

Matematyczne aspekty wyborów

Na podstawie wykładu

Krzysztofa Ciesielskiego

Skrypt autorstwa

Arkadiusza Dąbala

Wersja z dnia:

2025-10-02

Contents

1 Wstęp	2
1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?	2
1.2 Prawo Ciesielskiego	4
2 Metody głosowania (system wyborczy)	5
3 Metoda zwycięzcy	6
3.1 Metody klasyczne:	6
3.2 Metody semi-klasyczne:	7
3.3 Metoda ani klasyczna, ani semi-klasyczna:	7
4 MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie	10
4.1 Własności metod wyborczych	14
5 Metoda TAK/NIE	21
6 Metody porządkowe	25
7 MR - Metoda rozdziału	32
7.1 Jak wyglądało głosowanie w USA?	37
8 Metoda wartościująca	41
9 Deser	47

1 Wstęp

1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?

Komentarz

Materiał ten nie ma w żadnym stopniu charakteru politycznego, a wyłącznie charakter matematyczny.

Przykład 1.1

Rozważmy poniższe dane, oparte na 6 partiach, 1000 głosach i 6 mandatów do rozdania:

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	380	190	127	87	3
Gitarzyści	192	192	96	64		2
Szachiści	180	180	90			1
Piłkarze	96	96	48			1
Lotniarze	90	90				0
Kolejarze	62	62				0

System ten działa w następujący sposób:

- Liczby głosów dzielone są przez kolejne liczby naturalne dodatnie (tak jak w tabeli).
- Wybierane są z tej tabeli 6 największych liczb (wytluszczony druk).
- Liczba mandatów zależy od liczby wytluszczonych liczb w wierszu partii.

Przykład 1.2

Rozważmy tę samą tabelę, ale założymy, że partia **Gitarzyści** nie przekroczyła progu 5%.

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	380	190	127	87	3
Gitarzyści	192	192	96	64	—	—
Szachiści	180	180	90			2
Piłkarze	96	96	48			1
Lotniarze	90	90				1
Kolejarze	62	62				0

Przykład 1.3

Rozważmy następującą tabelę z 5 mandatami do rozdania:

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	6000	3000	2000	1500	3
Myśliwi	5700	2850	1900		2
Artyści	1950	975			0

Założymy teraz, że partia **Rybacy** prowadziła kampanię przeciwko **Myśliwym**, w wyniku czego liczba otrzymanych głosów zmieniła się następująco:

- Partia **Rybacy** zyskała 400 głosów (+400)
- Partia **Myśliwi** straciła 600 głosów (-600)
- Partia **Artyści** zyskała 200 głosów (+200)

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	6400	3200	2133		2
Myśliwi	5100	2550	1700		2
Artyści	2150	1075			1

Komentarz

Tym oto sposobem partia **Myśliwi** straciła jeden mandat na rzecz partii **Artyści**.

Przykład 1.4

Rozważmy wyniki głosowania dla dwóch partii z 6 mandatami do rozdania.

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	: 5	Mandaty
Matematycy	1200	600	400	300	240	5
Politycy	201	101				1

Popatrzmy na głosy bezpośrednio na konkretnych kandydatów z każdej partii:

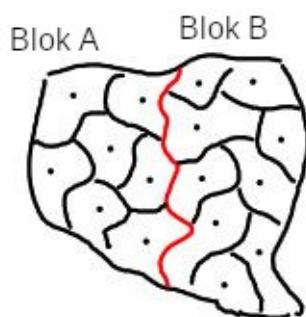
Nazwa	Głosy	Nazwa	Głosy
Kwadrat	201	Magister	35
Trójkąt	200	Magistra	34
Stożek	200	Urzędnik	33
Walec	200	Urzędas	33
Suma	200	Pani Basia	33
Iloczyn	199	Pan Andrzej	33

Komentarz

Tym oto sposobem mandatu nie otrzymuje **Iloczyn**, mimo że zdobył więcej głosów niż **Magister**.

Przykład 1.5

Rozważmy sytuację, w której państwo jest podzielone na dwa bloki, oba mające po 50% wpływu na wyniki wyborów. Każdy blok ma przyznać po 4 mandaty.



W bloku A znajdowały się dwie partie: PZK (Partia Zwolenników Kawy) i PZH (Partia Zwolenników Herbaty), z których każda otrzymała po 25% głosów w ogólnokrajowym głosowaniu. W bloku B znajdowała się partia PZA (Partia Zwolenników Alkoholu) oraz inne partie, które nie przekroczyły progu 5%. Przedstawmy liczbę uzyskanych głosów w PZA:

Nazwa	Głosy
Żubr	19995
Żubrówka	2
Soplica	2
Pan Tadeusz	1

Komentarz

I tym oto sposobem wygrywają osoby, które dostają 2 lub 1 głos.

1.2 Prawo Ciesielskiego

Rozważmy głosowanie względem 2 partii z 7 mandatami:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	1050	350	210	150	117	4
Sportowcy	1008	336	202	144		3

Na ten moment wygrywa partia **Kelnerzy** 4 mandatami. Partia **Sportowcy** postanowiła się rozdzielić na dwie partie i startować osobno:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	1050	350	210	150	117	3
Piłkarze	504	168	101			2
Siatkarze	504	168	101			2

Komentarz

Tym oto sposobem partia **Sportowcy** zdobyła większość.

2 Metody głosowania (system wyborczy)

Wprowadźmy kilka oznaczeń, niech:

W - zbiór wszystkich wyborców,

K - zbiór wszystkich kandydatów.

- Ten sam układ głosów (zestaw głosów) daje ten sam wynik (funkcja).
- Każdy układ głosów daje jakiś wynik (może być \emptyset).

Definicja 2.1 (Model)

Model to układ głosów (z przyporządkowanymi wyborcami).

Definicja 2.2 (Metoda anonimowa)

Metoda jest anonimowa \Leftrightarrow gdy wszyscy wyborcy są traktowani tak samo, to znaczy

$$\forall_{x,y \in W} \text{ zamiana głosów } x \text{ i } y \text{ nie zmienia wyniku.}$$

Komentarz

Alternatywnie, metoda nie jest anonimowa kiedy

$$\exists_{x,y \in W} \text{ takie, że zamiana głosów } x \text{ i } y \text{ istotnie zmienia wynik.}$$

Definicja 2.3 (Metoda neutralna)

Metoda jest neutralna gdy wszyscy kandydaci są traktowani tak samo, to znaczy

$$\forall_{x,y \in K} \text{ zamiana ról } x \text{ i } y \text{ nie zmienia wyniku.}$$

Komentarz

Alternatywnie, metoda nie jest neutralna

$$\exists_{x,y \in K} \text{ takie, że zamiana ról } x \text{ i } y \text{ istotnie zmienia wynik,}$$

dokładniej definiując:

jeśli $\exists k_1, k_2 \in K : W_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_i\}$ głosowali na k_1 , a $W_2 = \{w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_j\}$ głosowali na k_2 to jeżeli kandydaci Ci "zamienią się" wyborcami (zbiorami W_1, W_2), to k_1 i k_2 zamienią się wynikami.

Definicja 2.4

Trzy rodzaje metod ze względu na wyniki:

- 1) Metoda zwycięzcy (MZ) – wybiera zwycięzcę (zwycięzców),
- 2) Metoda porządkowa (MP) – wynik to słaby porządek na zbiorze K ,
- 3) Metoda rozdziału (MR) – wynik to podział pewnych dóbr między kandydatów.

3 Metoda zwycięzcy

Definicja 3.1 (Klasyczna metoda zwycięzcy)

Klasyczna metoda zwycięzcy (klasyczna MZ) polega na tym, że każdy wyborca głosuje na dokładnie jednego kandydata. Zbiór

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow K\}$$

jest zbiorem modeli, gdzie m jest modelem. Klasyczną metodę zwycięzcy możemy opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

Definicja 3.2 (Semi-klasyczna metoda zwycięzcy)

Semi-klasyczna MZ polega na tym, że każdy wyborca głosuje na co najmniej jednego kandydata:

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow P(K) \setminus \emptyset\}.$$

Metodę tę można opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

Definicja 3.3 (Metoda efektywna)

Metoda zwycięzcy jest efektywna \Leftrightarrow zawsze wyłania przynajmniej jednego zwycięzce.

3.1 Metody klasyczne:

- 1) Dyktatura – $\exists_{p \in W}$: wynik jest tożsamy z głosem p .
- 2) Monarchia – dany kandydat $k \in K$ wygrywa niezależnie od głosowania.
- 3) Metoda większości – wygrywa kandydat (lub kandydaci), który otrzymał najwięcej głosów.
- 4) Metoda bezwzględnej większości – wygrywa kandydat $k \in K$, który otrzymał co najmniej $\lfloor \frac{\#W}{2} \rfloor + 1$ głosów.
- 5) Metoda super większości – wygrywa kandydat, który uzyskał co najmniej q głosów, gdzie $q > \frac{\#W}{2}$.
- 6) Metoda status quo – *Założenie*: \exists pewien stan z jednym zwycięzca.
Głosowanie metodą większości (lub super większości):
 - jeśli metoda daje wynik, zwycięża "nowy" kandydat,
 - jeśli metoda nie daje wyniku, zwycięża dotychczasowy kandydat.

Komentarz

Przykładem metody status quo jest referendum.

- 7) Metoda większości ważonej – ($W = \{a_1, \dots, a_n\}$), gdzie głos a_i ma wagę $w_i \geq 0$. Wygrywa ten, kto otrzyma ponad $\frac{w_1 + \dots + w_n}{2}$ punktów.
- 8) Metoda głosowania blokowego – $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$, gdzie W_k to zbiór wyborców bloku. W_k podejmuje decyzję większością głosów. W przypadku remisu wybierają zwycięzce w W_k . Głos z W_k ma wagę i_k . Wygrywa kandydat z największą liczbą punktów.

3.2 Metody semi-klasyczne:

- 9) Metoda n-głosów – każdy wyborca głosuje na n kandydatów, a zwycięża ten, kto uzyska najwięcej głosów.
- 10) Szeroka metoda n-głosów - każdy głosuje na n kandydatów, ale mamy n zwycięzców (lub więcej w przypadku remisu na ostatnim "wygrywającym" miejscu)

3.3 Metoda ani klasyczna, ani semi-klasyczna:

- 11) Metoda punktowa – każdy wyborca $w \in W$ ma do rozdysponowania p punktów ($p \in \mathbb{N}$) między kandydatów. Zwycięża kandydat z największą liczbą punktów.

Definicja 3.4 (Metoda decyzyjna)

Metoda zwycięzcy jest decyzyjna \Leftrightarrow w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzce.

Definicja 3.5 (Metoda prawie decyzyjna)

Metoda zwycięzcy jest prawie decyzyjna \Leftrightarrow w każdym modelu wyłania co najwyżej jednego zwycięzce.

