

Odpowiedź
$\longrightarrow$ - służy do określenia relacji między zbiorami

$\longmapsto$ - opiusje działanie funkcji na konkretnych elementach

Np. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad z \longmapsto \text{Re}z$

76. Zdefiniować injekcję, surjekcję i bijekcję.

Odpowiedź
Injekcja (f różnowartościowa) $\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

Surjekcja (f - "na Y") $\Leftrightarrow \forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} : f(x) = y$

Bijekcja = Injekcja + Surjekcja

77. Podać różne metody określania funkcji.

Odpowiedź

- przepis (w tym wzór)
- tableka
- graf
- wykres

78. Wykazać, że funkcja dana wzorem: $f(k, n) = \frac{(n+k)(n+k+1)}{2} + k$ jest bijekcją z $\mathbb{N}^2$ na $\mathbb{N}$.

Odpowiedź
Czy surjekcja? $s \in \mathbb{N}$

(?) $\exists_{k,n \in \mathbb{N}} : f(k, n) = s$

$\exists_p : \frac{p(p+1)}{2} \leq s < \frac{(p+1)(p+2)}{2}$

$k := s - \frac{p(p+1)}{2}$

$p = n + k \Rightarrow n = p - k = p - s + \frac{p(p+1)}{2} = \frac{2p+p(p+1)}{2} - s = \frac{p(p+3)}{2} - s$

$n := \frac{p(p+3)}{2} - s$

$k + n = s - \frac{p(p+1)}{2} + \frac{p(p+3)}{2} - s = \frac{p(p+3-p-1)}{2} = \frac{2p}{p} = p$

$f(k, n) = \frac{(k+n)(k+n+1)}{2} + k = \frac{p(p+1)}{2} + s - \frac{p(p+1)}{2} = s$

Czy injekcja?

(?) $f(k, n) = f(\bar{k}, \bar{n}) \Rightarrow k = \bar{k}, n = \bar{n}$

1° $k + n \neq \bar{k} + \bar{n}$ np. $k + n < \bar{k} + \bar{n} \Rightarrow k + n + 1 \leq \bar{k} + \bar{n}$

$$f(k, n) = \frac{(n+k)(n+k+1)+2k}{2} < \frac{(n+k)(n+k+1)+2k+2n+2}{2} = \frac{(k+n)(k+n+1)+2(k+n+1)}{2} =$$
$$= \frac{(k+n+1)(k+n+2)}{2} \leq \frac{(\bar{k}+\bar{n})(\bar{k}+\bar{n}+1)}{2} \leq f(\bar{k}, \bar{n})$$

2° $k + n = \bar{k} + \bar{n}$

$f(k, n) = f(\bar{k}, \bar{n})$

$\frac{(k+n)(k+n+1)}{2} + k = \frac{(\bar{k}+\bar{n})(\bar{k}+\bar{n}+1)}{2} + \bar{k} = \frac{(k+n)(k+n+1)}{2} + \bar{k}$

$k = \bar{k} \Rightarrow n = \bar{n}$

79. Zdefiniować funkcję parzystą i funkcję nieparzystą.

Odpowiedź
$\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, D symetryczny względem 0 ($x \in D \Leftrightarrow -x \in D$)

$f : D \to \mathbb{R}$ - parzysta $\Leftrightarrow \forall_{x \in D} f(x) = f(-x)$

$f : D \to \mathbb{R}$ - nieparzysta $\Leftrightarrow \forall_{x \in D} f(x) = -f(-x) \qquad (f(-x) = -f(x))$

80. Wykazać, że jeśli dziedzina funkcji rzeczywistej jest zbiorem symetrycznym względem 0, to funkcja ta jest sumą funkcji parzystej i funkcji nieparzystej.

Odpowiedź
$f : D \to \mathbb{R}$, D symetryczny względem 0

T: $\exists g, h : D \to \mathbb{R}$, g - parzysta. h - nieparzysta : $f = g + h$

D: Zdefiniujmy $g(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Wówczas

- $g(x) = g(-x)$
- $h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = \frac{-f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$

$g(x) + h(x) = \frac{f(x)-f(-x)+f(x)+f(-x)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x)$

81. Zdefiniować funkcję rosnącą, funkcję malejącą, funkcję silnie rosnącą, funkcję silnie malejącą.

Odpowiedź

$$f - \text{ rosnąca } \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in D}\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
$$f - \text{ malejąca } \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in D}\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$
$$f - \text{ silnie rosnąca } \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in D}\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
$$f - \text{ silnie malejąca } \Leftrightarrow \forall_{x_1, x_2 \in D}\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

82. Podać i udowodnić twierdzenie o złożeniu funkcji rosnących, o złożeniu funkcji malejących, o złożeniu funkcji rosnącej z funkcją malejącą, o złożeniu funkcji malejącej z funkcją rosnącą.

Odpowiedź
Niech f, g - rosnące, wówczas $g \circ f$ jest funkcją rosnącą.

D: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$

Niech f - rosnąca, g - malejąca, wówczas $g \circ f$ jest funkcją malejącą.

D: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \geq g(f(x_2))$

Niech f, g - malejące, wówczas $g \circ f$ jest funkcją rosnącą.

D: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$

83. Wykazać, że jeśli złożenie dwóch funkcji jest bijekcją, to funkcja wewnętrzna jest injekcją, a funkcja zewnętrzna surjekcją.

