Matematyczne aspekty wyborów

Na podstawie wykładu

Krzysztofa Ciesielskiego

Skrypt autorstwa

Arkadiusza Dąbala

Wersja z dnia:

2024-11-08

Contents

1 **Preliminaria** **2**
1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory? 2
1.2 Prawo Ciesielskiego 4

2 **Treść właściwa** **5**
2.1 Metody głosowania (system wyborczy) 5
2.1.1 Metoda zwycięzcy 5
2.1.2 MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie 9

3 **Deser** **18**

1 Preliminaria

1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?

Komentarz
Materiał ten nie ma w żadnym stopniu charakteru politycznego, a wyłącznie charakter matematyczny.

Przykład 1.1
Rozważmy poniższe dane, oparte na 6 partiach, 1000 głosach i 6 mandatów do rozdania:

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	**380**	**190**	**127**	87	3
Gitarzyści	192	**192**	**96**	64		2
Szachiści	180	**180**	90			1
Piłkarze	96	**96**	48			1
Lotniarze	90	90				0
Kolejarze	62	62				0

System ten działa w następujący sposób:

- Liczby głosów dzielone są przez kolejne liczby naturalne dodatnie (tak jak w tabeli).
- Wybierane są z tej tabeli 6 największych liczb (wytłuszczony druk).
- Liczba mandatów zależy od liczby wytłuszczonych liczb w wierszu partii.

Przykład 1.2
Rozważmy tę samą tabelę, ale załóżmy, że partia ***Gitarzyści*** *nie przekroczyła progu* 5%.

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	**380**	**190**	**127**	87	3
~~Gitarzyści~~	~~192~~	~~192~~	~~96~~	~~64~~	—	—
Szachiści	180	**180**	**90**			2
Piłkarze	96	**96**	48			1
Lotniarze	90	**90**				1
Kolejarze	62	62				0

Przykład 1.3
Rozważmy następującą tabelę z 5 mandatami do rozdania:

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	**6000**	**3000**	**2000**	1500	3
Myśliwi	**5700**	**2850**	1900		2
Artyści	1950	975			0

Partia **Rybacy** prowadziła kampanię przeciwko **Myśliwym**, w wyniku czego liczba otrzymanych głosów zmieniła się następująco:

- Partia **Rybacy** zyskała 400 głosów (+400)
- Partia **Myśliwi** straciła 600 głosów (-600)
- Partia **Artyści** zyskała 200 głosów (+200)

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	**6400**	**3200**	2133		3
Myśliwi	**5100**	**2550**	1700		2
Artyści	**2150**	1075			0

Komentarz
Tym oto sposobem partia **Myśliwi** stracili jeden mandat na rzecz partii **Artyści**.

Przykład 1.4
Rozważmy wyniki głosowania dla dwóch partii z 6 mandatami do rozdania.

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	: 5	Mandaty
Matematycy	**1200**	**600**	**400**	**300**	**240**	5
Politycy	**201**	101				1

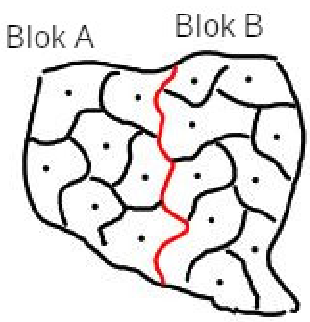
Popatrzmy na głosy bezpośrednio na konkretnych kandydatów z każdej partii:

Nazwa	Głosy
Kwadrat	**201**
Trójkąt	**200**
Stożek	**200**
Walec	**200**
Suma	**200**
Iloczyn	199

Nazwa	Głosy
Magister	**35**
Magistra	34
Urzędnik	33
Urzędas	33
Pani Basia	33
Pan Andrzej	33

Komentarz
Tym oto sposobem mandatu nie otrzymuje **Iloczyn**, mimo że zdobył więcej głosów niż **Magister**.

Przykład 1.5
Rozważmy sytuację, w której państwo jest podzielone na dwa bloki, oba mające po 50% *wpływu na wyniki wyborów. Każdy blok ma przyznać po 4 mandaty.*



W bloku A znajdowały się dwie partie: PZK (Partia Zwolenników Kawy) i PZH (Partia Zwolenników Herbaty), z których każda otrzymała po 25% głosów w ogólnokrajowym głosowaniu. W bloku B znajdowała się partia PZA (Partia Zwolenników Alkoholu) oraz inne partie, które nie przekroczyły progu 5%. Przedstawmy liczbę uzyskanych głosów w PZA:

Nazwa	Głosy
Żubr	**19995**
Żubrówka	**2**
Soplica	**2**
Pan Tadeusz	**1**

Komentarz
I tym oto sposobem wygrywają osoby, które dostają 2 lub 1 głos.

1.2 Prawo Ciesielskiego

Rozważmy głosowanie względem 2 partii z 7 mandatami:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	**1050**	**350**	**210**	150	117	4
Sportowcy	**1008**	**336**	202	144		3

Partia **Sportowcy** postanowiła się rozdzielić na dwie partie i startować osobno:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	**1050**	**350**	**210**	150	117	3
Piłkarze	**504**	**168**	101			2
Siatkarze	**504**	**168**	101			2

Komentarz
Tym oto sposobem partia **Sportowcy** zdobyła większość.