Sytuacja, w której nie ma zwycięzcy, zachodzi wtedy, gdy więcej niż jeden kandydat uzyskał tę samą, największą liczbę punktów.

Zadanie 1

Zbadaj kto jest zwycięzca w głosowaniu przez 99 osób na kandydatów: **Anastazy, Bermudy, Cezary**, jeśli otrzymano następujące wyniki metodą porządkową:

Liczba głosów	Wynik porządkowy
18	ABC
15	ACB
24	BAC
8	BCA
16	CAB
18	CBA

Zadanie 2

Dane są wyniki głosowania:

Imię	Liczba głosów
Jaś	100
Małgosia	1

Zrób tak, by Małgosia wygrała.

Zadanie 3

Uzupełnij tabelę:

	Anonimowa	Neutralna	Efektywna
Dyktatura			
Monarchia			
Metoda Większości			

Definicja 3.6 (Kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości)

Metoda zwycięzcy (MZ) spełnia kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat, który otrzyma ponad 50% głosów, jest jedynym zwycięzcą.

Stwierdzenie 3.1

Mamy klasyczną metodę zwycięzcy, taką że $\#K = 2$, a głosowanie odbywa się według zasady bezwzględnej większości. Wówczas metoda jest prawie decyzyjna.

Dowód:

1° Założmy, że liczba wyborców $\#W$ jest nieparzysta - OK.

2° Liczba wyborców $\#W$ jest parzysta:

- jeden kandydat ma więcej niż 50% głosów - OK.
- remis, czyli obaj mają po 50% - nie ma zwycięzcy (dlatego metoda jest prawie decyzyjna).

□

Stwierdzenie 3.2

Metoda jest decyzyjna \Rightarrow metoda jest prawie decyzyjna.

Definicja 3.7 (Metoda monotoniczna ze wzgledu na zwyciezce)

Z: MZ - klasyczna lub semi-klasyczna.

Metoda jest monotoniczna ze wzgledu na zwycięzce, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat A jest zwycięzcą, a jeśli wybierzemy kandydata B różnego od A ($B \neq A$) oraz jego grupę wyborców, to jeśli ta grupa zmieni swoje głosy bez straty dla A (czyli zmiana nastąpi zgodnie z następującymi dozwolonymi operacjami):

M	\Rightarrow	N
$A\ B$	\Rightarrow	$A\ B$
$- -$	\Rightarrow	$- -$
$+ +$	\Rightarrow	$+ +$
$- +$	\Rightarrow	$+ -$

to: $\Rightarrow A$ nadal wygrywa.

Komentarz

Czyli, jeżeli ktoś, kto nie głosował na zwycięzce (A), a głosował na kandydata B, zmieni swój głos na zwycięzce (A), to (A) nadal wygrywa.

Definicja 3.8 (Metoda kwoty)

MZ klasyczna lub semi-klasyczna jest metodą kwoty (większości kwalifikowanej), wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje q (kwota), taka że liczba głosów o tej wartości, że kandydat A jest zwycięzcą wtedy i tylko wtedy, gdy A otrzymał co najmniej q głosów.

Komentarz

Często kwota wyrażana jest w procentach, a wówczas stosuje się nierówność słabą.

Twierdzenie 3.1 (Maya - Kenneth Maya, 1952r)

Z: Klasyczna metoda zwycięzcy oraz $\#K = 2$. Jeżeli metoda ta jest metodą:

- (1) anonimową
- (2) neutralną
- (3) monotoniczną ze względu na zwycięzce
- (4) prawie decyzyjną

\Rightarrow jest metodą bezwzględnej większości.

Dowód: Założmy, że A, B to kandydaci.

$\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ interesują nas liczby głosów, które otrzymali kandydaci. Założmy:

A - a głosów

B - b głosów

Rozpatrzmy zatem przypadki:

1° $\#W = 2n$ (parzysta), rozważmy dwa podprzypadki:

- a) Jeśli $a = n, b = n$.

Hipoteza: A wygrywa (analogicznie, jeżeli nie wygrywa B), a metoda jest neutralna, to przy wymianie wyborców $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} B$ wygrywa (nie wygrywa A) $\Rightarrow A$ i B wygrywają jednocześnie (nie wygrywa żaden) \Rightarrow co prowadzi do \nexists (bo żaden z nich nie ma ponad 50%).

- b) Jeśli $a > b$.

Hipoteza: B wygrywa, wtedy $a - b$ wyborców zmienia głosy z A na B , $\stackrel{(3)}{\Rightarrow} B$ dalej wygrywa. Teraz B ma a głosów, $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} A$ wygrywa, $\stackrel{(4)}{\Rightarrow} A$ wygrywa i ma ponad połowę głosów.

2° Niech $\#W = 2n + 1$ (nieparzysta).

Niech $a > b$.

Hipoteza: B wygrywa, $a - b$ wyborców zmienia głosy i, jak w 1a), udowadniamy, że B musi mieć ponad połowę głosów.

Tak więc zawsze wygrywa ten, kto ma ponad połowę głosów.

□

4 MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie

Definicja 4.1 (Metoda zakładająca uporządkowanie)

Metoda zwycięzcy jest metodą zakładającą uporządkowanie (MZU) gdy

$\forall_{w \in W}$ wyborca w ustala K kandydatów w liniowym porządku, a jego głos zależy od tego porządku.

Zapis:

$A \stackrel{w,m}{<} B$ - w modelu m oznacza, że wyborca w stawia B wyżej niż A .

$A \stackrel{w}{<} B$ - gdy wiadomo, jaki model.

Przykład 4.1

1. Metoda punktów Bordy (Jean Charles de Borda, 1733–1799, inżynier wojskowy) – Każdy wyborca przydziela punkty od $n - 1$ do 0:

1 miejsce - $n - 1$ punktów

2 miejsce - $n - 2$ punktów

:

$n - 1$ miejsce - 1 punkt

n miejsce - 0 punktów

Zwycięża ten, kto otrzyma największą liczbę punktów.

2. Metoda Hare'a (Sir Thomas Hare, 1806–1891, Anglia, prawnik, 1857 r.) – Polega na odrzucaniu tego kandydata (tych kandydatów), który ma najmniej pierwszych miejsc, i głosowaniu dalej (listy pozostają z usunięciem odrzuconego kandydata), aż ktoś uzyska ponad 50% głosów. Gdy następuje remis i nie ma kogo odrzucić, wszyscy wygrywają.

3. Metoda Coombsa (Clyde Coombs, 1912–1988, USA, psycholog) – Wypisujemy kolejność wyników głosowania, odrzucamy kandydata (lub kandydatów jeżeli ktoś zostanie), który ma najwięcej ostatnich miejsc, i głosujemy dalej, aż ktoś uzyska ponad 50% pierwszych miejsc. Gdy nie można nikogo odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostały.

4. Metoda odrzuceń ostatniego – Jak w metodzie Coombsa, przy czym odrzucamy „do oporu”. Gdy nie można nikogo więcej odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostały.

Komentarz

Różnica między metodą Coombsa a metodą odrzucania ostatniego.

Metoda Coombsa

Liczba:	4	2	3
I pozycja	C	B	B
II pozycja	A	C	A
III pozycja	B	A	C

Wygrywa **B**, bo ma ponad 50% pierwszych miejsc.

Komentarz*Kontynuacja...***Metoda odrzuceń ostatniego**

Liczba:	4	2	3
I pozycja	C	B	B
II pozycja	/A/	C	A
III pozycja	B	/A/	C

Kolejność odrzuceń: B, A, C – C wygrywa.

5. Metoda Copelanda (Arthur H. Copeland, 1898–1970, matematyk) – Porównujemy parami kandydatów. Ten, kto więcej razy zostaje oceniony wyżej, dostaje 1 pkt, a w przypadku remisu obaj dostają po 0,5 pkt.

$$\#\{m : A \stackrel{m}{<} B\}$$

$$\#\{m : B \stackrel{m}{<} A\}$$

Decyduje suma punktów (zwycięzców może być więcej niż jeden).

6. Metoda turniejowa (Z: $\#W = 2n+1$ nieparzysta) – k_1 porównujemy z k_2 (metodą powyżej), a następnie zwyciężkę pierwszego porównania porównujemy z k_3 itd.
7. Metoda pozycyjna – Wyborcy przyznają punkty kandydatowi w postaci $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$, gdzie $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$. np.
 1 miejsce – p_1 punktów
 2 miejsce – p_2 punktów
 itd.

Zwycięża ten z największą liczbą punktów.

Komentarz

W szczególności:

Metoda Bordy: $P(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ Metoda większości: $P(1, 0, \dots, 0)$ Metoda k głosów: $P(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$
 k razy**Definicja 4.2 (Monotoniczność ze względu na transpozycję)**

MZU jest monotoniczna ze względu na transpozycje $\Leftrightarrow \forall_{M-\text{model}} \forall_{w \in W} \forall_{A, B \in K}$, jeśli w M głosuje się $[\Delta, B, A, *]$ i w M wygrywa A, to w N, gdzie zmiana polega na $[\Delta, A, B, *]$, również wygrywa A.

Komentarz

Zmiana polega na zamienieniu kolejności uporządkowania A i B. Dodatkowo porządek

ten był na wykładzie zapisany pionowo.
$$\begin{bmatrix} \Delta \\ B \\ A \\ * \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \\ A \\ B \\ * \end{bmatrix}$$

Umowa: Jeśli nie jest zaznaczone inaczej, to w K, W różne oznaczenia oznaczają różnych kandydatów (wyborców).

Definicja 4.3 (Słaba zasada Pareto)

MZU spełnia słabą zasadę Pareto gdy

$$\forall_M (\exists_{A,B \in K} \forall_{w \in W} A \stackrel{w,M}{<} B) \Rightarrow A \text{ nie wygrywa w } M.$$

Definicja 4.4 (Kandydat Condorceta)

$A \in K$ jest kandydatem Condorceta (zwycięzcą Condorceta) gdy w "bezpośrednich porównaniach" A jest lepszy od każdego innego kandydata czyli

$$\forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \stackrel{w,M}{<} A\} > \#\{w : B \stackrel{w,M}{>} A\}.$$

Definicja 4.5 (Przegrany Condorceta)

$A \in K$ to przegrany Condorceta (w modelu M) gdy

$$\forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \stackrel{w,M}{<} A\} < \#\{w : B \stackrel{w,M}{>} A\}.$$

Definicja 4.6 (Kryterium Condorceta)

Metoda spełnia kryterium Condorceta gdy

$$\forall_M \text{ istnieje kandydat Condorceta (w } M) \Rightarrow A \text{ - jedyny zwycięzca w } M.$$

Definicja 4.7 (Kryterium przegranych Condorceta)

Metoda spełnia kryterium przegranych Condorceta gdy

$$\forall_M \text{ istnieje przegrany Condorceta } A \text{ w } M \Rightarrow A \text{ nie wygrywa w } M.$$

Definicja 4.8 (Metoda jednoznacznie większościowa)

Metoda jest jednoznacznie większościowa gdy

$$\forall_M \text{ kandydat } A \text{ w } M \text{ ma ponad połowę pierwszych miejsc} \Rightarrow A \text{ - jedyny zwycięzca.}$$

Definicja 4.9 (Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji IIA)

Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji spełnia warunek niezależności porażki od ubocznych opcji (spełnia słaby warunek IIA) gdy

$$\forall_{A,B \in K} \forall_{M,N-\text{modele}} \text{ spełnia} \left[\begin{array}{c} \forall_{w \in W} (B \stackrel{w,M}{<} A) \Leftrightarrow (B \stackrel{w,N}{<} A) \\ A \text{ wygrywa w } M, B \text{ nie wygrywa w } M \end{array} \right] \Rightarrow B \text{ nie wygrywa w } N.$$

Innymi słowy: zmiany nie wpływające na relacje przegrany-zwycięzca nie mogą dać przegrywającemu zwycięstwa.