Odpowiedź
D:

(1) Hp. $\exists_{x_1,x_2} x_1 \neq x_2 \; f(x_1) = f(x_2)$
$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ sprzeczność

(2) $z \in Z \; \exists_{x \in X} (g \circ f)(x) = z$
$g(f(x)) = z$
$y = f(x) \in Y, \; g(f(x)) = z$ ok

84. Zdefiniować funkcję okresową w przypadku, gdy dziedzina tej funkcji jest podzbiorem $\mathbb{R}$.

Odpowiedź
Niech $f : D \to \mathbb{R}$, wtedy

$f -$ okresowa $\Leftrightarrow \exists_{T>0} : \forall_{x \in D} : x + T \in D, \underline{x - T \in D} \Rightarrow f(x) = f(x+T)\underline{= f(x-T)}$

<u>Ta część</u> jest niepotrzebna, bo $f(x - T + T) = f(x)$

85. Zdefiniować funkcję okresową w przypadku, gdy dziedzina tej funkcji jest równa $\mathbb{R}$.

Odpowiedź
Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wtedy

$f -$ okresowa $\Leftrightarrow \exists_{T>0} : \forall_{x \in \mathbb{R}} \; f(x) = f(x+T)$

86. Zdefiniować funkcję Dirichleta i podać jej okresy.

Odpowiedź

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ gdy } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Okresem tej funkcji jest każde $p \in \mathbb{Q} : p > 0$.

87. Podać przykład funkcji niestałej, której okresami są 1 oraz $\sqrt{2}$.

Odpowiedź

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } x = a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z} \\ 0 \text{ dla pozostałych } x \end{cases}$$

D: Niech x ma postać $a + b\sqrt{2}$, wówczas:

$$x + 1 = (a + 1) + b\sqrt{2}$$

$$x + \sqrt{2} = a + (b + 1)\sqrt{2}$$

Niech x nie ma postaci $a + b\sqrt{2}$

Hp. $x + 1 = c + d\sqrt{2} \Rightarrow x = (c - 1) + d\sqrt{2}$ sprzeczność

Hp. $x + \sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Rightarrow x = c + (b - 1)\sqrt{2}$ sprzeczność

88. Zdefiniować funkcje sinus, cosinus, tangens, cotangens dla kąta ostrego.

Odpowiedź

$$\sin\alpha = \frac{\text{długość przyprostokątnej przeciwległej do danego kąta } \alpha}{\text{długość przeciwprostokątnej tego trójkąta}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{długość przyprostokątnej przyległej do danego kąta } \alpha}{\text{długość przeciwprostokątnej tego trójkąta}}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\text{długość przyprostokątnej przeciwległej do danego kąta } \alpha}{\text{długość przyprostokątnej przyległej do danego kąta } \alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\text{długość przyprostokątnej przyległej do danego kąta } \alpha}{\text{długość przyprostokątnej przeciwległej do danego kąta } \alpha}$$

89. Uzasadnić, że powyższe definicje funkcji trygonometrycznych są postawione poprawnie.

Odpowiedź

Zostały dobrze zdefiniowane na podstawie podobieństwa trójkątów.

90. Zdefiniować funkcje sinus, cosinus, tangens, cotangens dla dowolnego kąta.

Odpowiedź

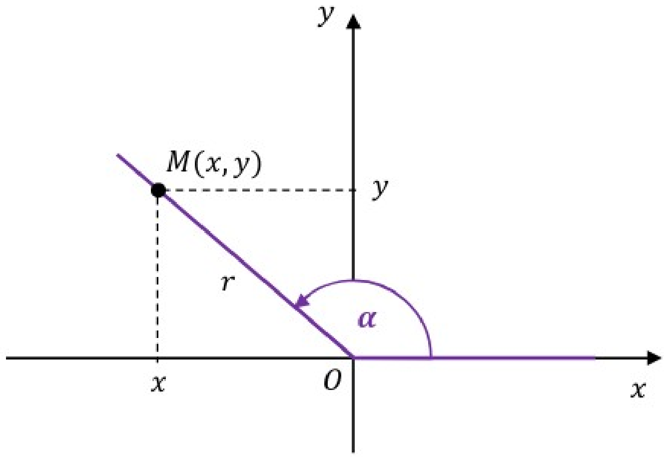
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \text{o ile } x \neq 0$$

gdzie

$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$



91. Uzasadnić, że powyższe definicje funkcji trygonometrycznych są postawione poprawnie.

Odpowiedź
Są zdefiniowane poprawnie z podobieństwa trójkątów. Co więcej są uogólnieniem poprzedniej definicji funkcji trygonometrycznych na trójkącie protokątnym.

92. Uzasadnić, że definicje funkcji trygonometrycznych dla dowolnego kąta są uogólnieniem analogicznych definicji dla kąta ostrego.

Odpowiedź
Rozważając kat α ostry, otrzymujemy zwykły trójkąt prostokątny (gdzie odcięta jest przyprostokątną przeciwległą, rzędna jest przyprostokątną przyległa, a promień jest przeciwprostokątną).

93. Zdefiniować funkcje sinus, cosinus, tangens, cotangens dla argumentu zespolonego.

Odpowiedź
$\mathbb{C}$

$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$

94. Podać twierdzenie sinusów.

Odpowiedź
W dowolnym trójkącie zachodzi:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

95. Podać twierdzenie cosinusów.

Odpowiedź
W dowolnym trójkącie zachodzi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

96. Wyrazić liczby e^{iz} oraz e^{-iz} za pomocą $\sin z$ oraz $\cos z$, udowodnić te wzory, znając w szczególności wzór na e^z za pomocą szeregu.

