

# Matematyczne aspekty wyborów

Na podstawie wykładu  
Krzysztofa Ciesielskiego

Skrypt autorstwa  
Arkadiusza Dąbala

Wersja z dnia:  
2024-12-02

# Contents

<b>1 Preliminaria</b>	<b>2</b>
1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory? . . . . .	2
1.2 Prawo Ciesielskiego . . . . .	4
<b>2 Treść właściwa</b>	<b>5</b>
2.1 Metody głosowania (system wyborczy) . . . . .	5
2.1.1 Metoda zwycięzcy . . . . .	5
2.1.2 MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie . . . . .	9
2.1.3 Metoda TAK/NIE . . . . .	19
2.1.4 Metody porządkowe . . . . .	22
<b>3 Deser</b>	<b>26</b>

# 1 Preliminaria

## 1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?

### Komentarz

Materiał ten nie ma w żadnym stopniu charakteru politycznego, a wyłącznie charakter matematyczny.

### Przykład 1.1

Rozważmy poniższe dane, oparte na 6 partiach, 1000 głosach i 6 mandatów do rozdania:

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	<b>380</b>	<b>190</b>	<b>127</b>	87	3
Gitarzyści	192	<b>192</b>	<b>96</b>	64		2
Szachiści	180	<b>180</b>	90			1
Piłkarze	96	<b>96</b>	48			1
Lotniarze	90	90				0
Kolejarze	62	62				0

System ten działa w następujący sposób:

- Liczby głosów dzielone są przez kolejne liczby naturalne dodatnie (tak jak w tabeli).
- Wybierane są z tej tabeli 6 największych liczb (wytluszczone druk).
- Liczba mandatów zależy od liczby wytluszczonych liczb w wierszu partii.

### Przykład 1.2

Rozważmy tę samą tabelę, ale założmy, że partia **Gitarzyści** nie przekroczyła progu 5%.

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	<b>380</b>	<b>190</b>	<b>127</b>	87	3
Gitarzyści	192	192	96	64	—	—
Szachiści	180	<b>180</b>	<b>90</b>			2
Piłkarze	96	<b>96</b>	48			1
Lotniarze	90	<b>90</b>				1
Kolejarze	62	62				0

### Przykład 1.3

Rozważmy następującą tabelę z 5 mandatami do rozdania:

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	<b>6000</b>	<b>3000</b>	<b>2000</b>	1500	3
Myśliwi	<b>5700</b>	<b>2850</b>	1900		2
Artyści	1950	975			0

Partia **Rybacy** prowadziła kampanię przeciwko **Myśliwym**, w wyniku czego liczba otrzymanych głosów zmieniła się następująco:

- Partia **Rybacy** zyskała 400 głosów (+400)
- Partia **Myśliwi** straciła 600 głosów (-600)
- Partia **Artyści** zyskała 200 głosów (+200)

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	<b>6400</b>	<b>3200</b>	2133		3
Myśliwi	<b>5100</b>	<b>2550</b>	1700		2
Artyści	<b>2150</b>	1075			0

#### Komentarz

Tym oto sposobem partia **Myśliwi** stracili jeden mandat na rzecz partii **Artyści**.

#### Przykład 1.4

Rozważmy wyniki głosowania dla dwóch partii z 6 mandatami do rozdania.

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	: 5	Mandaty
Matematycy	<b>1200</b>	<b>600</b>	<b>400</b>	<b>300</b>	<b>240</b>	5
Politycy	<b>201</b>	101				1

Popatrzmy na głosy bezpośrednio na konkretnych kandydatów z każdej partii:

Nazwa	Głosy
Kwadrat	<b>201</b>
Trójkąt	<b>200</b>
Stożek	<b>200</b>
Walec	<b>200</b>
Suma	<b>200</b>
Iloczyn	199

Nazwa	Głosy
Magister	<b>35</b>
Magistra	34
Urzędnik	33
Urzędas	33
Pani Basia	33
Pan Andrzej	33

#### Komentarz

Tym oto sposobem mandatu nie otrzymuje **Iloczyn**, mimo że zdobył więcej głosów niż **Magister**.

#### Przykład 1.5

Rozważmy sytuację, w której państwo jest podzielone na dwa bloki, oba mające po 50% wpływu na wyniki wyborów. Każdy blok ma przyznać po 4 mandaty.



W bloku A znajdowały się dwie partie: PZK (Partia Zwolenników Kawy) i PZH (Partia Zwolenników Herbaty), z których każda otrzymała po 25% głosów w ogólnokrajowym głosowaniu. W bloku B znajdowała się partia PZA (Partia Zwolenników Alkoholu) oraz inne partie, które nie przekroczyły progu 5%. Przedstawmy liczbę uzyskanych głosów w PZA:

Nazwa	Głosy
Żubr	<b>19995</b>
Żubrówka	<b>2</b>
Soplica	<b>2</b>
Pan Tadeusz	<b>1</b>

### Komentarz

I tym oto sposobem wygrywają osoby, które dostają 2 lub 1 głos.

## 1.2 Prawo Ciesielskiego

Rozważmy głosowanie względem 2 partii z 7 mandatami:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	<b>1050</b>	<b>350</b>	<b>210</b>	150	117	4
Sportowcy	<b>1008</b>	<b>336</b>	202	144		3

Partia **Sportowcy** postanowiła się rozdzielić na dwie partie i startować osobno:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	<b>1050</b>	<b>350</b>	<b>210</b>	150	117	3
Piłkarze	<b>504</b>	<b>168</b>	101			2
Siatkarze	<b>504</b>	<b>168</b>	101			2

### Komentarz

Tym oto sposobem partia **Sportowcy** zdobyła większość.

## 2 Treść właściwa

### 2.1 Metody głosowania (system wyborczy)

Wprowadźmy kilka oznaczeń, niech:

$W$  - zbiór wszystkich wyborców,

$K$  - zbiór wszystkich kandydatów.

- Ten sam układ głosów (zestaw głosów) daje ten sam wynik (funkcja).
- Każdy układ głosów daje jakiś wynik (może być  $\emptyset$ ).

#### **Definicja 2.1 (Model)**

*Model to układ głosów (z przyporządkowanymi wyborcami).*

#### **Definicja 2.2 (Metoda anonimowa)**

*Metoda jest anonimowa, wtedy i tylko wtedy (w skrócie:  $\Leftrightarrow$ ), gdy wszyscy wyborcy są traktowani tak samo,  $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in W}$  zamiana głosów  $x$  i  $y$  nie zmienia wyniku.*

#### **Komentarz**

Alternatywnie, metoda nie jest anonimowa  $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in W}$  takie, że zamiana głosów  $x$  i  $y$  istotnie zmienia wynik.

#### **Definicja 2.3 (Metoda neutralna)**

*Metoda jest neutralna,  $\Leftrightarrow$  wszyscy kandydaci są traktowani tak samo,  $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in K}$  zamiana ról  $x$  i  $y$  nie zmienia wyniku.*

#### **Komentarz**

Alternatywnie, metoda nie jest neutralna  $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in K}$  takie, że zamiana ról  $x$  i  $y$  istotnie zmienia wynik, dokładniej definiując:

jeśli  $\exists k_1, k_2 \in K : W_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_i\}$  głosowali na  $k_1$ , a  $W_2 = \{w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_j\}$  głosowali na  $k_2$  to jeżeli kandydaci Ci "zamieniają się" wyborcami (zbiorami  $W_1, W_2$ ), to  $k_1$  i  $k_2$  zamieniają się wynikami.

#### **Definicja 2.4**

*Trzy rodzaje metod ze względu na wyniki:*

- 1) Metoda zwycięzcy (MZ) – wybiera zwycięzcę (zwycięzców),
- 2) Metoda porządkowa (MP) – wynik to słaby porządek na zbiorze  $K$ ,
- 3) Metoda rozdziału (MR) – wynik to podział pewnych dóbr między kandydatów.