Twierdzenie 4.1

MZU, anonimowa, neutralna \Rightarrow metoda nie jest decyzyjna.

Dowód: Rozważmy $\#K = 2$, $\#W = 2n$ i otrzymane głosy.

Głosy	n	n
1	A	B
2	B	A

Hipoteza: Metoda decyzyjna to np. wygrywa $A \Rightarrow$ wygrywa B \blacktriangleright

Analogicznie zachodzi dla A .

□

Przykład 4.2 (Paradoks Condorceta)

Rozważmy następującą tabelę:

Głosy	9	10	11
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B

Zachodzi $A > B, B > C, C > A$. Mamy więc grę w "kamień, papier, nożyce."

Twierdzenie 4.2

MZU spełnia kryterium Condorceta \Rightarrow jest jednoznacznie większościowa.

Dowód: A ma ponad połowę pierwszych miejsc \Rightarrow A - kandydat Condorceta \Rightarrow A jest jedynym zwycięzcą.

□

Twierdzenie 4.3

MZU spełnia słabe IIA oraz kryterium Condorceta \Rightarrow spełnia słabą zasadę Pareto.

Dowód: Mamy dany model M w którym $\forall_{w \in W} A^{w,M} < B \stackrel{?}{\Rightarrow} A$ nie wygrywa w M .

Rozważmy model N w którym dla każdego wyborcy przesuwamy A i B na szczyt, czyli do postaci

$$\begin{bmatrix} B \\ A \\ \text{reszta} \end{bmatrix}$$

Spełnione jest zatem $A^{w,M} < B \Leftrightarrow A^{w,N} < B$.

W N: B jest kandydatem Condorceta.

W N: B jest jedynym zwycięzcą, B wygrywa, A nie wygrywa.

Słabe IIA $\Rightarrow A$ nie wygrywa w M .

□

Twierdzenie 4.4

MZU, monotoniczna ze względu na transpozycje $\Leftrightarrow (\forall_{M-\text{model}} \forall_{A \in K} \forall_{B_1, \dots, B_n \in A} (A \neq B, ale może być B_i = B_j) \forall_{w_1, \dots, w_n \in W} (może być w_i = w_j), jeżeli w modelu M wygrywa A, to model N utworzony przez [\Delta, B_i, A, *] \rightarrow [\Delta, A, B_i, *] dla i = 1, \dots, n \Rightarrow w N dalej wygrywa A.)$

Dowód: \Leftarrow oczywiste.

\Rightarrow Stosujemy założenie n razy (robimy n skoków i dalej wygrywa A).

□

Przykład 4.3

1. Metoda Blacka (1908-1991, ekonomista) - jeśli istnieje kandydat Condorceta, to on wygrywa. Jeśli nie istnieje, stosujemy punkty Bordy.
2. Metoda Condorceta - jeśli istnieje kandydat, który w "bezpośrednim porównaniu" wygrywa lub remisuje z każdym innym \Leftrightarrow on jest zwycięzcą.

3. Metoda nominacji - każdy, kto ma co najmniej jedno pierwsze miejsce, wygrywa.
4. Metoda ostatnich miejsc - każdy, kto nie ma żadnego ostatniego miejsca, wygrywa.
5. Metoda prezydencka - rozważamy dwóch kandydatów z największą liczbą pierwszych miejsc. Porównujemy ich "bezpośrednio". Jeśli na drugim miejscu jest remis, wszyscy z drugiego miejsca "przechodzą do finału" i tam stosujemy metodę Copelanda.

4.1 Własności metod wyborczych

Metoda	Kryterium Condorceta	Kryterium przegranego Condorceta	Słaba zasada Pareto	Monotoniczność ze względu na transpozycję	IIA	Jednoznaczna większość
Punkty Bordy	-(1)	+	+	+	-(2)	-(1)
Hare'a	-(3)	-(3)	+	-(4)	-(5)	+(O)
Coombsa	-(14)	-(15)	+	-(13)	-(13)	+(O)
Odrzuceń ostatniego	-(11,12)	-(12)	+	-(13)	-(13)	-(11,12)
Copelanda	+	+	+	+	-(10)	+(O)
Większości	-(3)	-(3)	+(O)	+	-(6)	+
Dyktatura	-(7)	-(7)	+	+(O)	+	-(7)
Terminażowa	+	+	-(8)	+	-(9)	+

Metoda punktów Bordy jest monotoniczna ze względu na transpozycję.

A wygrywa. Niech A zdobędzie 1 punkt więcej. Innym się nie zwiększyło $\Rightarrow A$ dalej wygrywa.

D1) **Metoda Bordy, Kryterium przegranego Condorceta** $\forall_w A < B$ Punkty $A <$ Punkty B . W punktacji A zdobywa 1 punkt za każdą parę (B, w) , w której wyborca w umieszcza B wyżej niż A .

A jest przegranyem Condorceta. Mamy k kandydatów, n wyborców, a kandydat K_1, \dots, K_{n-1} otrzyma mniej niż $\frac{n}{2}$ punktów. W sumie, A zdobywa mniej niż $\frac{k(k-1)}{2}$ punktów.

Łączna pula punktów do rozdziału wynosi $n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$ (suma ciągu arytmetycznego). Wszyscy razem zdobywają mniej niż $\frac{n(k-1)}{2}$ punktów, czyli łącznie mniej niż $\frac{k \cdot n \cdot (k-1)}{2}$.

D2) **Metoda Comba i Hare'a** Jeżeli $\forall_w A \stackrel{w}{<} B$, to A wcześniej odpadnie od B .

D3) **IIA dyktatura** Jeżeli A wygrywa, $B \stackrel{d,M}{<} A$, to B nie może wygrać.

D4) **Metoda terminarzowa - Kryterium Condorceta** Kandydat Condorceta wygrywa z każdym i nie odda zwycięstwa.

D5) **Terminażowa - monotoniczność** Przy przesunięciu A również wygrywa.

- D6) **Metoda Copelanda** Gdy A wygrywa z każdym, to zdobywa maksymalną liczbę punktów.
 Zasada Pareto: $\forall_w B \stackrel{w}{<} A \Rightarrow B$ nie wygrywa.

Jeśli B wygrywa w pojedynku z C , to również A wygrywa z C . Wówczas punkty $A > B$, ponieważ A zdobywa punkty za parę (A, B) , a zatem punkty A są silniejsze.

- D7) **Metoda Coombsa - Słaba zasada Pareto** Jeśli $\forall_w B \stackrel{w}{<} A$, to A nie odpadnie, zanim B nie odpadnie (czyli B odpadnie wcześniej niż A).

K1)

3os	2os	Pkt
A	B	2
B	C	1
C	A	0

 A jest kandydatem Condorceta, natomiast otrzymano punkty: $\begin{cases} A = 6 \text{ pkt} \\ B = 7 \text{ pkt} \\ C = 2 \text{ pkt} \end{cases}$

K2)

1os	2os	2os	Pkt
C	A	B	2
A	B	A	1
B	C	C	0

 \Rightarrow

1os	2os	2os	Pkt
C	A	B	2
A	B	$\mathbf{C} \uparrow$	1
B	C	A	0

, wykorzystując transpozycję otrzymujemy wyniki $\begin{cases} A = 5 \\ B = 6 \\ C = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 7 \\ B = 6 \\ C = 2 \end{cases}$, czyli A wygrywa.

K3)

2os	3os	2os
A	B	C
C	A	A
B	C	B

 $\begin{cases} A - \text{kandydat Condorceta} \\ B - \text{przegrany Condorceta} \end{cases}$, bo $A : B 4 : 3 \Rightarrow A : C 5 : 2$, ale wygrywa B .

K4)

6os	5os	4os	2os
A	C	B	B
B	A	C	A
C	B	A	C

 \Rightarrow

6os	5os	4os	2os
A	C	B	$\mathbf{A} \uparrow$
B	A	C	B
C	B	A	C

, wygrywał B , po zmianie C .

K5)

2os	1os	2os
B	A	A
A	B	C
C	C	B

 B nie wygrywa, A wygrywa \Rightarrow

2os	1os	2os
B	A	$\mathbf{C} \uparrow$
A	B	A
C	C	B

, wygrywa B

K6)

2os	3os	2os
A	B	A
B	A	C
C	C	B

, A wygrywa, B nie wygrywa \Rightarrow

2os	3os	2os
A	B	$\mathbf{C} \uparrow$
B	A	A
C	C	B

K7)

2os	1os (w tym jeden dyktator)	
A		B
B		A

 $\begin{cases} A - \text{kandydat Condorceta} \\ B - \text{przegrany Condorceta} \end{cases}$, wygrywa B .

K8) Ustawiamy kolejność: $ABCD$

1os	1os	1os
A	C	B
B	A	D
D	B	C
C	D	A

 mamy $\begin{cases} A > B \\ A < C \\ C > D \end{cases}$, ostatecznie wygrywa D , mimo iż $D < B$.

K9) Ustawiamy kolejność ABC

1os	1os	1os
C	B	A
A	C	B
B	A	C

mamy $\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \end{bmatrix}$, wygrywa $C \Rightarrow$

1os	1os	1os
C	B	B
A	C	A↑
B	A	C

B wygrywa.

K10)

2os	2os	1os	1os
A	C	D	B
D	A	B	C
B	B	C	D
C	D	A	A

otrzymujemy kolejno wyniki: $\begin{bmatrix} \mathbf{A} > B \text{ (4 : 2)} & \mathbf{B} > C \text{ (4 : 2)} \\ A < C \text{ (2 : 4)} & \mathbf{B} = \mathbf{D} \text{ (3 : 3)} \\ \mathbf{A} > D \text{ (4 : 2)} & \mathbf{C} = \mathbf{D} \text{ (3 : 3)} \end{bmatrix}$, przyz-

nano punkty $\begin{bmatrix} A -2 \text{ pkt} \\ B -1,5 \text{ pkt} \\ C -1,5 \text{ pkt} \\ D -1 \text{ pkt} \end{bmatrix}$, A wygrywa, C nie wygrywa.