2 Treść właściwa

2.1 Metody głosowania (system wyborczy)

Wprowadźmy kilka oznaczeń, niech:

W - zbiór wszystkich wyborców,
K - zbiór wszystkich kandydatów.

- Ten sam układ głosów (zestaw głosów) daje ten sam wynik (funkcja).
- Każdy układ głosów daje jakiś wynik (może być $\emptyset$).

Definicja 2.1 (Model)
Model to układ głosów (z przyporządkowanymi wyborcami).

Definicja 2.2 (Metoda anonimowa)
Metoda jest anonimowa, wtedy i tylko wtedy (w skrócie: $\Leftrightarrow$), gdy wszyscy wyborcy są traktowani tak samo, $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in W}$ zamiana głosów x i y nie zmienia wyniku.

Komentarz
Alternatywnie, metoda nie jest anonimowa $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in W}$ takie, że zamiana głosów x i y *istotnie* zmienia wynik.

Definicja 2.3 (Metoda neutralna)
Metoda jest neutralna, $\Leftrightarrow$wszyscy kandydaci są traktowani tak samo, $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in K}$ zamiana ról x i y nie zmienia wyniku.

Komentarz
Alternatywnie, metoda nie jest neutralna $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in K}$ takie, że zamiana ról x i y *istotnie* zmienia wynik, dokładniej definiując:
jeśli $\exists k_1, k_2 \in K : W_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_i\}$ głosowali na k_1, a $W_2 = \{w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_j\}$ głosowali na k_2 to jeżeli kandydaci Ci "zamienią się" wyborcami (zbiorami W_1, W_2), to k_1 i k_2 zamienią się wynikami.

Definicja 2.4
Trzy rodzaje metod ze względu na wyniki:

1) Metoda zwycięzcy (MZ) – wybiera zwycięzcę (zwycięzców),

2) Metoda porządkowa (MP) – wynik to słaby porządek na zbiorze K,

3) Metoda rozdziału (MR) – wynik to podział pewnych dóbr między kandydatów.

2.1.1 Metoda zwycięzcy

Definicja 2.5 (Klasyczna metoda zwycięzcy)
Klasyczna metoda zwycięzcy (klasyczna MZ) polega na tym, że każdy wyborca głosuje na dokładnie jednego kandydata. Zbiór

$$\Sigma = \{m : W \to K\}$$

jest zbiorem modeli, gdzie m jest modelem. Klasyczną metodę zwycięzcy możemy opisać funkcją

$$f : \Sigma \to P(K).$$

Definicja 2.6 (Semi-klasyczna metoda zwycięzcy)
Semi-klasyczna MZ polega na tym, że każdy wyborca głosuje na co najmniej jednego kandydata:

$$\Sigma = \{m : W \to P(K) \setminus \emptyset\}.$$

Metodę tę można opisać funkcją

$$f : \Sigma \to P(K).$$

Definicja 2.7 (Metoda efektywna)
Metoda zwycięzcy jest efektywna $\Leftrightarrow$zawsze wyłania przynajmniej jednego zwycięzcę.

Przykład 2.1 (Przykłady metod głosowania)
Metody klasyczne:

1) Dyktatura – $\exists_{p \in W}$: wynik jest tożsamy z głosem p.

2) Monarchia – dany kandydat $k \in K$ wygrywa niezależnie od głosowania.

3) Metoda większości – wygrywa kandydat (lub kandydaci), który(a) otrzymał(a) najwięcej głosów.

4) Metoda bezwzględnej większości – wygrywa kandydat $k \in K$, który otrzymał co najmniej $\lfloor \frac{\#W}{2} \rfloor + 1$ głosów.

5) Metoda super większości – wygrywa kandydat, który uzyskał co najmniej q głosów, gdzie $q > \frac{\#W}{2}$.

6) Metoda status quo – *Założenie:* $\exists$ pewien stan z jednym zwycięzcą.
Głosowanie metodą większości (lub super większości):

   - jeśli metoda daje wynik, zwycięża "nowy" kandydat,
   - jeśli metoda nie daje wyniku, zwycięża dotychczasowy kandydat.

   Przykład: referendum.

7) Metoda większości ważonej – ($W = \{a_1, \dots, a_n\}$), gdzie głos a_i ma wagę $w_i \geq 0$. Wygrywa ten, kto otrzyma ponad $\frac{w_1 + \cdots + w_n}{2}$ punktów.

8) Metoda głosowania blokowego – $W = W_1 \cup \cdots \cup W_n$, gdzie W_k to zbiór wyborców bloku. W_k podejmuje decyzję większością głosów. W przypadku remisu wybierają zwycięzcę w W_k. Głos z W_k ma wagę i_k. Wygrywa kandydat z największą liczbą punktów.

   Metody semi-klasyczne:

9) Metoda n-głosów – każdy wyborca głosuje na n kandydatów, a zwycięża ten, kto uzyska najwięcej głosów.