#### **2.1.1 Metoda zwycięzcy**

##### **Definicja 2.5 (Klasyczna metoda zwycięzcy)**

*Klasyczna metoda zwycięzcy (klasyczna MZ) polega na tym, że każdy wyborca głosuje na dokładnie jednego kandydata. Zbiór*

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow K\}$$

*jest zbiorem modeli, gdzie  $m$  jest modelem. Klasyczną metodę zwycięzcy możemy opisać funkcją*

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

**Definicja 2.6 (Semi-klasyczna metoda zwycięzcy)**

Semi-klasyczna MZ polega na tym, że każdy wyborca głosuje na co najmniej jednego kandydata:

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow P(K) \setminus \emptyset\}.$$

Metodę tę można opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

**Definicja 2.7 (Metoda efektywna)**

Metoda zwycięzcy jest efektywna  $\Leftrightarrow$  zawsze wyłania przynajmniej jednego zwycięzcę.

**Przykład 2.1 (Przykłady metod głosowania)****Metody klasyczne:**

- 1) Dyktatura –  $\exists p \in W$ : wynik jest tożsamy z głosem  $p$ .
- 2) Monarchia – dany kandydat  $k \in K$  wygrywa niezależnie od głosowania.
- 3) Metoda większości – wygrywa kandydat (lub kandydaci), który(a) otrzymał(a) najwięcej głosów.
- 4) Metoda bezwzględnej większości – wygrywa kandydat  $k \in K$ , który otrzymał co najmniej  $\lfloor \frac{\#W}{2} \rfloor + 1$  głosów.
- 5) Metoda super większości – wygrywa kandydat, który uzyskał co najmniej  $q$  głosów, gdzie  $q > \frac{\#W}{2}$ .
- 6) Metoda status quo – *Założenie*:  $\exists$  pewien stan z jednym zwycięzcą.  
Głosowanie metodą większości (lub super większości):
  - jeśli metoda daje wynik, zwycięża "nowy" kandydat,
  - jeśli metoda nie daje wyniku, zwycięża dotychczasowy kandydat.

Przykład: referendum.

- 7) Metoda większości ważonej – ( $W = \{a_1, \dots, a_n\}$ ), gdzie głos  $a_i$  ma wagę  $w_i \geq 0$ . Wygrywa ten, kto otrzyma ponad  $\frac{w_1 + \dots + w_n}{2}$  punktów.
- 8) Metoda głosowania blokowego –  $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$ , gdzie  $W_k$  to zbiór wyborców bloku.  $W_k$  podejmuje decyzję większością głosów. W przypadku remisu wybierają zwycięzcę w  $W_k$ . Głos z  $W_k$  ma wagę  $i_k$ . Wygrywa kandydat z największą liczbą punktów.

**Metody semi-klasyczne:**

- 9) Metoda n-głosów – każdy wyborca głosuje na  $n$  kandydatów, a zwycięża ten, kto uzyska najwięcej głosów.
- 10) Szeroka metoda n-głosów – każdy głosuje na  $n$  kandydatów, ale mamy  $n$  zwycięzców (lub więcej w przypadku remisu na ostatnim "wygrywającym" miejscu)

**Metoda ani klasyczna, ani semi-klasyczna:**

- 11) Metoda punktowa – każdy wyborca  $w \in W$  ma do rozdysponowania  $p$  punktów ( $p \in \mathbb{N}$ ) między kandydatów. Zwycięża kandydat z największą liczbą punktów.

**Definicja 2.8 (Metoda decyzyjna)**

Metoda zwycięzcy jest decyzyjna  $\Leftrightarrow$  w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę.

**Definicja 2.9 (Metoda prawie decyzyjna)**

Metoda zwycięzcy jest prawie decyzyjna  $\Leftrightarrow$  w każdym modelu wyłania co najwyżej jednego zwycięzcę. Sytuacja, w której nie ma zwycięzcy, zachodzi wtedy, gdy więcej niż jeden kandydat uzyskał tę samą, najwyższą liczbę punktów.

**Ćwiczenie 2.1 (Z ćwiczeń)**

Zbadaj kto jest zwycięzcą w głosowaniu przez 99 osób na kandydatów: **Anastazy, Bermudy, Cezary**, jeśli otrzymano następujące wyniki metodą porządkową:

Liczba głosów	Wynik porządkowy
18	ABC
15	ACB
24	BAC
8	BCA
16	CAB
18	CBA

**Ćwiczenie 2.2**

Dane są wyniki głosowania:

Imię	Liczba głosów
Jaś	100
Małgosia	1

Zrób tak, by Małgosia wygrała.

**Ćwiczenie 2.3**

Uzupełnij tabelę:

	Anonimowa	Neutralna	Efektywna
Dyktatura	-	+	+
Monarchia	+	-	+
Metoda Większości	+	+	+

**Definicja 2.10 (Kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości)**

Metoda zwycięzcy (MZ) spełnia kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat, który otrzyma ponad 50% głosów, jest jedynym zwycięzcą.

**Stwierdzenie 2.1**

Mamy klasyczną metodę zwycięzcy, taką że  $\#K = 2$ , a głosowanie odbywa się według zasady bezwzględnej większości. Wówczas metoda jest prawie decyzyjna.

Dowód:

1° Załóżmy, że liczba wyborców  $\#W$  jest nieparzysta - OK.

2° Liczba wyborców  $\#W$  jest parzysta:

- jeden kandydat ma więcej niż 50% głosów - OK.
- remis, czyli obaj mają po 50% - nie ma zwycięzcy (dlatego metoda jest prawie decyzyjna).

□

**Stwierdzenie 2.2**

Metoda jest decyzyjna  $\Rightarrow$  metoda jest prawie decyzyjna.



**Definicja 2.11 (Metoda monotoniczna ze względu na zwycięzcę)**

**Z:** MZ - klasyczna lub semi-klasyczna. Metoda jest monotoniczna ze względu na zwycięzcę, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat  $A$  jest zwycięzcą, a jeśli wybierzemy kandydata  $B$  różnego od  $A$  ( $B \neq A$ ) oraz jego grupę wyborców, to jeśli ta grupa zmieni swoje głosy bez straty dla  $A$  (czyli zmiana nastąpi zgodnie z następującymi dozwolonymi operacjami):

$M$	$\Rightarrow$	$N$
$A \ B$	$\Rightarrow$	$A \ B$
$- \ -$	$\Rightarrow$	$- \ -$
$+ \ +$	$\Rightarrow$	$+ \ +$
$- \ +$	$\Rightarrow$	$+ \ -$

to:  $\Rightarrow A$  nadal wygrywa.

**Komentarz**

Czyli, jeżeli ktoś, kto nie głosował na zwycięzcę ( $A$ ), a głosował na kandydata  $B$ , zmieni swój głos na zwycięzcę ( $A$ ), to ( $A$ ) nadal wygrywa.

**Definicja 2.12 (Metoda kwoty)**

MZ klasyczna lub semi-klasyczna jest metodą kwoty (większości kwalifikowanej), wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $q$  (kwota), taka że liczba głosów o tej własności, że kandydat  $A$  jest zwycięzcą wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  otrzymał co najmniej  $q$  głosów.

**Komentarz**

Często kwota wyrażana jest w procentach, a wówczas stosuje się nieraz nierówność słabą.

**Twierdzenie 2.1 (Maya - Kenneth Maya, 1952r)**

**Z:** Klasyczna metoda zwycięzcy oraz  $\#K = 2$ . Jeżeli metoda ta jest metodą:

- (1) anonimową
- (2) neutralną
- (3) monotoniczną ze względu na zwycięzcę
- (4) prawie decyzyjną

$\Rightarrow$  jest metodą bezwzględnej większości.

*Dowód:* Załóżmy, że  $A, B$  to kandydaci.

$\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$  interesują nas liczby głosów, które otrzymali kandydaci. Załóżmy:

$A$  -  $a$  głosów

$B$  -  $b$  głosów

Rozpatrzmy zatem przypadki:

1°  $\#W = 2n$  (parzysta), rozważmy dwa podprzypadki:

a) Jeśli  $a = n, b = n$ .

**Hipoteza:**  $A$  wygrywa (analogicznie, jeżeli nie wygrywa  $B$ ), a metoda jest neutralna, to przy wymianie wyborców  $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} B$  wygrywa (nie wygrywa  $A$ )  $\Rightarrow A$  i  $B$  wygrywają jednocześnie (nie wygrywa żaden)  $\Rightarrow$  co prowadzi do  $\blacksquare$  (bo żaden z nich nie ma ponad 50%).

b) Jeśli  $a > b$ .