Po zmianie:

2os	2os	1os	1os
A	C	D	B
D	A	B	C
↑	B	C	D
B	D	A	A

oraz punktacje: $\begin{bmatrix} A -2 \text{ pkt} \\ B -0,5 \text{ pkt} \\ C -2,5 \text{ pkt} \\ D -1 \text{ pkt} \end{bmatrix}$, C wygrywa.

K11)

4os	2os	3os
C	B	B
A	C	A
B	A	C

B ma najwięcej głosów pierwszych, czyli jest kandydatem Condorceta, ale kolejność odrzuceń to B , A , więc wygrywa C .

K12)

2os	1os	2os
C	B	B
A	C	A
B	A	C

C to przegrany Condorceta, ale C wygrywa.

K13)

5os	4os	1os	2os
A	B	C	B
C	A	B	C
B	C	A	A

, A wygrywa, C i B nie wygrywają.

Przekształcamy do:

5os	4os	1os	2os
A	B	C	B
C	A	B	A↑
B	C	A	C

B wygrywa.

K14)

2os	1os	1os	1os	2os
E	D	A	C	B
A	B	B	B	C
D	A	C	D	A
C	E	E	E	D
B	C	D	A	E

B -kandydat Condorceta, B odpada w I turze

	2os	2os	2os	1os
K15)	D	B	C	B
	C	D	B	C
	A	A	A	D
	B	C	D	A

A-przegrany Condorceta, ale A wygrywa

Lemat 4.1 (Lemat o decyzyjności)

Z: MZU, efektywna, $\#K \geq 3$, $\#W \geq 2$. Metoda spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA \Rightarrow jest decyzyjna.

Dowód: Wiemy, że zwycięzca istnieje (chcemy wykazać, że jest jedyny). Założymy, że A i B są

X	Y
:	:
A	B
:	:
B	A
:	:

Niech C - inny kandydat

zwycięzcami w modelu M oraz $W = X \cup Y$

Tworzymy model

X	Y
A	C
C	B
B	A
...	...

, w którym relacje A/B nie są zmienione.

Rozważmy model R

X	Y
A	B
B	C
C	A
...	...

R

Kto wygrywa w R? - A, B lub C (Pareto) Ale nie wygrywa C (z zasady Pareto). W R: relacje A/C są takie same jak w Q.

Założymy, że A wygrywa w R \Rightarrow C nie wygrywa w Q. Wobec tego w R wygrywa B.

Porównajmy M i R: relacje A/B w M i R są takie same. Wobec tego z IIA \Rightarrow w M A nie wygrywa \blacksquare

□

Twierdzenie 4.5 (Twierdzenie Arrowa dla metod zwycięzcy (1951))

Założymy: $\#K \geq 3$, $\#W \geq 2$, MZU, efektywna, spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA \Rightarrow dyktatura.

D: Z lematu o decyzyjności \Rightarrow jeśli zwycięzca istnieje, to jest jedyny.

Czy istnieje jedyny zwycięzca? (pytanie) dyktatura.

Definicja 4.10 (na potrzeby dowodu)

$w \in W$ - dyktator A z kontrolerem B \Leftrightarrow jeśli $A \stackrel{w}{<} B \Rightarrow A$ nie wygrywa.

Podzielimy dowód na 3 kroki:

I krok - $\forall_{A,B \in K} \exists_{w \in W}$ dyktator nad A z kontrolerem B.

II krok - w -dyktator nad A z kandydatem $B \Rightarrow w$ dyktator nad B z kontrolerem A (dyktatora nad parą A, B oznaczamy $d(A, B)$).

III krok - Jeżeli $w = d(A, B) \Rightarrow \forall_{D, E} w = d(D, E)$ (gdzie D, E może być A lub B).

w
A
B_1
B_2
\dots
B_n

Wtedy ten w z I kroku jest dyktatorem.

C
A
B
wszyscy

Dow. I) Niech C będzie trzecim kandydatem.

Wygrywa C . Jeden wyborca prze-

inni	W_1
C	A
A	B
B	C
\vdots	\vdots

suwa C do tyłu: A Wygrywa C lub A .

inni	w_1	w_2
C	A	
A	B	Wygrywa A lub C , i tak dalej, aż
B	C	
\vdots	\vdots	

To samo z trzecim wyborcą:

wszyscy
A
B
C

dojdzie do sytuacji:

Wówczas wygrywa A (z zasady Pareto), a C nie.

Pierwsze przejście, po którym C nie wygrywa (musi takie zaistnieć).

X, Y - grupy wyborców.

X	w	Y
C	C	A
A	A	B
B	B	C

M_1 M_2

X	w	Y
C	A	A
A	B	B
B	C	C

Pokażemy, że w jest dyktatorem nad B z kontrolerem A .

Rozważmy P - dowolny model, w którym $B \stackrel{w, P}{<} A$.

Niech A/B oznacza pewną relację między A i B .

W	V	inni
A/B	A	A/B
	B	
\vdots	\vdots	\vdots

P

W	V	inni
C	A	A/B
A/B	B	C
\vdots	C	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots

Q

Kto wygrywa w Q ? - A, B lub C . Jednak relacje B/C w modelach Q i M_1 są takie same \Rightarrow w Q B nie wygrywa (IIA). Z kolei relacje A/C w Q i M_2 są takie same $\stackrel{IIA}{\Rightarrow}$ w Q C nie wygrywa.

W Q wygrywa A, B nie wygrywa.

Relacje A/B w P i Q są takie same. \Rightarrow w P B nie wygrywa.

Dow. II) w jest dyktatorem nad B z kontrolerem A , v jest dyktatorem nad A z kontrolerem B

W	V	inni
A	B	
B	A	
\vdots	\vdots	

Wygrywa A lub B (z zasady Pareto). B nie wygrywa (bo w), A nie wygrywa (bo v) \blacksquare

Dow. III) Niech $w = d(A, B)$. 1. Zauważmy, że $\forall_{D,E} \exists d(D, E)$. 2. $\forall_{D,E} w = d(D, E)$.

W	V	inni
C	B	C
A	C	B
B	A	A
\vdots	\vdots	\vdots

Wygrywa B lub C (z zasady Pareto). B nie wygrywa (bo w), C nie wygrywa (bo v) \blacksquare

D 2.2. Zamieniamy A i B rolami, $v = d(A, C)$, i w ten sam sposób pokazujemy, że $w = d(A, C)$.

D 2.3. $\stackrel{z 2.1 \text{ i } 2.2}{C \neq A, B}$ oraz $w = d(A, B)$, $w = d(A, C)$. Jeśli $D \neq A, C$, to podobne rozumowanie jak w 2.1 i 2.2 dla A, C, D pokazuje, że $w = d(A, C) \Rightarrow w = d(C, D)$.

Dla $C, d \neq A, B$ OK. Jeden z C, D musi być równy A lub B (z 2.1 i 2.2).

□

Wniosek 4.5.1 (Twierdzenie Arrowa o niemożliwości)

Założmy, że $\#K \geq 3$, $\#W \geq 2$. Wówczas: nie istnieje metoda zakładająca uporządkowanie (MZU) efektywna, która jednocześnie spełnia następujące warunki:

- anonimowa,
- słabą zasadę Pareto,
- słabe kryterium niezależności od opcji ubocznych (IIA).

Przykład 4.4 (Przypadki szczególne w twierdzeniu Arrowa)

1. $\#K = 2$, $\#W$ nieparzyste — metoda większości jest decyzyjna.

2. $\#K = 3$, $\#W = 5$ — reguła „ ≥ 3 pierwsze miejsca” wyłania zwycięzcę.

Twierdzenie 4.6 (Twierdzenie Taylora o niemożliwości)

Dla $\#K \geq 3$, $\#W \geq 3$: nie istnieje MZU efektywna, która spełnia jednocześnie kryterium Condorceta oraz słabe kryterium niezależności od ubocznych opcji (IIA).

Dowód: Z założeń IIA i kryterium Condorceta wynika słaba zasada Pareto. Słaba zasada Pareto wraz z IIA prowadzi do dyktatury (zgodnie z twierdzeniem Arrowa). Jednak dla $\#W \geq 3$, dyktatura nie spełnia kryterium Condorceta.

□

Przypadek $\#W = 4$ jest znacznie prostszy do rozważenia.

5 Metoda TAK/NIE

$$\left[\begin{array}{ll} \Sigma = \{M : W \rightarrow K\} & \Sigma = \{M : W \rightarrow \{\text{TAK}, \text{NIE}\}\} \\ f : \Sigma \rightarrow P(K) & f : \Sigma \rightarrow \{\text{TAK}, \text{NIE}\} \end{array} \right]$$

Przykład 5.1 (Szczególny przypadek metody status quo)

Przypadek z dwoma kandydatami.

Definicja 5.1 (Założenia metody TAK/NIE)

Założenia:

- $\forall_{w \in W} w : \text{TAK} \Rightarrow \text{wynik: TAK},$
- $\forall_{w \in W} w : \text{NIE} \Rightarrow \text{wynik: NIE}.$

Definicja 5.2 (Koalicja wygrywająca)

Podzbiór $A \subset W$ jest koalicją wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\{x \in A : x \text{ głosuje TAK}\} \Rightarrow \text{wynik: TAK}.$$

Definicja 5.3 (Monotoniczność metody TAK/NIE)

Metoda TAK/NIE jest monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\left[\begin{array}{l} A \subset A_1 \\ A \text{ jest koalicją wygrywającą} \end{array} \right] \Rightarrow A_1 \text{ jest koalicją wygrywającą.}$$

Definicja 5.4 (Wyborca decydujący)

Załóżmy, że A jest koalicją wygrywającą. Wyborca $p \in A$ jest decydujący dla A wtedy i tylko wtedy, gdy $A \setminus \{p\}$ nie jest koalicją wygrywającą.

Definicja 5.5 (Wskaźnik Banzhafa)

Załóżmy, że $W = \{a_1, \dots, a_n\}$. Wskaźnik Banzhafa dla a_i jest równy liczbie:

$$B(a_i) = \#\{A : a_i \in A \text{ i } a_i \text{ jest decydujący dla } A\}.$$

Definicja 5.6 (Indeks Banzhafa (Penrose'a-Banzhafa))

Indeks Banzhafa dla a_i definiuje się jako:

$$I_B(a_i) = \frac{B(a_i)}{B(a_1) + \dots + B(a_n)}.$$

Przykład 5.2

Trzech wyborców:

- $w_1 = 50,$
- $w_2 = 45,$
- $w_3 = 1.$

Do podjęcia decyzji TAK potrzeba 51 głosów.

Komentarz

Zapis tego warunku: $W(51; 50, 45, 1)$ — gdzie $W(\min; \text{wagi wyborców})$.