10) Szeroka metoda n-głosów - każdy głosuje na n kandydatów, ale mamy n zwycięzców (lub więcej w przypadku remisu na ostatnim "wygrywającym" miejscu)

   Metoda ani klasyczna, ani semi-klasyczna:

11) Metoda punktowa – każdy wyborca $w \in W$ ma do rozdysponowania p punktów ($p \in \mathbb{N}$) między kandydatów. Zwycięża kandydat z największą liczbą punktów.

Definicja 2.8 (Metoda decyzyjna)
Metoda zwycięzcy jest decyzyjna $\Leftrightarrow$w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę.

Definicja 2.9 (Metoda prawie decyzyjna)
Metoda zwycięzcy jest prawie decyzyjna $\Leftrightarrow$ *w każdym modelu wyłania co najwyżej jednego zwycięzcę. Sytuacja, w której nie ma zwycięzcy, zachodzi wtedy, gdy więcej niż jeden kandydat uzyskał tę samą, najwyższą liczbę punktów.*

Ćwiczenie 2.1 (Z ćwiczeń)
Zbadaj kto jest zwycięzcą w głosowaniu przez 99 osób na kandydatów: ***Anastazy****,* ***Bermudy****,* ***Cezary****, jeśli otrzymano następujące wyniki metodą porządkową:*

Liczba głosów	Wynik porządkowy
18	ABC
15	ACB
24	BAC
8	BCA
16	CAB
18	CBA

Ćwiczenie 2.2
Dane są wyniki głosowania:

Imię	*Liczba głosów*
Jaś	*100*
Małgosia	*1*

Zrób tak, by Małgosia wygrała.

Ćwiczenie 2.3
Uzupełnij tabelę:

	Anonimowa	*Neutralna*	*Efektywna*
Dyktatura	-	+	+
Monarchia	+	-	+
Metoda Większości	+	+	+

Definicja 2.10 (Kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości)
Metoda zwycięzcy (MZ) spełnia kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat, który otrzyma ponad 50% głosów, jest jedynym zwycięzcą.

Stwierdzenie 2.1
Mamy klasyczną metodę zwycięzcy, taką że $\#K = 2$*, a głosowanie odbywa się według zasady bezwzględnej większości. Wówczas metoda jest prawie decyzyjna.*

Dowód:

1° Załóżmy, że liczba wyborców $\#W$ jest nieparzysta - OK.

2° Liczba wyborców $\#W$ jest parzysta:

- jeden kandydat ma więcej niż 50% głosów - OK.
- remis, czyli obaj mają po 50% - nie ma zwycięzcy (dlatego metoda jest prawie decyzyjna).

$\square$

Stwierdzenie 2.2
Metoda jest decyzyjna $\Rightarrow$ *metoda jest prawie decyzyjna.*

Definicja 2.11 (Metoda monotoniczna ze względu na zwycięzcę)
Z: *MZ - klasyczna lub semi-klasyczna. Metoda jest monotoniczna ze względu na zwycięzcę, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat A jest zwycięzcą, a jeśli wybierzemy kandydata B różnego od A ($B \neq A$) oraz jego grupę wyborców, to jeśli ta grupa zmieni swoje głosy bez straty dla A (czyli zmiana nastąpi zgodnie z następującymi dozwolonymi operacjami):*

M	$\Rightarrow$	N
A B	$\Rightarrow$	A B
- -	$\Rightarrow$	- -
+ +	$\Rightarrow$	+ +
- +	$\Rightarrow$	+ -

to: $\Rightarrow$ A nadal wygrywa.

Komentarz
Czyli, jeżeli ktoś, kto nie głosował na zwycięzcę (A), a głosował na kandydata B, zmieni swój głos na zwycięzcę (A), to (A) nadal wygrywa.

Definicja 2.12 (Metoda kwoty)
MZ klasyczna lub semi-klasyczna jest metodą kwoty (większości kwalifikowanej), wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje q (kwota), taka że liczba głosów o tej własności, że kandydat A jest zwycięzcą wtedy i tylko wtedy, gdy A otrzymał co najmniej q głosów.

Komentarz
Często kwota wyrażana jest w procentach, a wówczas stosuje się nieraz nierówność słabą.

Twierdzenie 2.1 (Maya - Kenneth Maya, 1952r)
Z: *Klasyczna metoda zwycięzcy oraz $\#K = 2$. Jeżeli metoda ta jest metodą:*

(1) anonimową

(2) neutralną

(3) monotoniczną ze względu na zwycięzcę

(4) prawie decyzyjną

$\Rightarrow$ jest metodą bezwzględnej większości.

Dowód: Załóżmy, że A, B to kandydaci.
$\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ interesują nas liczby głosów, które otrzymali kandydaci. Załóżmy:
A - a głosów
B - b głosów
Rozpatrzmy zatem przypadki:

1° $\#W = 2n$ (parzysta), rozważmy dwa podprzypadki:

a) Jeśli $a = n$, $b = n$.
Hipoteza: A wygrywa (analogicznie, jeżeli nie wygrywa B), a metoda jest neutralna, to przy wymianie wyborców $\stackrel{(2)}{\Rightarrow}$ B wygrywa (nie wygrywa A) $\Rightarrow$ A i B wygrywają jednocześnie (nie wygrywa żaden) $\Rightarrow$ co prowadzi do $\lightning$(bo żaden z nich nie ma ponad 50%).

b) Jeśli $a > b$.

