

Matematyczne aspekty wyborów

Na podstawie wykładu
Krzysztofa Ciesielskiego

Skrypt autorstwa
Arkadiusza Dąbala

Wersja z dnia:
2024-10-27

Contents

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Preliminaria | 2 |
| 1.1 | Jak wyglądają aktualnie wybory? | 2 |
| 1.2 | Prawo Ciesielskiego | 4 |
| 2 | Treść właściwa | 5 |
| 2.1 | Metody głosowania (system wyborczy) | 5 |
| 2.1.1 | Metoda zwycięzcy | 5 |
| 2.1.2 | MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie | 9 |
| 3 | Deser | 16 |

1 Preliminaria

1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?

Komentarz

Materiał ten nie ma w żadnym stopniu charakteru politycznego, a wyłącznie charakter matematyczny.

Przykład 1.1

Rozważmy poniższe dane, oparte na 6 partiach, 1000 głosach i 6 mandatów do rozdania:

| Nazwa | Głosy | : 1 | : 2 | : 3 | : 4 | Otrzymane mandaty |
|-------------|-------|------------|------------|------------|-----|-------------------|
| Filateliści | 380 | 380 | 190 | 127 | 87 | 3 |
| Gitarzyści | 192 | 192 | 96 | 64 | | 2 |
| Szachiści | 180 | 180 | 90 | | | 1 |
| Piłkarze | 96 | 96 | 48 | | | 1 |
| Lotniarze | 90 | 90 | | | | 0 |
| Kolejarze | 62 | 62 | | | | 0 |

System ten działa w następujący sposób:

- Liczby głosów dzielone są przez kolejne liczby naturalne dodatnie (tak jak w tabeli).
- Wybierane są z tej tabeli 6 największych liczb (wytluszczone druk).
- Liczba mandatów zależy od liczby wytluszczonych liczb w wierszu partii.

Przykład 1.2

Rozważmy tę samą tabelę, ale założmy, że partia **Gitarzyści** nie przekroczyła progu 5%.

| Nazwa | Głosy | : 1 | : 2 | : 3 | : 4 | Otrzymane mandaty |
|-------------|-------|------------|------------|------------|-----|-------------------|
| Filateliści | 380 | 380 | 190 | 127 | 87 | 3 |
| Gitarzyści | 192 | 192 | 96 | 64 | — | — |
| Szachiści | 180 | 180 | 90 | | | 2 |
| Piłkarze | 96 | 96 | 48 | | | 1 |
| Lotniarze | 90 | 90 | | | | 1 |
| Kolejarze | 62 | 62 | | | | 0 |

Przykład 1.3

Rozważmy następującą tabelę z 5 mandatami do rozdania:

| Nazwa | Głosy : 1 | : 2 | : 3 | : 4 | Mandaty |
|---------|-------------|-------------|-------------|------|---------|
| Rybacy | 6000 | 3000 | 2000 | 1500 | 3 |
| Myśliwi | 5700 | 2850 | 1900 | | 2 |
| Artyści | 1950 | 975 | | | 0 |

Partia **Rybacy** prowadziła kampanię przeciwko **Myśliwym**, w wyniku czego liczba otrzymanych głosów zmieniła się następująco:

- Partia **Rybacy** zyskała 400 głosów (+400)
- Partia **Myśliwi** straciła 600 głosów (-600)
- Partia **Artyści** zyskała 200 głosów (+200)

| Nazwa | Głosy : 1 | : 2 | : 3 | : 4 | Mandaty |
|---------|-------------|-------------|------|-----|---------|
| Rybacy | 6400 | 3200 | 2133 | | 3 |
| Myśliwi | 5100 | 2550 | 1700 | | 2 |
| Artyści | 2150 | 1075 | | | 0 |

Komentarz

Tym oto sposobem partia **Myśliwi** stracili jeden mandat na rzecz partii **Artyści**.

Przykład 1.4

Rozważmy wyniki głosowania dla dwóch partii z 6 mandatami do rozdania.

| Nazwa | Głosy : 1 | : 2 | : 3 | : 4 | : 5 | Mandaty |
|------------|-------------|------------|------------|------------|------------|---------|
| Matematycy | 1200 | 600 | 400 | 300 | 240 | 5 |
| Politycy | 201 | 101 | | | | 1 |

Popatrzmy na głosy bezpośrednio na konkretnych kandydatów z każdej partii:

| Nazwa | Głosy |
|---------|------------|
| Kwadrat | 201 |
| Trójkąt | 200 |
| Stożek | 200 |
| Walec | 200 |
| Suma | 200 |
| Iloczyn | 199 |

| Nazwa | Głosy |
|-------------|-----------|
| Magister | 35 |
| Magistra | 34 |
| Urzędnik | 33 |
| Urzędas | 33 |
| Pani Basia | 33 |
| Pan Andrzej | 33 |

Komentarz

Tym oto sposobem mandatu nie otrzymuje **Iloczyn**, mimo że zdobył więcej głosów niż **Magister**.