Odpowiedź

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$e^{iz} = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z + i \sin z$$

$$e^{-iz} = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} (i)^{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+1} (i)^{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} - i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos z - i \sin z$$

97. Udowodnić wzór: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ dla dowolnego kąta.

Odpowiedź
W dowolnym trójkącie prostokątnym zachodzi

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

98. Udowodnić wzór: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ dla argumentu zespolonego.

Odpowiedź

$$\sin^2 z + \cos^2 z = (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = e^{iz} e^{-iz} = e^0 = 1$$

99. Podać wzory na sinus, cosinus i tangens sumy oraz różnicy kątów.

Odpowiedź

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$

100. Podać wzory na sumę i różnicę sinusów kąta, sumę i różnicę cosinusów kąta.

Odpowiedź

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

101. Podać mechanizm tworzenia wzorów redukcyjnych i stosować go w praktyce.

Odpowiedź
Sin, Cos i Tg poszły pić do baru.

Na początku imprezy (I ćwiartka) wszystkie są w świetnym humorze – każda pije (Sin, Cos, Tg są dodatnie).

W II ćwiartce Sin, która po angielsku znaczy "grzech", dalej pije, ale reszta już nie daje rady (Sin +, Cos i Tg -).

W III ćwiartce Sin odpada z imprezy – wypiła za dużo (Sin -), Cos też nie pije, bo ma coś ważnego do zrobienia (Cos -), ale Tg jest „tenteges” i dalej pije (Tg +).

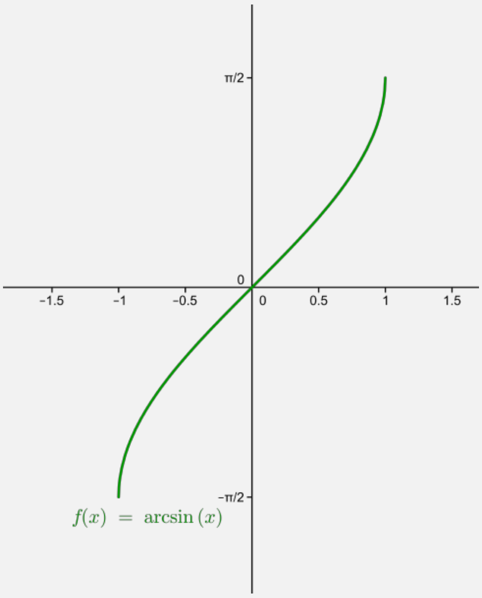
W IV ćwiartce Cos wraca do siebie i coś tam jeszcze sączy (Cos +), ale Tg, która już piła dwa razy, odpuszcza (Tg -), a Sin wciąż nieprzytomna (Sin -).

Tak oto wszystkie trzy maturzystki kończą imprezę – każda z innym bilansem.

102. Zdefiniować funkcje cyklometryczne: arc sin, arc cos, arc tg.

Odpowiedź

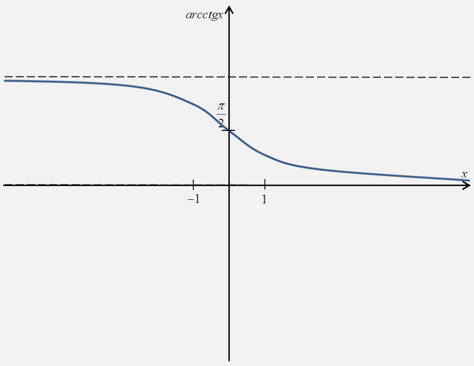
$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\text{arctg} : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\text{arcctg} : \mathbb{R} \to [0, \pi]$



103. Udowodnić, że $\sin 1^\circ$ jest liczbą niewymierną.

Odpowiedź

D: Hp. $\sin 1^\circ \in \mathbb{Q}$

$\sin^2 1^\circ \in \mathbb{Q}$

$\cos^2 1^\circ = 1 - \sin^2 1^\circ \in \mathbb{Q}$

$\cos 2^\circ = \cos^2 1^\circ - \sin^2 1^\circ \in \mathbb{Q}$

$\sin^2 2^\circ = 1 - \cos^2 2^\circ \in \mathbb{Q}$

$\cos 4^\circ = \cos^2 2^\circ - \sin^2 2^\circ \in \mathbb{Q}$

$\sin^2 4^\circ = 1 - \cos^2 4^\circ \in \mathbb{Q}$

$\cos 8^\circ = \cos^2 4^\circ - \sin^2 4^\circ \in \mathbb{Q}$

$\sin^2 8^\circ = 1 - \cos^2 8^\circ \in \mathbb{Q}$

$\cos 16^\circ = \cos^2 8^\circ - \sin^2 8^\circ \in \mathbb{Q}$

$\sin^2 16^\circ = 1 - \cos^2 16\circ \in \mathbb{Q}$

$\cos 32^\circ = \cos^2 16^\circ - \sin^2 16^\circ \in \mathbb{Q}$

$\sin 32^\circ = 2\sin 16^\circ \cos 16^\circ = 4\sin 8^\circ \cos 8^\circ \cos 16^\circ = 8\sin 4^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ \cos 16^\circ =$

$= 16\sin 2^\circ \cos^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ \cos 16^\circ$

$\mathbb{Q} \not\ni \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ = \cos(32^\circ - 2^\circ) = \cos 32^\circ \cos 2^\circ + \sin 32^\circ \sin 2^\circ =$

$= \underbrace{\cos 32^\circ}_{\in\mathbb{Q}} \underbrace{\cos 2^\circ}_{\in\mathbb{Q}} + 16 \underbrace{\cos 2^\circ}_{\in\mathbb{Q}} \underbrace{\cos 4^\circ}_{\in\mathbb{Q}} \underbrace{\cos 8^\circ}_{\in\mathbb{Q}} \underbrace{\cos 16^\circ}_{\in\mathbb{Q}} \underbrace{\sin^2 2^\circ}_{\in\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$ sprzeczność

104. Podać dwie równoważne definicje liczby pierwszej i wykazać ich równoważność.

Odpowiedź
Niech $p \in \mathbb{N}_+$.