Hipoteza: B wygrywa, wtedy $a - b$ wyborców zmienia głosy z A na B, $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ B dalej wygrywa. Teraz B ma a głosów, $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ A wygrywa, $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ A wygrywa i ma ponad połowę głosów.

2° Niech $\#W = 2n + 1$ (nieparzysta).
Niech $a > b$.
Hipoteza: B wygrywa, $a - b$ wyborców zmienia głosy i, jak w 1a), udowadniamy, że B musi mieć ponad połowę głosów.

Tak więc zawsze wygrywa ten, kto ma ponad połowę głosów.

□

2.1.2 MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie

Definicja 2.13 (Metoda zakładająca uporządkowanie)
Metoda zwycięzcy jest metodą zakładającą uporządkowanie (MZU) wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{w \in W}$ ustala K kandydatów w liniowym porządku, a jego głos zależy od tego porządku.

Zapis:

$A \overset{w,m}{<} B$ w modelu m oznacza, że wyborca w stawia B wyżej niż A.
$A \overset{w}{<} B$ - gdy wiadomo, jaki model.

Przykład 2.2

1. *Metoda punktów Bordy (Jean Charles de Borda, 1733–1799, inżynier wojskowy) – Każdy wyborca przydziela punkty od $n - 1$ do 0:*
   1 miejsce - $n - 1$ punktów
   2 miejsce - $n - 2$ punktów
   $\vdots$
   $n - 1$ miejsce - 1 punkt
   n miejsce - 0 punktów

   Zwycięża ten, kto otrzyma największą liczbę punktów.

2. *Metoda Hare'a (Sir Thomas Hare, 1806–1891, Anglia, prawnik, 1857 r.) – Polega na odrzucaniu tego kandydata (tych kandydatów), który ma najmniej pierwszych miejsc, i głosowaniu dalej (listy pozostają z usunięciem odrzuconego kandydata), aż ktoś uzyska ponad 50% głosów. Gdy następuje remis i nie ma kogo odrzucić, wszyscy wygrywają.*

3. *Metoda Coombsa (Clyde Coombs, 1912–1988, USA, psycholog) – Wypisujemy kolejność wyników głosowania, odrzucamy kandydata (lub kandydatów jeżeli ktoś zostanie), który ma najwięcej ostatnich miejsc, i głosujemy dalej, aż ktoś uzyska ponad 50% pierwszych miejsc. Gdy nie można nikogo odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.*

4. *Metoda odrzuceń ostatniego – Jak w metodzie Coombsa, przy czym odrzucamy „do oporu". Gdy nie można nikogo więcej odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.*

   Przykład 2.3
   Różnica między metodą Coombsa a metodą odrzucania ostatniego.

Metoda Coombsa

Liczba:	*4*	*2*	*3*
I pozycja	*C*	***B***	***B***
II pozycja	*A*	*C*	*A*
III pozycja	*B*	*A*	*C*

Wygrywa B, bo ma ponad 50% pierwszych miejsc.

Metoda odrzuceń ostatniego

Liczba:	*4*	*2*	*3*
I pozycja	*C*	*B*	*B*
II pozycja	$\cancel{A}$	*C*	*A*
III pozycja	$\cancel{B}$	$\cancel{A}$	*C*

Kolejność odrzuceń: B, A, C – C wygrywa.

5. *Metoda Copelanda (Arthur H. Copeland, 1898–1970, matematyk) – Porównujemy parami kandydatów. Ten, kto więcej razy zostaje oceniony wyżej, dostaje 1 pkt, a w przypadku remisu obaj dostają po 0,5 pkt.*

   $\#\{m : A \overset{m}{<} B\}$
   $\#\{m : B \overset{m}{<} A\}$

   Decyduje suma punktów (zwycięzców może być więcej niż jeden).

6. *Metoda turniejowa (Z: $\#W = 2n+1$ nieparzysta) – k_1 porównujemy z k_2 (metodą powyżej),a następnie zwycięzcę pierwszego porównania porównujemy z k_3 itd.*

7. *Metoda pozycyjna – Wyborcy przyznają punkty kandydatą w postaci $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$, gdzie $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$. np.*
   1 miejsce – p_1 punktów
   2 miejsce – p_2 punktów
   itd.

   Zwycięża ten z największą liczbą punktów.

UWAGA – w szczególności:
Metoda Bordy: $P(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$
Metoda większości: $P(1, 0, \dots, 0)$
Metoda k głosów: $P(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k \text{ razy}}, 0, \dots, 0)$

Definicja 2.14 (Monotoniczność ze względu na transpozycję)
MZU jest monotoniczna ze względu na transpozycje $\Leftrightarrow \forall_{M-model} \forall_{w \in W} \forall_{A,B \in K}$, jeśli w M głosuje się $[\Delta, B, A, *]$ i w M wygrywa A, to w N, gdzie zmiana polega na $[\Delta, A, B, *]$, również wygrywa A.

Komentarz
Zmiana polega na zamienieniu kolejności uporządkowania A i B. Dodatkowo porządek

ten był na wykładzie zapisany pionowo. $\begin{bmatrix} \Delta \\ A \\ B \\ * \end{bmatrix}$

Umowa: Jeśli nie jest zaznaczone inaczej, to w K, W różne oznaczenia oznaczają różnych kandydatów (wyborców).