**Hipoteza:**  $B$  wygrywa, wtedy  $a - b$  wyborców zmienia głosy z  $A$  na  $B$ ,  $\stackrel{(3)}{\Rightarrow} B$  dalej wygrywa. Teraz  $B$  ma  $a$  głosów,  $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} A$  wygrywa,  $\stackrel{(4)}{\Rightarrow} A$  wygrywa i ma ponad połowę głosów.

2° Niech  $\#W = 2n + 1$  (nieparzysta).

Niech  $a > b$ .

**Hipoteza:**  $B$  wygrywa,  $a - b$  wyborców zmienia głosy i, jak w 1a), udowadniamy, że  $B$  musi mieć ponad połowę głosów.

Tak więc zawsze wygrywa ten, kto ma ponad połowę głosów.

□

## 2.1.2 MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie

### **Definicja 2.13 (Metoda zakładająca uporządkowanie)**

Metoda zwycięzcy jest metodą zakładającą uporządkowanie (MZU) wtedy i tylko wtedy, gdy  $\forall w \in W$  ustala  $K$  kandydatów w liniowym porządku, a jego głos zależy od tego porządku.

**Zapis:**

$A \overset{w,m}{<} B$  w modelu  $m$  oznacza, że wyborca  $w$  stawia  $B$  wyżej niż  $A$ .

$A \overset{w}{<} B$  - gdy wiadomo, jaki model.

### **Przykład 2.2**

1. Metoda punktów Bordy (Jean Charles de Borda, 1733–1799, inżynier wojskowy) – Każdy wyborca przydziela punkty od  $n - 1$  do 0:

1 miejsce -  $n - 1$  punktów

2 miejsce -  $n - 2$  punktów

⋮

$n - 1$  miejsce - 1 punkt

$n$  miejsce - 0 punktów

Zwycięża ten, kto otrzyma największą liczbę punktów.

2. Metoda Hare'a (Sir Thomas Hare, 1806–1891, Anglia, prawnik, 1857 r.) – Polega na odrzucaniu tego kandydata (tych kandydatów), który ma najmniej pierwszych miejsc, i głosowaniu dalej (listy pozostają z usunięciem odrzuconego kandydata), aż ktoś uzyska ponad 50% głosów. Gdy następuje remis i nie ma kogo odrzucić, wszyscy wygrywają.

3. Metoda Coombsa (Clyde Coombs, 1912–1988, USA, psycholog) – Wypisujemy kolejność wyników głosowania, odrzucamy kandydata (lub kandydatów jeżeli ktoś zostanie), który ma najwięcej ostatnich miejsc, i głosujemy dalej, aż ktoś uzyska ponad 50% pierwszych miejsc. Gdy nie można nikogo odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.

4. Metoda odrzuceń ostatniego – Jak w metodzie Coombsa, przy czym odrzucamy „do oporu”. Gdy nie można nikogo więcej odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.

### **Przykład 2.3**

Różnica między metodą Coombsa a metodą odrzucania ostatniego.

**Metoda Coombsa**

Liczba:	4	2	3
I pozycja	C	<b>B</b>	<b>B</b>
II pozycja	A	C	A
III pozycja	B	A	C

Wygrywa B, bo ma ponad 50% pierwszych miejsc.

**Metoda odrzuceń ostatniego**

Liczba:	4	2	3
I pozycja	C	B	B
II pozycja	<del>A</del>	C	A
III pozycja	<del>B</del>	<del>A</del>	C

Kolejność odrzuceń: B, A, C – C wygrywa.

5. Metoda Copelanda (Arthur H. Copeland, 1898–1970, matematyk) – Porównujemy parami kandydatów. Ten, kto więcej razy zostaje oceniony wyżej, dostaje 1 pkt, a w przypadku remisu obaj dostają po 0,5 pkt.

$$\#\{m : A \overset{m}{<} B\}$$

$$\#\{m : B \overset{m}{<} A\}$$

Decyduje suma punktów (zwycięzców może być więcej niż jeden).

6. Metoda turniejowa ( $Z: \#W = 2n+1$  nieparzysta) –  $k_1$  porównujemy z  $k_2$  (metodą powyżej), a następnie zwycięzcę pierwszego porównania porównujemy z  $k_3$  itd.
7. Metoda pozycyjna – Wyborcy przyznają punkty kandydatą w postaci  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , gdzie  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ . np.  
 1 miejsce –  $p_1$  punktów  
 2 miejsce –  $p_2$  punktów  
 itd.

Zwycięża ten z największą liczbą punktów.

**UWAGA – w szczególności:**

Metoda Bordy:  $P(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$

Metoda większości:  $P(1, 0, \dots, 0)$

Metoda  $k$  głosów:  $P(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$   
 $k$  razy

**Definicja 2.14 (Monotoniczność ze względu na transpozycję)**

MZU jest monotoniczna ze względu na transpozycje  $\Leftrightarrow \forall_{M-\text{model}} \forall_{w \in W} \forall_{A, B \in K}$ , jeśli w  $M$  głosuje się  $[\Delta, B, A, *]$  i w  $M$  wygrywa  $A$ , to w  $N$ , gdzie zmiana polega na  $[\Delta, A, B, *]$ , również wygrywa  $A$ .

**Komentarz**

Zmiana polega na zamienieniu kolejności uporządkowania  $A$  i  $B$ . Dodatkowo porządek

ten był na wykładzie zapisany pionowo.

$$\begin{bmatrix} \Delta \\ A \\ B \\ * \end{bmatrix}$$

**Umowa:** Jeśli nie jest zaznaczone inaczej, to w  $K, W$  różne oznaczenia oznaczają różnych kandydatów (wyborców).

**Definicja 2.15 (Słaba zasada Pareto)**

MZU spełnia słabą zasadę Pareto  $\Leftrightarrow \forall_M (\exists_{A,B \in K} \forall_{w \in W} A \overset{w,M}{<} B) \Rightarrow A$  nie wygrywa w  $M$ .

**Definicja 2.16 (Kandydat Condorceta)**

$A \in K$  jest kandydatem Condorceta (zwycięzcą Condorceta)  $\Leftrightarrow$  w "bezpośrednich porównaniach"

$A$  jest lepszy od każdego innego kandydata  $\Leftrightarrow \forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} > \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}$ .

**Definicja 2.17 (Przegraný Condorceta)**

$A \in K$  to przegrany Condorceta (w modelu  $M$ )  $\Leftrightarrow \forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} < \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}$ .

**Definicja 2.18 (Kryterium Condorceta)**

Metoda spełnia kryterium Condorceta  $\Leftrightarrow \forall_M : \text{Istnieje kandydat Condorceta (w } M) \Rightarrow A$  - jedyny zwycięzca w  $M$ .

**Definicja 2.19 (Kryterium przegranych Condorceta)**

Metoda spełnia kryterium przegranych Condorceta  $\Leftrightarrow \forall_M : \text{Istnieje przegrany Condorceta } A \text{ w } M \Rightarrow A$  nie wygrywa w  $M$ .

**Definicja 2.20 (Metoda jednoznacznie większościowa)**

Metoda jest jednoznacznie większościowa  $\Leftrightarrow \forall_M$  kandydat  $A$  w  $M$  ma ponad połowę pierwszych miejsc  $\Rightarrow A$  - jedyny zwycięzca.

**Definicja 2.21 (Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji)**

Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji spełnia warunek niezależności porażki od ubocznych opcji (spełnia słaby warunek IIA)  $\Leftrightarrow$

$$\forall_{A,B \in K} \forall_{M,N - \text{modele}} \text{spełnia} \left[ \begin{array}{l} \forall_{w \in W} (B \overset{w,M}{<} A) \Leftrightarrow (B \overset{w,N}{<} A) \\ A \text{ wygrywa w } M, B \text{ nie wygrywa w } M \end{array} \right] \Rightarrow B \text{ nie wygrywa w } N.$$

Innymi słowy: zmiany nie wpływające na relacje przegrany-zwycięzca nie mogą dać przegrywającemu zwycięstwa.