Def. 1 Liczba $p \in \mathbb{P}$ jeśli ma dokładnie dwa dzielniki
$\Updownarrow$
Def. 2 Liczba $p \in \mathbb{P}$ jeśli jest podzielna tylko przez 1 i samą siebie.

D: "$\Rightarrow$"
$p|p$, $1|p$, $p \neq 1$ ok

"$\Leftarrow$" $1|p$, $p|p$, $p \neq 1 \Rightarrow$ ma dokładnie dwa dzielniki ok

105. Podać powód, dla którego jedynka nie jest uznawana za liczbę pierwszą.

Odpowiedź
Rozkład na czynniki pierwsze powinien być jednoznaczny, gdyby $1 \in \mathbb{P}$, to np.

$21 = 3^1 \cdot 7^1 = 1^{\mathbf{0}} \cdot 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot \dots = 1^{\mathbf{6}} \cdot 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot \dots$

106. Udowodnić, że jeśli p dzieli a oraz p dzieli b, to p dzieli $a - b$

Odpowiedź
$p|a$ i $p|b \Rightarrow p|(a - b)$

D: $\exists_k : a = k \cdot p$ i $\exists_m : b = m \cdot p \Rightarrow a - b = p(k - m) \Rightarrow p|p(k - m) \Rightarrow p|a - b$

107. Udowodnić, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele metodą Euklidesa.

Odpowiedź
Hp. Liczb pierwszych jest skończenie wiele $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Weźmy liczbę $p := p_1 \cdot_2 \cdot \dots p_n + 1$. Wtedy $\forall_{p_i} p_i \not| p \Rightarrow p$ jest liczbą pierwszą. Sprzeczność.

108. Udowodnić, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele metodą Kummera.

Odpowiedź

Hp. $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ wszystkie liczby pierwsze.

$p := p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n > 2$. Załłóżmy, że $p-1$ to iloczyn liczb pierwszych. Wówczas $\exists_j : p_j | p$ i $p_j | p-1 \Rightarrow p_j | p-(p-1) \Rightarrow p_j | 1$ sprzeczność

109. Udowodnić, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele metodą Stieltjesa.

Odpowiedź

Hp. Liczb pierwszych jest skończenie wiele $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

$p := p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$

$p = k \cdot m : k, m > 1$

$\forall_i \; p_i$ dzieli dokładnie jedną z liczb k lub m

Rozważmy $k + m > 1$. Gdyby $\exists_{p_i} \; : p_i | k+m$, to

$p_i | k \wedge p_i | k+m \Rightarrow p_i | k+m-k \Rightarrow p_i | m$ sprzeczność

$p_i | m \wedge p_i | k+m \Rightarrow p_i | k+m-m \Rightarrow p_i | k$ sprzeczność

Zatem $\forall_i \; p_i \not| k+m$, czyli $k+m$ to liczba pierwsza. Sprzeczność z hipotezą.

110. Udowodnić, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele metodą Eulera.

Odpowiedź

1) $p \in \mathbb{P} \Rightarrow \frac{1}{p} < 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$

2) p, q - różne liczby pierwsze (wszystkie)
   $(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k})(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^k}) = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{q}} = \sum \frac{1}{p^\alpha q^\beta} : \alpha, \beta \geq 0$ każda para (α, β) występuje dokładnie raz.

Hp. $p_1, \ldots, p_n$ różne liczby pierwsze

$A = (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^k}) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^k}) \cdot \cdots \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p_n^k}) = \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_2}} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p_n}} \in (0, \infty)$

Ale $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot p_n^{\alpha_1}$ sprzeczność

111. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 2 w przedziale $[n, n!)$ znajduje się liczba pierwsza.

Odpowiedź
Tw. $\forall_{n\geq 2}\exists_{p\in\mathbb{P}} : p \in [n, n!)$

D: Rozważmy liczbę $n! - 1$

1° $n! - 1$ - liczba pierwsza $\Rightarrow$ ok

2° $n! - 1$ - liczba złożona $\Rightarrow \exists_{p\in\mathbb{P}} : p|(n! - 1)$
Jeśli $p \leq n$ to $p|n! \Rightarrow p|n! - (n! - 1) \Rightarrow p|1$ sprzeczność
Zatem $p > n$

112. Podać zasadę tworzenia sita Eratostenesa.

Odpowiedź

~~0~~	~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

$\Downarrow$

~~0~~	~~1~~	**2**	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29

$\Downarrow$

~~0~~	~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29

$\Downarrow$

~~0~~	~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~
~~10~~	**11**	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**
~~20~~	~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**

113. Sformułować twierdzenie Greena-Tao.

Odpowiedź
$\forall_n$ istnieje ciąg arytmetyczny złożony z n liczb pierwszych.

114. Wykazać, że nie istnieje nieskończony ciąg arytmetyczny, którego wyrazami są jedynie liczby pierwsze.

Odpowiedź
D: Niech p - pierwszy wyraz tego ciągu (liczba pierwsza)

Hp. $\exists_r : r$ - różnica tego ciągu i wszystkie jego wyrazy to liczby pierwsze.