Definicja 2.15 (Słaba zasada Pareto)
MZU spełnia słabą zasadę Pareto $\Leftrightarrow \forall_M (\exists_{A,B \in K} \forall_{w \in W} A \overset{w,M}{<} B) \Rightarrow A$ *nie wygrywa w* M.

Definicja 2.16 (Kandydat Condorceta)
$A \in K$ *jest kandydatem Condorceta (zwycięzcą Condorceta)* $\Leftrightarrow$*w "bezpośrednich porównaniach"* A *jest lepszy od każdego innego kandydata* $\Leftrightarrow \forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} > \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}$.

Definicja 2.17 (Przegrany Condorceta)
$A \in K$ *to przegrany Condorceta (w modelu* M*)* $\Leftrightarrow \forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} < \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}$.

Definicja 2.18 (Kryterium Condorceta)
Metoda spełnia kryterium Condorceta $\Leftrightarrow \forall_M$ *: Istnieje kandydat Condorceta (w* M*)* $\Rightarrow A$ *- jedyny zwycięzca w* M.

Definicja 2.19 (Kryterium przegranych Condorceta)
Metoda spełnia kryterium przegranych Condorceta $\Leftrightarrow \forall_M$ *: Istnieje przegrany Condorceta* A *w* $M \Rightarrow A$ *nie wygrywa w* M.

Definicja 2.20 (Metoda jednoznacznie większościowa)
Metoda jest jednoznacznie większościowa $\Leftrightarrow \forall_M$ *kandydat* A *w* M *ma ponad połowę pierwszych miejsc* $\Rightarrow A$ *- jedyny zwycięzca.*

Definicja 2.21 (Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji)
Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji spełnia warunek niezależności porażki od ubocznych opcji (spełnia słaby warunek IIA*)* $\Leftrightarrow$

$$\forall_{A,B \in K} \forall_{M,N-modele} \text{ spełnia } \begin{bmatrix} \forall_{w \in W}(B \overset{w,M}{<} A) \Leftrightarrow (B \overset{w,N}{<} A) \\ A \text{ wygrywa w } M,\ B \text{ nie wygrywa w } M \end{bmatrix} \Rightarrow B \text{ nie wygrywa w } N.$$

Innymi słowy: zmiany nie wpływające na relacje przegrany-zwycięzca nie mogą dać przegrywającemu zwycięstwa.

Twierdzenie 2.2
MZU, anonimowa, neutralna $\Rightarrow$ *metoda nie jest decyzyjna.*

Dowód. Rozważmy $\#K = 2$, $\#W = 2n$ i otrzymane głosy.

Głosy	n	n
1	A	B
2	B	A

Hipoteza: Metoda decyzyjna to np. wygrywa $A \Rightarrow$ wygrywa B ↯
Analogicznie zachodzi dla A.

□

Przykład 2.4 (Paradoks Condorceta)
Rozważmy następującą tabelę:

Głosy	*9*	*10*	*11*
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B

Zachodzi $A > B$, $B > C$, $C > A$. Mamy więc grę w "kamień, papier, nożyce."

Twierdzenie 2.3
MZU spełnia kryterium Condorceta $\Rightarrow$ jest jednoznacznie większościowa.

Dowód. A ma ponad połowę pierwszych miejsc $\Rightarrow$ A - kandydat Condorceta $\Rightarrow$ A jest jedynym zwycięzcą.

□

Twierdzenie 2.4
MZU spełnia słabe IIA, a A spełnia kryterium Condorceta $\Rightarrow$ spełnia słabą zasadę Pareto.

Dowód. Rozważmy M $\forall_W A \overset{w,M}{<} B \overset{?}{\Rightarrow} A$ nie wygrywa w M.

Rozważmy model N: dla każdego wyborcy przesuwamy A i B na szczyt, $[B, A, reszta]$ $A \overset{w,M}{<} B \Leftrightarrow A \overset{w,N}{<} B$.

W N: B jest kandydatem Condorceta.

W N: B jest jedynym zwycięzcą, B wygrywa, A nie wygrywa.

$\overset{\textbf{Słabe IIA}}{\Rightarrow}$ A nie wygrywa w M.

□

Twierdzenie 2.5
MZU, monotoniczna ze względu na transpozycje, $\Leftrightarrow \forall_{M-model} \forall_{A \in K} \forall_{B_1,\ldots,B_n \in A} (A \neq B$, ale może być $B_i = B_j)$ $\forall_{w_1,\ldots,w_n \in W}$ (może być $w_i = w_j$)

Jeżeli w modelu M wygrywa A, to model N utworzony przez $[\Delta, B_i, A, *] \to [\Delta, A, B_i, *]$ dla $i = 1, \ldots, n \Rightarrow$ w N dalej wygrywa A.

Dowód. $\Leftarrow$ oczywiste.
$\Rightarrow$ Stosujemy założenie n razy (robimy n skoków i dalej wygrywa A).