Metoda liczenia wskaźnika Banzhafa (dla metod monotonicznych):

Koalicje wygrywające \ Wyborcy		w_1	w_2	\dots	w_n
	k_1	+	+	\dots	-
ALGORYTM:	k_2	-	+	\dots	-
	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
	k_j	+	-	\dots	-

Legenda:

- + (wyborca należy do koalicji),
- - (wyborca nie należy do koalicji).

Komentarz

Policzymy teraz wskaźniki Banzhafa dla $W(51; 50, 45, 1)$

Koalicje wygrywające:

- $\{w_1, w_2\}$,
- $\{w_1, w_3\}$,
- $\{w_1, w_2, w_3\}$.

Liczba znaków + dla wyborcy w_1 minus liczba znaków - to wskaźnik Banzhafa.

Koalicja		w_1	w_2	w_3
	$\{w_1, w_2\}$	+	+	-
Przykład:	$\{w_1, w_3\}$	+	-	+
	$\{w_1, w_2, w_3\}$	+	+	+
		$3 = (3-0)$	$1 = (2-1)$	$1 = (2-1)$

Wskaźniki Banzhafa:

$$\begin{aligned} B(w_1) &= 3, \\ B(w_2) &= 1, \\ B(w_3) &= 1. \end{aligned}$$

w_1 jest decydującym wyborcą.

Indeksy Banzhafa:

$$\begin{aligned} I_B(w_1) &= \frac{3}{5}, \\ I_B(w_2) &= \frac{1}{5}, \\ I_B(w_3) &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Dlaczego to działa? Niech K to zbiór koalicji wygrywających, a $p \in W$. Dzielimy K na trzy podzbiory:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{A : p \notin A\}, \\ K_2 &= \{A \cup \{p\} : A \in K_1\}, \\ K_3 &= K \setminus (K_1 \cup K_2). \end{aligned}$$

Zauważmy, że:

- $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$,
- zbiory K_1, K_2, K_3 są parami rozłączne,
- $\#K_1 = \#K_2$.

Wskaźnik Banzhafa:

$$B(p) = \#K_3,$$

gdzie p jest decydujący dla A wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in K_3$.

Definicja 5.7 (Wskaźnik/Indeks Shapleya–Shubika)

Dla metody monotonicznej: Porządkujemy wyborców jako $W = (w_1, \dots, w_n)$. W ciągu (w_1, \dots, w_n) wyborca w_k jest wpływającym wyborcą, jeśli:

$\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$ nie tworzy koalicji wygrywającej, a $\{w_1, \dots, w_k\}$ już tak.

Wskaźnik Shapleya–Shubika:

$$S(w_k) = \#\{\text{ciagi}, w \text{ których } w_k \text{ jest wpływającym wyborcą}\}.$$

Indeks Shapleya–Shubika:

$$I_S(w_k) = \frac{S(w_k)}{n!}.$$

Przykład 5.3

Komentarz

Dalej działamy na przykładzie $W(51; 50, 45, 1)$.

Ciągi decyzyjne:

$$\begin{aligned} & (w_1, \mathbf{w}_2|, w_3) \\ & (w_1, \mathbf{w}_3|, w_2) \\ & (w_2, \mathbf{w}_1|, w_3) \\ & (w_2, w_3, \mathbf{w}_1|) \\ & (w_3, \mathbf{w}_1|, w_2) \\ & (w_3, w_2, \mathbf{w}_1|) \end{aligned}$$

$$I_S(w_1) = \frac{4}{6}, \quad I_S(w_2) = \frac{1}{6}, \quad I_S(w_3) = \frac{1}{6},$$

Definicja 5.8 (Odporności na zamianę w metodzie TAK/NIE)

Metoda TAK/NIE jest odporna na zamianę wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{A,B} \text{ — koalicje wygrywające } \forall_{a \in A, b \in B} \text{ co najmniej jedna z koalicji } \begin{bmatrix} (A \setminus \{a\} \cup \{b\}) \\ (B \setminus \{b\} \cup \{a\}) \end{bmatrix} \text{ jest wygrywającą.}$$

Stwierdzenie 5.1

Większość ważona w metodzie TAK/NIE jest odporna na zamianę.

D: Niech A, B będą koalicjami wygrywającymi, $a \in A, b \in B$. Wagi głosów a i b oznaczamy jako W_a, W_b . Zakładamy, że $W_b \geq W_a$. Wówczas:

$$W(A \setminus \{a\} \cup \{b\}) \geq W(A).$$

□

Zadanie 4

Porównać $W(5; 4, 3, 2, 1)$ z:

- a) $W(9; 8, 7, 2, 1)$,
- b) $W(9; 8, 7, 3, 2)$.

Zadanie 5

Niech A, B, C, D oznaczają wyborców w $W(3; A, B, C, D)$, a pary AB i CD oznaczają koalicje wygrywające.

Wykazać, że to nie jest metoda z większością ważoną.

Zadanie 6

Dla grupy $B + 6r$ (burmistrz i 6 radnych) wyznaczyć indeksy Shapleya–Shubika.

(Głosowanie przechodzi, gdy głosuje 5 radnych albo burmistrz i 2 radnych.)

6 Metody porządkowe

Definicja 6.1 (Słaby porządek)

Zbiór K jest słabo uporządkowany wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists R$ — relacja równoważności w K taka, że K/R jest uporządkowany liniowo przez relację \leq .

Dla $a, b \in K$ definiujemy:

$$a < b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [a]_R < [b]_R,$$

gdzie relacja jest przechodnia i słabo antysymetryczna.

Definicja 6.2 (Metoda porządkowa (MP))

Każdy wyborca porządkuje kandydatów w sposób liniowy.

Wynik wyborów jest słabym porządkiem w zbiorze K :

- $L(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ jest porządkiem w } K\}$,
- $S(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ jest słabym porządkiem w } K\}$.

Zapis formalny:

$$\Sigma = \{M : W \rightarrow L(K)\}, \quad f : \Sigma \rightarrow S(K).$$

Każda efektywna metoda z założeniem większości wyborców (MZU) jest metodą porządkową (MP).

Zapis notacyjny:

- $A \overset{w}{<} B$,
- $A \overset{w,M}{<} B$,
- $A \underset{M}{<} B$ — w modelu M , po wyborach B znajduje się nad A .

Przykład 6.1

Dyktatura porządkowa.

Wynik wyborów jest identyczny z głosem jednego wyborcy.

Definicja 6.3 (Porządkowa zasada Pareto)

Metoda porządkowa (MP) spełnia (porządkową) zasadę Pareto wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_M \forall_{A,B \in K} \left(\forall_w A \overset{w,M}{<} B \right) \Rightarrow A \underset{M}{<} B.$$

Definicja 6.4 (Metoda spełniająca postulat liberalizmu Sena)

Metoda spełnia postulat liberalizmu Sena, jeśli:

$$\forall_{w \in W} \exists_{A,B \in K (A \neq B)} \left(A \overset{w,M}{<} B \Rightarrow A \underset{M}{<} B \right) \text{ oraz } \left(A \overset{w,M}{>} B \Rightarrow A \underset{M}{>} B \right).$$

Twierdzenie 6.1 (Twierdzenie Sena)

Niech $\#K \geq 2$ oraz $\#W \geq 2$. Wtedy: Nie istnieje metoda spełniająca jednocześnie:

1. zasadę Pareto,
2. postulat liberalizmu Sena.

D: Niech w, v będą wyborcami, a A, B, C, D będą elementami K . Rozważmy następujące przypadki:

1. Dla w, v i pary A, B : Jeśli $w : A \stackrel{w,M}{<} B \Rightarrow A \stackrel{M}{<} B$ oraz $w : B \stackrel{w,M}{<} A \Rightarrow B \stackrel{M}{<} A$, to mamy sytuację wzajemnej sprzeczności wynikającą z narzuconych preferencji.

2. Kolejność preferencji dla w :

$$\begin{bmatrix} w : \\ C \\ B \\ A \\ D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{Reszta:} \\ A \\ C \\ B \\ D \end{bmatrix}$$

Z powyższego wynika, że nie można jednocześnie spełnić zasady Pareto i postulatu liberalizmu Sena.

$A \stackrel{M}{<} B, C \stackrel{M}{<} A, B \stackrel{M}{<} C$ (zasada Pareto).

Jednak:

$$A \stackrel{M}{<} B \stackrel{M}{<} C \stackrel{M}{<} A$$

jest sprzecznością.

3. Kolejność preferencji:

$$\begin{bmatrix} w : \\ D \\ A \\ B \\ C \\ \text{reszta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{reszta:} \\ B \\ C \\ D \\ A \\ \text{reszta} \end{bmatrix}$$

Z zasady Pareto:

$$B \stackrel{M}{<} A \stackrel{M}{<} D \stackrel{M}{<} C \stackrel{M}{<} B$$

co prowadzi do sprzeczności.

□

Definicja 6.5 (Filtr)

Niech X będzie zbiorem. Podzbiór $F \subset P(X)$, gdzie $F \neq \emptyset$, nazywamy **“filtrem”**, jeśli spełnia następujące warunki:

- 1) $\emptyset \notin F$
- 2) Jeśli $A, B \in F$, to $A \cap B \in F$
- 3) Jeśli $A \in F$ oraz $A \subset B \subset X$, to $B \in F$

Przykład 6.2

1. Niech X będzie zbiorem oraz $p \in X$. Wówczas zbiór

$$\{A \subset X : p \in A\}$$

jest filtrem.

2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, $p \in X$, a U otoczeniem punktu p . Wówczas zbiór wszystkich otoczeń p jest filtrem.

Definicja 6.6 (Ultrafiltr)

Podzbiór $F \subset P(X)$ nazywamy **“ultrafiltrem”**, jeśli spełnia następujące warunki:

1) F jest filtrem.

2) Dla każdego $A \subset X$ zachodzi dokładnie jedno z dwóch: $A \in F$ albo $X \setminus A \in F$.

Przykład 6.3

1. Zobacz przykład 2.11.1. Jest on Ultrafiltrem

Stwierdzenie 6.1

Ultrafiltr jest filtrem maksymalnym, tzn. jeśli F jest ultrafiltrem, to dla każdego filtra G , jeśli $F \subset G$, to $G = F$.

Załóżmy, że istnieje filtr G taki, że $\Rightarrow \forall_G F \subset G \Rightarrow G = F$. Wówczas istnieje $B \in G$, takie że $B \notin F$. Ponieważ F jest ultrafiltrem, mamy $X \setminus B \in F$. Z definicji filtra wynika, że $B \cap (X \setminus B) = \emptyset \in G$, co prowadzi do sprzeczności, ponieważ $\emptyset \notin G$.

□

Uwaga

$$\forall_{F-\text{filtr}} \exists_{G-\text{ultrafiltr}} F \subset G$$

Twierdzenie 6.2

Niech X będzie zbiorem skończonym, a F ultrafiltrem. Wówczas $\exists_{p \in X}$ taki, że F jest generowany przez $\{p\}$.