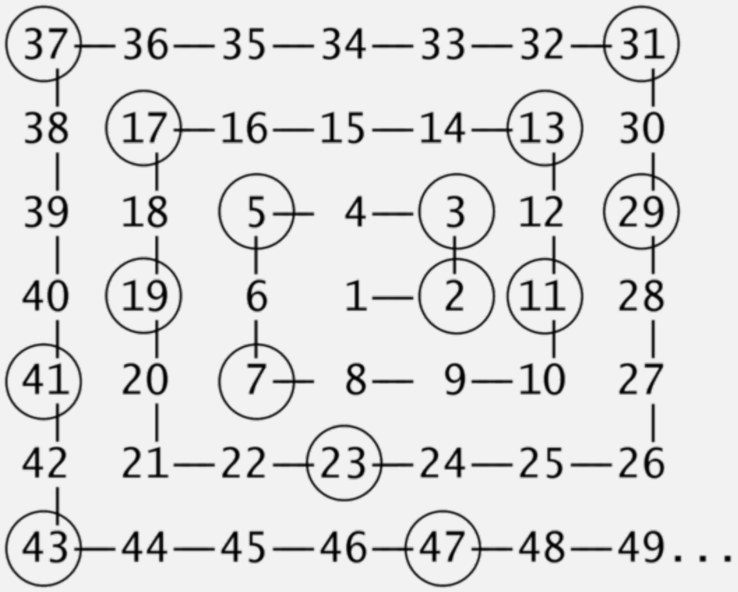
$p, p + r, p + 2r, \ldots, p + pr = p(1 + r) \Rightarrow p|p(1 + r)$ Sprzeczność

115. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje n-wyrazowy ciąg arytmetyczny, którego wyrazami są liczby niepierwsze.

Odpowiedź
D: $\underset{2|}{(n+1)!+2}, \underset{3|}{(n+1)!+3}, \ldots, \underset{n+1|}{(n+1)!(n+1)}$

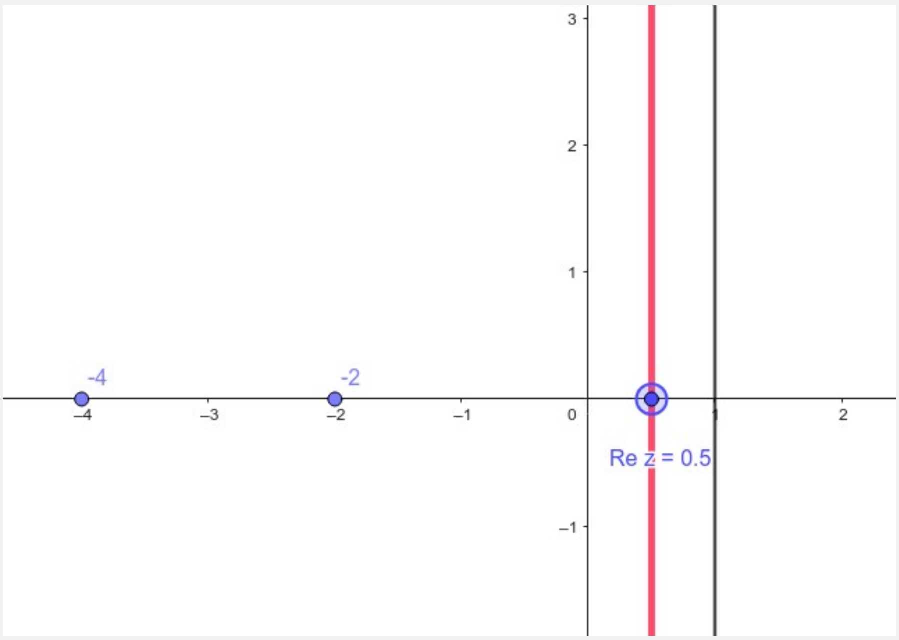
116. Podać zasadę konstrukcji spirali Ulama.

Odpowiedź



117. Sformułować hipotezę Riemanna.

Odpowiedź
Wszystkie nietrywialne miejsca zerowe funkcji dzeta leża na prostej $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}$



Proszę... Tylko bez dowodu...

118. Zdefiniować wielomian (zmiennej rzeczywistej lub zespolonej). Jak nazywają się współczynniki przy najwyższej i najniższej potędze?

Odpowiedź
Wielomianem n-tego stopnia nazywamy funkcję

$$W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0,$$

gdzie $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ to liczby ze zbioru $\mathbb{C}$

a_n - współczynnik kierunkowy (lub współczynnik wiodący)

a_0 - wyraz wolny

119. Wykazać, że wielomian zmiennej rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych stopnia nieparzystego ma zawsze co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

Odpowiedź
D: Bez straty ogólności $a_n > 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} W(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} W(x) = -\infty$

$\exists_{b_1>0} : W(b_1) > 0 \wedge \exists_{b_2<0} : W(b_2) < 0$

Z własności Darboux $\exists_{c\in(b_1,b_2)} : W(c) = 0$

120. Na wielomiany którego stopnia możemy zawsze rozłożyć wielomian zmiennej rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych?

Odpowiedź
Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyc na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej 2 o współczynnikach rzeczywistych.

$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

121. Sformułować zasadnicze twierdzenie algebry.

Odpowiedź
Każdy wielomian o współczynnikach zespolonych n-tego stopnia można rozłożyć na iloczym dwumianów o współczynnikach zespolonych (ma dokładnie n pierwiastków zespolonych z krotnościami).

$a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$

122. Podać i udowodnić wzory Viete'a dla trójmianu kwadratowego.

Odpowiedź
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2) + x_1x_2$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$

123. Pokazać mechanizm tworzenia wzorów Viete'a dla wielomianu dowolnego stopnia.

Odpowiedź
Podobnie jak wyżej... (nie będę tego pisał, Ola je udowodniła na ćwiczeniach!)

