

# Matematyczne aspekty wyborów

Na podstawie wykładu  
Krzysztofa Ciesielskiego

Skrypt autorstwa  
Arkadiusza Dąbala

Wersja z dnia:  
2024-12-06

# Contents

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Preliminaria</b>                                   | <b>2</b>  |
| 1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory? . . . . .           | 2         |
| 1.2 Prawo Ciesielskiego . . . . .                       | 4         |
| <b>2 Treść właściwa</b>                                 | <b>5</b>  |
| 2.1 Metody głosowania (system wyborczy) . . . . .       | 5         |
| 2.1.1 Metoda zwycięzcy . . . . .                        | 5         |
| 2.1.2 MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie . . . . . | 9         |
| 2.1.3 Metoda TAK/NIE . . . . .                          | 19        |
| 2.1.4 Metody porządkowe . . . . .                       | 22        |
| <b>3 Deser</b>  | <b>28</b> |

# 1 Preliminaria

## 1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?

### Komentarz

Materiał ten nie ma w żadnym stopniu charakteru politycznego, a wyłącznie charakter matematyczny.

### Przykład 1.1

Rozważmy poniższe dane, oparte na 6 partiach, 1000 głosach i 6 mandatów do rozdania:

| Nazwa       | Głosy | : 1        | : 2        | : 3        | : 4 | Otrzymane mandaty |
|-------------|-------|------------|------------|------------|-----|-------------------|
| Filateliści | 380   | <b>380</b> | <b>190</b> | <b>127</b> | 87  | 3                 |
| Gitarzyści  | 192   | <b>192</b> | <b>96</b>  | 64         |     | 2                 |
| Szachiści   | 180   | <b>180</b> | 90         |            |     | 1                 |
| Piłkarze    | 96    | <b>96</b>  | 48         |            |     | 1                 |
| Lotniarze   | 90    | 90         |            |            |     | 0                 |
| Kolejarze   | 62    | 62         |            |            |     | 0                 |

System ten działa w następujący sposób:

- Liczby głosów dzielone są przez kolejne liczby naturalne dodatnie (tak jak w tabeli).
- Wybierane są z tej tabeli 6 największych liczb (wytluszczone druk).
- Liczba mandatów zależy od liczby wytluszczonych liczb w wierszu partii.

### Przykład 1.2

Rozważmy tę samą tabelę, ale założmy, że partia **Gitarzyści** nie przekroczyła progu 5%.

| Nazwa       | Głosy | : 1        | : 2        | : 3        | : 4 | Otrzymane mandaty |
|-------------|-------|------------|------------|------------|-----|-------------------|
| Filateliści | 380   | <b>380</b> | <b>190</b> | <b>127</b> | 87  | 3                 |
| Gitarzyści  | 192   | 192        | 96         | 64         | —   | —                 |
| Szachiści   | 180   | <b>180</b> | <b>90</b>  |            |     | 2                 |
| Piłkarze    | 96    | <b>96</b>  | 48         |            |     | 1                 |
| Lotniarze   | 90    | <b>90</b>  |            |            |     | 1                 |
| Kolejarze   | 62    | 62         |            |            |     | 0                 |

### Przykład 1.3

Rozważmy następującą tabelę z 5 mandatami do rozdania:

| Nazwa   | Głosy : 1   | : 2         | : 3         | : 4  | Mandaty |
|---------|-------------|-------------|-------------|------|---------|
| Rybacy  | <b>6000</b> | <b>3000</b> | <b>2000</b> | 1500 | 3       |
| Myśliwi | <b>5700</b> | <b>2850</b> | 1900        |      | 2       |
| Artyści | 1950        | 975         |             |      | 0       |

Partia **Rybacy** prowadziła kampanię przeciwko **Myśliwym**, w wyniku czego liczba otrzymanych głosów zmieniła się następująco:

- Partia **Rybacy** zyskała 400 głosów (+400)
- Partia **Myśliwi** straciła 600 głosów (-600)
- Partia **Artyści** zyskała 200 głosów (+200)

| Nazwa   | Głosy : 1   | : 2         | : 3  | : 4 | Mandaty |
|---------|-------------|-------------|------|-----|---------|
| Rybacy  | <b>6400</b> | <b>3200</b> | 2133 |     | 3       |
| Myśliwi | <b>5100</b> | <b>2550</b> | 1700 |     | 2       |
| Artyści | <b>2150</b> | 1075        |      |     | 0       |

#### Komentarz

Tym oto sposobem partia **Myśliwi** stracili jeden mandat na rzecz partii **Artyści**.

#### Przykład 1.4

Rozważmy wyniki głosowania dla dwóch partii z 6 mandatami do rozdania.

| Nazwa      | Głosy : 1   | : 2        | : 3        | : 4        | : 5        | Mandaty |
|------------|-------------|------------|------------|------------|------------|---------|
| Matematycy | <b>1200</b> | <b>600</b> | <b>400</b> | <b>300</b> | <b>240</b> | 5       |
| Politycy   | <b>201</b>  | 101        |            |            |            | 1       |

Popatrzmy na głosy bezpośrednio na konkretnych kandydatów z każdej partii:

| Nazwa   | Głosy      |
|---------|------------|
| Kwadrat | <b>201</b> |
| Trójkąt | <b>200</b> |
| Stożek  | <b>200</b> |
| Walec   | <b>200</b> |
| Suma    | <b>200</b> |
| Iloczyn | 199        |

| Nazwa       | Głosy     |
|-------------|-----------|
| Magister    | <b>35</b> |
| Magistra    | 34        |
| Urzędnik    | 33        |
| Urzędas     | 33        |
| Pani Basia  | 33        |
| Pan Andrzej | 33        |

#### Komentarz

Tym oto sposobem mandatu nie otrzymuje **Iloczyn**, mimo że zdobył więcej głosów niż **Magister**.

#### Przykład 1.5

Rozważmy sytuację, w której państwo jest podzielone na dwa bloki, oba mające po 50% wpływu na wyniki wyborów. Każdy blok ma przyznać po 4 mandaty.



W bloku A znajdowały się dwie partie: PZK (Partia Zwolenników Kawy) i PZH (Partia Zwolenników Herbaty), z których każda otrzymała po 25% głosów w ogólnokrajowym głosowaniu. W bloku B znajdowała się partia PZA (Partia Zwolenników Alkoholu) oraz inne partie, które nie przekroczyły progu 5%. Przedstawmy liczbę uzyskanych głosów w PZA:

| Nazwa       | Głosy        |
|-------------|--------------|
| Żubr        | <b>19995</b> |
| Żubrówka    | <b>2</b>     |
| Soplica     | <b>2</b>     |
| Pan Tadeusz | <b>1</b>     |

### Komentarz

I tym oto sposobem wygrywają osoby, które dostają 2 lub 1 głos.

## 1.2 Prawo Ciesielskiego

Rozważmy głosowanie względem 2 partii z 7 mandatami:

| Nazwa     | Głosy:1     | :3         | :5         | :7  | :9  | Mandaty |
|-----------|-------------|------------|------------|-----|-----|---------|
| Kelnerzy  | <b>1050</b> | <b>350</b> | <b>210</b> | 150 | 117 | 4       |
| Sportowcy | <b>1008</b> | <b>336</b> | 202        | 144 |     | 3       |

Partia **Sportowcy** postanowiła się rozdzielić na dwie partie i startować osobno:

| Nazwa     | Głosy:1     | :3         | :5         | :7  | :9  | Mandaty |
|-----------|-------------|------------|------------|-----|-----|---------|
| Kelnerzy  | <b>1050</b> | <b>350</b> | <b>210</b> | 150 | 117 | 3       |
| Piłkarze  | <b>504</b>  | <b>168</b> | 101        |     |     | 2       |
| Siatkarze | <b>504</b>  | <b>168</b> | 101        |     |     | 2       |

### Komentarz

Tym oto sposobem partia **Sportowcy** zdobyła większość.

## 2 Treść właściwa

### 2.1 Metody głosowania (system wyborczy)

Wprowadźmy kilka oznaczeń, niech:

$W$  - zbiór wszystkich wyborców,

$K$  - zbiór wszystkich kandydatów.

- Ten sam układ głosów (zestaw głosów) daje ten sam wynik (funkcja).
- Każdy układ głosów daje jakiś wynik (może być  $\emptyset$ ).

#### **Definicja 2.1 (Model)**

*Model to układ głosów (z przyporządkowanymi wyborcami).*

#### **Definicja 2.2 (Metoda anonimowa)**

*Metoda jest anonimowa, wtedy i tylko wtedy (w skrócie:  $\Leftrightarrow$ ), gdy wszyscy wyborcy są traktowani tak samo,  $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in W}$  zamiana głosów  $x$  i  $y$  nie zmienia wyniku.*

#### **Komentarz**

Alternatywnie, metoda nie jest anonimowa  $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in W}$  takie, że zamiana głosów  $x$  i  $y$  istotnie zmienia wynik.

#### **Definicja 2.3 (Metoda neutralna)**

*Metoda jest neutralna,  $\Leftrightarrow$  wszyscy kandydaci są traktowani tak samo,  $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in K}$  zamiana ról  $x$  i  $y$  nie zmienia wyniku.*

#### **Komentarz**

Alternatywnie, metoda nie jest neutralna  $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in K}$  takie, że zamiana ról  $x$  i  $y$  istotnie zmienia wynik, dokładniej definiując:

jeśli  $\exists k_1, k_2 \in K : W_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_i\}$  głosowali na  $k_1$ , a  $W_2 = \{w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_j\}$  głosowali na  $k_2$  to jeżeli kandydaci Ci "zamieniają się" wyborcami (zbiorami  $W_1, W_2$ ), to  $k_1$  i  $k_2$  zamieniają się wynikami.

#### **Definicja 2.4**

*Trzy rodzaje metod ze względu na wyniki:*

- 1) Metoda zwycięzcy (MZ) – wybiera zwycięzcę (zwycięzców),
- 2) Metoda porządkowa (MP) – wynik to słaby porządek na zbiorze  $K$ ,
- 3) Metoda rozdziału (MR) – wynik to podział pewnych dóbr między kandydatów.