**Twierdzenie 2.2**

MZU, anonimowa, neutralna  $\Rightarrow$  metoda nie jest decyzyjna.

*Dowód.* Rozważmy  $\#K = 2, \#W = 2n$  i otrzymane głosy.

Głosy	n	n
1	A	B
2	B	A

**Hipoteza:** Metoda decyzyjna to np. wygrywa  $A \Rightarrow$  wygrywa  $B$  ⚡

Analogicznie zachodzi dla  $A$ .

□

### Przykład 2.4 (Paradoks Condorceta)

Rozważmy następującą tabelę:

Głosy	9	10	11
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B

Zachodzi  $A > B$ ,  $B > C$ ,  $C > A$ . Mamy więc grę w "kamień, papier, nożyce."

### Twierdzenie 2.3

MZU spełnia kryterium Condorceta  $\Rightarrow$  jest jednoznacznie większościowa.

Dowód. A ma ponad połowę pierwszych miejsc  $\Rightarrow$  A - kandydat Condorceta  $\Rightarrow$  A jest jedynym zwycięzcą.

□

### Twierdzenie 2.4

MZU spełnia słabe IIA, a A spełnia kryterium Condorceta  $\Rightarrow$  spełnia słabą zasadę Pareto.

Dowód. Rozważmy  $M \forall_W A \overset{w,M}{<} B \overset{?}{\Rightarrow} A$  nie wygrywa w  $M$ .

Rozważmy model  $N$ : dla każdego wyborcy przesuwamy  $A$  i  $B$  na szczyt,  $[B, A, reszta]$

$A \overset{w,M}{<} B \Leftrightarrow A \overset{w,N}{<} B$ .

W  $N$ :  $B$  jest kandydatem Condorceta.

W  $N$ :  $B$  jest jedynym zwycięzcą,  $B$  wygrywa,  $A$  nie wygrywa.

Słabe IIA  $\Rightarrow$   $A$  nie wygrywa w  $M$ .

□

### Twierdzenie 2.5

MZU, monotoniczna ze względu na transpozycje,  $\Leftrightarrow \forall_{M-model} \forall_{A \in K} \forall_{B_1, \dots, B_n \in A} (A \neq B, \text{ ale może być } B_i = B_j) \forall_{w_1, \dots, w_n \in W} (\text{może być } w_i = w_j)$

Jeżeli w modelu  $M$  wygrywa  $A$ , to model  $N$  utworzony przez  $[\Delta, B_i, A, *] \rightarrow [\Delta, A, B_i, *]$  dla  $i = 1, \dots, n \Rightarrow$  w  $N$  dalej wygrywa  $A$ .

Dowód.  $\Leftarrow$  oczywiste.

$\Rightarrow$  Stosujemy założenie  $n$  razy (robimy  $n$  skoków i dalej wygrywa  $A$ ).

### Przykład 2.5

1. Metoda Blacka (1908-1991, ekonomista) - jeśli istnieje kandydat Condorceta, to on wygrywa. Jeśli nie istnieje, stosujemy punkty Bordy.
2. Metoda Condorceta - jeśli istnieje kandydat, który w "bezpośrednim porównaniu" wygrywa lub remisuje z każdym innym  $\Leftrightarrow$  on jest zwycięzcą.
3. Metoda nominacji - każdy, kto ma co najmniej jedno pierwsze miejsce, wygrywa.
4. Metoda ostatnich miejsc - każdy, kto nie ma żadnego ostatniego miejsca, wygrywa.
5. Metoda prezydencka - rozważamy dwóch kandydatów z największą liczbą pierwszych miejsc. Porównujemy ich "bezpośrednio". Jeśli na drugim miejscu jest remis, wszyscy z drugiego miejsca "przechodzą do finału" i tam stosujemy metodę Copelanda.

Metoda punktów Bordy jest monotoniczna ze względu na transpozycję.

$A$  wygrywa. Niech  $A$  zdobędzie 1 punkt więcej. Innym się nie zwiększyło  $\Rightarrow A$  dalej wygrywa.

Metoda	Kryterium Condorceta	Kryterium przegranego Condorceta	Słaba zasada Pareto	Monotoniczność ze względu na transpozycję	IIA	Jednoznaczna większość
Punkty Bordy	-(1)	+	+	+	-(2)	-(1)
Hare'a	-(3)	-(3)	+	-(4)	-(5)	+(O)
Coombsa	-(14)	-(15)	+	-(13)	-(13)	+(O)
Odrzuceń ostatniego	-(11,12)	-(12)	+	-(13)	-(13)	-(11,12)
Copelanda	+	+	+	+	-(10)	+(O)
Większości	-(3)	-(3)	+(O)	+	-(6)	+
Dyktatura	-(7)	-(7)	+	+(O)	+	-(7)
Terminażowa	+	+	-(8)	+	-(9)	+

D1) **Metoda Bordy, Kryterium przegranego Condorceta**  $\forall_w A < B$  Punkty  $A <$  Punkty  $B$ . W punktacji  $A$  zdobywa 1 punkt za każdą parę  $(B, w)$ , w której wyborca  $w$  umieszcza  $B$  wyżej niż  $A$ .

$A$  jest przegranym Condorceta. Mamy  $k$  kandydatów,  $n$  wyborców, a kandydat  $K_1, \dots, K_{n-1}$  otrzyma mniej niż  $\frac{n}{2}$  punktów. W sumie,  $A$  zdobywa mniej niż  $\frac{k(k-1)}{2}$  punktów.

Łączna pula punktów do rozdziału wynosi  $n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$  (suma ciągu arytmetycznego). Wszyscy razem zdobywają mniej niż  $\frac{n(k-1)}{2}$  punktów, czyli łącznie mniej niż  $\frac{k \cdot n \cdot (k-1)}{2}$ .

D2) **Metoda Comba i Hare'a** Jeśli  $\forall_w A \overset{w}{<} B$ , to  $A$  wcześniej odpadnie od  $B$ .

D3) **IIA dyktatura** Jeśli  $A$  wygrywa,  $B \overset{d,M}{<} A$ , to  $B$  nie może wygrać.

D4) **Metoda terminarzowa - Kryterium Condorceta** Kandydat Condorceta wygrywa z każdym i nie odda zwycięstwa.

D5) **Terminażowa - monotoniczność** Przy przesunięciu  $A$  również wygrywa.

D6) **Metoda Copelanda** Gdy  $A$  wygrywa z każdym, to zdobywa maksymalną liczbę punktów. Zasada Pareto:  $\forall_w B \overset{w}{<} A \overset{?}{\Rightarrow} B$  nie wygrywa.

Jeśli  $B$  wygrywa w pojedynku z  $C$ , to również  $A$  wygrywa z  $C$ . Wówczas punkty  $A >$  punkty  $B$ , ponieważ  $A$  zdobywa punkty za parę  $(A, B)$ , a zatem punkty  $A$  są silniejsze.

D7) **Metoda Coombsa - Słaba zasada Pareto** Jeśli  $\forall_w B \overset{w}{<} A$ , to  $A$  nie odpadnie, zanim  $B$  nie odpadnie (czyli  $B$  odpadnie wcześniej niż  $A$ ).

K1)	3os	2os	Pkt	$A$ jest kandydatem Condorceta, natomiast otrzymano punkty:	$\begin{bmatrix} A = 6 \text{ pkt} \\ B = 7 \text{ pkt} \\ C = 2 \text{ pkt} \end{bmatrix}$
	A	B	2		
	B	C	1		
	C	A	0		

K2) 

1os	2os	2os	Pkt
C	A	B	2
A	B	A	1
B	C	C	0

 $\Rightarrow$ 

1os	2os	2os	Pkt
C	A	B	2
A	B	<b>C</b> $\uparrow$	1
B	C	A	0

, wykorzystując transpozycję otrzymujemy wyniki  $\begin{bmatrix} A = 5 \\ B = 6 \\ C = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A = 7 \\ B = 6 \\ C = 2 \end{bmatrix}$ , czyli  $A$  wygrywa.