Przykład 1.5

Rozważmy sytuację, w której państwo jest podzielone na dwa bloki, oba mające po 50% wpływu na wyniki wyborów. Każdy blok ma przyznać po 4 mandaty.



W bloku A znajdowały się dwie partie: PZK (Partia Zwolenników Kawy) i PZH (Partia Zwolenników Herbaty), z których każda otrzymała po 25% głosów w ogólnokrajowym głosowaniu. W bloku B znajdowała się partia PZA (Partia Zwolenników Alkoholu) oraz inne partie, które nie przekroczyły progu 5%. Przedstawmy liczbę uzyskanych głosów w PZA:

| Nazwa | Głosy |
|-------------|--------------|
| Żubr | 19995 |
| Żubrówka | 2 |
| Soplica | 2 |
| Pan Tadeusz | 1 |

Komentarz

I tym oto sposobem wygrywają osoby, które dostają 2 lub 1 głos.

1.2 Prawo Ciesielskiego

Rozważmy głosowanie względem 2 partii z 7 mandatami:

| Nazwa | Głosy:1 | :3 | :5 | :7 | :9 | Mandaty |
|-----------|-------------|------------|------------|-----|-----|---------|
| Kelnerzy | 1050 | 350 | 210 | 150 | 117 | 4 |
| Sportowcy | 1008 | 336 | 202 | 144 | | 3 |

Partia **Sportowcy** postanowiła się rozdzielić na dwie partie i startować osobno:

| Nazwa | Głosy:1 | :3 | :5 | :7 | :9 | Mandaty |
|-----------|-------------|------------|------------|-----|-----|---------|
| Kelnerzy | 1050 | 350 | 210 | 150 | 117 | 3 |
| Piłkarze | 504 | 168 | 101 | | | 2 |
| Siatkarze | 504 | 168 | 101 | | | 2 |

Komentarz

Tym oto sposobem partia **Sportowcy** zdobyła większość.

2 Treść właściwa

2.1 Metody głosowania (system wyborczy)

Wprowadźmy kilka oznaczeń, niech:

W - zbiór wszystkich wyborców,

K - zbiór wszystkich kandydatów.

- Ten sam układ głosów (zestaw głosów) daje ten sam wynik (funkcja).
- Każdy układ głosów daje jakiś wynik (może być \emptyset).

Definicja 2.1 (Model)

Model to układ głosów (z przyporządkowanymi wyborcami).

Definicja 2.2 (Metoda anonimowa)

Metoda jest anonimowa, wtedy i tylko wtedy (w skrócie: \Leftrightarrow), gdy wszyscy wyborcy są traktowani tak samo, $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in W}$ zamiana głosów x i y nie zmienia wyniku.

Komentarz

Alternatywnie, metoda nie jest anonimowa $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in W}$ takie, że zamiana głosów x i y istotnie zmienia wynik.

Definicja 2.3 (Metoda neutralna)

Metoda jest neutralna, \Leftrightarrow wszyscy kandydaci są traktowani tak samo, $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in K}$ zamiana ról x i y nie zmienia wyniku.

Komentarz

Alternatywnie, metoda nie jest neutralna $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in K}$ takie, że zamiana ról x i y istotnie zmienia wynik, dokładniej definiując:

jeśli $\exists k_1, k_2 \in K : W_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_i\}$ głosowali na k_1 , a $W_2 = \{w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_j\}$ głosowali na k_2 to jeżeli kandydaci Ci "zamieniają się" wyborcami (zbiorami W_1, W_2), to k_1 i k_2 zamieniają się wynikami.

Definicja 2.4

Trzy rodzaje metod ze względu na wyniki:

- 1) Metoda zwycięzcy (MZ) – wybiera zwycięzcę (zwycięzców),
- 2) Metoda porządkowa (MP) – wynik to słaby porządek na zbiorze K ,
- 3) Metoda rozdziału (MR) – wynik to podział pewnych dóbr między kandydatów.

2.1.1 Metoda zwycięzcy

Definicja 2.5 (Klasyczna metoda zwycięzcy)

Klasyczna metoda zwycięzcy (klasyczna MZ) polega na tym, że każdy wyborca głosuje na dokładnie jednego kandydata. Zbiór

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow K\}$$

jest zbiorem modeli, gdzie m jest modelem. Klasyczną metodę zwycięzcy możemy opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

Definicja 2.6 (Semi-klasyczna metoda zwycięzcy)

Semi-klasyczna MZ polega na tym, że każdy wyborca głosuje na co najmniej jednego kandydata:

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow P(K) \setminus \emptyset\}.$$

Metodę tę można opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

Definicja 2.7 (Metoda efektywna)

Metoda zwycięzcy jest efektywna \Leftrightarrow zawsze wyłania przynajmniej jednego zwycięzcę.