#### **2.1.1 Metoda zwycięzcy**

##### **Definicja 2.5 (Klasyczna metoda zwycięzcy)**

*Klasyczna metoda zwycięzcy (klasyczna MZ) polega na tym, że każdy wyborca głosuje na dokładnie jednego kandydata. Zbiór*

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow K\}$$

*jest zbiorem modeli, gdzie  $m$  jest modelem. Klasyczną metodę zwycięzcy możemy opisać funkcją*

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

**Definicja 2.6 (Semi-klasyczna metoda zwycięzcy)**

Semi-klasyczna MZ polega na tym, że każdy wyborca głosuje na co najmniej jednego kandydata:

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow P(K) \setminus \emptyset\}.$$

Metodę tę można opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

**Definicja 2.7 (Metoda efektywna)**

Metoda zwycięzcy jest efektywna  $\Leftrightarrow$  zawsze wyłania przynajmniej jednego zwycięzcę.

**Przykład 2.1 (Przykłady metod głosowania)****Metody klasyczne:**

- 1) Dyktatura –  $\exists p \in W$ : wynik jest tożsamy z głosem  $p$ .
- 2) Monarchia – dany kandydat  $k \in K$  wygrywa niezależnie od głosowania.
- 3) Metoda większości – wygrywa kandydat (lub kandydaci), który(a) otrzymał(a) najwięcej głosów.
- 4) Metoda bezwzględnej większości – wygrywa kandydat  $k \in K$ , który otrzymał co najmniej  $\lfloor \frac{\#W}{2} \rfloor + 1$  głosów.
- 5) Metoda super większości – wygrywa kandydat, który uzyskał co najmniej  $q$  głosów, gdzie  $q > \frac{\#W}{2}$ .
- 6) Metoda status quo – *Założenie*:  $\exists$  pewien stan z jednym zwycięzcą.  
Głosowanie metodą większości (lub super większości):
  - jeśli metoda daje wynik, zwycięża "nowy" kandydat,
  - jeśli metoda nie daje wyniku, zwycięża dotychczasowy kandydat.

Przykład: referendum.

- 7) Metoda większości ważonej – ( $W = \{a_1, \dots, a_n\}$ ), gdzie głos  $a_i$  ma wagę  $w_i \geq 0$ . Wygrywa ten, kto otrzyma ponad  $\frac{w_1 + \dots + w_n}{2}$  punktów.
- 8) Metoda głosowania blokowego –  $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$ , gdzie  $W_k$  to zbiór wyborców bloku.  $W_k$  podejmuje decyzję większością głosów. W przypadku remisu wybierają zwycięzcę w  $W_k$ . Głos z  $W_k$  ma wagę  $i_k$ . Wygrywa kandydat z największą liczbą punktów.

**Metody semi-klasyczne:**

- 9) Metoda n-głosów – każdy wyborca głosuje na  $n$  kandydatów, a zwycięża ten, kto uzyska najwięcej głosów.
- 10) Szeroka metoda n-głosów – każdy głosuje na  $n$  kandydatów, ale mamy  $n$  zwycięzców (lub więcej w przypadku remisu na ostatnim "wygrywającym" miejscu)

**Metoda ani klasyczna, ani semi-klasyczna:**

- 11) Metoda punktowa – każdy wyborca  $w \in W$  ma do rozdysponowania  $p$  punktów ( $p \in \mathbb{N}$ ) między kandydatów. Zwycięża kandydat z największą liczbą punktów.

**Definicja 2.8 (Metoda decyzyjna)**

Metoda zwycięzcy jest decyzyjna  $\Leftrightarrow$  w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę.

**Definicja 2.9 (Metoda prawie decyzyjna)**

Metoda zwycięzcy jest prawie decyzyjna  $\Leftrightarrow$  w każdym modelu wyłania co najwyżej jednego zwycięzcę. Sytuacja, w której nie ma zwycięzcy, zachodzi wtedy, gdy więcej niż jeden kandydat uzyskał tę samą, najwyższą liczbę punktów.

**Ćwiczenie 2.1 (Z ćwiczeń)**

Zbadaj kto jest zwycięzcą w głosowaniu przez 99 osób na kandydatów: **Anastazy, Bermudy, Cezary**, jeśli otrzymano następujące wyniki metodą porządkową:

| Liczba głosów | Wynik porządkowy |
|---------------|------------------|
| 18            | ABC              |
| 15            | ACB              |
| 24            | BAC              |
| 8             | BCA              |
| 16            | CAB              |
| 18            | CBA              |

**Ćwiczenie 2.2**

Dane są wyniki głosowania:

| Imię     | Liczba głosów |
|----------|---------------|
| Jaś      | 100           |
| Małgosia | 1             |

Zrób tak, by Małgosia wygrała.

**Ćwiczenie 2.3**

Uzupełnij tabelę:

|                   | Anonimowa | Neutralna | Efektywna |
|-------------------|-----------|-----------|-----------|
| Dyktatura         | -         | +         | +         |
| Monarchia         | +         | -         | +         |
| Metoda Większości | +         | +         | +         |

**Definicja 2.10 (Kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości)**

Metoda zwycięzcy (MZ) spełnia kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat, który otrzyma ponad 50% głosów, jest jedynym zwycięzcą.

**Stwierdzenie 2.1**

Mamy klasyczną metodę zwycięzcy, taką że  $\#K = 2$ , a głosowanie odbywa się według zasady bezwzględnej większości. Wówczas metoda jest prawie decyzyjna.

Dowód:

1° Załóżmy, że liczba wyborców  $\#W$  jest nieparzysta - OK.

2° Liczba wyborców  $\#W$  jest parzysta:

- jeden kandydat ma więcej niż 50% głosów - OK.
- remis, czyli obaj mają po 50% - nie ma zwycięzcy (dlatego metoda jest prawie decyzyjna).

□

**Stwierdzenie 2.2**

Metoda jest decyzyjna  $\Rightarrow$  metoda jest prawie decyzyjna.



**Definicja 2.11 (Metoda monotoniczna ze względu na zwycięzcę)**

**Z:** MZ - klasyczna lub semi-klasyczna. Metoda jest monotoniczna ze względu na zwycięzcę, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat  $A$  jest zwycięzcą, a jeśli wybierzemy kandydata  $B$  różnego od  $A$  ( $B \neq A$ ) oraz jego grupę wyborców, to jeśli ta grupa zmieni swoje głosy bez straty dla  $A$  (czyli zmiana nastąpi zgodnie z następującymi dozwolonymi operacjami):

|         |               |         |
|---------|---------------|---------|
| $M$     | $\Rightarrow$ | $N$     |
| $A \ B$ | $\Rightarrow$ | $A \ B$ |
| $- \ -$ | $\Rightarrow$ | $- \ -$ |
| $+ \ +$ | $\Rightarrow$ | $+ \ +$ |
| $- \ +$ | $\Rightarrow$ | $+ \ -$ |

to:  $\Rightarrow A$  nadal wygrywa.

**Komentarz**

Czyli, jeżeli ktoś, kto nie głosował na zwycięzcę ( $A$ ), a głosował na kandydata  $B$ , zmieni swój głos na zwycięzcę ( $A$ ), to ( $A$ ) nadal wygrywa.

**Definicja 2.12 (Metoda kwoty)**

MZ klasyczna lub semi-klasyczna jest metodą kwoty (większości kwalifikowanej), wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $q$  (kwota), taka że liczba głosów o tej własności, że kandydat  $A$  jest zwycięzcą wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  otrzymał co najmniej  $q$  głosów.

**Komentarz**

Często kwota wyrażana jest w procentach, a wówczas stosuje się nieraz nierówność słabą.

**Twierdzenie 2.1 (Maya - Kenneth Maya, 1952r)**

**Z:** Klasyczna metoda zwycięzcy oraz  $\#K = 2$ . Jeżeli metoda ta jest metodą:

- (1) anonimową
- (2) neutralną
- (3) monotoniczną ze względu na zwycięzcę
- (4) prawie decyzyjną

$\Rightarrow$  jest metodą bezwzględnej większości.

*Dowód:* Załóżmy, że  $A, B$  to kandydaci.

$\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$  interesują nas liczby głosów, które otrzymali kandydaci. Załóżmy:

$A$  -  $a$  głosów

$B$  -  $b$  głosów

Rozpatrzmy zatem przypadki:

1°  $\#W = 2n$  (parzysta), rozważmy dwa podprzypadki:

a) Jeśli  $a = n, b = n$ .

**Hipoteza:**  $A$  wygrywa (analogicznie, jeżeli nie wygrywa  $B$ ), a metoda jest neutralna, to przy wymianie wyborców  $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} B$  wygrywa (nie wygrywa  $A$ )  $\Rightarrow A$  i  $B$  wygrywają jednocześnie (nie wygrywa żaden)  $\Rightarrow$  co prowadzi do  $\blacksquare$  (bo żaden z nich nie ma ponad 50%).

b) Jeśli  $a > b$ .

**Hipoteza:**  $B$  wygrywa, wtedy  $a - b$  wyborców zmienia głosy z  $A$  na  $B$ ,  $\stackrel{(3)}{\Rightarrow} B$  dalej wygrywa. Teraz  $B$  ma  $a$  głosów,  $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} A$  wygrywa,  $\stackrel{(4)}{\Rightarrow} A$  wygrywa i ma ponad połowę głosów.

2° Niech  $\#W = 2n + 1$  (nieparzysta).

Niech  $a > b$ .

**Hipoteza:**  $B$  wygrywa,  $a - b$  wyborców zmienia głosy i, jak w 1a), udowadniamy, że  $B$  musi mieć ponad połowę głosów.

Tak więc zawsze wygrywa ten, kto ma ponad połowę głosów.

□

## 2.1.2 MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie

### **Definicja 2.13 (Metoda zakładająca uporządkowanie)**

Metoda zwycięzcy jest metodą zakładającą uporządkowanie (MZU) wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall w \in W$  ustala  $K$  kandydatów w liniowym porządku, a jego głos zależy od tego porządku.

**Zapis:**

$A \overset{w,m}{<} B$  w modelu  $m$  oznacza, że wyborca  $w$  stawia  $B$  wyżej niż  $A$ .

$A \overset{w}{<} B$  - gdy wiadomo, jaki model.

### **Przykład 2.2**

1. Metoda punktów Bordy (Jean Charles de Borda, 1733–1799, inżynier wojskowy) – Każdy wyborca przydziela punkty od  $n - 1$  do 0:

1 miejsce -  $n - 1$  punktów

2 miejsce -  $n - 2$  punktów

⋮

$n - 1$  miejsce - 1 punkt

$n$  miejsce - 0 punktów

Zwycięża ten, kto otrzyma największą liczbę punktów.