Przykład 2.5

1. Metoda Blacka (1908-1991, ekonomista) - jeśli istnieje kandydat Condorceta, to on wygrywa. Jeśli nie istnieje, stosujemy punkty Bordy.
2. Metoda Condorceta - jeśli istnieje kandydat, który w "bezpośrednim porównaniu" wygrywa lub remisuje z każdym innym $\Leftrightarrow$ on jest zwycięzcą.
3. Metoda nominacji - każdy, kto ma co najmniej jedno pierwsze miejsce, wygrywa.
4. Metoda ostatnich miejsc - każdy, kto nie ma żadnego ostatniego miejsca, wygrywa.
5. Metoda prezydencka - rozważamy dwóch kandydatów z największą liczbą pierwszych miejsc. Porównujemy ich "bezpośrednio". Jeśli na drugim miejscu jest remis, wszyscy z drugiego miejsca "przechodzą do finału" i tam stosujemy metodę Copelanda.

Metoda punktów Bordy jest monotoniczna ze względu na transpozycję.

A wygrywa. Niech A zdobędzie 1 punkt więcej. Innym się nie zwiększyło $\Rightarrow$ A dalej wygrywa.

Metoda	Kryterium Condorceta	Kryterium przegranego Condorceta	Słaba zasada Pareto	Monotoniczność ze względu na transpozycję	IIA	Jednoznaczna większość
Punkty Bordy	-(1)	+	+	+	-(2)	-(1)
Hare'a	-(3)	-(3)	+	-(4)	-(5)	+(O)
Coombsa	-(14)	-(15)	+	-(13)	-(13)	+(O)
Odrzuceń ostatniego	-(11,12)	-(12)	+	-(13)	-(13)	-(11,12)
Copelanda	+	+	+	+	-(10)	+(O)
Większości	-(3)	-(3)	+(O)	+	-(6)	+
Dyktatura	-(7)	-(7)	+	+(O)	+	-(7)
Terminażowa	+	+	-(8)	+	-(9)	+

D1) **Metoda Bordy, Kryterium przegranego Condorceta** $\forall_w A < B$ Punkty $A <$ Punkty B. W punktacji A zdobywa 1 punkt za każdą parę (B, w), w której wyborca w umieszcza B wyżej niż A.

A jest przegranym Condorceta. Mamy k kandydatów, n wyborców, a kandydat $K_1, ..., K_{n-1}$ otrzyma mniej niż $\frac{n}{2}$ punktów. W sumie, A zdobywa mniej niż $\frac{k(k-1)}{2}$ punktów.

Łączna pula punktów do rozdziału wynosi $n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$ (suma ciągu arytmetycznego). Wszyscy razem zdobywają mniej niż $\frac{n(k-1)}{2}$ punktów, czyli łącznie mniej niż $\frac{k \cdot n \cdot (k-1)}{2}$.

D2) **Metoda Comba i Hare'a** Jeśli $\forall_w A \overset{w}{<} B$, to A wcześniej odpadnie od B.

D3) **IIA dyktatura** Jeśli A wygrywa, $B \overset{d,M}{<} A$, to B nie może wygrać.

D4) **Metoda terminarzowa - Kryterium Condorceta** Kandydat Condorceta wygrywa z każdym i nie odda zwycięstwa.

D5) **Terminażowa - monotoniczność** Przy przesunięciu A również wygrywa.

D6) **Metoda Copelanda** Gdy A wygrywa z każdym, to zdobywa maksymalną liczbę punktów. Zasada Pareto: $\forall_w B \overset{w}{<} A \overset{?}{\Rightarrow} B$ nie wygrywa.

Jeśli B wygrywa w pojedynku z C, to również A wygrywa z C. Wówczas punkty $A >$ punkty B, ponieważ A zdobywa punkty za parę (A, B), a zatem punkty A są silniejsze.

D7) **Metoda Coombsa - Słaba zasada Pareto** Jeśli $\forall_w B \overset{w}{<} A$, to A nie odpadnie, zanim B nie odpadnie (czyli B odpadnie wcześniej niż A).

K1)

3os	2os	Pkt
A	B	2
B	C	1
C	A	0

A jest kandydatem Condorceta, natomiast otrzymano punkty: $\begin{bmatrix} A = 6 \text{ pkt} \\ B = 7 \text{ pkt} \\ C = 2 \text{ pkt} \end{bmatrix}$

K2)

1os	2os	2os	Pkt
C	A	B	2
A	B	A	1
B	C	C	0

$\Rightarrow$

1os	2os	2os	Pkt
C	A	B	2
A	B	**C**↑	1
B	C	A	0

, wykorzystując transpozycję otrzymujemy wyniki $\begin{bmatrix} A=5 & & A=7 \\ B=6 & \Rightarrow & B=6 \\ C=4 & & C=2 \end{bmatrix}$, czyli A wygrywa.

K3)

2os	3os	2os
A	B	C
C	A	A
B	C	B

$\begin{bmatrix} A - \text{kandydat Condorceta} \\ B - \text{przegrany Condorceta} \end{bmatrix}$, bo $A : B$ $4:3 \Rightarrow A : C$ $5:2$, ale wygrywa B.