Przykład 2.1 (Przykłady metod głosowania)**Metody klasyczne:**

- 1) Dyktatura – $\exists p \in W$: wynik jest tożsamy z głosem p .
- 2) Monarchia – dany kandydat $k \in K$ wygrywa niezależnie od głosowania.
- 3) Metoda większości – wygrywa kandydat (lub kandydaci), który(a) otrzymał(a) najwięcej głosów.
- 4) Metoda bezwzględnej większości – wygrywa kandydat $k \in K$, który otrzymał co najmniej $\lfloor \frac{\#W}{2} \rfloor + 1$ głosów.
- 5) Metoda super większości – wygrywa kandydat, który uzyskał co najmniej q głosów, gdzie $q > \frac{\#W}{2}$.
- 6) Metoda status quo – *Założenie*: \exists pewien stan z jednym zwycięzcą.
Głosowanie metodą większości (lub super większości):
 - jeśli metoda daje wynik, zwycięża "nowy" kandydat,
 - jeśli metoda nie daje wyniku, zwycięża dotychczasowy kandydat.

Przykład: referendum.

- 7) Metoda większości ważonej – ($W = \{a_1, \dots, a_n\}$), gdzie głos a_i ma wagę $w_i \geq 0$. Wygrywa ten, kto otrzyma ponad $\frac{w_1 + \dots + w_n}{2}$ punktów.
- 8) Metoda głosowania blokowego – $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$, gdzie W_k to zbiór wyborców bloku. W_k podejmuje decyzję większością głosów. W przypadku remisu wybierają zwycięzcę w W_k . Głos z W_k ma wagę i_k . Wygrywa kandydat z największą liczbą punktów.

Metody semi-klasyczne:

- 9) Metoda n-głosów – każdy wyborca głosuje na n kandydatów, a zwycięża ten, kto uzyska najwięcej głosów.
- 10) Szeroka metoda n-głosów – każdy głosuje na n kandydatów, ale mamy n zwycięzców (lub więcej w przypadku remisu na ostatnim "wygrywającym" miejscu)

Metoda ani klasyczna, ani semi-klasyczna:

- 11) Metoda punktowa – każdy wyborca $w \in W$ ma do rozdysponowania p punktów ($p \in \mathbb{N}$) między kandydatów. Zwycięża kandydat z największą liczbą punktów.

Definicja 2.8 (Metoda decyzyjna)

Metoda zwycięzcy jest decyzyjna \Leftrightarrow w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę.

Definicja 2.9 (Metoda prawie decyzyjna)

Metoda zwycięzcy jest prawie decyzyjna \Leftrightarrow w każdym modelu wyłania co najwyżej jednego zwycięzcę. Sytuacja, w której nie ma zwycięzcy, zachodzi wtedy, gdy więcej niż jeden kandydat uzyskał tę samą, najwyższą liczbę punktów.

Ćwiczenie 2.1 (Z ćwiczeń)

Zbadaj kto jest zwycięzcą w głosowaniu przez 99 osób na kandydatów: **Anastazy, Bermudy, Cezary**, jeśli otrzymano następujące wyniki metodą porządkową:

| Liczba głosów | Wynik porządkowy |
|---------------|------------------|
| 18 | ABC |
| 15 | ACB |
| 24 | BAC |
| 8 | BCA |
| 16 | CAB |
| 18 | CBA |

Ćwiczenie 2.2

Dane są wyniki głosowania:

| Imię | Liczba głosów |
|----------|---------------|
| Jaś | 100 |
| Małgosia | 1 |

Zrób tak, by Małgosia wygrała.

Ćwiczenie 2.3

Uzupełnij tabelę:

| | Anonimowa | Neutralna | Efektywna |
|-------------------|-----------|-----------|-----------|
| Dyktatura | - | + | + |
| Monarchia | + | - | + |
| Metoda Większości | + | + | + |

Definicja 2.10 (Kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości)

Metoda zwycięzcy (MZ) spełnia kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat, który otrzyma ponad 50% głosów, jest jedynym zwycięzcą.

Stwierdzenie 2.1

Mamy klasyczną metodę zwycięzcy, taką że $\#K = 2$, a głosowanie odbywa się według zasady bezwzględnej większości. Wówczas metoda jest prawie decyzyjna.

Dowód:

1° Załóżmy, że liczba wyborców $\#W$ jest nieparzysta - OK.

2° Liczba wyborców $\#W$ jest parzysta:

- jeden kandydat ma więcej niż 50% głosów - OK.
- remis, czyli obaj mają po 50% - nie ma zwycięzcy (dlatego metoda jest prawie decyzyjna).

□

Stwierdzenie 2.2

Metoda jest decyzyjna \Rightarrow metoda jest prawie decyzyjna.