2. Metoda Hare'a (Sir Thomas Hare, 1806–1891, Anglia, prawnik, 1857 r.) – Polega na odrzucaniu tego kandydata (tych kandydatów), który ma najmniej pierwszych miejsc, i głosowaniu dalej (listy pozostają z usunięciem odrzuconego kandydata), aż ktoś uzyska ponad 50% głosów. Gdy następuje remis i nie ma kogo odrzucić, wszyscy wygrywają.

3. Metoda Coombsa (Clyde Coombs, 1912–1988, USA, psycholog) – Wypisujemy kolejność wyników głosowania, odrzucamy kandydata (lub kandydatów jeżeli ktoś zostanie), który ma najmniej ostatnich miejsc, i głosujemy dalej, aż ktoś uzyska ponad 50% pierwszych miejsc. Gdy nie można nikogo odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.

4. Metoda odrzuceń ostatniego – Jak w metodzie Coombsa, przy czym odrzucamy „do oporu”. Gdy nie można nikogo więcej odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.

### **Przykład 2.3**

Różnica między metodą Coombsa a metodą odrzucania ostatniego.

**Metoda Coombsa**

|             |   |          |          |
|-------------|---|----------|----------|
| Liczba:     | 4 | 2        | 3        |
| I pozycja   | C | <b>B</b> | <b>B</b> |
| II pozycja  | A | C        | A        |
| III pozycja | B | A        | C        |

Wygrywa B, bo ma ponad 50% pierwszych miejsc.

**Metoda odrzuceń ostatniego**

|             |              |              |   |
|-------------|--------------|--------------|---|
| Liczba:     | 4            | 2            | 3 |
| I pozycja   | C            | B            | B |
| II pozycja  | <del>A</del> | C            | A |
| III pozycja | <del>B</del> | <del>A</del> | C |

Kolejność odrzuceń: B, A, C – C wygrywa.

5. Metoda Copelanda (Arthur H. Copeland, 1898–1970, matematyk) – Porównujemy parami kandydatów. Ten, kto więcej razy zostaje oceniony wyżej, dostaje 1 pkt, a w przypadku remisu obaj dostają po 0,5 pkt.

$$\#\{m : A \overset{m}{<} B\}$$

$$\#\{m : B \overset{m}{<} A\}$$

Decyduje suma punktów (zwycięzców może być więcej niż jeden).

6. Metoda turniejowa ( $Z: \#W = 2n+1$  nieparzysta) –  $k_1$  porównujemy z  $k_2$  (metodą powyżej), a następnie zwycięzcę pierwszego porównania porównujemy z  $k_3$  itd.
7. Metoda pozycyjna – Wyborcy przyznają punkty kandydatą w postaci  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , gdzie  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ . np.  
 1 miejsce –  $p_1$  punktów  
 2 miejsce –  $p_2$  punktów  
 itd.

Zwycięża ten z największą liczbą punktów.

**UWAGA – w szczególności:**

Metoda Bordy:  $P(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$

Metoda większości:  $P(1, 0, \dots, 0)$

Metoda  $k$  głosów:  $P(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$   
 $k$  razy

**Definicja 2.14 (Monotoniczność ze względu na transpozycję)**

MZU jest monotoniczna ze względu na transpozycje  $\Leftrightarrow \forall_{M-\text{model}} \forall_{w \in W} \forall_{A, B \in K}$ , jeśli w  $M$  głosuje się  $[\Delta, B, A, *]$  i w  $M$  wygrywa  $A$ , to w  $N$ , gdzie zmiana polega na  $[\Delta, A, B, *]$ , również wygrywa  $A$ .

**Komentarz**

Zmiana polega na zamienieniu kolejności uporządkowania  $A$  i  $B$ . Dodatkowo porządek

ten był na wykładzie zapisany pionowo.

$$\begin{bmatrix} \Delta \\ A \\ B \\ * \end{bmatrix}$$

**Umowa:** Jeśli nie jest zaznaczone inaczej, to w  $K, W$  różne oznaczenia oznaczają różnych kandydatów (wyborców).

**Definicja 2.15 (Słaba zasada Pareto)**

MZU spełnia słabą zasadę Pareto  $\Leftrightarrow \forall_M (\exists_{A,B \in K} \forall_{w \in W} A \overset{w,M}{<} B) \Rightarrow A$  nie wygrywa w  $M$ .

**Definicja 2.16 (Kandydat Condorceta)**

$A \in K$  jest kandydatem Condorceta (zwycięzcą Condorceta)  $\Leftrightarrow$  w "bezpośrednich porównaniach"

$A$  jest lepszy od każdego innego kandydata  $\Leftrightarrow \forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} > \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}$ .

**Definicja 2.17 (Przegraný Condorceta)**

$A \in K$  to przegrany Condorceta (w modelu  $M$ )  $\Leftrightarrow \forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} < \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}$ .

**Definicja 2.18 (Kryterium Condorceta)**

Metoda spełnia kryterium Condorceta  $\Leftrightarrow \forall_M : \text{Istnieje kandydat Condorceta (w } M) \Rightarrow A$  - jedyny zwycięzca w  $M$ .

**Definicja 2.19 (Kryterium przegranych Condorceta)**

Metoda spełnia kryterium przegranych Condorceta  $\Leftrightarrow \forall_M : \text{Istnieje przegrany Condorceta } A \text{ w } M \Rightarrow A$  nie wygrywa w  $M$ .

**Definicja 2.20 (Metoda jednoznacznie większościowa)**

Metoda jest jednoznacznie większościowa  $\Leftrightarrow \forall_M$  kandydat  $A$  w  $M$  ma ponad połowę pierwszych miejsc  $\Rightarrow A$  - jedyny zwycięzca.

**Definicja 2.21 (Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji)**

Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji spełnia warunek niezależności porażki od ubocznych opcji (spełnia słaby warunek IIA)  $\Leftrightarrow$

$$\forall_{A,B \in K} \forall_{M,N - \text{modele}} \text{spełnia} \left[ \begin{array}{l} \forall_{w \in W} (B \overset{w,M}{<} A \Leftrightarrow (B \overset{w,N}{<} A)) \\ A \text{ wygrywa w } M, B \text{ nie wygrywa w } M \end{array} \right] \Rightarrow B \text{ nie wygrywa w } N.$$

Innymi słowy: zmiany nie wpływające na relacje przegrany-zwycięzca nie mogą dać przegrywającemu zwycięstwa.

**Twierdzenie 2.2**

MZU, anonimowa, neutralna  $\Rightarrow$  metoda nie jest decyzyjna.

*Dowód.* Rozważmy  $\#K = 2, \#W = 2n$  i otrzymane głosy.

| Głosy | n | n |
|-------|---|---|
| 1     | A | B |
| 2     | B | A |

**Hipoteza:** Metoda decyzyjna to np. wygrywa  $A \Rightarrow$  wygrywa  $B$  ⚡

Analogicznie zachodzi dla  $A$ .

□

### Przykład 2.4 (Paradoks Condorceta)

Rozważmy następującą tabelę:

| Głosy | 9 | 10 | 11 |
|-------|---|----|----|
| 1     | A | B  | C  |
| 2     | B | C  | A  |
| 3     | C | A  | B  |

Zachodzi  $A > B$ ,  $B > C$ ,  $C > A$ . Mamy więc grę w "kamień, papier, nożyce."

### Twierdzenie 2.3

MZU spełnia kryterium Condorceta  $\Rightarrow$  jest jednoznacznie większościowa.

Dowód. A ma ponad połowę pierwszych miejsc  $\Rightarrow$  A - kandydat Condorceta  $\Rightarrow$  A jest jedynym zwycięzcą.

□

### Twierdzenie 2.4

MZU spełnia słabe IIA, a A spełnia kryterium Condorceta  $\Rightarrow$  spełnia słabą zasadę Pareto.

Dowód. Rozważmy  $M \forall_W A \overset{w,M}{<} B \overset{?}{\Rightarrow} A$  nie wygrywa w  $M$ .

Rozważmy model  $N$ : dla każdego wyborcy przesuwamy  $A$  i  $B$  na szczyt,  $[B, A, reszta]$

$A \overset{w,M}{<} B \Leftrightarrow A \overset{w,N}{<} B$ .

W  $N$ :  $B$  jest kandydatem Condorceta.

W  $N$ :  $B$  jest jedynym zwycięzcą,  $B$  wygrywa,  $A$  nie wygrywa.

Słabe IIA  $\Rightarrow$   $A$  nie wygrywa w  $M$ .

□

### Twierdzenie 2.5

MZU, monotoniczna ze względu na transpozycje,  $\Leftrightarrow \forall_{M-model} \forall_{A \in K} \forall_{B_1, \dots, B_n \in A} (A \neq B, \text{ ale może być } B_i = B_j) \forall_{w_1, \dots, w_n \in W} (\text{może być } w_i = w_j)$

Jeżeli w modelu  $M$  wygrywa  $A$ , to model  $N$  utworzony przez  $[\Delta, B_i, A, *] \rightarrow [\Delta, A, B_i, *]$  dla  $i = 1, \dots, n \Rightarrow$  w  $N$  dalej wygrywa  $A$ .

Dowód.  $\Leftarrow$  oczywiste.

$\Rightarrow$  Stosujemy założenie  $n$  razy (robimy  $n$  skoków i dalej wygrywa  $A$ ).

### Przykład 2.5

1. Metoda Blacka (1908-1991, ekonomista) - jeśli istnieje kandydat Condorceta, to on wygrywa. Jeśli nie istnieje, stosujemy punkty Bordy.
2. Metoda Condorceta - jeśli istnieje kandydat, który w "bezpośrednim porównaniu" wygrywa lub remisuje z każdym innym  $\Leftrightarrow$  on jest zwycięzcą.
3. Metoda nominacji - każdy, kto ma co najmniej jedno pierwsze miejsce, wygrywa.
4. Metoda ostatnich miejsc - każdy, kto nie ma żadnego ostatniego miejsca, wygrywa.
5. Metoda prezydencka - rozważamy dwóch kandydatów z największą liczbą pierwszych miejsc. Porównujemy ich "bezpośrednio". Jeśli na drugim miejscu jest remis, wszyscy z drugiego miejsca "przechodzą do finału" i tam stosujemy metodę Copelanda.

Metoda punktów Bordy jest monotoniczna ze względu na transpozycję.