K4)

6os	5os	4os	2os
A	C	B	B
B	A	C	A
C	B	A	C

$\Rightarrow$

6os	5os	4os	2os
A	C	B	**A**↑
B	A	C	B
C	B	A	C

, wygrywał B, po zmianie C.

K5)

2os	1os	2os
B	A	A
A	B	C
C	C	B

B nie wygrywa, A wygrywa $\Rightarrow$

2os	1os	2os
B	A	**C**↑
A	B	A
C	C	B

, wygrywa B

K6)

2os	3os	2os
A	B	A
B	A	C
C	C	B

, A wygrywa, B nie wygrywa $\Rightarrow$

2os	3os	2os
A	B	**C**↑
B	A	A
C	C	B

K7)

2os	1os (w tym jeden dyktator)
A	B
B	A

$\begin{bmatrix} A \text{ - kandydat Condorceta} \\ B \text{ - przegrany Condorceta} \end{bmatrix}$, wygrywa B.

K8) Ustawiamy kolejność: $ABCD$

1os	1os	1os
A	C	B
B	A	D
D	B	C
C	D	A

mamy $\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \\ C > D \end{bmatrix}$, ostatecznie wygrywa D, mimo iż $D < B$.

K9) Ustawiamy kolejność ABC

1os	1os	1os
C	B	A
A	C	B
B	A	C

mamy $\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \end{bmatrix}$, wygrywa $C \Rightarrow$

1os	1os	1os
C	B	B
A	C	**A**↑
B	A	C

, B wygrywa.

K10)

2os	2os	1os	1os
A	C	D	B
D	A	B	C
B	B	C	D
C	D	A	A

otrzymujemy kolejno wyniki: $\begin{bmatrix} \mathbf{A} > B\,(4:2) & \mathbf{B} > C\,(4:2) \\ A < \mathbf{C}\,(2:4) & \mathbf{B} = \mathbf{D}\,(3:3) \\ \mathbf{A} > D\,(4:2) & \mathbf{C} = \mathbf{D}\,(3:3) \end{bmatrix}$, przyznano punkty $\begin{bmatrix} A \text{ -2 pkt} \\ B \text{ -1,5 pkt} \\ C \text{ -1,5 pkt} \\ D \text{ -1 pkt} \end{bmatrix}$, A wygrywa, C nie wygrywa.

Po zmianie:

2os	2os	1os	1os
A	C	D	B
D	A	B	C
↑	B	C	D
B	D	A	A

oraz punktacje: $\begin{bmatrix} A \text{ -2 pkt} \\ B \text{ -0,5 pkt} \\ C \text{ -2,5 pkt} \\ D \text{ -1 pkt} \end{bmatrix}$, C wygrywa.

K11)

4os	2os	3os
C	B	B
A	C	A
B	A	C

B ma najwięcej głosów pierwszych, czyli jest kandydatem Condorceta, ale kolejność odrzuceń to B, A, więc wygrywa C.

K12)

2os	1os	2os
C	B	B
A	C	A
B	A	C

C to przegrany Condorceta, ale C wygrywa.

K13)

5os	4os	1os	2os
A	B	C	B
C	A	B	C
B	C	A	A

, A wygrywa, C i B nie wygrywają.

Przekształcamy do:

5os	4os	1os	2os
A	B	C	B
C	A	B	**A**↑
B	C	A	C

, B wygrywa.

K14)

2os	1os	1os	1os	2os
E	D	A	C	B
A	B	B	B	C
D	A	C	D	A
C	E	E	E	D
B	C	D	A	E

B -kandydat Condorceta, B odpada w I turze

K15)

2os	2os	2os	1os
D	B	C	B
C	D	B	C
A	A	A	D
B	C	D	A

A-przegrany Condorceta, ale A wygrywa

Lemat 2.1 (lemat o decyzyjności)
Z: MZU, efektywna, $\#K \geq 3$, $\#W \geq 2$ Metoda spełnia słabą zasadą Pareto i słabe IIA $\Rightarrow$ jest decyzyjna.

D: Wiemy, że zwyciężca istnieje (chcemy wykazać że jest jedyny) Hp. A,B zwyciężcy w modelu

M oraz $W = X \cup Y$

X	Y
$\dots$	$\dots$
A	B
$\dots$	$\dots$
B	A
$\dots$	$\dots$

C- inny kandydat

model Q

X	Y
A	C
C	B
B	A
$\dots$	$\dots$

Relacje A-B nie są zmienione

Kto wygrywa w Q? Na pewno nie B, bo $\forall_w B \overset{w}{<} C$, A też nie! (z IIA).

Hp. A wygrywa, B nie $\Rightarrow$ w M B nie wygrywa ↯

Zatem wygrywa C.

X	Y
A	B
B	C
C	A
$\dots$	$\dots$

Kto wygrywa w R? - A,B lub C (Pareto) Ale nie wygrywa C (z zasady Pareto)

W R: relacje $A - C$ są takie same jak w Q

Hp. A wygrywa w R $\Rightarrow$ C nie wygrywa w Q

Wobec tego w R wygrywa B.

Porównajmy M i R : relacje $A - B$ w M i R są takie same. Wobec tego IIA $\Rightarrow$ w M A nie wygrywa ↯

$\square$

Twierdzenie 2.6 (Twierdzenie Arrowa dla metod zwycięzcy (1951))
Z: $\#K \geq 3, \#W \geq 2$, MZU, effektywna, spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA $\Rightarrow$ dyktatura.