124. Określić prawdziwość wzorów Viete'a dla trójmianu kwadratowego o współczynnikach rzeczywistych, dla którego wyróżnik Δ jest ujemny.

Odpowiedź
$x^2 + 3x + 6 = 0$

$\Delta = -15$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}$

$x_1 + x_2 = -3$

$x_1 x_2 = 6$

125. Podać i udowodnić twierdzenie o podzielności przez p i q odpowiednich współczynników wielomianu o współczynnikach całkowitych, którego liczba wymierna $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem ($\frac{p}{q}$ jest zapisane w postaci ułamka nieskracalnego).

Odpowiedź
$W(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{Z}$

$\frac{p}{q}$ - pierwiastek wielomianu $\Rightarrow q|a_n,\ p|a_0$

D: $a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \cdots + a\frac{p}{q} + a_0 = 0 \quad | \cdot q^n$

$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pg^{n-1} + a_0 q^n = 0$

Niech $L = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pg^{n-1}$, $P = a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pg^{n-1} + a_0 q^n$

Wówczas:

$p\|L$	$q\|P$	
$p\|a_o q^n$	$q\|a_n p^n$	ale p, q względnie pierwsze
$p\|a_0$	$q\|a_n$	

126. Co można powiedzieć o wymiernych pierwiastkach wielomianu $a_n x + \cdots + a_1 x + a_0$, którego współczynniki są liczbami całkowitymi? Udowodnić to twierdzenie.

Odpowiedź
To co wyżej.

127. Określić, co (jaki „obiekt") może być nazywany rozwiązaniem równania czy nierówności.

Odpowiedź
Równianie $\rightarrow$ liczba (pierwiastek) lub zbiór liczb

Nierówność $\rightarrow$ zbiór

128. Rozwiązywać podstawowe równania i nierówności.

Odpowiedź
Zostawiam jako ćwiczenie

129. Podać podstawowy początek rozwiązywania nierówności typu $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$.

Odpowiedź
Podać dziedzinę oraz pomnożyć obie strony nierówności przez $(Q(x))^2$.

130. Rozwiązywać nierówności pierwiastkowe.

Odpowiedź
Zostawiam jako ćwiczenie

131. Omówić metodę analizy starożytnych stosowaną w równaniach logarytmicznych.

Odpowiedź
Omijamy założenia i rozwiązujemy równanie. Otrzymane rozwiązania podstawiamy i sprawdzamy ich poprawność.

132. Podać schemat rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.

Odpowiedź
Zostawiam jako ćwiczenie

133. Rozwiązywać równania (nierówności), w których niewiadoma występuje w postaci „związanej" (np. w formie a^x).

Odpowiedź
Zostawiam jako ćwiczenie ($t = a^x$)

134. Uwalniać ułamki od niewymierności w mianowniku.

Odpowiedź
Zostawiam jako ćwiczenie

135. Wyjaśnić potrzebę uwalniania ułamków od niewymierności w mianowniku.

Odpowiedź

- wygląd
- oszacowanie (np. możliwość dzielenia na kalkulatorze protstym - a czy Ty wiesz do czego służy MRC, MR+ i MR-?)
- odnaleźć się w jakiej strukturze jesteśmy? $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$
- przygotowanie do działań na $\mathbb{C}$

136. Podać definicję procentu.

Odpowiedź
Procent jest to sposób zapisu stosunku dwóch wielkości, w którym liczba wyrażona jest jako ułamek o mianowniku 100. Oznaczamy go symoblem %.

137. Wyjaśnić różnicę między procentem a punktem procentowym.

Odpowiedź

$$\text{Procent} \neq \text{Punkt procentowy}$$

Punkt procentowy to różnica między dwoma wartościami procentowymi.

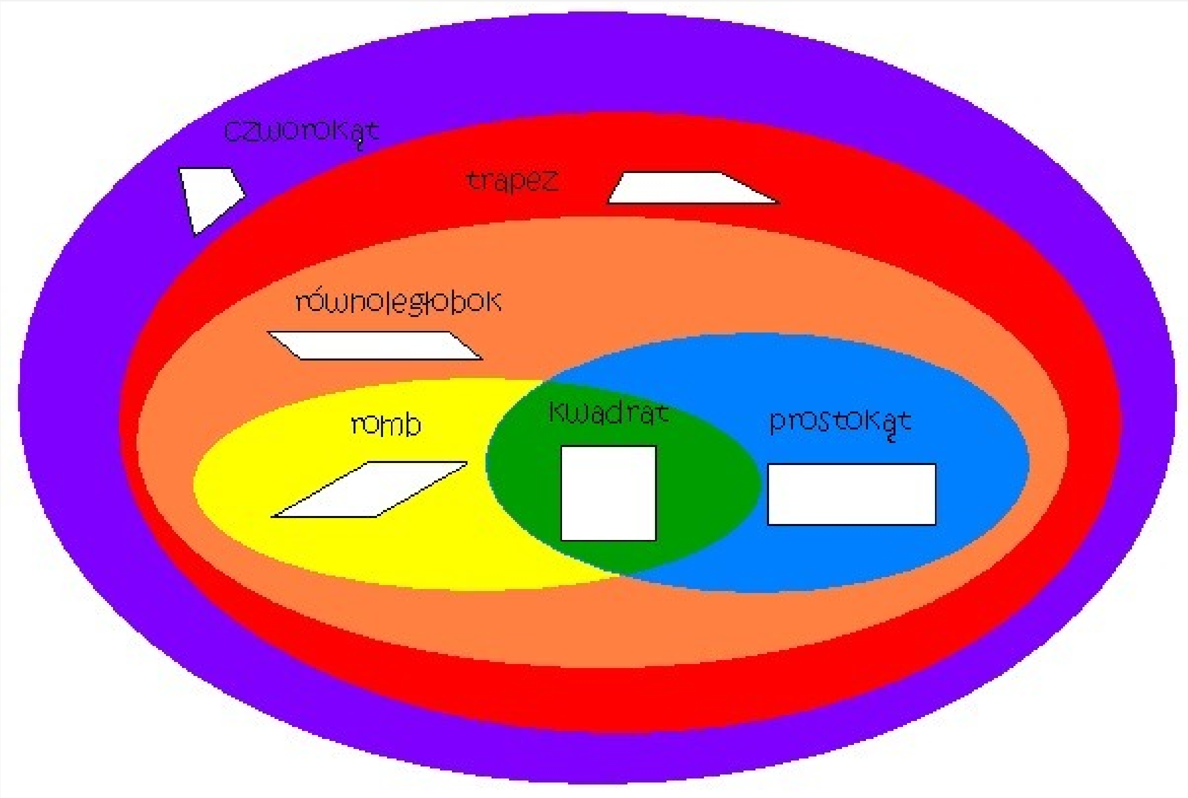
138. Na czym polega błąd definiowania „ignotum per ignotum"?