Definicja 2.11 (Metoda monotoniczna ze względu na zwycięzcę)

Z: MZ - klasyczna lub semi-klasyczna. Metoda jest monotoniczna ze względu na zwycięzcę, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat A jest zwycięzcą, a jeśli wybierzemy kandydata B różnego od A ($B \neq A$) oraz jego grupę wyborców, to jeśli ta grupa zmieni swoje głosy bez straty dla A (czyli zmiana nastąpi zgodnie z następującymi dozwolonymi operacjami):

| | | |
|---------|---------------|---------|
| M | \Rightarrow | N |
| $A \ B$ | \Rightarrow | $A \ B$ |
| $- \ -$ | \Rightarrow | $- \ -$ |
| $+ \ +$ | \Rightarrow | $+ \ +$ |
| $- \ +$ | \Rightarrow | $+ \ -$ |

to: $\Rightarrow A$ nadal wygrywa.

Komentarz

Czyli, jeżeli ktoś, kto nie głosował na zwycięzcę (A), a głosował na kandydata B , zmieni swój głos na zwycięzcę (A), to (A) nadal wygrywa.

Definicja 2.12 (Metoda kwoty)

MZ klasyczna lub semi-klasyczna jest metodą kwoty (większości kwalifikowanej), wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje q (kwota), taka że liczba głosów o tej własności, że kandydat A jest zwycięzcą wtedy i tylko wtedy, gdy A otrzymał co najmniej q głosów.

Komentarz

Często kwota wyrażana jest w procentach, a wówczas stosuje się nieraz nierówność słabą.

Twierdzenie 2.1 (Maya - Kenneth Maya, 1952r)

Z: Klasyczna metoda zwycięzcy oraz $\#K = 2$. Jeżeli metoda ta jest metodą:

- (1) anonimową
- (2) neutralną
- (3) monotoniczną ze względu na zwycięzcę
- (4) prawie decyzyjną

\Rightarrow jest metodą bezwzględnej większości.

Dowód: Załóżmy, że A, B to kandydaci.

$\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ interesują nas liczby głosów, które otrzymali kandydaci. Załóżmy:

A - a głosów

B - b głosów

Rozpatrzmy zatem przypadki:

1° $\#W = 2n$ (parzysta), rozważmy dwa podprzypadki:

a) Jeśli $a = n, b = n$.

Hipoteza: A wygrywa (analogicznie, jeżeli nie wygrywa B), a metoda jest neutralna, to przy wymianie wyborców $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} B$ wygrywa (nie wygrywa A) $\Rightarrow A$ i B wygrywają jednocześnie (nie wygrywa żaden) \Rightarrow co prowadzi do \blacksquare (bo żaden z nich nie ma ponad 50%).

b) Jeśli $a > b$.

Hipoteza: B wygrywa, wtedy $a - b$ wyborców zmienia głosy z A na B , $\stackrel{(3)}{\Rightarrow} B$ dalej wygrywa. Teraz B ma a głosów, $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} A$ wygrywa, $\stackrel{(4)}{\Rightarrow} A$ wygrywa i ma ponad połowę głosów.

2° Niech $\#W = 2n + 1$ (nieparzysta).

Niech $a > b$.

Hipoteza: B wygrywa, $a - b$ wyborców zmienia głosy i, jak w 1a), udowadniamy, że B musi mieć ponad połowę głosów.

Tak więc zawsze wygrywa ten, kto ma ponad połowę głosów.

□

2.1.2 MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie

Definicja 2.13 (Metoda zakładająca uporządkowanie)

Metoda zwycięzcy jest metodą zakładającą uporządkowanie (MZU) wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall w \in W$ ustala K kandydatów w liniowym porządku, a jego głos zależy od tego porządku.

Zapis:

$A \overset{w,m}{<} B$ w modelu m oznacza, że wyborca w stawia B wyżej niż A .

$A \overset{w}{<} B$ - gdy wiadomo, jaki model.

Przykład 2.2

1. Metoda punktów Bordy (Jean Charles de Borda, 1733–1799, inżynier wojskowy) – Każdy wyborca przydziela punkty od $n - 1$ do 0:

1 miejsce - $n - 1$ punktów

2 miejsce - $n - 2$ punktów

⋮

$n - 1$ miejsce - 1 punkt

n miejsce - 0 punktów

Zwycięża ten, kto otrzyma największą liczbę punktów.

2. Metoda Hare'a (Sir Thomas Hare, 1806–1891, Anglia, prawnik, 1857 r.) – Polega na odrzucaniu tego kandydata (tych kandydatów), który ma najmniej pierwszych miejsc, i głosowaniu dalej (listy pozostają z usunięciem odrzuconego kandydata), aż ktoś uzyska ponad 50% głosów. Gdy następuje remis i nie ma kogo odrzucić, wszyscy wygrywają.