D: Z lematu o decyzyjności $\Rightarrow$ jeśli zwycięzca istaniej, to jest jedyny.

Jedyny zwyciężca ? (pytamy się) dykatatura

Definicja 2.22 (na potrzeby dowodu)
$w \in W$ - dyktator A z kontrollerem B $\Leftrightarrow$jeśli $A \overset{w}{<} B \Rightarrow$ A nie wygrywa.

I krok

$\forall_{A,B \in K} \exists_{w \in W}$ dyktator nad A z kontrolerem B

II krok

w-dyktator nad A z kandydatem B $\Rightarrow$ w dyktator nad B z kontrolerem A (dyktatora nad parą A, B oznaczamy $d(A, B)$)

III krok

Jeżeli $w = d(A, B) \Rightarrow \forall_{D,E} w = d(D, E)$ (gdzie, D,E może być A lub B)

Wtedy ten w z I - kroku jest dyktatorem.

w
A
B_1
B_2
$\dots$
B_n

Dow. I) C - trzeci kandydat TODO D1 wygrywa C, jeden wyborce przesuwa C do tyłu TODO D2 wygrywa C lub A to samo z trzecim wyborcą TODO D3 wygrywa A lub C itd. aż dojdzie do sytuacji TODO D4 aż wygra A (z zasady Pareto), C nie

Pierwsze przejście, po którym C nie wygrywa (musi takie zaistnieć)

X,Y - grupy wyborców

TODO D5

Pokażemy, że w - dyktator nad B z kontrolerem A.

Rozważmy P - dowlony model, w którym $B \overset{w,P}{<} A$ TODO D6 Kto wygrywa w Q? - A,B lub C. Ale relacje $B - C$ w modelach Q i M1 są takie same $\Rightarrow$ w Q B nie wygrywa (IIA), ale relacje $A - C$ w Q i M2 są takie same $\overset{IIA}{\Rightarrow}$ w Q C nie wygrywa.

W Q wygrywa A, B nie

Relacje A/B w P i Q są takie same. $\Rightarrow$ w P B nie wygrywa.

Dow. II) w - dyktator nad B z konrolerem A, v dyktator nad A z kontrolerem B

TODO D7

wygrywa A lub B (z. Pareto) B nie wygrywa (bo w), A nie wygrywa (bo v) ↯

Dow. III) A,B $w = d(A, B)$ 1.Zauważmy, że $\forall_{D,E} \exists d(D, E)$ 2. $\forall_{D,E} w = d(D, E)$

D 2.1 C, Hp. $v = d(B, C)$, $v \neq w$ TODO D8 Wygrywa B lub C (z. Pareto), B nie (bo w), C nie (bo v)↯

D 2.2 Zmieniamy A i B rolami, $v = d(A, C)$, tak samo pokazujemy, że $w = d(A, C)$.

D 2.3 $\overset{z2.1i2.2}{C} \neq A, B$ $w = d(A, B), w = d(A, C)$ $D \neq A, C$ weźmy rozumowanie z 2.1 i 2.2 dla A,C,D pokazuje,że $w = d(A, C) \Rightarrow w = d(C, D)$

$C, d \neq A, B$ OK jeden z C, D równy A lub B (to 2.1 i 2.2)

□

Wniosek 2.6.1 (Tw Arrowa o niemożliwości)
Z: $\#K \geq 3, \#W \geq 2$ *T: Nie istnieje MZU efektywna, która jednocześnie jest*

- *anonimowa*

- *spełnia słabą zasadę Pareto*

- *spełnia słabe IIA*

Przykład 2.6 (Przykłady wyjątkowe do Tw Arrowa)
1. $\#K = 2, \#wnieparzyste$ *metoda większości decyzyjna*

2. $\#K = 3, \#w = 5$ *Reguła* ≥ 3 *pierwsze miejsca - zwyciężca*

3 Deser

W sumie to deseru jeszcze nie ma, ale ma być na ostatnim wykładzie!!!

Metoda	Anonimowa	Neutralna	Efektywna	Monotoniczna ze względu na transpozycje	Słaba zasada Pareto
Punkty Bordy	+	+	+	+	+
Hare'a	+	+	+	-	+
Coombsa	+	+	+	+	-
Odrzuceń ostatniego	+	+	+	+	-
Copelanda	+	+	+	+	+
Większości	+	+	+	+	+
Dyktatura	+	+	+	+	+
Terminażowa	+	+	+	+	+
Turniejowa	+	+	+	+	+
Pozycyjna	+	+	+	+	+

Metoda	K Condorceta	K Przegranego Condorceta	Jednoznacznie większościowa	Słabo niezależna
Punkty Bordy	+	+	-	+
Hare'a	-	-	+	-
Coombsa	-	+	+	+
Odrzuceń ostatniego	-	+	+	+
Copelanda	+	+	+	+
Większości	+	+	+	+
Dykatatura	+	+	+	+
Terminarzowa	+	+	+	+
Truniejowa	+	+	+	+
Pozycyjna	+	+	-	+