Odpowiedź
„ignotum per ignotum" - nieznane przez nieznane

Błąd polega w podawaniu obiektu definiowanego jego samego.

139. Wytłumaczyć schematy definiowania „od ogółu do szczegółu" i z podziałem na klasy równoważności (z przykładami).

Odpowiedź
Zbudowanie hierarchi i stworzenie odpowiedniej struktury.



140. Podać definicję trapezu i wyjaśnić, dlaczego inne definiowanie nie jest właściwe.

Odpowiedź
Trapez jest to czworokąt, który posiada przynajmniej jedną parę boków równoległych.

Dlaczego inne są niepoprawne?

- psują hierrachie "od ogółu do szczegółu"
- definicja powinna działać dla prostokątów, równoległoboków itd.
- ma być to klasa domknięta
- pojawiają się problemy z pewnymi zadaniami (trapez o największym polu → prostokąt)

141. Podać definicję trapezu równoramiennego.

Odpowiedź
Trapez równoramienny to trapez o takich samych kątach przy podstawie **lub** trapez, który posiada oś symetrii prostopadłą do podstawy.

142. Podać przykłady pokazujące, że czasem pewne obiekty można definiować na różne (istotnie) sposoby, ale nie ma to większego znaczenia, ale czasem ma ogromne znaczenie.

Odpowiedź
Czy $0 \in \mathbb{N}$?

Ciąg geometryczny

$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$2, 0, 0, 0, \ldots$ - czy $q = 0$? - wszystko jedno

$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$

$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow a \geq 0,\ b^3 = a$

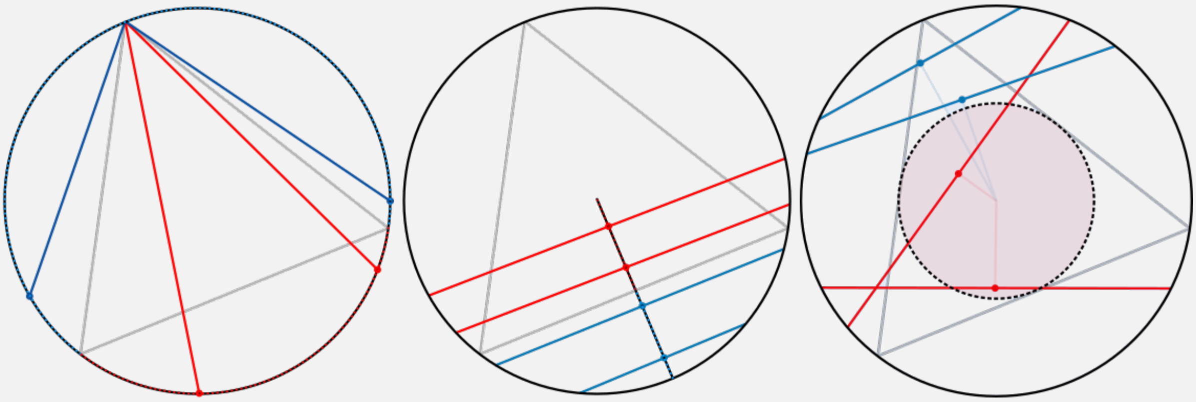
$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a \geq 0,\ b \geq 0,\ b^n = a$

143. Podać „szkolną” definicję prawdopodobieństwa i wyjaśnić, na jakie aspekty należy przy obliczeniach zwracać szczególną uwagę.

Odpowiedź
$P(A) = \frac{\text{liczba zdarzeń sprzyjających}}{\text{liczba zdarzeń elemetarnych}}$ - przy założeniu jednakowo prawdopodobych zdarzeń

144. Podać i wyjaśnić paradoks Bertranda.

Odpowiedź
Na okręgu o promieniu 1 wybieramy losowo cięciwe. Obliczyć prawdopodobieństwo, że jest ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg.



Prawdopodobieństwa są równe odpowiednio $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Wszystkie są poprawne i zależą od przyjętej przestrzeni probabilistycznej.

145. Podać definicję Cauchy'ego i definicję Heinego ciągłości funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, przy czym $D \subset R$.