K3) 

2os	3os	2os
A	B	C
C	A	A
B	C	B

 $\begin{bmatrix} A - \text{kandydat Condorceta} \\ B - \text{przeegrany Condorceta} \end{bmatrix}$ , bo  $A : B \ 4 : 3 \Rightarrow A : C \ 5 : 2$ , ale wygrywa  $B$ .

K4) 

6os	5os	4os	2os
A	C	B	B
B	A	C	A
C	B	A	C

 $\Rightarrow$ 

6os	5os	4os	2os
A	C	B	<b>A</b> $\uparrow$
B	A	C	B
C	B	A	C

, wygrywał  $B$ , po zmianie  $C$ .

K5) 

2os	1os	2os
B	A	A
A	B	C
C	C	B

 $B$  nie wygrywa,  $A$  wygrywa  $\Rightarrow$ 

2os	1os	2os
B	A	<b>C</b> $\uparrow$
A	B	A
C	C	B

, wygrywa  $B$

K6) 

2os	3os	2os
A	B	A
B	A	C
C	C	B

,  $A$  wygrywa,  $B$  nie wygrywa  $\Rightarrow$ 

2os	3os	2os
A	B	<b>C</b> $\uparrow$
B	A	A
C	C	B

K7) 

2os	1os (w tym jeden dyktator)
A	B
B	A

 $\begin{bmatrix} A - \text{kandydat Condorceta} \\ B - \text{przeegrany Condorceta} \end{bmatrix}$ , wygrywa  $B$ .

K8) Ustawiamy kolejność:  $ABCD$ 

1os	1os	1os
A	C	B
B	A	D
D	B	C
C	D	A

 mamy  $\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \\ C > D \end{bmatrix}$ , ostatecznie wygrywa  $D$ ,  
mimo iż  $D < B$ .

K9) Ustawiamy kolejność  $ABC$ 

1os	1os	1os
C	B	A
A	C	B
B	A	C

 mamy  $\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \end{bmatrix}$ , wygrywa  $C \Rightarrow$ 

1os	1os	1os
C	B	B
A	C	<b>A</b> $\uparrow$
B	A	C

,  
 $B$  wygrywa.

K10) 

2os	2os	1os	1os
A	C	D	B
D	A	B	C
B	B	C	D
C	D	A	A

 otrzymujemy kolejno wyniki:  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} > B \ (4 : 2) & \mathbf{B} > C \ (4 : 2) \\ A < \mathbf{C} \ (2 : 4) & \mathbf{B} = \mathbf{D} \ (3 : 3) \\ \mathbf{A} > D \ (4 : 2) & \mathbf{C} = \mathbf{D} \ (3 : 3) \end{bmatrix}$ , przyz-

nano punkty  $\begin{bmatrix} A -2 \text{ pkt} \\ B -1,5 \text{ pkt} \\ C -1,5 \text{ pkt} \\ D -1 \text{ pkt} \end{bmatrix}$ ,  $A$  wygrywa,  $C$  nie wygrywa.

Po zmianie:

2os	2os	1os	1os
A	C	D	B
D	A	B	C
↑	B	C	D
B	D	A	A

oraz punktacje:  $\begin{bmatrix} A -2 \text{ pkt} \\ B -0,5 \text{ pkt} \\ C -2,5 \text{ pkt} \\ D -1 \text{ pkt} \end{bmatrix}$ ,  $C$  wygrywa.

K11)

4os	2os	3os
C	B	B
A	C	A
B	A	C

$B$  ma najwięcej głosów pierwszych, czyli jest kandydatem Condorceta, ale kolejność odrzuceń to  $B$ ,  $A$ , więc wygrywa  $C$ .

K12)

2os	1os	2os
C	B	B
A	C	A
B	A	C

$C$  to przegrany Condorceta, ale  $C$  wygrywa.

K13)

5os	4os	1os	2os
A	B	C	B
C	A	B	C
B	C	A	A

,  $A$  wygrywa,  $C$  i  $B$  nie wygrywają.

Przekształcamy do:

5os	4os	1os	2os
A	B	C	B
C	A	B	<b>A</b> ↑
B	C	A	C

,  $B$  wygrywa.

K14)

2os	1os	1os	1os	2os
E	D	A	C	B
A	B	B	B	C
D	A	C	D	A
C	E	E	E	D
B	C	D	A	E

$B$  -kandydat Condorceta,  $B$  odpada w I turze

K15)

2os	2os	2os	1os
D	B	C	B
C	D	B	C
A	A	A	D
B	C	D	A

$A$ -przegrany Condorceta, ale  $A$  wygrywa

### **Lemat 2.1 (Lemat o decyzyjności)**

*Z: MZU, efektywna,  $\#K \geq 3$ ,  $\#W \geq 2$ . Metoda spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA  $\Rightarrow$  jest decyzyjna.*



Dowód: Wiemy, że zwycięzca istnieje (chcemy wykazać, że jest jedyny). Załóżmy, że  $A$  i  $B$

są zwycięzcami w modelu  $M$  oraz  $W = X \cup Y$

X	Y
$\vdots$	$\vdots$
A	B
$\vdots$	$\vdots$
B	A
$\vdots$	$\vdots$

Niech  $C$  - inny kandydat

Tworzymy model  $Q$ , w którym relacje  $A/B$  nie są zmienione.

X	Y
A	C
C	B
B	A
$\dots$	$\dots$

$Q$

Kto wygrywa w  $Q$ ? Na pewno nie  $B$ , bo  $\forall_w B \overset{w}{<} C$ , ale również nie  $A$  (z IIA).

Jeżeli w  $Q$   $A$  wygrywa,  $B$  nie  $\Rightarrow$  w  $M$   $B$  nie wygrywa ⚡

Zatem wygrywa  $C$ .

Rozważmy model  $R$

X	Y
A	B
B	C
C	A
$\dots$	$\dots$

$R$

Kto wygrywa w  $R$ ? -  $A$ ,  $B$  lub  $C$  (Pareto) Ale nie wygrywa  $C$  (z zasady Pareto). W  $R$ : relacje  $A/C$  są takie same jak w  $Q$ .

Założmy, że  $A$  wygrywa w  $R \Rightarrow C$  nie wygrywa w  $Q$ . Wobec tego w  $R$  wygrywa  $B$ .

Porównajmy  $M$  i  $R$ : relacje  $A-B$  w  $M$  i  $R$  są takie same. Wobec tego z IIA  $\Rightarrow$  w  $M$   $A$  nie wygrywa ⚡

□

### **Twierdzenie 2.6 (Twierdzenie Arrowa dla metod zwycięzcy (1951))**

Założmy:  $\#K \geq 3, \#W \geq 2$ ,  $MZU$ , efektywna, spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA  $\Rightarrow$  dyktatura.

D: Z lematu o decyzyjności  $\Rightarrow$  jeśli zwycięzca istnieje, to jest jedyny.

Czy istnieje jedyny zwycięzca? (pytanie) dyktatura.

### **Definicja 2.22 (na potrzeby dowodu)**

$w \in W$  - dyktator  $A$  z kontrolerem  $B \Leftrightarrow$  jeśli  $A \overset{w}{<} B \Rightarrow A$  nie wygrywa.

Podzielimy dowód na 3 kroki:

I krok -  $\forall_{A,B \in K} \exists_{w \in W}$  dyktator nad  $A$  z kontrolerem  $B$ .

II krok -  $w$ -dyktator nad  $A$  z kandydatem  $B \Rightarrow w$  dyktator nad  $B$  z kontrolerem  $A$  (dyktatora nad parą  $A, B$  oznaczamy  $d(A, B)$ ).

III krok - Jeżeli  $w = d(A, B) \Rightarrow \forall_{D,E} w = d(D, E)$  (gdzie  $D, E$  może być  $A$  lub  $B$ ).

$w$
$A$
$B_1$
$B_2$
$\dots$
$B_n$

Wtedy ten  $w$  z I kroku jest dyktatorem.

Dow. I) Niech  $C$  będzie trzecim kandydatem.