3. Metoda Coombsa (Clyde Coombs, 1912–1988, USA, psycholog) – Wypisujemy kolejność wyników głosowania, odrzucamy kandydata, który ma najwięcej ostatnich miejsc, i głosujemy dalej, aż ktoś uzyska ponad 50% pierwszych miejsc. Gdy nie można nikogo odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.

4. Metoda odrzuceń ostatniego – Jak w metodzie Coombsa, przy czym odrzucamy „do oporu”. Gdy nie można nikogo więcej odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.

Przykład 2.3

Różnica między metodą Coombsa a metodą odrzucania ostatniego.

Metoda Coombsa

| | | | |
|-------------|---|----------|----------|
| Liczba: | 4 | 2 | 3 |
| I pozycja | C | B | B |
| II pozycja | A | C | A |
| III pozycja | B | A | C |

Wygrywa B, bo ma ponad 50% pierwszych miejsc.

Metoda odrzuceń ostatniego

| | | | |
|-------------|--------------|--------------|---|
| Liczba: | 4 | 2 | 3 |
| I pozycja | C | B | B |
| II pozycja | A | C | A |
| III pozycja | B | A | C |

Kolejność odrzuceń: B, A, C – C wygrywa.

5. Metoda Copelanda (Arthur H. Copeland, 1898–1970, matematyk) – Porównujemy parami kandydatów. Ten, kto więcej razy zostaje oceniony wyżej, dostaje 1 pkt, a w przypadku remisu obaj dostają po 0,5 pkt.

$$\#\{m : A \overset{m}{<} B\}$$

$$\#\{m : B \overset{m}{<} A\}$$

Decyduje suma punktów (zwycięzców może być więcej niż jeden).

6. Metoda turniejowa ($Z: \#W = 2n+1$ nieparzysta) – k_1 porównujemy z k_2 (metodą powyżej), a następnie zwycięzcę pierwszego porównania porównujemy z k_3 itd.
7. Metoda pozycyjna – Wyborcy przyznają punkty kandydatą w postaci $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$, gdzie $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$. np.
 1 miejsce – p_1 punktów
 2 miejsce – p_2 punktów
 itd.

Zwycięża ten z największą liczbą punktów.

UWAGA – w szczególności:

Metoda Bordy: $P(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$

Metoda większości: $P(1, 0, \dots, 0)$

Metoda k głosów: $P(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$
 k razy

Definicja 2.14 (Monotoniczność ze względu na transpozycję)

MZU jest monotoniczna ze względu na transpozycje $\Leftrightarrow \forall_{M-\text{model}} \forall_{w \in W} \forall_{A, B \in K}$, jeśli w M głosuje się $[\Delta, B, A, *]$ i w M wygrywa A , to w N , gdzie zmiana polega na $[\Delta, A, B, *]$, również wygrywa A .

Komentarz

Zmiana polega na zamienieniu kolejności uporządkowania A i B . Dodatkowo porządek

ten był na wykładzie zapisany pionowo.

$$\begin{bmatrix} \Delta \\ A \\ B \\ * \end{bmatrix}$$

Umowa: Jeśli nie jest zaznaczone inaczej, to w K, W różne oznaczenia oznaczają różnych kandydatów (wyborców).

Definicja 2.15 (Słaba zasada Pareto)

MZU spełnia słabą zasadę Pareto $\Leftrightarrow \forall_M (\exists_{A,B \in K} \forall_{w \in W} A \overset{w,M}{<} B) \Rightarrow A$ nie wygrywa w M .

Definicja 2.16 (Kandydat Condorceta)

$A \in K$ jest kandydatem Condorceta (zwycięzcą Condorceta) \Leftrightarrow w "bezpośrednich porównaniach"

A jest lepszy od każdego innego kandydata $\Leftrightarrow \forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} > \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}$.

Definicja 2.17 (Przegraný Condorceta)

$A \in K$ to przegrany Condorceta (w modelu M) $\Leftrightarrow \forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} < \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}$.

Definicja 2.18 (Kryterium Condorceta)

Metoda spełnia kryterium Condorceta $\Leftrightarrow \forall_M : \text{Istnieje kandydat Condorceta (w } M) \Rightarrow A$ - jedyny zwycięzca w M .

Definicja 2.19 (Kryterium przegranych Condorceta)

Metoda spełnia kryterium przegranych Condorceta $\Leftrightarrow \forall_M : \text{Istnieje przegrany Condorceta } A \text{ w } M \Rightarrow A$ nie wygrywa w M .

Definicja 2.20 (Metoda jednoznacznie większościowa)

Metoda jest jednoznacznie większościowa $\Leftrightarrow \forall_M$ kandydat A w M ma ponad połowę pierwszych miejsc $\Rightarrow A$ - jedyny zwycięzca.