$A$  wygrywa. Niech  $A$  zdobędzie 1 punkt więcej. Innym się nie zwiększyło  $\Rightarrow A$  dalej wygrywa.

| Metoda              | Kryterium Condorceta | Kryterium przegranego Condorceta | Słaba zasada Pareto | Monotoniczność ze względu na transpozycję | IIA   | Jednoznaczna większość |
|---------------------|----------------------|----------------------------------|---------------------|---|-------|------------------------|
| Punkty Bordy        | -(1)                 | +                                | +                   | +   | -(2)  | -(1)                   |
| Hare'a              | -(3)                 | -(3)                             | +                   | -(4)                                      | -(5)  | +(O)                   |
| Coombsa             | -(14)                | -(15)                            | +                   | -(13)                                     | -(13) | +(O)                   |
| Odrzuceń ostatniego | -(11,12)             | -(12)                            | +                   | -(13)                                     | -(13) | -(11,12)               |
| Copelanda           | +                    | +                                | +                   | +   | -(10) | +(O)                   |
| Większości          | -(3)                 | -(3)                             | +(O)                | +   | -(6)  | +                      |
| Dyktatura           | -(7)                 | -(7)                             | +                   | +(O)                                      | +     | -(7)                   |
| Terminażowa         | +                    | +                                | -(8)                | +   | -(9)  | +                      |

D1) **Metoda Bordy, Kryterium przegranego Condorceta**  $\forall_w A < B$  Punkty  $A <$  Punkty  $B$ . W punktacji  $A$  zdobywa 1 punkt za każdą parę  $(B, w)$ , w której wyborca  $w$  umieszcza  $B$  wyżej niż  $A$ .

$A$  jest przegranym Condorceta. Mamy  $k$  kandydatów,  $n$  wyborców, a kandydat  $K_1, \dots, K_{n-1}$  otrzyma mniej niż  $\frac{n}{2}$  punktów. W sumie,  $A$  zdobywa mniej niż  $\frac{k(k-1)}{2}$  punktów.

Łączna pula punktów do rozdziału wynosi  $n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$  (suma ciągu arytmetycznego). Wszyscy razem zdobywają mniej niż  $\frac{n(k-1)}{2}$  punktów, czyli łącznie mniej niż  $\frac{k \cdot n \cdot (k-1)}{2}$ .

D2) **Metoda Comba i Hare'a** Jeśli  $\forall_w A \overset{w}{<} B$ , to  $A$  wcześniej odpadnie od  $B$ .

D3) **IIA dyktatura** Jeśli  $A$  wygrywa,  $B \overset{d,M}{<} A$ , to  $B$  nie może wygrać.

D4) **Metoda terminarzowa - Kryterium Condorceta** Kandydat Condorceta wygrywa z każdym i nie odda zwycięstwa.

D5) **Terminażowa - monotoniczność** Przy przesunięciu  $A$  również wygrywa.

D6) **Metoda Copelanda** Gdy  $A$  wygrywa z każdym, to zdobywa maksymalną liczbę punktów. Zasada Pareto:  $\forall_w B \overset{w}{<} A \overset{?}{\Rightarrow} B$  nie wygrywa.

Jeśli  $B$  wygrywa w pojedynku z  $C$ , to również  $A$  wygrywa z  $C$ . Wówczas punkty  $A >$  punkty  $B$ , ponieważ  $A$  zdobywa punkty za parę  $(A, B)$ , a zatem punkty  $A$  są silniejsze.

D7) **Metoda Coombsa - Słaba zasada Pareto** Jeśli  $\forall_w B \overset{w}{<} A$ , to  $A$  nie odpadnie, zanim  $B$  nie odpadnie (czyli  $B$  odpadnie wcześniej niż  $A$ ).

|     |     |     |     |   |   |
|-----|-----|-----|-----|---|---|
| K1) | 3os | 2os | Pkt | $A$ jest kandydatem Condorceta, natomiast otrzymano punkty: | $\begin{bmatrix} A = 6 \text{ pkt} \\ B = 7 \text{ pkt} \\ C = 2 \text{ pkt} \end{bmatrix}$ |
|     | A   | B   | 2   |   |   |
|     | B   | C   | 1   |   |   |
|     | C   | A   | 0   |   |   |

K2) 

| 1os | 2os | 2os | Pkt |
|-----|-----|-----|-----|
| C   | A   | B   | 2   |
| A   | B   | A   | 1   |
| B   | C   | C   | 0   |

 $\Rightarrow$ 

| 1os | 2os | 2os                 | Pkt |
|-----|-----|---------------------|-----|
| C   | A   | B                   | 2   |
| A   | B   | <b>C</b> $\uparrow$ | 1   |
| B   | C   | A                   | 0   |

, wykorzystując transpozycję otrzymujemy wyniki  $\begin{bmatrix} A = 5 \\ B = 6 \\ C = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A = 7 \\ B = 6 \\ C = 2 \end{bmatrix}$ , czyli  $A$  wygrywa.

K3) 

| 2os | 3os | 2os |
|-----|-----|-----|
| A   | B   | C   |
| C   | A   | A   |
| B   | C   | B   |

 $\begin{bmatrix} A - \text{kandydat Condorceta} \\ B - \text{przeegrany Condorceta} \end{bmatrix}$ , bo  $A : B \ 4 : 3 \Rightarrow A : C \ 5 : 2$ , ale wygrywa  $B$ .

K4) 

| 6os | 5os | 4os | 2os |
|-----|-----|-----|-----|
| A   | C   | B   | B   |
| B   | A   | C   | A   |
| C   | B   | A   | C   |

 $\Rightarrow$ 

| 6os | 5os | 4os | 2os                 |
|-----|-----|-----|---------------------|
| A   | C   | B   | <b>A</b> $\uparrow$ |
| B   | A   | C   | B                   |
| C   | B   | A   | C                   |

, wygrywał  $B$ , po zmianie  $C$ .

K5) 

| 2os | 1os | 2os |
|-----|-----|-----|
| B   | A   | A   |
| A   | B   | C   |
| C   | C   | B   |

 $B$  nie wygrywa,  $A$  wygrywa  $\Rightarrow$ 

| 2os | 1os | 2os                 |
|-----|-----|---------------------|
| B   | A   | <b>C</b> $\uparrow$ |
| A   | B   | A                   |
| C   | C   | B                   |

, wygrywa  $B$

K6) 

| 2os | 3os | 2os |
|-----|-----|-----|
| A   | B   | A   |
| B   | A   | C   |
| C   | C   | B   |

,  $A$  wygrywa,  $B$  nie wygrywa  $\Rightarrow$ 

| 2os | 3os | 2os                 |
|-----|-----|---------------------|
| A   | B   | <b>C</b> $\uparrow$ |
| B   | A   | A                   |
| C   | C   | B                   |

K7) 

| 2os | 1os (w tym jeden dyktator) |
|-----|----------------------------|
| A   | B                          |
| B   | A                          |

 $\begin{bmatrix} A - \text{kandydat Condorceta} \\ B - \text{przeegrany Condorceta} \end{bmatrix}$ , wygrywa  $B$ .

K8) Ustawiamy kolejność:  $ABCD$ 

| 1os | 1os | 1os |
|-----|-----|-----|
| A   | C   | B   |
| B   | A   | D   |
| D   | B   | C   |
| C   | D   | A   |

 mamy  $\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \\ C > D \end{bmatrix}$ , ostatecznie wygrywa  $D$ ,  
mimo iż  $D < B$ .

K9) Ustawiamy kolejność  $ABC$ 

| 1os | 1os | 1os |
|-----|-----|-----|
| C   | B   | A   |
| A   | C   | B   |
| B   | A   | C   |

 mamy  $\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \end{bmatrix}$ , wygrywa  $C \Rightarrow$ 

| 1os | 1os | 1os                 |
|-----|-----|---------------------|
| C   | B   | B                   |
| A   | C   | <b>A</b> $\uparrow$ |
| B   | A   | C                   |

,  
 $B$  wygrywa.

K10) 

| 2os | 2os | 1os | 1os |
|-----|-----|-----|-----|
| A   | C   | D   | B   |
| D   | A   | B   | C   |
| B   | B   | C   | D   |
| C   | D   | A   | A   |

 otrzymujemy kolejno wyniki:  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} > B \ (4 : 2) & \mathbf{B} > C \ (4 : 2) \\ A < \mathbf{C} \ (2 : 4) & \mathbf{B} = \mathbf{D} \ (3 : 3) \\ \mathbf{A} > D \ (4 : 2) & \mathbf{C} = \mathbf{D} \ (3 : 3) \end{bmatrix}$ , przyz-

nano punkty  $\begin{bmatrix} A -2 \text{ pkt} \\ B -1,5 \text{ pkt} \\ C -1,5 \text{ pkt} \\ D -1 \text{ pkt} \end{bmatrix}$ ,  $A$  wygrywa,  $C$  nie wygrywa.

Po zmianie:

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 2os | 2os | 1os | 1os |
| A   | C   | D   | B   |
| D   | A   | B   | C   |
| ↑   | B   | C   | D   |
| B   | D   | A   | A   |

oraz punktacje:  $\begin{bmatrix} A -2 \text{ pkt} \\ B -0,5 \text{ pkt} \\ C -2,5 \text{ pkt} \\ D -1 \text{ pkt} \end{bmatrix}$ ,  $C$  wygrywa.

K11)

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 4os | 2os | 3os |
| C   | B   | B   |
| A   | C   | A   |
| B   | A   | C   |

$B$  ma najwięcej głosów pierwszych, czyli jest kandydatem Condorceta, ale kolejność odrzuceń to  $B$ ,  $A$ , więc wygrywa  $C$ .

K12)

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| 2os | 1os | 2os |
| C   | B   | B   |
| A   | C   | A   |
| B   | A   | C   |

$C$  to przegrany Condorceta, ale  $C$  wygrywa.

K13)

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 5os | 4os | 1os | 2os |
| A   | B   | C   | B   |
| C   | A   | B   | C   |
| B   | C   | A   | A   |

,  $A$  wygrywa,  $C$  i  $B$  nie wygrywają.

Przekształcamy do:

|     |     |     |            |
|-----|-----|-----|------------|
| 5os | 4os | 1os | 2os        |
| A   | B   | C   | B          |
| C   | A   | B   | <b>A</b> ↑ |
| B   | C   | A   | C          |

,  $B$  wygrywa.