D:

Przypadek 1) $\exists_{p \in X} \{p\} \in F \Rightarrow \forall_{B:p \in B} B \in F$ ($\{p\} \subset B$) (własność 3 z definicji filtru).

Załóżmy sprzecznie: $\exists_{C \in F} : p \notin C$. Wtedy $p \in X \setminus C \in F$. Ale $C \cap (X \setminus C) = \emptyset \in F$, co prowadzi do sprzeczności, ponieważ $\emptyset \notin F$.

Przypadek 2) $\forall_{p \in X} \{p\} \notin F$ Załóżmy, że $X = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Wówczas:

$$\left[\begin{array}{l} X \setminus \{p_1\} \in F, \\ X \setminus \{p_2\} \in F, \\ \vdots \\ X \setminus \{p_n\} \in F \end{array} \right]$$

Jednak $X \setminus \{p_1\} \cap X \setminus \{p_2\} \cap \dots \cap X \setminus \{p_n\} = \emptyset \notin F$, co jest sprzeczną.

□

Wprowadźmy oznaczenia: K, W - zbiory $L(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ liniowy porządek w } K\}$ $S(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ słaby porządek w } K\}$ $\Sigma = \{M : W \rightarrow L(K)\}$ $f : \Sigma \rightarrow S(K)$

Notacja: $a \stackrel{x,M}{<} b$ oznacza $a < b$ w porządku $M(x)$ $W \ni x \xrightarrow{M} M(x)$ - porządek w K $a \underset{M}{<} b$ oznacza $a < b$ w słabym porządku wyznaczonym przez $f(M)$.

Definicja 6.7 (Warunek (DEC))

MZU

$$\forall_M (\forall_{x \in W} a \stackrel{x,M}{<} b) \Rightarrow a \underset{M}{<} b \quad (I) \quad \forall_{M,N} \forall_{x \in W} (a \stackrel{x,M}{<} b \iff a \stackrel{x,N}{<} b)$$

$$\iff$$

$$(a \underset{M}{<} b \iff a \underset{N}{<} b)$$

Zbiór $T \subset W$ spełnia warunek (DEC) wtedy i tylko wtedy, gdy T jest zbiorem decyzyjnym:

$$\forall_{M \in \Sigma} \forall_{p,q \in K} (\forall_{x \in T} p \stackrel{x,M}{<} q) \Rightarrow p \underset{M}{\leq} q.$$

Twierdzenie 6.3 (Twierdzenie Arrowa w wersji ultrafiltrów)

Założenia: $\#W \geq 3, \#K \geq 3, f : \Sigma \rightarrow S(K)$ spełnia zasadę Pareto (P) oraz IIA (I).

Teza: $\{T \subset W : T \text{ spełnia (DEC)}\}$ jest ultrafiltrem.

Dowód:

1. $D \neq \emptyset: W \in D$ (z P).
2. $\emptyset \notin D$: Weźmy $a \neq b \in K$,

$$\left[\begin{array}{l} \forall_{x \in W} a \stackrel{x,M}{<} b \Rightarrow a \underset{M}{\leq} b \\ \forall_{x \in \emptyset} b \stackrel{x,M}{<} a \Rightarrow b \underset{M}{\leq} a \end{array} \right] \Rightarrow \text{sprzeczność.}$$

3. $T_1 \in D, T_1 \subset T_2 \stackrel{?}{\Rightarrow} T_2 \in D$:

$$a, b \in K, M \in \Sigma, \forall_{x \in T_2} a \stackrel{x,M}{<} b \Rightarrow \forall_{x \in T_1} a \stackrel{x,M}{<} b \stackrel{T_1 \in D}{\Rightarrow} a \underset{M}{\leq} b.$$

4. $T_1, T_2 \in D \stackrel{?}{\Rightarrow} T_1 \cap T_2 \in D$: Rozważmy $a, b \in K, M \in \Sigma$. Czy

$$\forall_{x \in T_1 \cap T_2} a \stackrel{x,M}{<} b \Rightarrow a \underset{M}{\leq} b?$$

Weźmy $c \in K, c \neq a, b$. Czy istnieje $N \in \Sigma$ (model), w którym

$$\forall_{x \in T_1} a \stackrel{x,N}{<} c, \quad \forall_{x \in T_2} c \stackrel{x,N}{<} b, \quad \forall_{x \in W} a \stackrel{x,N}{<} b \Rightarrow a \stackrel{x,M}{<} b?$$

Jeśli tak, to:

- Pierwsza i druga część implikują $a \underset{N}{\leq} b$.
- Na mocy (I): $a \underset{M}{\leq} b$.

$$M - \text{dany}, \quad R := \{x \in W : a \stackrel{x,M}{<} b\}.$$

Wtedy:

$x \in R$	$x \notin R$	$x \notin T_1$
$a \stackrel{x,M}{<} c \stackrel{x,M}{<} b$	$b \stackrel{x,M}{<} a \stackrel{x,M}{<} c$	$c \stackrel{x,M}{<} b \stackrel{x,M}{<} a$

5. Czy $\forall_{T \subset W} (T \in D \text{ lub } W \setminus T \in D)$? Dowód podzielimy na 4 lematy.

Lemat 6.1

$\forall_{T \subset W}, \forall_{a,b \in K, a \neq b} :$

$$\left[\begin{array}{l} (\exists_{N \in \Sigma} : T = \{x \in W : a \stackrel{x,N}{<} b\} \text{ i } a \underset{N}{\leq} b) \\ \forall_{M \in \Sigma} : T = \{x \in W : a \stackrel{x,M}{<} b\} \Rightarrow a \underset{M}{\leq} b \end{array} \right].$$

Podane warunki są równoważne.

Dowód:

- (\Rightarrow): $M : x \in T \Leftrightarrow a \stackrel{x,N}{<} b$ i $a \underset{N}{<} b \xrightarrow{(I)} a \underset{M}{<} b$.

- (\Leftarrow): Weźmy N spełniający założenia. Wtedy:

$$a \stackrel{x,N}{<} b \Leftrightarrow x \in T \Rightarrow a \underset{N}{<} b.$$

Lemat 6.2

$\forall_{T \subset W}, \forall_{a,b,c \in K, a \neq b \neq c} :$

1. $(a \underset{T}{*} b \Rightarrow c \underset{T}{*} b),$

2. $(a \underset{T}{*} b \Rightarrow a \underset{T}{*} c).$

Dowód:

Ad 1. Rozważmy $M : x \in T \Leftrightarrow c \stackrel{x,M}{<} b$. Czy $c \underset{M}{<} b$? Rozważmy model N , gdzie:

$$c \stackrel{x,N}{<} a \stackrel{x,N}{<} b \text{ (gdy } c \stackrel{x,M}{<} b\text{) i } a \stackrel{x,N}{<} b \Rightarrow c \underset{M}{<} b.$$

Ad 2. Analogicznie dla $M : x \in T \Leftrightarrow a \stackrel{x,M}{<} c$.

Lemat 6.3

$$Z: T \in W \exists_{a,b,a \neq b} a \underset{T}{*} b \Leftrightarrow \forall_{c,d,c \neq d} c \underset{T}{*} d$$

Dowód: (wynika bezpośrednio z wcześniejszego lematu, ale formalny dowód)

\Leftarrow oczywiste

$$\Rightarrow a \underset{T}{*} b, c \neq d \quad (1) \quad c = a, d = b \text{ OK} \quad (2) \quad c \neq a, d = b \text{ wynika z (2.1)} \quad (3) \quad c = a, d \neq b \text{ wynika z}$$

$$(2.2) \quad (4) \quad c \neq a, d \neq b \quad (4.1) \quad a \underset{T}{*} b \xrightarrow{(2.1)} c \underset{T}{*} b \xrightarrow{(2.2)} c \underset{T}{*} d \text{ (jeśli } c \neq d\text{)} \quad (4.2) \quad b = c \quad a \underset{T}{*} b \xrightarrow{(2.2)} a \underset{T}{*} d \Rightarrow c \underset{T}{*} d \\ \text{(jeśli } a \neq d\text{)} \quad (4.3) \quad a = d, b = c, \#K \geq 3 \quad e \neq a, b, c, d \quad a \underset{T}{*} b \xrightarrow{(2.2)} a \underset{T}{*} e \xrightarrow{(2.2)} c \underset{T}{*} d$$

Lemat 6.4

$$S \subset W, S \neq \emptyset, \exists_{a \neq b} a \underset{S}{*} b \Rightarrow S \in D$$

Dowód: $M \in \Sigma, p, q \in K, \forall_{x \in S} p \stackrel{x,M}{<} q \xrightarrow{?} p \underset{M}{<} q$

$$T := \{x \in W : p \stackrel{x,M}{<} q\}, S \subset T$$

1. $T = S$ 2. $T = W$ 3. $W = S \cup (T \setminus S) \cup (W \setminus T)$, przy czym $(T \setminus S), (W \setminus T) \neq \emptyset$

$$(1) \quad a \underset{S}{*} b \text{ (lemat 3)} \Rightarrow p \underset{S}{*} q \Rightarrow p \underset{M}{<} q$$

$$(2) \quad (P) \Rightarrow p \underset{M}{<} q$$

(3) $c \in K, c \neq p, q$ Definiujemy N :

$$x \in S \Rightarrow p \stackrel{x,N}{<} c \stackrel{x,N}{<} q$$

$$x \in (T \setminus S) \Rightarrow c \stackrel{x,N}{<} p \stackrel{x,N}{<} q$$

$$x \in (W \setminus T) \Rightarrow c \stackrel{x,N}{<} q \stackrel{x,N}{<} p \text{ (reszta dowolnie)}$$

$\forall_{x \in W} c \stackrel{x,N}{<} q \stackrel{(P)}{\Rightarrow} c \stackrel{x,N}{<} q$

Założenie: $a * b \stackrel{L3}{\Rightarrow} p * c \stackrel{\text{def. } ??}{\Rightarrow} p \stackrel{x,N}{<} c \Rightarrow p \stackrel{x,N}{<} q$

Wniosek: $T = \{x \in W : p \stackrel{x,N}{<} q\}$ i $p \stackrel{x,N}{<} q \Rightarrow p \stackrel{T}{**} q \Rightarrow p \stackrel{T}{*} q \Rightarrow p \stackrel{M}{<} q$

Wracając do Twierdzenia Arrowa:

Dowód końcowy:

$T \subset W$ Czy $T \in D$ lub $W \setminus T \in D$?