Definicja 2.21 (Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji)

Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji spełnia warunek niezależności porażki od ubocznych opcji (spełnia słaby warunek IIA) \Leftrightarrow

$$\forall_{A,B \in K} \forall_{M,N - \text{modele}} \text{spełnia} \left[\begin{array}{l} \forall_{w \in W} (B \overset{w,M}{<} A \Leftrightarrow (B \overset{w,N}{<} A)) \\ A \text{ wygrywa w } M, B \text{ nie wygrywa w } M \end{array} \right] \Rightarrow B \text{ nie wygrywa w } N.$$

Innymi słowy: zmiany nie wpływające na relacje przegrany-zwycięzca nie mogą dać przegrywającemu zwycięstwa.

Twierdzenie 2.2

MZU, anonimowa, neutralna \Rightarrow metoda nie jest decyzyjna.

Dowód. Rozważmy $\#K = 2, \#W = 2n$ i otrzymane głosy.

| Głosy | n | n |
|-------|---|---|
| 1 | A | B |
| 2 | B | A |

Hipoteza: Metoda decyzyjna to np. wygrywa $A \Rightarrow$ wygrywa B ⚡

Analogicznie zachodzi dla A .

□

Przykład 2.4 (Paradoks Condorceta)

Rozważmy następującą tabelę:

| Głosy | 9 | 10 | 11 |
|-------|---|----|----|
| 1 | A | B | C |
| 2 | B | C | A |
| 3 | C | A | B |

Zachodzi $A > B$, $B > C$, $C > A$. Mamy więc grę w "kamień, papier, nożyce."

Twierdzenie 2.3

MZU spełnia kryterium Condorceta \Rightarrow jest jednoznacznie większościowa.

Dowód. A ma ponad połowę pierwszych miejsc \Rightarrow A - kandydat Condorceta \Rightarrow A jest jedynym zwycięzcą.

□

Twierdzenie 2.4

MZU spełnia słabe IIA, a A spełnia kryterium Condorceta \Rightarrow spełnia słabą zasadę Pareto.

Dowód. Rozważmy $M \forall_W A \overset{w,M}{<} B \overset{?}{\Rightarrow} A$ nie wygrywa w M .

Rozważmy model N : dla każdego wyborcy przesuwamy A i B na szczyt, $[B, A, reszta]$

$A \overset{w,M}{<} B \Leftrightarrow A \overset{w,N}{<} B$.

W N : B jest kandydatem Condorceta.

W N : B jest jedynym zwycięzcą, B wygrywa, A nie wygrywa.

Słabe IIA \Rightarrow A nie wygrywa w M .

□

Twierdzenie 2.5

MZU, monotoniczna ze względu na transpozycje, $\Leftrightarrow \forall_{M-model} \forall_{A \in K} \forall_{B_1, \dots, B_n \in A} (A \neq B, \text{ ale może być } B_i = B_j) \forall_{w_1, \dots, w_n \in W} (\text{może być } w_i = w_j)$

Jeżeli w modelu M wygrywa A , to model N utworzony przez $[\Delta, B_i, A, *] \rightarrow [\Delta, A, B_i, *]$ dla $i = 1, \dots, n \Rightarrow$ w N dalej wygrywa A .

Dowód. \Leftarrow oczywiste.

\Rightarrow Stosujemy założenie n razy (robimy n skoków i dalej wygrywa A).

Przykład 2.5

1. Metoda Blacka (1908-1991, ekonomista) - jeśli istnieje kandydat Condorceta, to on wygrywa. Jeśli nie istnieje, stosujemy punkty Bordy.
2. Metoda Condorceta - jeśli istnieje kandydat, który w "bezpośrednim porównaniu" wygrywa lub remisuje z każdym innym \Leftrightarrow on jest zwycięzcą.
3. Metoda nominacji - każdy, kto ma co najmniej jedno pierwsze miejsce, wygrywa.
4. Metoda ostatnich miejsc - każdy, kto nie ma żadnego ostatniego miejsca, wygrywa.
5. Metoda prezydencka - rozważamy dwóch kandydatów z największą liczbą pierwszych miejsc. Porównujemy ich "bezpośrednio". Jeśli na drugim miejscu jest remis, wszyscy z drugiego miejsca "przechodzą do finału" i tam stosujemy metodę Copelanda.

Metoda punktów Bordy jest monotoniczna ze względu na transpozycję.

A wygrywa. Niech A zdobędzie 1 punkt więcej. Innym się nie zwiększyło $\Rightarrow A$ dalej wygrywa.

| Metoda | Kryterium Condorceta | Kryterium przegranego Condorceta | Słaba zasada Pareto | Monotoniczność ze względu na transpozycję | IIA | Jednoznaczna większość |
|---------------------|----------------------|----------------------------------|---------------------|---|-------|------------------------|
| Punkty Bordy | -(1) | + | + | + | -(2) | -(1) |
| Hare'a | -(3) | -(3) | + | -(4) | -(5) | +(O) |
| Coombsa | - | - | + | -(13) | -(13) | +(O) |
| Odrzuceń ostatniego | -(11,12) | -(12) | + | -(13) | -(13) | -(11,12) |
| Copelanda | + | + | + | + | -(10) | +(O) |
| Większości | -(3) | -(3) | +(O) | + | -(6) | + |
| Dyktatura | -(7) | -(7) | + | +(O) | + | -(7) |
| Terminażowa | + | + | -(8) | + | -(9) | + |

D1) **Metoda Bordy, Kryterium przegranego Condorceta** $\forall_w A < B$ Punkty $A <$ Punkty B . W punktacji A zdobywa 1 punkt za każdą parę (B, w) , w której wyborca w umieszcza B wyżej niż A .