K14)

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 2os | 1os | 1os | 1os | 2os |
| E   | D   | A   | C   | B   |
| A   | B   | B   | B   | C   |
| D   | A   | C   | D   | A   |
| C   | E   | E   | E   | D   |
| B   | C   | D   | A   | E   |

$B$  -kandydat Condorceta,  $B$  odpada w I turze

K15)

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| 2os | 2os | 2os | 1os |
| D   | B   | C   | B   |
| C   | D   | B   | C   |
| A   | A   | A   | D   |
| B   | C   | D   | A   |

$A$ -przegrany Condorceta, ale  $A$  wygrywa

### **Lemat 2.1 (Lemat o decyzyjności)**

*Z: MZU, efektywna,  $\#K \geq 3$ ,  $\#W \geq 2$ . Metoda spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA  $\Rightarrow$  jest decyzyjna.*



Dowód: Wiemy, że zwycięzca istnieje (chcemy wykazać, że jest jedyny). Załóżmy, że  $A$  i  $B$

są zwycięzcami w modelu  $M$  oraz  $W = X \cup Y$

| X        | Y        |
|----------|----------|
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| A        | B        |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| B        | A        |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

Niech  $C$  - inny kandydat

Tworzymy model  $Q$ , w którym relacje  $A/B$  nie są zmienione.

| X       | Y       |
|---------|---------|
| A       | C       |
| C       | B       |
| B       | A       |
| $\dots$ | $\dots$ |

$Q$

Kto wygrywa w  $Q$ ? Na pewno nie  $B$ , bo  $\forall_w B \overset{w}{<} C$ , ale również nie  $A$  (z IIA).

Jeżeli w  $Q$   $A$  wygrywa,  $B$  nie  $\Rightarrow$  w  $M$   $B$  nie wygrywa ⚡

Zatem wygrywa  $C$ .

Rozważmy model  $R$

| X       | Y       |
|---------|---------|
| A       | B       |
| B       | C       |
| C       | A       |
| $\dots$ | $\dots$ |

$R$

Kto wygrywa w  $R$ ? -  $A$ ,  $B$  lub  $C$  (Pareto) Ale nie wygrywa  $C$  (z zasady Pareto). W  $R$ : relacje  $A/C$  są takie same jak w  $Q$ .

Założmy, że  $A$  wygrywa w  $R \Rightarrow C$  nie wygrywa w  $Q$ . Wobec tego w  $R$  wygrywa  $B$ .

Porównajmy  $M$  i  $R$ : relacje  $A-B$  w  $M$  i  $R$  są takie same. Wobec tego z IIA  $\Rightarrow$  w  $M$   $A$  nie wygrywa ⚡

□

### **Twierdzenie 2.6 (Twierdzenie Arrowa dla metod zwycięzcy (1951))**

Założmy:  $\#K \geq 3, \#W \geq 2$ ,  $MZU$ , efektywna, spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA  $\Rightarrow$  dyktatura.

D: Z lematu o decyzyjności  $\Rightarrow$  jeśli zwycięzca istnieje, to jest jedyny.

Czy istnieje jedyny zwycięzca? (pytanie) dyktatura.

### **Definicja 2.22 (na potrzeby dowodu)**

$w \in W$  - dyktator  $A$  z kontrolerem  $B \Leftrightarrow$  jeśli  $A \overset{w}{<} B \Rightarrow A$  nie wygrywa.

Podzielimy dowód na 3 kroki:

I krok -  $\forall_{A,B \in K} \exists_{w \in W}$  dyktator nad  $A$  z kontrolerem  $B$ .

II krok -  $w$ -dyktator nad  $A$  z kandydatem  $B \Rightarrow w$  dyktator nad  $B$  z kontrolerem  $A$  (dyktatora nad parą  $A, B$  oznaczamy  $d(A, B)$ ).

III krok - Jeżeli  $w = d(A, B) \Rightarrow \forall_{D,E} w = d(D, E)$  (gdzie  $D, E$  może być  $A$  lub  $B$ ).

|         |
|---------|
| $w$     |
| $A$     |
| $B_1$   |
| $B_2$   |
| $\dots$ |
| $B_n$   |

Wtedy ten  $w$  z I kroku jest dyktatorem.

Dow. I) Niech  $C$  będzie trzecim kandydatem.

|         |
|---------|
| $C$     |
| $A$     |
| $B$     |
| wszyscy |

Wygrywa  $C$ . Jeden wyborca prze-

|                   |          |          |                       |
|-------------------|----------|----------|-----------------------|
|                   | inni     | $W_1$    |                       |
|                   | $C$      | $A$      |                       |
| suwa $C$ do tyłu: | $A$      | $B$      | Wygrywa $C$ lub $A$ . |
|                   | $B$      | $C$      |                       |
|                   | $\vdots$ | $\vdots$ |                       |

|                            |          |             |                                       |
|----------------------------|----------|-------------|---------------------------------------|
|                            | inni     | $w_1$ $w_2$ |                                       |
|                            | $C$      | $A$         |                                       |
| To samo z trzecim wyborcą: | $A$      | $B$         | Wygrywa $A$ lub $C$ , i tak dalej, aż |
|                            | $B$      | $C$         |                                       |
|                            | $\vdots$ | $\vdots$    |                                       |

|                      |         |   |
|----------------------|---------|---|
|                      | wszyscy |   |
| dojdzie do sytuacji: | $A$     | Wówczas wygrywa $A$ (z zasady Pareto), a $C$ nie. |
|                      | $B$     |   |
|                      | $C$     |   |

Pierwsze przejście, po którym  $C$  nie wygrywa (musi takie zaistnieć).

$X, Y$  - grupy wyborców.

|       |     |     |               |       |     |     |
|-------|-----|-----|---------------|-------|-----|-----|
| X     | w   | Y   |               | X     | w   | Y   |
| $C$   | $C$ | $A$ | $\Rightarrow$ | $C$   | $A$ | $A$ |
| $A$   | $A$ | $B$ |               | $A$   | $B$ | $B$ |
| $B$   | $B$ | $C$ |               | $B$   | $C$ | $C$ |
| $M_1$ |     |     |               | $M_2$ |     |     |

Pokażemy, że  $w$  jest dyktatorem nad  $B$  z kontrolerem  $A$ .

Rozważmy  $P$  - dowolny model, w którym  $B \stackrel{w,P}{<} A$ .

Niech  $A/B$  oznacza pewną relację między  $A$  i  $B$ .

|          |          |          |               |          |          |          |
|----------|----------|----------|---------------|----------|----------|----------|
| $W$      | $V$      | inni     |               | $W$      | $V$      | inni     |
| $A/B$    | $A$      | $A/B$    | $\Rightarrow$ | $C$      | $A$      | $A/B$    |
|          | $B$      |          |               | $A/B$    | $B$      | $C$      |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |               | $\vdots$ | $C$      | $\vdots$ |
|          |          |          |               | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $P$      |          |          |               | $Q$      |          |          |

Kto wygrywa w  $Q$ ? -  $A$ ,  $B$  lub  $C$ . Jednak relacje  $B/C$  w modelach  $Q$  i  $M_1$  są takie same  $\Rightarrow$  w  $Q$   $B$  nie wygrywa (IIA). Z kolei relacje  $A/C$  w  $Q$  i  $M_2$  są takie same  $\stackrel{IIA}{\Rightarrow}$  w  $Q$   $C$  nie wygrywa.

W  $Q$  wygrywa  $A$ ,  $B$  nie wygrywa.

Relacje  $A/B$  w  $P$  i  $Q$  są takie same.  $\Rightarrow$  w  $P$   $B$  nie wygrywa.

Dow. II)  $w$  jest dyktatorem nad  $B$  z kontrolerem  $A$ ,  $v$  jest dyktatorem nad  $A$  z kontrolerem  $B$

| $W$      | $V$      | inni |
|----------|----------|------|
| $A$      | $B$      |      |
| $B$      | $A$      |      |
| $\vdots$ | $\vdots$ |      |

Wygrywa  $A$  lub  $B$  (z zasady Pareto).  $B$  nie wygrywa (bo  $w$ ),  $A$  nie wygrywa (bo  $v$ ) ⚡

Dow. III) Niech  $w = d(A, B)$ . 1. Zauważmy, że  $\forall_{D,E} \exists d(D, E)$ . 2.  $\forall_{D,E} w = d(D, E)$ .

D 2.1. Załóżmy, że  $C$ , oraz że  $v = d(B, C)$  i  $v \neq w$ .

| $W$      | $V$      | inni     |
|----------|----------|----------|
| $C$      | $B$      | $C$      |
| $A$      | $C$      | $B$      |
| $B$      | $A$      | $A$      |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Wygrywa  $B$  lub  $C$  (z zasady Pareto).  $B$  nie wygrywa (bo  $w$ ),  $C$  nie wygrywa (bo  $v$ ) ⚡

D 2.2. Zamieniamy  $A$  i  $B$  rolami,  $v = d(A, C)$ , i w ten sam sposób pokazujemy, że  $w = d(A, C)$ .

D 2.3.  $\overset{z\ 2.1\ i\ 2.2}{C \neq A, B}$  oraz  $w = d(A, B)$ ,  $w = d(A, C)$ . Jeśli  $D \neq A, C$ , to podobne rozumowanie jak w 2.1 i 2.2 dla  $A, C, D$  pokazuje, że  $w = d(A, C) \Rightarrow w = d(C, D)$ .

Dla  $C, d \neq A, B$  OK. Jeden z  $C, D$  musi być równy  $A$  lub  $B$  (z 2.1 i 2.2).

□

### **Wniosek 2.6.1 (Twierdzenie Arrowa o niemożliwości)**

Założmy, że  $\#K \geq 3$ ,  $\#W \geq 2$ . Wówczas: nie istnieje metoda zakładająca uporządkowanie (MZU) efektywna, która jednocześnie spełnia następujące warunki:

- anonimowa,
- słabą zasadę Pareto,
- słabe kryterium niezależności od opcji ubocznych (IIA).

### **Przykład 2.6 (Przypadki szczególne w twierdzeniu Arrowa)**

1.  $\#K = 2$ ,  $\#W$  nieparzyste — metoda większości jest decyzyjna.
2.  $\#K = 3$ ,  $\#W = 5$  — reguła „ $\geq 3$  pierwsze miejsca” wyłania zwycięzcę.