Weźmy $a, b, c \in K$ (różne), $M \in \Sigma$

$x \in T : c \stackrel{x,M}{<} b \stackrel{x,M}{<} a$ $x \in W \setminus T : a \stackrel{x,M}{<} c \stackrel{x,M}{<} b$ (reszta dowolnie)

$\forall_{x \in W} c \stackrel{x,M}{<} b \stackrel{?}{\Rightarrow} c \stackrel{M}{<} b$ (Δ)

Są 3 możliwości:

1. $b \stackrel{M}{<} a$ 2. $a \stackrel{M}{<} b$ 3. a, b w tej samej klasie równoważności

(1) $\Rightarrow b \stackrel{M}{<} a \Leftrightarrow x \in T, b \stackrel{T}{**} a \stackrel{L1}{\Rightarrow} b \stackrel{T}{*} a \stackrel{L4}{\Rightarrow} T \in D$

(2) $\Rightarrow a \stackrel{x,M}{<} b \Leftrightarrow x \in W \setminus T \Rightarrow a \stackrel{W \setminus T}{**} b \stackrel{L1}{\Rightarrow} a \stackrel{T}{*} b \stackrel{L4}{\Rightarrow} W \setminus T \in D$

(3) $\stackrel{(\Delta)}{\Rightarrow} c \stackrel{M}{<} a$ wtedy mamy: $c \stackrel{x,M}{<} a \Leftrightarrow x \in T \Rightarrow c \stackrel{T}{**} a \stackrel{L1}{\Rightarrow} c \stackrel{T}{*} a \stackrel{L4}{\Rightarrow} T \in D$

□

Wniosek 6.3.1

Założenia: $\#W \geq 3, \#K \geq 2, W$ skończony. Jeśli $f : \Sigma \rightarrow S(K)$ spełnia (P) i (I), to $\exists_{w \in W} \forall_{M \in \Sigma} M(w) = f(M)$.

Dowód: Jeśli W jest skończony, to $\exists_w \{w\}$ spełnia warunek (DEC). Wówczas:

$$\forall_{a,b \in K} \forall_{M \in \Sigma} (a \stackrel{w,M}{<} b \Rightarrow a \stackrel{M}{<} b).$$

□

Wniosek 6.3.2 (Twierdzenie Arrowa, 1950)

Założenia: $\#W \geq 3, \#K \geq 3, W$ skończony. Jeśli metoda porządkowa (MP) spełnia zasadę Pareto oraz IIA, to MP jest dyktaturą porządkową.

Dowód: Z poprzedniego wniosku wynika, że dla w , dla którego $\{w\}$ jest zbiorem decyzyjnym, w jest dyktatorem.

Zadanie 7

Sprawdzić, czy

$$F := \{B : B \supset A\}$$

jest filtrem (lub ultrafiltrem).

Zadanie 8

Sprawdzić, czy następujące zbiory są filtrami:

a) $F_1 = \{D : \exists_{E \in S} E \subset D\}$

b) $F_2 = \{D : \exists_{E \in S} D \subset E\}$

Definicja 6.8 (Liberalizm Senna)

$$\forall_{w \in W} \exists_{a,b \in K; a \neq b} \forall_M w \text{ decyduje o } (a, b)$$

Twierdzenie 6.4

Dla K i W istnieje metoda spełniająca postulat liberalizmu Senna wtedy i tylko wtedy, gdy $\#W < \#K$.

Część (\Leftarrow): Niech $K = \{k_1, \dots, k_n\}$ oraz $W = \{w_1, \dots, w_s\}$, gdzie $s \leq n - 1$.

Przypisujemy:

$$w_1 : k_1, k_n \quad w_2 : k_2, k_n \quad \dots \quad w_s : k_s, k_n.$$

Metoda: k_n pozostaje ostatnim kandydatem, a k_1, \dots, k_s w stosunku do k_n są ustalane przez odpowiednie w_1, \dots, w_s . Pozostałe kandydaty ustawiamy numerami rosnąco:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ k_n \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Część (\Rightarrow):

Wprowadźmy oznaczenia:

· oznacza k_i , | oznacza w_i , który łączy tych kandydatów, o których decyduje.

Załóżmy, że $\#| > \#\cdot$.

1. Rysujemy odpowiedni graf.
2. Odrzucamy kropki bez kreski oraz te z jedną kreską. Pozostaje n kropek i l kresek, przy czym $l \geq n$.
3. Wybieramy $\cdot, |, \cdot, |, \cdot, |, \dots$ aż powstanie cykl.

Wówczas:

$$\begin{bmatrix} w_1 \text{ decyduje o } k_1, k_2 \\ w_2 \text{ decyduje o } k_2, k_3 \\ \vdots \\ w_s \text{ decyduje o } k_s, k_1 \end{bmatrix}$$

co prowadzi do:

$$\begin{bmatrix} k_1 \xrightarrow{w_1} k_2 \\ k_2 \xrightarrow{w_2} k_3 \\ \vdots \\ k_s \xrightarrow{w_s} k_1 \end{bmatrix}.$$

□

7 MR - Metoda rozdziału

Definicja 7.1

Wprowadzamy oznaczenia:

S - liczba akcjonariuszy (stanów)

m - liczba akcji (foteli)

P_1, \dots, P_s - wkłady akcjonariuszy (populacje)

a_1, \dots, a_s - liczba akcji dla akcjonariuszy

$$(S, M, [p_1, \dots, p_s]) \longmapsto (a_1, \dots, a_s)$$

gdzie spełnione jest $p = p_1 + \dots + p_s$, $a_1 + \dots + a_s = m$

$\frac{p_i}{p}$ - udział akcjonariusza i

$m \cdot \frac{p_i}{p}$ (zazwyczaj $\notin \mathbb{Z}$) - to, co powinien dostać

$W = \frac{p}{m}$ - wartość akcji (jednej)

$q_i := m \cdot \frac{p_i}{p} = \frac{p_i}{\frac{p}{m}} = \frac{p_i}{W}$ - quota

$\lfloor q_i \rfloor = \lfloor \frac{m \cdot p_i}{p} \rfloor$ - dolna quota

$\lceil q_i \rceil = \lceil \frac{m \cdot p_i}{p} \rceil$ - górna quota

Definicja 7.2 (Warunki sensowności metody rozdziału)

1. (Warunek quoty) $\lfloor q_i \rfloor \leq a_i \leq \lceil q_i \rceil$ (uwzględniając $q_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow g_i = a_i$)

2. (Warunek monotoniczności) $p_i > p_j \Rightarrow a_i \geq a_j$ (analogicznie w drugą stronę)

3. (Warunek populacji) Dla S, m danych:

$$p_1, \dots, p_s \longmapsto a_1, \dots, a_s$$

jeśli nastąpiła zmiana:

$$\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_s \longrightarrow \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s,$$

to:

$$\exists_{i,j} \bar{p}_i > p_i, \bar{a}_i < a_i \quad \text{oraz} \quad \bar{p}_j < p_j, \bar{a}_j > a_j$$

4. (Warunek monotoniczności akcji) Dla p_1, \dots, p_n stałych, jeśli $\bar{m} > m$, to $\forall_i \bar{a}_i \geq a_i$.

Nie mogą zajść wszystkie te warunki na raz.

Przykład 7.1

1) Metoda reszt (metoda Hamiltona)

$$a_i = \lfloor q_i \rfloor + \epsilon_i, \quad \text{gdzie } \epsilon_i = 0 \text{ lub } 1,$$

bierzemy największe reszty $q_i - \lfloor q_i \rfloor$ aż do "wyczerpania" m .

Przykład: $S = 3$, $m = 10$, $W = \frac{1000}{10} = 100$

	p_i	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	r_i	Wynik
1	264	2,64	2	0,64	3
2	361	3,61	3	0,61	3
3	375	3,75	3	0,75	4
	$\Sigma = 1000$		8		10

Paradoks Alabamy

Dla $S = 3$, $m = 10$, $W = 100$, po zmianie liczby akcji na $m = 11$, $W = 90,9$, wyniki się zmieniają:

p_i	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	Wynik		p_i	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	Wynik
145	1, 45	1	2	⇒	145	1, 595	1	1
340	3, 40	3	3		340	3, 740	3	4
515	5, 15	5	5		515	5, 665	5	6
$\Sigma = 1000$		9	10		$\Sigma = 1000$		9	11

Paradoks Oklahomy

Po zmianie liczby akcjonariuszy i akcji, np. $S = 4$, $m = 13$, $W = 76,9$, także mogą wystąpić sprzeczne wyniki.

p_i	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	Wynik		p_i	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	Wynik
7264183	37606	37,606	38	⇒	7264183	37606	37,606	38
694466	3595	3,595	3		694466	3595	3,595	3
--	--	--	--		--	--	--	--

2) Metoda Jeffersona

Bierzemy liczbę v (umowną wartość akcji), obliczamy:

$$\bar{q}_i = \frac{p_i}{v},$$

i dobieramy v , by suma dolnych kwot $\lfloor \bar{q}_i \rfloor$ wynosiła m .

Bierzemy liczbę v - umowna wartość akcji (w-prawdziwa)

$\frac{p_i}{v}$ - kwoty umowne

Dobieramy tak, by suma dolnych kwot umownych wynosiła m .

Niech $S = 3$, $m = 10$, $W = 100$, $v = 90$.

p_i	q_i	\bar{q}_i	$\lfloor \bar{q}_i \rfloor$
264	2,64	1	2
361	3,61	3	3
375	3,75	5	5
$\Sigma = 1000$		9	10

Jak dobrać v ?

- za mało akcji → zmniejszamy v ,
- za dużo akcji → zwiększamy v .

3) Przybliżanie do wartościami umownymi do górnych quot (Metoda Adamsa)

Niech $S = 2$, $m = 10$, $W = 100$, $v = 115$.

	p_i	q_i	\bar{q}_i	Wynik
A	120	1,8	2	1,04
B	880	8,8	9	7,65
	$\Sigma = 1000$		11	10

4) Zaokrąglenie do bliższej dolnej/górnej (Metoda Webstera)

Niech $S = 3$, $m = 5$.

	p_i	q_i	Wynik
A	480	2,66	3
B	240	1,33	1
C	100	0,55	1
	$\Sigma = 820$		5

$$\bar{q}_i > \frac{\lfloor \bar{q}_i \rfloor + \lceil \bar{q}_i \rceil}{2} \nearrow \lceil \bar{q}_i \rceil$$

$$\bar{q}_i < \frac{\lfloor \bar{q}_i \rfloor + \lceil \bar{q}_i \rceil}{2} \searrow \lfloor \bar{q}_i \rfloor$$

5) Metoda Hilla

Jak w metodzie Webstera, ale

$$\bar{q}_i > \sqrt{\lfloor \bar{q}_i \rfloor \cdot \lceil \bar{q}_i \rceil} \nearrow \lceil \bar{q}_i \rceil$$

$$\bar{q}_i < \sqrt{\lfloor \bar{q}_i \rfloor \cdot \lceil \bar{q}_i \rceil} \searrow \lfloor \bar{q}_i \rfloor$$

6) Metoda Deana - ze średnią harmoniczną (to samo, ale ze średnią harmoniczną)

Twierdzenie 7.1

Metoda Jeffersona \Leftrightarrow wyznaczaniu liczb akcji za pomocą ilorazów.