A jest przegranym Condorceta. Mamy k kandydatów, n wyborców, a kandydat K_1, \dots, K_{n-1} otrzyma mniej niż $\frac{n}{2}$ punktów. W sumie, A zdobywa mniej niż $\frac{k(k-1)}{2}$ punktów.

Łączna pula punktów do rozdziału wynosi $n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$ (suma ciągu arytmetycznego). Wszyscy razem zdobywają mniej niż $\frac{n(k-1)}{2}$ punktów, czyli łącznie mniej niż $\frac{k \cdot n \cdot (k-1)}{2}$.

D2) **Metoda Comba i Hare'a** Jeśli $\forall_w A \overset{w}{<} B$, to A wcześniej odpadnie od B .

D3) **IIA dyktatura** Jeśli A wygrywa, $B \overset{d,M}{<} A$, to B nie może wygrać.

D4) **Metoda terminarzowa - Kryterium Condorceta** Kandydat Condorceta wygrywa z każdym i nie odda zwycięstwa.

D5) **Terminażowa - monotoniczność** Przy przesunięciu A również wygrywa.

D6) **Metoda Copelanda** Gdy A wygrywa z każdym, to zdobywa maksymalną liczbę punktów. Zasada Pareto: $\forall_w B \overset{w}{<} A \overset{?}{\Rightarrow} B$ nie wygrywa.

Jeśli B wygrywa w pojedynku z C , to również A wygrywa z C . Wówczas punkty $A >$ punkty B , ponieważ A zdobywa punkty za parę (A, B) , a zatem punkty A są silniejsze.

D7) **Metoda Coombsa - Słaba zasada Pareto** Jeśli $\forall_w B \overset{w}{<} A$, to A nie odpadnie, zanim B nie odpadnie (czyli B odpadnie wcześniej niż A).

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|---|---|
| K1) | 3os | 2os | Pkt | A jest kandydatem Condorceta, natomiast otrzymano punkty: | $\begin{bmatrix} A = 6 \text{ pkt} \\ B = 7 \text{ pkt} \\ C = 2 \text{ pkt} \end{bmatrix}$ |
| | A | B | 2 | | |
| | B | C | 1 | | |
| | C | A | 0 | | |

K2)

| 1os | 2os | 2os | Pkt |
|-----|-----|-----|-----|
| C | A | B | 2 |
| A | B | A | 1 |
| B | C | C | 0 |

 \Rightarrow

| 1os | 2os | 2os | Pkt |
|-----|-----|------------|-----|
| C | A | B | 2 |
| A | B | C ↑ | 1 |
| B | C | A | 0 |

, wykorzystując transpozycję otrzymujemy wyniki $\begin{bmatrix} A = 5 \\ B = 6 \\ C = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A = 7 \\ B = 6 \\ C = 2 \end{bmatrix}$, czyli **A** wygrywa.

K3)

| 2os | 3os | 2os |
|-----|-----|-----|
| A | B | C |
| C | A | A |
| B | C | B |

 $\begin{bmatrix} A - \text{kandydat Condorceta} \\ B - \text{przeegrany Condorceta} \end{bmatrix}$, bo $A : B \ 4 : 3 \Rightarrow A : C \ 5 : 2$, ale wygrywa **B**.

K4)

| 6os | 5os | 4os | 2os |
|-----|-----|-----|-----|
| A | C | B | B |
| B | A | C | A |
| C | B | A | C |

 \Rightarrow

| 6os | 5os | 4os | 2os |
|-----|-----|-----|------------|
| A | C | B | A ↑ |
| B | A | C | B |
| C | B | A | C |

, wygrywał **B**, po zmianie **C**.

K5)

| 2os | 1os | 2os |
|-----|-----|-----|
| B | A | A |
| A | B | C |
| C | C | B |

 B nie wygrywa, A wygrywa \Rightarrow

| 2os | 1os | 2os |
|-----|-----|------------|
| B | A | C ↑ |
| A | B | A |
| C | C | B |

, wygrywa **B**

K6)

| 2os | 3os | 2os |
|-----|-----|-----|
| A | B | A |
| B | A | C |
| C | C | B |

, A wygrywa, B nie wygrywa \Rightarrow

| 2os | 3os | 2os |
|-----|-----|------------|
| A | B | C ↑ |
| B | A | A |
| C | C | B |

K7)

| 2os | 1os (w tym jeden dyktator) |
|-----|----------------------------|
| A | B |
| B | A |

 $\begin{bmatrix} A - \text{kandydat Condorceta} \\ B - \text{przeegrany Condorceta} \end{bmatrix}$, wygrywa **B**.