### **Twierdzenie 2.7 (Twierdzenie Taylora o niemożliwości)**

Dla  $\#K \geq 3$ ,  $\#W \geq 3$ : nie istnieje MZU efektywna, która spełnia jednocześnie kryterium Condorceta oraz słabe kryterium niezależności od ubocznych opcji (IIA).

**Dowód:** Z założeń IIA i kryterium Condorceta wynika słaba zasada Pareto. Słaba zasada Pareto wraz z IIA prowadzi do dyktatury (zgodnie z twierdzeniem Arrowa). Jednak dla  $\#W \geq 3$ , dyktatura nie spełnia kryterium Condorceta.

□

Przypadek  $\#W = 4$  jest znacznie prostszy do rozważenia.

### 2.1.3 Metoda TAK/NIE

$$\left[ \begin{array}{ll} \Sigma = \{M : W \rightarrow K\} & \Sigma = \{M : W \rightarrow \{\text{TAK}, \text{NIE}\}\} \\ f : \Sigma \rightarrow P(K) & f : \Sigma \rightarrow \{\text{TAK}, \text{NIE}\} \end{array} \right]$$

#### **Przykład 2.7 (Szczególny przypadek metody status quo)**

Przypadek z dwoma kandydatami.

#### **Definicja 2.23 (Założenia metody TAK/NIE)**

Założenia: '

- $\forall_{w \in W} w : \text{TAK} \Rightarrow \text{wynik: TAK}$ ,
- $\forall_{w \in W} w : \text{NIE} \Rightarrow \text{wynik: NIE}$ .

#### **Definicja 2.24 (Koalicja wygrywająca)**

Podzbiór  $A \subset W$  jest koalicją wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\{x \in A : x \text{ głosuje TAK}\} \Rightarrow \text{wynik: TAK}.$$

#### **Definicja 2.25 (Monotoniczność metody TAK/NIE)**

Metoda TAK/NIE jest monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\left[ \begin{array}{l} A \subset A_1 \\ A \text{ jest koalicją wygrywającą} \end{array} \right] \Rightarrow A_1 \text{ jest koalicją wygrywającą}.$$

#### **Definicja 2.26 (Wyborca decydujący)**

Założmy, że  $A$  jest koalicją wygrywającą. Wyborca  $p \in A$  jest decydujący dla  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \setminus \{p\}$  nie jest koalicją wygrywającą.

#### **Definicja 2.27 (Wskaźnik Banzhafa)**

Założmy, że  $W = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Wskaźnik Banzhafa dla  $a_i$  jest równy liczbie:

$$B(a_i) = \#\{A : a_i \in A \text{ i } a_i \text{ jest decydujący dla } A\}.$$

#### **Definicja 2.28 (Indeks Banzhafa (Penrose'a–Banzhafa))**

Indeks Banzhafa dla  $a_i$  definiuje się jako:

$$I_B(a_i) = \frac{B(a_i)}{B(a_1) + \dots + B(a_n)}.$$

#### **Przykład 2.8**

Trzech wyborców:

- $w_1 = 50$ ,
- $w_2 = 45$ ,
- $w_3 = 1$ .

Do podjęcia decyzji TAK potrzeba 51 głosów.

#### **Komentarz**

Zapis tego warunku:  $W(51; 50, 45, 1)$  — gdzie  $W(\text{min}; \text{wagi wyborców})$ .

**\*\*Metoda liczenia wskaźnika Banzhafa (dla metod monotonicznych)\*\*:**

|           | Koalicje wygrywające \ Wyborcy | $w_1$    | $w_2$    | $\dots$ | $w_n$    |
|-----------|--------------------------------|----------|----------|---------|----------|
| ALGORYTM: | $k_1$                          | +        | +        | $\dots$ | -        |
|           | $k_2$                          | -        | +        | $\dots$ | -        |
|           | $\vdots$                       | $\vdots$ | $\vdots$ |         | $\vdots$ |
|           | $k_j$                          | +        | -        | $\dots$ | -        |

Legenda:

- + (wyborca należy do koalicji),
- - (wyborca nie należy do koalicji).

### Komentarz

Policzmy teraz wskaźniki Banzhafa dla  $W(51; 50, 45, 1)$

**\*\*Koalicje wygrywające\*\*:**

- $\{w_1, w_2\}$ ,
- $\{w_1, w_3\}$ ,
- $\{w_1, w_2, w_3\}$ .

Liczba znaków + dla wyborcy  $w_1$  minus liczba znaków - to wskaźnik Banzhafa.

|                      | Koalicja            | $w_1$     | $w_2$     | $w_3$     |
|----------------------|---------------------|-----------|-----------|-----------|
| <b>**Przykład**:</b> | $\{w_1, w_2\}$      | +         | +         | -         |
|                      | $\{w_1, w_3\}$      | +         | -         | +         |
|                      | $\{w_1, w_2, w_3\}$ | +         | +         | +         |
|                      |                     | 3 = (3-0) | 1 = (2-1) | 1 = (2-1) |

**\*\*Wskaźniki Banzhafa\*\*:**

$$B(w_1) = 3,$$

$$B(w_2) = 1,$$

$$B(w_3) = 1.$$

$w_1$  jest decydującym wyborcą.

**\*\*Indeksy Banzhafa\*\*:**

$$I_B(w_1) = \frac{3}{5},$$

$$I_B(w_2) = \frac{1}{5},$$

$$I_B(w_3) = \frac{1}{5}.$$

Dlaczego to działa? Niech  $K$  to zbiór koalicji wygrywających, a  $p \in W$ . Dzielimy  $K$  na trzy podzbiory:

$$K_1 = \{A : p \notin A\},$$

$$K_2 = \{A \cup \{p\} : A \in K_1\},$$

$$K_3 = K \setminus (K_1 \cup K_2).$$

Zauważmy, że:

- $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ ,
- zbiory  $K_1, K_2, K_3$  są parami rozłączne,
- $\#K_1 = \#K_2$ .

Wskaźnik Banzhafa:

$$B(p) = \#K_3,$$

gdzie  $p$  jest decydujący dla  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \in K_3$ .

**Definicja 2.29 (Wskaźnik/Indeks Shapleya–Shubika)**

Dla metody monotonicznej: Porządkujemy wyborców jako  $W = (w_1, \dots, w_n)$ . W ciągu  $(w_1, \dots, w_n)$  wyborca  $w_k$  jest wpływającym wyborcą, jeśli:

$\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$  nie tworzy koalicji wygrywającej, a  $\{w_1, \dots, w_k\}$  już tak.

Wskaźnik Shapleya–Shubika:

$$S(w_k) = \#\{\text{ciągi, w których } w_k \text{ jest wpływającym wyborcą}\}.$$

Indeks Shapleya–Shubika:

$$I_S(w_k) = \frac{S(w_k)}{n!}.$$

**Przykład 2.9**

**Komentarz**

Dalej działamy na przykładzie  $W(51; 50, 45, 1)$ .

Ciągi decyzyjne:

$$(w_1, \mathbf{w}_2 \mid, w_3)$$

$$(w_1, \mathbf{w}_3 \mid, w_2)$$

$$(w_2, \mathbf{w}_1 \mid, w_3)$$

$$(w_2, w_3, \mathbf{w}_1 \mid)$$

$$(w_3, \mathbf{w}_1 \mid, w_2)$$

$$(w_3, w_2, \mathbf{w}_1 \mid)$$

$$I_S(w_1) = \frac{4}{6}, \quad I_S(w_2) = \frac{1}{6}, \quad I_S(w_3) = \frac{1}{6},$$

**Definicja 2.30 (Odporności na zamianę w metodzie TAK/NIE)**

Metoda TAK/NIE jest odporna na zamianę wtedy i tylko wtedy, gdy:

$\forall_{A,B}$  — koalicje wygrywające  $\forall_{a \in A, b \in B}$  co najmniej jedna z koalicji  $\left[ \begin{array}{l} (A \setminus \{a\} \cup \{b\}) \\ (B \setminus \{b\} \cup \{a\}) \end{array} \right]$  jest wygrywająca.

### Stwierdzenie 2.3

Większość ważona w metodzie TAK/NIE jest odporna na zamianę.

D: Niech  $A, B$  będą koalicjami wygrywającymi,  $a \in A, b \in B$ . Wagi głosów  $a$  i  $b$  oznaczamy jako  $W_a, W_b$ . Zakładamy, że  $W_b \geq W_a$ . Wówczas:

$$W(A \setminus \{a\} \cup \{b\}) \geq W(A).$$

□

#### Zadanie 1

Porównać  $W(5; 4, 3, 2, 1)$  z:

- a)  $W(9; 8, 7, 2, 1)$ ,
- b)  $W(9; 8, 7, 3, 2)$ .

#### Zadanie 2

Niech  $A, B, C, D$  oznaczają wyborców w  $W(3; A, B, C, D)$ , a pary  $AB$  i  $CD$  oznaczają koalicje wygrywające.

Wykazać, że to nie jest metoda z większością ważoną.

#### Zadanie 3

Dla grupy  $B + 6r$  (burmistrz i 6 radnych) wyznaczyć indeksy Shapleya–Shubika.

### 2.1.4 Metody porządkowe

#### Definicja 2.31 (Słaby porządek)

Zbiór  $K$  jest słabo uporządkowany wtedy i tylko wtedy, gdy  $\exists R$  — relacja równoważności w  $K$  taka, że  $K/R$  jest uporządkowany liniowo przez relację  $\leq$ .

Dla  $a, b \in K$  definiujemy:

$$a < b \stackrel{\text{def}}{\iff} [a]_R < [b]_R,$$

gdzie relacja jest przechodnia i słabo antysymetryczna.

#### Definicja 2.32 (Metoda porządkowa (MP))

Każdy wyborca porządkuje kandydatów w sposób liniowy.

Wynik wyborów jest słabym porządkiem w zbiorze  $K$ :

- $L(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ jest porządkiem w } K\}$ ,
- $S(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ jest słabym porządkiem w } K\}$ .

Zapis formalny:

$$\Sigma = \{M : W \rightarrow L(K)\}, \quad f : \Sigma \rightarrow S(K).$$

Każda efektywna metoda z założeniem większości wyborców (MZU) jest metodą porządkową (MP).

Zapis notacyjny:

- $A \overset{w}{<} B$ ,
- $A \overset{w, M}{<} B$ ,

- $A \underset{M}{<} B$  — w modelu  $M$ , po wyborach  $B$  znajduje się nad  $A$ .

**Przykład 2.10**

Dyktatura porządkowa.