$C$
$A$
$B$
wszyscy

Wygrywa  $C$ . Jeden wyborca prze-

	inni	$W_1$	
	$C$	$A$	
suwa $C$ do tyłu:	$A$	$B$	Wygrywa $C$ lub $A$ .
	$B$	$C$	
	$\vdots$	$\vdots$	

	inni	$w_1$ $w_2$	
	$C$	$A$	
To samo z trzecim wyborcą:	$A$	$B$	Wygrywa $A$ lub $C$ , i tak dalej, aż
	$B$	$C$	
	$\vdots$	$\vdots$	

	wszyscy	
dojdzie do sytuacji:	$A$	Wówczas wygrywa $A$ (z zasady Pareto), a $C$ nie.
	$B$	
	$C$	

Pierwsze przejście, po którym  $C$  nie wygrywa (musi takie zaistnieć).

$X, Y$  - grupy wyborców.

X	w	Y		X	w	Y
$C$	$C$	$A$	$\Rightarrow$	$C$	$A$	$A$
$A$	$A$	$B$		$A$	$B$	$B$
$B$	$B$	$C$		$B$	$C$	$C$
$M_1$				$M_2$		

Pokażemy, że  $w$  jest dyktatorem nad  $B$  z kontrolerem  $A$ .

Rozważmy  $P$  - dowolny model, w którym  $B \stackrel{w,P}{<} A$ .

Niech  $A/B$  oznacza pewną relację między  $A$  i  $B$ .

$W$	$V$	inni		$W$	$V$	inni
$A/B$	$A$	$A/B$	$\Rightarrow$	$C$	$A$	$A/B$
	$B$			$A/B$	$B$	$C$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$C$	$\vdots$
				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P$				$Q$		

Kto wygrywa w  $Q$ ? -  $A$ ,  $B$  lub  $C$ . Jednak relacje  $B/C$  w modelach  $Q$  i  $M_1$  są takie same  $\Rightarrow$  w  $Q$   $B$  nie wygrywa (IIA). Z kolei relacje  $A/C$  w  $Q$  i  $M_2$  są takie same  $\stackrel{IIA}{\Rightarrow}$  w  $Q$   $C$  nie wygrywa.

W  $Q$  wygrywa  $A$ ,  $B$  nie wygrywa.

Relacje  $A/B$  w  $P$  i  $Q$  są takie same.  $\Rightarrow$  w  $P$   $B$  nie wygrywa.

Dow. II)  $w$  jest dyktatorem nad  $B$  z kontrolerem  $A$ ,  $v$  jest dyktatorem nad  $A$  z kontrolerem  $B$

$W$	$V$	inni
$A$	$B$	
$B$	$A$	
$\vdots$	$\vdots$	

Wygrywa  $A$  lub  $B$  (z zasady Pareto).  $B$  nie wygrywa (bo  $w$ ),  $A$  nie wygrywa (bo  $v$ ) ⚡

Dow. III) Niech  $w = d(A, B)$ . 1. Zauważmy, że  $\forall_{D,E} \exists d(D, E)$ . 2.  $\forall_{D,E} w = d(D, E)$ .

D 2.1. Załóżmy, że  $C$ , oraz że  $v = d(B, C)$  i  $v \neq w$ .

$W$	$V$	inni
$C$	$B$	$C$
$A$	$C$	$B$
$B$	$A$	$A$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Wygrywa  $B$  lub  $C$  (z zasady Pareto).  $B$  nie wygrywa (bo  $w$ ),  $C$  nie wygrywa (bo  $v$ ) ⚡

D 2.2. Zamieniamy  $A$  i  $B$  rolami,  $v = d(A, C)$ , i w ten sam sposób pokazujemy, że  $w = d(A, C)$ .

D 2.3.  $\overset{z2.1 \text{ i } 2.2}{C \neq A, B}$  oraz  $w = d(A, B)$ ,  $w = d(A, C)$ . Jeśli  $D \neq A, C$ , to podobne rozumowanie jak w 2.1 i 2.2 dla  $A, C, D$  pokazuje, że  $w = d(A, C) \Rightarrow w = d(C, D)$ .

Dla  $C, d \neq A, B$  OK. Jeden z  $C, D$  musi być równy  $A$  lub  $B$  (z 2.1 i 2.2).

□

### **Wniosek 2.6.1 (Twierdzenie Arrowa o niemożliwości)**

Założmy, że  $\#K \geq 3$ ,  $\#W \geq 2$ . Wówczas: nie istnieje metoda zakładająca uporządkowanie (MZU) efektywna, która jednocześnie spełnia następujące warunki:

- anonimowa,
- słabą zasadę Pareto,
- słabe kryterium niezależności od opcji ubocznych (IIA).

### **Przykład 2.6 (Przypadki szczególne w twierdzeniu Arrowa)**

1.  $\#K = 2$ ,  $\#W$  nieparzyste — metoda większości jest decyzyjna.
2.  $\#K = 3$ ,  $\#W = 5$  — reguła „ $\geq 3$  pierwsze miejsca” wyłania zwycięzcę.

### **Twierdzenie 2.7 (Twierdzenie Taylora o niemożliwości)**

Dla  $\#K \geq 3$ ,  $\#W \geq 3$ : nie istnieje MZU efektywna, która spełnia jednocześnie kryterium Condorceta oraz słabe kryterium niezależności od ubocznych opcji (IIA).

**Dowód:** Z założeń IIA i kryterium Condorceta wynika słaba zasada Pareto. Słaba zasada Pareto wraz z IIA prowadzi do dyktatury (zgodnie z twierdzeniem Arrowa). Jednak dla  $\#W \geq 3$ , dyktatura nie spełnia kryterium Condorceta.

□

Przypadek  $\#W = 4$  jest znacznie prostszy do rozważenia.

### 2.1.3 Metoda TAK/NIE

$$\left[ \begin{array}{ll} \Sigma = \{M : W \rightarrow K\} & \Sigma = \{M : W \rightarrow \{\text{TAK}, \text{NIE}\}\} \\ f : \Sigma \rightarrow P(K) & f : \Sigma \rightarrow \{\text{TAK}, \text{NIE}\} \end{array} \right]$$

#### **Przykład 2.7 (Szczególny przypadek metody status quo)**

Przypadek z dwoma kandydatami.

#### **Definicja 2.23 (Założenia metody TAK/NIE)**

Założenia: '

- $\forall_{w \in W} w : \text{TAK} \Rightarrow \text{wynik: TAK}$ ,
- $\forall_{w \in W} w : \text{NIE} \Rightarrow \text{wynik: NIE}$ .

#### **Definicja 2.24 (Koalicja wygrywająca)**

Podzbiór  $A \subset W$  jest koalicją wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\{x \in A : x \text{ głosuje TAK}\} \Rightarrow \text{wynik: TAK}.$$

#### **Definicja 2.25 (Monotoniczność metody TAK/NIE)**

Metoda TAK/NIE jest monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\left[ \begin{array}{l} A \subset A_1 \\ A \text{ jest koalicją wygrywającą} \end{array} \right] \Rightarrow A_1 \text{ jest koalicją wygrywającą}.$$

#### **Definicja 2.26 (Wyborca decydujący)**

Założmy, że  $A$  jest koalicją wygrywającą. Wyborca  $p \in A$  jest decydujący dla  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \setminus \{p\}$  nie jest koalicją wygrywającą.

#### **Definicja 2.27 (Wskaźnik Banzhafa)**

Założmy, że  $W = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Wskaźnik Banzhafa dla  $a_i$  jest równy liczbie:

$$B(a_i) = \#\{A : a_i \in A \text{ i } a_i \text{ jest decydujący dla } A\}.$$

#### **Definicja 2.28 (Indeks Banzhafa (Penrose'a–Banzhafa))**

Indeks Banzhafa dla  $a_i$  definiuje się jako:

$$I_B(a_i) = \frac{B(a_i)}{B(a_1) + \dots + B(a_n)}.$$

#### **Przykład 2.8**

Trzech wyborców:

- $w_1 = 50$ ,
- $w_2 = 45$ ,
- $w_3 = 1$ .

Do podjęcia decyzji TAK potrzeba 51 głosów.

#### **Komentarz**

Zapis tego warunku:  $W(51; 50, 45, 1)$  — gdzie  $W(\text{min}; \text{wagi wyborców})$ .