K8) Ustawiamy kolejność: $ABCD$

| 1os | 1os | 1os |
|-----|-----|-----|
| A | C | B |
| B | A | D |
| D | B | C |
| C | D | A |

 mamy $\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \\ C > D \end{bmatrix}$, ostatecznie wygrywa **D**,
mimo iż $D < B$.

K9) Ustawiamy kolejność ABC

| 1os | 1os | 1os |
|-----|-----|-----|
| C | B | A |
| A | C | B |
| B | A | C |

 mamy $\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \end{bmatrix}$, wygrywa **C** \Rightarrow

| 1os | 1os | 1os |
|-----|-----|------------|
| C | B | B |
| A | C | A ↑ |
| B | A | C |

,
B wygrywa.

K10)

| 2os | 2os | 1os | 1os |
|-----|-----|-----|-----|
| A | C | D | B |
| D | A | B | C |
| B | B | C | D |
| C | D | A | A |

 otrzymujemy kolejno wyniki: $\begin{bmatrix} \mathbf{A} > B \ (4 : 2) & \mathbf{B} > C \ (4 : 2) \\ A < \mathbf{C} \ (2 : 4) & \mathbf{B} = \mathbf{D} \ (3 : 3) \\ \mathbf{A} > D \ (4 : 2) & \mathbf{C} = \mathbf{D} \ (3 : 3) \end{bmatrix}$, przyz-

nano punkty $\begin{bmatrix} A -2 \text{ pkt} \\ B -1,5 \text{ pkt} \\ C -1,5 \text{ pkt} \\ D -1 \text{ pkt} \end{bmatrix}$, A wygrywa, C nie wygrywa.

Po zmianie:

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| 2os | 2os | 1os | 1os |
| A | C | D | B |
| D | A | B | C |
| ↑ | B | C | D |
| B | D | A | A |

oraz punktacje: $\begin{bmatrix} A -2 \text{ pkt} \\ B -0,5 \text{ pkt} \\ C -2,5 \text{ pkt} \\ D -1 \text{ pkt} \end{bmatrix}$, C wygrywa.

K11)

| | | |
|-----|-----|-----|
| 4os | 2os | 3os |
| C | B | B |
| A | C | A |
| B | A | C |

B ma najwięcej głosów pierwszych, czyli jest kandydatem Condorceta,
ale kolejność odrzuceń to B , A , więc wygrywa C .

K12)

| | | |
|-----|-----|-----|
| 2os | 1os | 2os |
| C | B | B |
| A | C | A |
| B | A | C |

C to przegrany Condorceta, ale C wygrywa.

K13)

| | | | |
|-----|-----|-----|-----|
| 5os | 4os | 1os | 2os |
| A | B | C | B |
| C | A | B | C |
| B | C | A | A |

, A wygrywa, C i B nie wygrywają.

Przekształcamy do:

| | | | |
|-----|-----|-----|------------|
| 5os | 4os | 1os | 2os |
| A | B | C | B |
| C | A | B | A ↑ |
| B | C | A | C |

, B wygrywa.

3 Deser

W sumie to deseru jeszcze nie ma, ale ma być na ostatnim wykładzie!!!

| Metoda | Anonimowa | Neutralna | Efektywna | Monotoniczna ze względu na transpozycje | Słaba za- sada Pareto |
|---------------------|-----------|-----------|-----------|---|--------------------------------|
| Punkty Bordy | + | + | + | + | + |
| Hare'a | + | + | + | - | + |
| Coombsa | + | + | + | + | - |
| Odrzuceń ostatniego | + | + | + | + | - |
| Copelanda | + | + | + | + | + |
| Większości | + | + | + | + | + |
| Dyktatura | + | + | + | + | + |
| Terminażowa | + | + | + | + | + |
| Turniejowa | + | + | + | + | + |
| Pozycyjna | + | + | + | + | + |

| Metoda | K Condorceta | K Przegranego Condorceta | Jednoznacznie większościowa | Słabo niezależna |
|---------------------|--------------|-----------------------------|--------------------------------|------------------|
| Punkty Bordy | + | + | - | + |
| Hare'a | - | - | + | - |
| Coombsa | - | + | + | + |
| Odrzuceń ostatniego | - | + | + | + |
| Copelanda | + | + | + | + |
| Większości | + | + | + | + |
| Dyktatura | + | + | + | + |
| Terminarzowa | + | + | + | + |
| Turniejowa | + | + | + | + |
| Pozycyjna | + | + | - | + |