Odpowiedź
Definicja Cauchy'ego

$f : d \to \mathbb{R}$ ciągła w $x_0 \Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Definicja Heinego

$\forall_{(x_n)\subset D}\, x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

146. Czy funkcja tangens jest ciągła? Odpowiedź uzasadnić.

Odpowiedź
Tak, bo punkty $\{\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ są poza dziedziną funkcji.

147. Udowodnić równoważność definicji Cauchy'ego i definicję Heinego ciągłości funkcji.

Odpowiedź
D: **ciągłość Cauchy'ego $\Rightarrow$ ciągłość Heinego**

$(x_n) \subset D, x_n \to p$

(?) $f(x_n) \to f(p)$

Ustalmy $\epsilon > 0$. Pytamy się, czy $\exists_k n \geq k |f(x_n) - f(p)| < \epsilon$

Z definicji ciągłości Cauchy'ego $\exists_\delta |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$

Ponieważ (x_n) jest zbieżny to $\exists_k : n \geq k \Rightarrow |x_n - p| < \delta$

ciągłość Heinego $\Rightarrow$ ciągłość Cauchy'ego

Hp. $\exists_\epsilon : \forall_\delta |x - p| < \delta \not\Rightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon$

Weźmy $\delta = \frac{1}{n}$ z aksjomatu wyboru.

$\forall_n \exists_{x_n} : |x_n - p| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(p)| \geq \epsilon$

$(x_n), x_n \to p \; f(x_n) \not\to f(p)$ sprzeczność

148. Sformułować twierdzenie o własności Darboux oraz twierdzenie Weierstrassa dla funkcji ciągłej $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Odpowiedź
Własność Darboux

Z: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - ciągła, $f(a) < f(b)$

T: $\forall_{c \in [f(a), f(b)]} \exists_{\xi \in [a,b]} : f(\xi) = c$

Tw Weierstrassa

Z: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - ciągła

T: $\exists_{x_1, x_2 \in [a,b]} \forall_{x \in [a,b]} f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

149. Podać definicję pochodnej funkcji określonej na podzbiorze D zbioru $\mathbb{R}$ o wartościach rzeczywistych w punkcie $x_0 \in D$. Jakie założenie należy uczynić o zbiorze D, by można było mówić o pochodnej funkcji?

Odpowiedź
$f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ - <u>otwarty</u>, $x_0 \in D$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

150. Podać interpretację geometryczną pochodnej.

Odpowiedź
Zobacz: Fajny gif 1 Fajny gif 2 Fajny gif 3

151. Podać warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej.

Odpowiedź
f ma ekstremum lokalne w $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$

152. Podać warunek wystarczający istnienia maksimum/minimum lokalnego funkcji róż niczkowalnej (ze zmianą znaku pochodnej) oraz dla funkcji dwukrotnie różniczkowalnej (z drugą pochodną).

Odpowiedź
Warunki wystarczające

1) $f'(x_0) = 0$ oraz zachodzi zmiana znaku pochodnej

   lub

2) $f''(x_0) > 0$ dla minimum albo $f'' < 0$ dla maximum

153. Sformułować twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a.

Odpowiedź
Tw Rolle'a

Z: $f \in C[a,b], f : [a,b] \to \mathbb{R}$

T: $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists_{\xi \in (a,b)} : f'(\xi) = 0$

Tw. Lagrange'a

Z: $f \in C[a,b], f : [a,b] \to \mathbb{R}$

T: $\exists_{\xi \in (a,b)} : f(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

154. Sformułować regułę de l'Hospitala.

Odpowiedź
U^* - sąsiedztwo $x_0 \in \mathbb{R}$. Jeśli spełnione są warunki

1) $f, g : U^* \to \mathbb{R}$
   $g(x) \neq 0$ dla $x \in U^*$
   $g'(x) \neq 0$ dla $x \in U^*$
2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$
   lub
   $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \pm\infty$
3) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = g$

To: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = g$

155. Wytłumaczyć, dlaczego przy korzystaniu z reguły de l'Hospitala nie należy używać skrótu „litera H napisana nad znakiem równości".

Odpowiedź
A co? Jak się korzysta z własności Darboux to się pisze literkę "**D**"?

Co więcej, zapis "$\stackrel{H}{=}$" oznacza, że obie strony są równe.

156. Wytłumaczyć, dlaczego przy korzystaniu z reguły de l'Hospitala nie należy używać zapisu "$\lim\limits_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{H}{=} \lim\limits_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}$".

Odpowiedź
Zapis "$\stackrel{H}{=}$" oznacza, że obie strony są równe.

157. Omówić ryzyko stosowania reguły de l'Hospitala związane z niesprawdzeniem założeń.

Odpowiedź
Przykład: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x-2)}{\ln(2-x)} \stackrel{H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{2-x}{x-2} = -1$

Ale $D = \emptyset$

158. Dlaczego nie można z wykorzystaniem reguły de l'Hospitala liczyć granicy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$?

Odpowiedź
A skąd znamy pochodną sinusa?

159. Podać fałszywy „dowód" (na podstawie reguły de l'Hospitala) tego, że jeśli funkcja jest różniczkowalna, to jest klasy C^1 i pokazać błąd w tym dowodzie.

Odpowiedź
f - różniczkowalna w $[a, b], x_0 \in (a, b)$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \left\{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{1} = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)\right\}$

160. Wytłumaczyć, dlaczego nie należy robić rzeczy podanych na załączonej „Czarnej liście".

Odpowiedź
No nie wiem... Czarna lista raczej kojarzy się z rzeczami **zakazanymi**. Może jednak zasady są po to by je **przestrzegać** :)