Wynik wyborów jest identyczny z głosem jednego wyborcy.

**Definicja 2.33 (Porządkowa zasada Pareto)**

Metoda porządkowa (MP) spełnia (porządkową) zasadę Pareto wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_M \forall_{A,B \in K} \left( \forall_w A \overset{w,M}{<} B \right) \Rightarrow A \underset{M}{<} B.$$

**Definicja 2.34 (Metoda spełniająca postulat liberalizmu Sena)**

Metoda spełnia postulat liberalizmu Sena, jeśli:

$$\forall_{w \in W} \exists_{A,B \in K (A \neq B)} \left( A \overset{w,M}{<} B \Rightarrow A \underset{M}{<} B \right) \text{ oraz } \left( A \overset{w,M}{>} B \Rightarrow A \underset{M}{>} B \right).$$

**Twierdzenie 2.8 (Twierdzenie Sena)**

Niech  $\#K \geq 2$  oraz  $\#W \geq 2$ . Wtedy: Nie istnieje metoda spełniająca jednocześnie:

1. zasadę Pareto,
2. postulat liberalizmu Sena.

D: Niech  $w, v$  będą wyborcami, a  $A, B, C, D$  będą elementami  $K$ . Rozważmy następujące przypadki:

1. Dla  $w, v$  i pary  $A, B$ : Jeśli  $w : A \overset{w,M}{<} B \Rightarrow A \underset{M}{<} B$  oraz  $w : B \overset{w,M}{<} A \Rightarrow B \underset{M}{<} A$ , to mamy sytuację wzajemnej sprzeczności wynikającej z narzuconych preferencji.
2. Kolejność preferencji dla  $w$ :

$$\begin{bmatrix} w : \\ C \\ B \\ A \\ D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{Reszta:} \\ A \\ C \\ B \\ D \end{bmatrix}$$

Z powyższego wynika, że nie można jednocześnie spełnić zasady Pareto i postulatu liberalizmu Sena.

$$A \underset{M}{<} B, C \underset{M}{<} A, B \underset{M}{<} C \text{ (zasada Pareto).}$$

Jednak:

$$A \underset{M}{<} B \underset{M}{<} C \underset{M}{<} A$$

jest sprzecznością.

3. Kolejność preferencji:

$$\begin{bmatrix} w : \\ D \\ A \\ B \\ C \\ \text{reszta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{reszta:} \\ B \\ C \\ D \\ A \\ \text{reszta} \end{bmatrix}$$

Z zasady Pareto:

$$B \underset{M}{<} (w) \underset{M}{<} A \underset{M}{<} D \underset{M}{<} C \underset{M}{<} B$$

co prowadzi do sprzeczności.



□

**Definicja 2.35 (Filtr)**

Niech  $X$  będzie zbiorem. Podzbiór  $F \subset P(X)$ , gdzie  $F \neq \emptyset$ , nazywamy *filtr*, jeśli spełnia następujące warunki:

- 1)  $\emptyset \notin F$
- 2) Jeśli  $A, B \in F$ , to  $A \cap B \in F$
- 3) Jeśli  $A \in F$  oraz  $A \subset B \subset X$ , to  $B \in F$

**Przykład 2.11**

1. Niech  $X$  będzie zbiorem oraz  $p \in X$ . Wówczas zbiór

$$\{A \subset X : p \in A\}$$

jest filtrem.

2. Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną,  $p \in X$ , a  $U$  otoczeniem punktu  $p$ . Wówczas zbiór wszystkich otoczeń  $p$  jest filtrem.

**Definicja 2.36 (Ultrafiltr)**

Podzbiór  $F \subset P(X)$  nazywamy *ultrafiltrem*, jeśli spełnia następujące warunki:

- 1)  $F$  jest filtrem.
- 2) Dla każdego  $A \subset X$  zachodzi dokładnie jedno z dwóch:  $A \in F$  albo  $X \setminus A \in F$ .

**Przykład 2.12**

1. Zobacz przykład 2.11.1.

**Stwierdzenie 2.4**

Ultrafiltr jest filtrem maksymalnym, tzn. jeśli  $F$  jest ultrafiltrem, to dla każdego filtra  $G$ , jeśli  $F \subset G$ , to  $G = F$ .

Załóżmy, że istnieje filtr  $G$  taki, że  $\Rightarrow \forall_G F \subset G \Rightarrow G = F$ . Wówczas istnieje  $B \in G$ , takie że  $B \notin F$ . Ponieważ  $F$  jest ultrafiltrem, mamy  $X \setminus B \in F$ . Z definicji filtra wynika, że  $B \cap (X \setminus B) = \emptyset \in G$ , co prowadzi do sprzeczności, ponieważ  $\emptyset \notin G$ .

□

Uwaga

$$\forall F \text{ - filtr } \exists G \text{ - ultrafiltr } F \subset G$$

**Twierdzenie 2.9**

Niech  $X$  będzie zbiorem skończonym, a  $F$  ultrafiltrem. Wówczas  $\exists_{p \in X}$  taki, że  $F$  jest generowany przez  $\{p\}$ .

D:

Przypadek 1)  $\exists_{p \in X} \{p\} \in F \Rightarrow \forall_{B: p \in B} B \in F$  ( $\{p\} \subset B$ ) (własność 3 z definicji filtra).

Założmy sprzecznie:  $\exists_{C \in F} : p \notin C$ . Wtedy  $p \in X \setminus C \in F$ . Ale  $C \cap (X \setminus C) = \emptyset \in F$ , co prowadzi do sprzeczności, ponieważ  $\emptyset \notin F$ .

Przypadek 2)  $\forall_{p \in X} \{p\} \notin F$  Załóżmy, że  $X = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Wówczas:

$$\begin{bmatrix} X \setminus \{p_1\} \in F, \\ X \setminus \{p_2\} \in F, \\ \vdots \\ X \setminus \{p_n\} \in F \end{bmatrix}$$

Jednak  $X \setminus \{p_1\} \cap X \setminus \{p_2\} \cap \dots \cap X \setminus \{p_n\} = \emptyset \notin F$ , co jest sprzecznością.

□

Wprowadźmy oznaczenia:  $K, W$  - zbiory  $L(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ liniowy porządek w } K\}$   
 $S(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ słaby porządek w } K\}$   $\Sigma = \{M : W \rightarrow L(K)\}$   $f : \Sigma \rightarrow S(K)$

Notacja:  $a \overset{x,M}{<} b$  oznacza  $a < b$  w porządku  $M(x)$   $W \ni x \xrightarrow{M} M(x)$  - porządek w  $K$   $a \underset{M}{<} b$  oznacza  $a < b$  w słabym porządku wyznaczonym przez  $f(M)$ .

**Definicja 2.37**

(p)  $\forall_M (\forall_{x \in W} a \overset{x,M}{<} b) \Rightarrow a \underset{M}{<} b$  (I)  $\forall_{M,N} (\forall_{x \in W} (a \overset{x,M}{<} b \iff a \overset{x,N}{<} b)) \iff (a \underset{M}{<} b \iff a \underset{N}{<} b)$   
b)

Zbiór  $T \subset W$  spełnia warunek (DEC) wtedy i tylko wtedy, gdy  $T$  jest zbiorem decyzyjnym:

$$\forall_{M \in \Sigma} \forall_{p,q \in K} (\forall_{x \in T} p \overset{x,M}{<} q) \Rightarrow p \underset{M}{<} q.$$

**Twierdzenie 2.10 (Twierdzenie Arrowa w wersji ultrafiltrów)**

Założenia:  $\#W \geq 3, \#K \geq 3, f : \Sigma \rightarrow S(K)$  spełnia zasady Pareto (P) oraz IIA (I).

Teza:  $\{T \subset W : T \text{ spełnia (DEC)}\}$  jest ultrafiltrem.

D: 0)  $D \neq \emptyset$ :  $W \in D$  (z P)

1)  $\emptyset \notin D$ : weźmy  $a \neq b$  M,

$$\left[ \begin{array}{l} \forall_{x \in W} a \overset{x,M}{<} b \Rightarrow a \underset{M}{<} b \\ \forall_{x \in \emptyset} b \overset{x,M}{<} a \Rightarrow b \underset{M}{<} a \end{array} \right] \Rightarrow \text{sprzeczność}$$

2)  $T_1 \in D, T_1 \subset T_2 \stackrel{?}{\Rightarrow} T_2 \in D$

$$a, b \in K, M \in \Sigma \forall_{x \in T_2} a \overset{x,M}{<} b \Rightarrow \forall_{x \in T_1} a \overset{x,M}{<} b \stackrel{T_1 \in D}{\Rightarrow} a \underset{M}{<} b$$

3)  $T_1, T_2 \in D \stackrel{?}{\Rightarrow} a \underset{M}{<} b$   $M \in \Sigma, a, b \in K (\forall_{T_1 \text{ iloczyn } T_2} a \overset{x,M}{<} b \stackrel{?}{\Rightarrow} b)$

Weźmy  $c \in K, c \neq a, b$  (?) Czy istnieje  $N \in \Sigma$  (model) w którym  $\forall_{x \in T_1} a \overset{x,N}{<} c \forall_{x \in T_2} c \overset{x,N}{<} b$   
 $\forall_{x \in W} a \overset{x,N}{<} b \iff a \underset{N}{<} b$  Jeśli tak to:

Pierwsza część i druga część implikują  $a \underset{N}{<} b$  i na mocy (I)  $a \underset{M}{<} b$

$M$  - dany

$$R := \{x \in W a \overset{x,M}{<} b\} \text{ czyli } x \in R a \overset{x,M}{<} b \text{ } x \notin R b \overset{x,M}{<} a$$

$$\left| \begin{array}{l} x \in R \\ x \in R a \overset{x,M}{<} c \overset{x,M}{<} b \text{ reszta dowolnie} \end{array} \right| \begin{array}{l} x \in R \\ x \in T_1 \Rightarrow x \notin T_2 \\ x \in T_1 \cap T_2 \Rightarrow a \overset{x,M}{<} b \Rightarrow x \in R b \overset{x,N}{<} a \overset{x,N}{<} c \end{array} \begin{array}{l} x \notin R \\ x \notin R \end{array}$$

Zatem jest to filtr (spełnia warunki  $a < b$  i  $b > a$ )

4) Czy  $\forall_{T \subset W} T \in D$  lub  $W \subset T \in D$  Dowód podzielimy na 4 lematy.