**\*\*Metoda liczenia wskaźnika Banzhafa (dla metod monotonicznych)\*\*:**

	Koalicje wygrywające \ Wyborcy	$w_1$	$w_2$	$\dots$	$w_n$
ALGORYTM:	$k_1$	+	+	$\dots$	-
	$k_2$	-	+	$\dots$	-
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$k_j$	+	-	$\dots$	-

Legenda:

- + (wyborca należy do koalicji),
- - (wyborca nie należy do koalicji).

### Komentarz

Policzmy teraz wskaźniki Banzhafa dla  $W(51; 50, 45, 1)$

**\*\*Koalicje wygrywające\*\*:**

- $\{w_1, w_2\}$ ,
- $\{w_1, w_3\}$ ,
- $\{w_1, w_2, w_3\}$ .

Liczba znaków + dla wyborcy  $w_1$  minus liczba znaków - to wskaźnik Banzhafa.

	Koalicja	$w_1$	$w_2$	$w_3$
<b>**Przykład**:</b>	$\{w_1, w_2\}$	+	+	-
	$\{w_1, w_3\}$	+	-	+
	$\{w_1, w_2, w_3\}$	+	+	+
		$3 = (3-0)$	$1 = (2-1)$	$1 = (2-1)$

**\*\*Wskaźniki Banzhafa\*\*:**

$$B(w_1) = 3,$$

$$B(w_2) = 1,$$

$$B(w_3) = 1.$$

$w_1$  jest decydującym wyborcą.

**\*\*Indeksy Banzhafa\*\*:**

$$I_B(w_1) = \frac{3}{5},$$

$$I_B(w_2) = \frac{1}{5},$$

$$I_B(w_3) = \frac{1}{5}.$$

Dlaczego to działa? Niech  $K$  to zbiór koalicji wygrywających, a  $p \in W$ . Dzielimy  $K$  na trzy podzbiory:

$$K_1 = \{A : p \notin A\},$$

$$K_2 = \{A \cup \{p\} : A \in K_1\},$$

$$K_3 = K \setminus (K_1 \cup K_2).$$

Zauważmy, że:

- $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ ,
- zbiory  $K_1, K_2, K_3$  są parami rozłączne,
- $\#K_1 = \#K_2$ .

Wskaźnik Banzhafa:

$$B(p) = \#K_3,$$

gdzie  $p$  jest decydujący dla  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \in K_3$ .

**Definicja 2.29 (Wskaźnik/Indeks Shapleya–Shubika)**

Dla metody monotonicznej: Porządkujemy wyborców jako  $W = (w_1, \dots, w_n)$ . W ciągu  $(w_1, \dots, w_n)$  wyborca  $w_k$  jest wpływającym wyborcą, jeśli:

$\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$  nie tworzy koalicji wygrywającej, a  $\{w_1, \dots, w_k\}$  już tak.

Wskaźnik Shapleya–Shubika:

$$S(w_k) = \#\{\text{ciągi, w których } w_k \text{ jest wpływającym wyborcą}\}.$$

Indeks Shapleya–Shubika:

$$I_S(w_k) = \frac{S(w_k)}{n!}.$$

**Przykład 2.9**

**Komentarz**

Dalej działamy na przykładzie  $W(51; 50, 45, 1)$ .

Ciągi decyzyjne:

$$(w_1, \mathbf{w}_2 \mid, w_3)$$

$$(w_1, \mathbf{w}_3 \mid, w_2)$$

$$(w_2, \mathbf{w}_1 \mid, w_3)$$

$$(w_2, w_3, \mathbf{w}_1 \mid)$$

$$(w_3, \mathbf{w}_1 \mid, w_2)$$

$$(w_3, w_2, \mathbf{w}_1 \mid)$$

$$I_S(w_1) = \frac{4}{6}, \quad I_S(w_2) = \frac{1}{6}, \quad I_S(w_3) = \frac{1}{6},$$

**Definicja 2.30 (Odporności na zamianę w metodzie TAK/NIE)**

Metoda TAK/NIE jest odporna na zamianę wtedy i tylko wtedy, gdy:

$\forall_{A,B}$  — koalicje wygrywające  $\forall_{a \in A, b \in B}$  co najmniej jedna z koalicji  $\left[ \begin{array}{l} (A \setminus \{a\} \cup \{b\}) \\ (B \setminus \{b\} \cup \{a\}) \end{array} \right]$  jest wygrywająca.

### Stwierdzenie 2.3

Większość ważona w metodzie TAK/NIE jest odporna na zamianę.

D: Niech  $A, B$  będą koalicjami wygrywającymi,  $a \in A, b \in B$ . Wagi głosów  $a$  i  $b$  oznaczamy jako  $W_a, W_b$ . Zakładamy, że  $W_b \geq W_a$ . Wówczas:

$$W(A \setminus \{a\} \cup \{b\}) \geq W(A).$$

□

#### Zadanie 1

Porównać  $W(5; 4, 3, 2, 1)$  z:

- a)  $W(9; 8, 7, 2, 1)$ ,
- b)  $W(9; 8, 7, 3, 2)$ .

#### Zadanie 2

Niech  $A, B, C, D$  oznaczają wyborców w  $W(3; A, B, C, D)$ , a pary  $AB$  i  $CD$  oznaczają koalicje wygrywające.

Wykazać, że to nie jest metoda z większością ważoną.

#### Zadanie 3

Dla grupy  $B + 6r$  (burmistrz i 6 radnych) wyznaczyć indeksy Shapleya–Shubika.

### 2.1.4 Metody porządkowe

#### Definicja 2.31 (Słaby porządek)

Zbiór  $K$  jest słabo uporządkowany wtedy i tylko wtedy, gdy  $\exists R$  — relacja równoważności w  $K$  taka, że  $K/R$  jest uporządkowany liniowo przez relację  $\leq$ .

Dla  $a, b \in K$  definiujemy:

$$a < b \stackrel{\text{def}}{\iff} [a]_R < [b]_R,$$

gdzie relacja jest przechodnia i słabo antysymetryczna.

#### Definicja 2.32 (Metoda porządkowa (MP))

Każdy wyborca porządkuje kandydatów w sposób liniowy.

Wynik wyborów jest słabym porządkiem w zbiorze  $K$ :

- $L(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ jest porządkiem w } K\}$ ,
- $S(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ jest słabym porządkiem w } K\}$ .

Zapis formalny:

$$\Sigma = \{M : W \rightarrow L(K)\}, \quad f : \Sigma \rightarrow S(K).$$

Każda efektywna metoda z założeniem większości wyborców (MZU) jest metodą porządkową (MP).

Zapis notacyjny:

- $A \overset{w}{<} B$ ,
- $A \overset{w, M}{<} B$ ,

- $A \underset{M}{<} B$  — w modelu  $M$ , po wyborach  $B$  znajduje się nad  $A$ .

**Przykład 2.10**

*Dyktatura porządkowa.*

*Wynik wyborów jest identyczny z głosem jednego wyborcy.*

**Definicja 2.33 (Porządkowa zasada Pareto)**

*Metoda porządkowa (MP) spełnia (porządkową) zasadę Pareto wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall_M \forall_{A,B \in K} \left( \forall_w A \overset{w,M}{<} B \right) \Rightarrow A \underset{M}{<} B.$$

**Definicja 2.34 (Metoda spełniająca postulat liberalizmu Sena)**

*Metoda spełnia postulat liberalizmu Sena, jeśli:*

$$\forall_{w \in W} \exists_{A,B \in K (A \neq B)} \left( A \overset{w,M}{<} B \Rightarrow A \underset{M}{<} B \right) \text{ oraz } \left( A \overset{w,M}{>} B \Rightarrow A \underset{M}{>} B \right).$$

**Twierdzenie 2.8 (Twierdzenie Sena)**

*Niech  $\#K \geq 2$  oraz  $\#W \geq 2$ . Wtedy: Nie istnieje metoda spełniająca jednocześnie:*

1. *zasadę Pareto,*
2. *postulat liberalizmu Sena.*

D: Niech  $w, v$  będą wyborcami, a  $A, B, C, D$  będą elementami  $K$ . Rozważmy następujące przypadki:

1. Dla  $w, v$  i pary  $A, B$ : Jeśli  $w : A \overset{w,M}{<} B \Rightarrow A \underset{M}{<} B$  oraz  $w : B \overset{w,M}{<} A \Rightarrow B \underset{M}{<} A$ , to mamy sytuację wzajemnej sprzeczności wynikającej z narzuconych preferencji.

2. Kolejność preferencji dla  $w$ :

$$\begin{bmatrix} w : \\ C \\ B \\ A \\ D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{Reszta:} \\ A \\ C \\ B \\ D \end{bmatrix}$$

Z powyższego wynika, że nie można jednocześnie spełnić zasady Pareto i postulatu liberalizmu Sena.

$A \underset{M}{<} B, C \underset{M}{<} A, B \underset{M}{<} C$  (zasada Pareto).

Jednak:

$$A \underset{M}{<} B \underset{M}{<} C \underset{M}{<} A$$

jest sprzecznością.

3. Kolejność preferencji:

$$\begin{bmatrix} w : \\ D \\ A \\ B \\ C \\ \text{reszta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{reszta:} \\ B \\ C \\ D \\ A \\ \text{reszta} \end{bmatrix}$$

Z zasady Pareto:

$$B \underset{M}{<} (w) \underset{M}{<} A \underset{M}{<} D \underset{M}{<} C \underset{M}{<} B$$

co prowadzi do sprzeczności.



□

**Definicja 2.35 (Filtr)**

Niech  $X$  będzie zbiorem. Podzbiór  $F \subset P(X)$ , gdzie  $F \neq \emptyset$ , nazywamy *filtr*, jeśli spełnia następujące warunki:

- 1)  $\emptyset \notin F$
- 2) Jeśli  $A, B \in F$ , to  $A \cap B \in F$
- 3) Jeśli  $A \in F$  oraz  $A \subset B \subset X$ , to  $B \in F$

**Przykład 2.11**

1. Niech  $X$  będzie zbiorem oraz  $p \in X$ . Wówczas zbiór

$$\{A \subset X : p \in A\}$$

jest filtrem.

2. Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną,  $p \in X$ , a  $U$  otoczeniem punktu  $p$ . Wówczas zbiór wszystkich otoczeń  $p$  jest filtrem.

**Definicja 2.36 (Ultrafiltr)**

Podzbiór  $F \subset P(X)$  nazywamy *ultrafiltrem*, jeśli spełnia następujące warunki:

- 1)  $F$  jest filtrem.
- 2) Dla każdego  $A \subset X$  zachodzi dokładnie jedno z dwóch:  $A \in F$  albo  $X \setminus A \in F$ .

**Przykład 2.12**

1. Zobacz przykład 2.11.1.

**Stwierdzenie 2.4**

Ultrafiltr jest filtrem maksymalnym, tzn. jeśli  $F$  jest ultrafiltrem, to dla każdego filtra  $G$ , jeśli  $F \subset G$ , to  $G = F$ .

Załóżmy, że istnieje filtr  $G$  taki, że  $\Rightarrow \forall_G F \subset G \Rightarrow G = F$ . Wówczas istnieje  $B \in G$ , takie że  $B \notin F$ . Ponieważ  $F$  jest ultrafiltrem, mamy  $X \setminus B \in F$ . Z definicji filtra wynika, że  $B \cap (X \setminus B) = \emptyset \in G$ , co prowadzi do sprzeczności, ponieważ  $\emptyset \notin G$ .

□

Uwaga

$$\forall F \text{ - filtr } \exists G \text{ - ultrafiltr } F \subset G$$

**Twierdzenie 2.9**

Niech  $X$  będzie zbiorem skończonym, a  $F$  ultrafiltrem. Wówczas  $\exists_{p \in X}$  taki, że  $F$  jest generowany przez  $\{p\}$ .

D:

Przypadek 1)  $\exists_{p \in X} \{p\} \in F \Rightarrow \forall_{B: p \in B} B \in F$  ( $\{p\} \subset B$ ) (własność 3 z definicji filtra).

Założmy sprzecznie:  $\exists_{C \in F} : p \notin C$ . Wtedy  $p \in X \setminus C \in F$ . Ale  $C \cap (X \setminus C) = \emptyset \in F$ , co prowadzi do sprzeczności, ponieważ  $\emptyset \notin F$ .

Przypadek 2)  $\forall_{p \in X} \{p\} \notin F$  Załóżmy, że  $X = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Wówczas:

$$\begin{bmatrix} X \setminus \{p_1\} \in F, \\ X \setminus \{p_2\} \in F, \\ \vdots \\ X \setminus \{p_n\} \in F \end{bmatrix}$$

Jednak  $X \setminus \{p_1\} \cap X \setminus \{p_2\} \cap \dots \cap X \setminus \{p_n\} = \emptyset \notin F$ , co jest sprzecznością.

□

Wprowadźmy oznaczenia:  $K, W$  - zbiory  $L(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ liniowy porządek w } K\}$   
 $S(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ słaby porządek w } K\}$   $\Sigma = \{M : W \rightarrow L(K)\}$   $f : \Sigma \rightarrow S(K)$

Notacja:  $a \overset{x,M}{<} b$  oznacza  $a < b$  w porządku  $M(x)$   $W \ni x \xrightarrow{M} M(x)$  - porządek w  $K$   $a \underset{M}{<} b$  oznacza  $a < b$  w słabym porządku wyznaczonym przez  $f(M)$ .

**Definicja 2.37**

(p)  $\forall_M (\forall_{x \in W} a \overset{x,M}{<} b) \Rightarrow a \underset{M}{<} b$  (I)  $\forall_{M,N} (\forall_{x \in W} (a \overset{x,M}{<} b \iff a \overset{x,N}{<} b)) \iff (a \underset{M}{<} b \iff a \underset{N}{<} b)$

Zbiór  $T \subset W$  spełnia warunek (DEC) wtedy i tylko wtedy, gdy  $T$  jest zbiorem decyzyjnym:

$$\forall_{M \in \Sigma} \forall_{p,q \in K} (\forall_{x \in T} p \overset{x,M}{<} q) \Rightarrow p \underset{M}{<} q.$$

**Twierdzenie 2.10 (Twierdzenie Arrowa w wersji ultrafiltrów)**

Założenia:  $\#W \geq 3, \#K \geq 3, f : \Sigma \rightarrow S(K)$ . Teza:  $\{T \subset W : T \text{ spełnia (DEC)}\}$  jest ultrafiltrem.

**Wniosek 2.10.1**

Założenia:  $\#W \geq 3, \#K \geq 2, W$  skończony. Jeśli  $f : \Sigma \rightarrow S(K)$  spełnia (p) i (I), to  $\exists_{w \in W} \forall_{M \in \Sigma} M(w) = f(M)$ .

D: Jeśli  $W$  jest skończony, to  $\exists_w \{w\}$  spełnia warunek (DEC). Wówczas:

$$\forall_{a,b \in K} \forall_{M \in \Sigma} (a \overset{w,M}{<} b \Rightarrow a \underset{M}{<} b).$$

□

**Wniosek 2.10.2 (Twierdzenie Arrowa, 1950)**

Założenia:  $\#W \geq 3, \#K \geq 3, W$  skończony. Jeśli metoda porządkowa (MP) spełnia zasadę Pareto oraz IIA, to MP jest dyktaturą porządkową.

D: Z poprzedniego wniosku wynika, że dla  $w$ , dla którego  $\{w\}$  jest zbiorem decyzyjnym,  $w$  jest dyktatorem.

**Zadanie 4**

Sprawdzić, czy

$$F := \{B : B \supset A\}$$

jest filtrem (lub ultrafiltrem).

**Zadanie 5**

Sprawdzić, czy następujące zbiory są filtrami:

a)  $F_1 = \{D : \exists_{E \in S} E \subset D\}$

b)  $F_2 = \{D : \exists_{E \in S} D \subset E\}$

### 3 Deser



W sumie to deseru jeszcze nie ma, ale ma być na ostatnim wykładzie!!!

Egzamin stępnie środa 29 stycznia 11:00