**Lemat 2.2**  $\forall_{T \subset W} \forall_{a,b \in K, a \neq b} \left[ \begin{array}{l} (\exists_{N \in \Sigma} : T = \{x \in W : a \overset{x,N}{<} b\} \text{ i } a \underset{N}{<} b) (a \underset{T}{*} b) \\ (\forall_{M \in \Sigma} : T = \{x \in W : a \overset{x,M}{<} b\} \Rightarrow a \underset{M}{<} b) (a \underset{T}{*} b) \end{array} \right] \text{ Podane warunki są równoważne.}$

$$D: \Rightarrow M : x \in T \iff a \overset{x,N}{<} b \text{ i } a \underset{N}{<} b \stackrel{(I)}{\Rightarrow} a \underset{M}{<} b$$

$$\Leftarrow \text{Weźmy } N \text{ (spełnia założenia ze zdania dolnego)} a \overset{x,N}{<} b \iff x \in T \text{ reszta dowolnie} \Rightarrow a \underset{N}{<} b$$

**Lemat 2.3**

$$\forall_{T \subset W}, \forall_{a,b,c \in K, a \neq b \neq c} (2.1) (a \underset{T}{*} b \Rightarrow (c \underset{T}{*} b)) (2.2) (a \underset{T}{*} b \Rightarrow (a \underset{T}{*} c))$$

D: (2.1) Bierzemy następujący  $M$ :  $x \in T \Leftrightarrow c \overset{x,M}{<} b$  (?) czy  $c \underset{M}{<} b$  Rozważmy model  $N$  :

$c \overset{x,N}{<} a \overset{x,N}{<} b$  gdy  $c \overset{x,M}{<} b (\Leftrightarrow x \in T)$   $b \overset{x,N}{<} c \overset{x,N}{<} a$  gdy  $b \overset{x,M}{<} c$  reszta dowolnie

$$\forall_{x \in W} c \overset{x,N}{<} a (x \in T) \Leftrightarrow c \overset{x,M}{<} b \stackrel{def N}{\Leftrightarrow} c \overset{x,N}{<} b \Leftrightarrow a \overset{x,N}{<} b (\Leftrightarrow x \in T)$$

$$\stackrel{a*b}{\underset{N}{\Rightarrow}} a \underset{N}{<} b$$

$$a \text{ z } \forall_{x \in W} c \overset{x,N}{<} a \stackrel{(P)}{\Rightarrow} c \underset{N}{<} a$$

Wobec tego z (I)  $\Rightarrow c \underset{M}{<} b$

$$(2.2) M : x \in T \Leftrightarrow a \overset{x,M}{<} c \text{ Czy } a \underset{M}{<} c$$

Rozważmy  $N$ :  $a \overset{x,N}{<} b \overset{x,N}{<} c$  gdy  $a \overset{x,M}{<} c (\Leftrightarrow x \in T)$   $b \overset{x,N}{<} c \overset{x,N}{<} a$  gdy  $c \overset{x,M}{<} a$  reszta dowolnie

$$\forall_{x \in W} b \overset{x,N}{<} c (x \in T) \Leftrightarrow a \overset{x,M}{<} c \stackrel{def N}{\Leftrightarrow} a \overset{x,N}{<} c \Leftrightarrow a \overset{x,N}{<} b (\Leftrightarrow x \in T)$$

$$\stackrel{a*b}{\underset{N}{\Rightarrow}} a \underset{N}{<} b$$

$$a \text{ z } \forall_{x \in W} b \overset{x,N}{<} c \stackrel{(P)}{\Rightarrow} b \underset{N}{<} c$$

Wobec tego z (I)  $\Rightarrow a \underset{M}{<} c$

#### **Lemat 2.4**

$$Z: T \in W \exists_{a,b,a \neq b} a \underset{T}{*} b \Leftrightarrow \forall_{c,d,c \neq d} c \underset{T}{*} d$$

D: (wynika bezpośrednio z lematu wcześniejszego, ale formalny dowód)

$\Leftarrow$  oczywiste

$\Rightarrow a \underset{T}{*} b, c \neq d$  (1)  $c = a, d = b$  OK (2)  $c \neq a, d = b$  wynika z (2.1) (3)  $c = a, d \neq b$  wynika z

$$(2.2) (4) c \neq a, d \neq b (4.1) a \underset{T}{*} b \stackrel{(2.1)}{\Rightarrow} c \underset{T}{*} b \stackrel{(2.2)}{\Rightarrow} c \underset{T}{*} d \text{ (jeśli } c \neq d) (4.2) b = c a \underset{T}{*} b \stackrel{(2.2)}{\Rightarrow} a \underset{T}{*} d \Rightarrow c \underset{T}{*} d$$

$$\text{(jeśli } a \neq d) (4.3) a = d, b = c \#K \geq 3 e \neq a, b, c, d a \underset{T}{*} b \stackrel{(2.2)}{\Rightarrow} a \underset{T}{*} e \stackrel{(2.2)}{\Rightarrow} c \underset{T}{*} d$$

#### **Lemat 2.5**

$$S \subset W, S \neq \emptyset \exists_{a \neq b} a \underset{S}{*} b \Rightarrow S \in D$$

$$M \in \Sigma, p, q \in K, \forall_{x \in S} p \overset{x,M}{<} q \stackrel{?}{\Rightarrow} p \underset{M}{<} q$$

$$T := \{x \in W : p \overset{x,M}{<} q\} S \subset T$$

1.  $T = S$  2.  $T = W$  3.  $W = S \cup (T \setminus S) \cup (W \setminus T)$  przy czym  $(T \setminus S), (W \setminus T) \neq \emptyset$

$$(1) a \underset{S}{*} b (\text{lema 3}) \Rightarrow p \underset{S}{*} q \Rightarrow p \underset{M}{<} q$$

$$(2) (P) \Rightarrow p \underset{M}{<} q$$

(3)  $c \in K, c \neq p, q$  Definiujemy  $N$

$x \in S p \overset{x,N}{<} c \overset{x,N}{<} q$   $x \in (T \setminus S) c \overset{x,N}{<} p \overset{x,N}{<} q$   $x \in (W \setminus T) c \overset{x,N}{<} q \overset{x,N}{<} p$  reszta dowolnie

$$\forall_{x \in W} c \overset{x,N}{<} q \stackrel{(P)}{\Rightarrow} c \underset{N}{<} q$$

$$x \in S \Leftrightarrow p \overset{x,N}{<} c$$

$$\text{Zał: } a \underset{S}{*} b \stackrel{L3}{\Rightarrow} p \underset{S}{*} c \stackrel{def???}{\Rightarrow} p \underset{N}{<} c \Rightarrow p \underset{N}{<} q$$

$$\text{WN: } T = \{x \in W : p \overset{x,N}{<} q\} \text{ i } p \underset{N}{<} q \Rightarrow p \underset{T}{*} q \Rightarrow p \underset{T}{*} q \Rightarrow p \underset{M}{<} q$$

**Wracając do Twierdzenia arrowa**

Dowód końcowy:

$T \subset W$  czy  $T \in D$  lub  $W \setminus T \in D$ ?

Weźmy  $a, b, c \in K$  (różne),  $M \in \Sigma$

$x \in T : c \stackrel{x,M}{<} b \stackrel{x,M}{<} a$   $x \in W \setminus T : a \stackrel{x,M}{<} c \stackrel{x,M}{<} b$  reszta dowolnie

$\forall_{x \in W} c \stackrel{x,M}{<} b \stackrel{?}{\Rightarrow} c \stackrel{M}{<} b(\Delta)$

Są 3 możliwości

(1)  $b \stackrel{M}{<} a$  (2)  $a \stackrel{M}{<} b$  (3)  $a, b$  w tej samej klasie równoważności

(1)  $\Rightarrow b \stackrel{M}{<} a \Leftrightarrow x \in T \Rightarrow b \stackrel{L_1}{**}_T a \stackrel{L_4}{\Rightarrow} b \stackrel{L_4}{*}_T a \stackrel{L_4}{\Rightarrow} T \in D$

(2)  $\Rightarrow a \stackrel{x,M}{<} b \Leftrightarrow x \in W \setminus T \Rightarrow a \stackrel{L_1}{**}_{W \setminus T} b \stackrel{L_4}{\Rightarrow} a \stackrel{L_4}{*}_T b \stackrel{L_4}{\Rightarrow} W \setminus T \in D$

(3)  $\stackrel{(\Delta)}{\Rightarrow} c \stackrel{M}{<} a$  wtedy mamy:  $c \stackrel{x,M}{<} a \Leftrightarrow x \in T \Rightarrow c \stackrel{L_1}{**}_T a \stackrel{L_4}{\Rightarrow} c \stackrel{L_4}{*}_T a \stackrel{L_4}{\Rightarrow} T \in D$

□

### **Wniosek 2.10.1**

*Założenia:  $\#W \geq 3, \#K \geq 2, W$  skończony. Jeśli  $f : \Sigma \rightarrow S(K)$  spełnia (p) i (I), to  $\exists_{w \in W} \forall_{M \in \Sigma} M(w) = f(M)$ .*

D: Jeśli  $W$  jest skończony, to  $\exists_w \{w\}$  spełnia warunek (DEC). Wówczas:

$$\forall_{a,b \in K} \forall_{M \in \Sigma} (a \stackrel{w,M}{<} b \Rightarrow a \stackrel{M}{<} b).$$

□

### **Wniosek 2.10.2 (Twierdzenie Arrowa, 1950)**

*Założenia:  $\#W \geq 3, \#K \geq 3, W$  skończony. Jeśli metoda porządkowa (MP) spełnia zasadę Pareto oraz IIA, to MP jest dyktaturą porządkową.*

D: Z poprzedniego wniosku wynika, że dla  $w$ , dla którego  $\{w\}$  jest zbiorem decyzyjnym,  $w$  jest dyktatorem.

#### **Zadanie 4**

Sprawdzić, czy

$$F := \{B : B \supset A\}$$

jest filtrem (lub ultrafiltrem).

#### **Zadanie 5**

Sprawdzić, czy następujące zbiory są filtrami:

a)  $F_1 = \{D : \exists_{E \in S} E \subset D\}$

b)  $F_2 = \{D : \exists_{E \in S} D \subset E\}$

### 3 Deser



W sumie to deseru jeszcze nie ma, ale ma być na ostatnim wykładzie!!!

Egzamin stępnie środa 29 stycznia 11:00