Dowód: Niech m będzie liczbą akcji. Rozpatrzmy ilorazy p_i przez $1, 2, 3, 4, \dots$

$\alpha :$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$
$\beta :$	$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$
$\gamma :$	$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$

Niech:

- t - największy z wyników nie dający akcji,
- T - najmniejszy z wyników dający akcje.

□

Stwierdzenie 7.1

Dla każdego $v \in (t, T)$ Metoda Jeffersona z wartością umowną v daje w sumie m akcji, gdzie $t < v < T$.

Dowód: Niech:

- p_i : układ i daje a_i akcji,
- v - umowna wartość akcji,
- $q = \frac{p_i}{v}$ - umowna quota.

Metoda Jeffersona jest równoważna Metodzie d'Hondta. Dzielimy wtedy przez kolejne dodatnie liczby całkowite, a największe liczby wyznaczają przypisywane akcje.

Rozważmy:

$$\frac{p_i}{1}, \frac{p_i}{2}, \dots, \frac{p_i}{a_i}, \frac{p_i}{a_i + 1}$$

gdzie:

- $\frac{p_i}{a_i}$ - daje TAK,
- $\frac{p_i}{a_i+1}$ - daje NIE,
- $\frac{p_i}{a_i} \geq T$,
- $\frac{p_i}{a_i+1} \leq t$.

Zachodzi:

$$\frac{p_i}{a_i + 1} \leq t < v < T \leq \frac{p_i}{a_i}$$

czyli:

$$\frac{p_i}{a_i + 1} < v < \frac{p_i}{a_i}$$

co można przekształcić do:

$$\frac{1}{a_i} < \frac{v}{p_i} < \frac{1}{a_i}$$

oraz:

$$a_i < \frac{p_i}{v} < 1 + a_i$$

Stąd:

$$a_i = \left\lfloor \frac{p_i}{v} \right\rfloor$$

co daje odpowiedni efekt dla danego v .

□

Twierdzenie 7.2 (Balińskiego-Younga)

Dla $S \geq 4$ i $m \geq 7$ nie istnieje metoda spełniająca jednocześnie warunki:

- *quoty*,
- *monotoniczności*,
- *populacji*.

Dowód: Niech:

- S - liczba akcjonariuszy,
- m - liczba akcji,
- p_1, \dots, p_S - wkłady ($p = p_1 + \dots + p_S$),
- a_1, \dots, a_S - akcje.

Zakładamy:

$$S \geq 4, \quad m \geq 7, \quad \epsilon < \frac{1}{2} (\epsilon > 0), \quad b, c > 0$$

Model M zakłada, że spełnione są warunki quoty i monotoniczności.

	Wkład	Quota	akcji
p_1	$b(5 + \epsilon)$	$5 + \epsilon$	5, 6
p_2	$b \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0, 1
p_3	$b \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{\epsilon}{3}\right)$	$\frac{2}{3} - \frac{\epsilon}{3}$	0, 1
p_4	$b \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2\epsilon}{3}\right)$	$\frac{2}{3} - \frac{2\epsilon}{3}$	0, 1
p_5			
\vdots			
p_S			

b dobieramy w taki sposób, aby p_1, \dots, p_S były liczbami całkowitymi. Oraz aby $p_5 + \dots + p_S$ dawały $m - 7$ akcji.

Zachodzi również:

$$p_1 > p_2 > p_3 > p_4$$

oraz:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \Rightarrow a_4 = 0, \quad \text{bo} \quad a_1 + a_2 + a_3 = 7$$

Tworzymy podobny model N

	Wkład	Quota	akcji
\bar{p}_1	$c(4 - \epsilon)$	$4 - \epsilon$	3, 4
\bar{p}_2	$c\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right)$	$2 - \frac{\epsilon}{2}$	1, 2
\bar{p}_3	$c\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}$	0, 1
\bar{p}_4	$c\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}$	0, 1
\bar{p}_5			
\vdots			
\bar{p}_S			

Mamy zatem:

$$p_i, \bar{p}_i \in \mathbf{Z}$$

Zachodzi:

$$\bar{p}_1 > \bar{p}_2 > \bar{p}_3 > \bar{p}_4$$

oraz:

$$\bar{a}_1 \geq \bar{a}_2 \geq \bar{a}_3 \geq \bar{a}_4, \quad \Sigma = 7, \quad \bar{a}_4 = 1$$

Jeśli można tak dobrać b, c to otrzymujemy, że:

$$p_1 < \bar{p}_1, \quad p_4 > \bar{p}_4$$

to:

$$b(5 + \epsilon) < c(4 - \epsilon) \quad b\left(\frac{2}{3} - \frac{2\epsilon}{3}\right) > c\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)$$

co prowadzi do (przy $\epsilon \rightarrow 0$)

$$\frac{c}{b} \geq \frac{5}{4} \quad \text{i} \quad \frac{c}{b} \leq \frac{4}{3}$$

co daje sprzeczność z warunkiem populacji.

Np.:

$$c = 6 \cdot 13 \cdot 600, \quad b = 6 \cdot 10 \cdot 600, \quad z = \frac{1}{600}, \quad \frac{c}{b} = \frac{13}{10}, \quad 1,25 < 1,3 < 1,33$$

Przykładowe wartości:

$$p_1 = 6 \cdot 10 \cdot 600 \cdot \frac{3001}{600} = 6 \cdot 30010 < 6,13 \cdot 600 \cdot \frac{2399}{600} = 6 \cdot 31187 = \bar{p}_1$$

$$p_4 = 6 \cdot 10 \cdot 600 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{599}{600} = 40 \cdot 5599 = 23960 > 6 \cdot 13 \cdot 600 \cdot \frac{301}{600} = 23478 = \bar{p}_4$$

$$p_4 > \bar{p}_4$$

□

7.1 Jak wyglądało głosowanie w USA?

Rok	Stany	Miejsca
1789	13	66
1791	15	105 <i>Metoda Jeffersona</i>
1840		223 <i>Metoda Webstera</i>
1850		234 <i>Metoda Hamiltona</i>
1880		325 <i>Paradox Alabamy*</i>

1880 - Paradox Alabamy:

- Przedział miejsc: 275-350
- Przydział dla Alabamy:

299	8 miejsc
300	7 miejsc

1901: 386 miejsc, *Metoda Hamiltona-Webstera*

	350-356	357	358-382	383-385	386	387-388	389-390	399-400
Main	3	3	3	4	3	4	3	4
Colorado	3	2	3	3	3	3	3	3

1907: 391 miejsc, *Paradox Oklahomy* (+5 miejsc dla 357), *Metoda Webstera*

1910: 433 miejsca, *Metoda Hilla*

1910-1920: Dyskusja: *Metoda Webstera* czy *Metoda Hilla*?

W 1930 roku uznano, że *Metoda Webstera-Hilla* daje te same rezultaty.

1940: Porównanie metod dla dwóch stanów:

Stan	Metoda Hilla	Metoda Webstera
Arkansas	7	6
Michigan	17	18

Od 1940 roku obowiązuje *Metoda Hilla*.

Definicja 7.3 (*Metoda dzielników*)

Metoda rozdziału nazywana jest metodą dzielników, jeśli istnieje funkcja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$, taka że:

- $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = x$
- Funkcja jest rosnąca: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Przydziały są obliczane jako $a_i = f\left(\frac{p_i}{v}\right)$, gdzie v dobierane jest tak, aby $\sum_{i=1}^s a_i = m$. Poszczególne metody:

- **Metoda Jeffersona:** $f(x) = \lfloor x \rfloor$
- **Metoda Adamsa:** $f(x) = \lceil x \rceil$

- **Metoda Webstera:**

$$f(x) = \begin{cases} k & x \in [k, \frac{2k+1}{2}) \\ k+1 & x \in [\frac{2k+1}{2}, k+1) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- **Metoda Hilla:**

$$f(x) = \begin{cases} k & x \in [k, \sqrt{k(k+1)}) \\ k+1 & x \in [\sqrt{k(k+1)}, k+1) \end{cases}$$

- **Metoda Deana:**

$$f(x) = \begin{cases} k & x \in [k, \frac{2k(k+1)}{2k+1}) \\ k+1 & x \in [\frac{2k(k+1)}{2k+1}, k+1) \end{cases}$$

Twierdzenie 7.3

Metoda dzielników spełnia:

- warunek populacji,
- warunek monotoniczności.

Dowód:

- Dowód nie wprost:**

Załóżmy, że $\exists \bar{a}_i < a_i$ i $\bar{a}_j > a_j$ (oznaczmy to jako (*)), oraz że:

$$\bar{p}_i > p_i, \quad \bar{p}_j < p_j$$

Rozważmy:

- Dla a_i, a_j : parametr v ,
- Dla \bar{a}_i, \bar{a}_j : parametr u .

Przydziały są obliczane jako:

$$\bar{a}_i = f\left(\frac{\bar{p}_i}{u}\right), \quad \bar{a}_j = f\left(\frac{\bar{p}_j}{u}\right),$$

oraz

$$a_i = f\left(\frac{p_i}{v}\right), \quad a_j = f\left(\frac{p_j}{v}\right).$$

Funkcja f jest rosnąca, co oznacza, że:

$$f(x) > f(y) \implies x > y.$$

Z założenia (*) wynika:

$$f\left(\frac{\bar{p}_i}{u}\right) < f\left(\frac{p_i}{v}\right), \quad f\left(\frac{\bar{p}_j}{u}\right) > f\left(\frac{p_j}{v}\right).$$

Z rosnącego charakteru f mamy:

$$\frac{\bar{p}_i}{u} < \frac{p_i}{v}, \quad \frac{\bar{p}_j}{u} > \frac{p_j}{v}.$$

Przekształcając:

$$\bar{p}_i < \frac{u}{v} \cdot p_i, \quad \bar{p}_j > \frac{u}{v} \cdot p_j.$$

Otrzymujemy z pierwszej nierówności: $\frac{u}{v} > 1$, a z drugiej nierówności: $\frac{u}{v} < 1$, co prowadzi do sprzeczności.

b) Jeżeli $p_i < p_j$, to:

$$\frac{p_i}{v} > \frac{p_j}{v} \implies f\left(\frac{p_i}{v}\right) > f\left(\frac{p_j}{v}\right).$$

Założenie metody dzielników oraz rosnący charakter f prowadzą do tezy.

□

Wniosek 7.3.1

Metoda dzielników nie spełnia warunku kwoty.

Dowód: Twierdzenie Belińskiego-Younga.

□

Twierdzenie 7.4

Metoda Hamiltona spełnia:

a) warunek kwoty,

b) warunek monotoniczności.

Dowód:

a) Rozważmy:

$$q_i = \lfloor q_i \rfloor, \quad q_i - \lfloor q_i \rfloor = 0.$$

W takim przypadku nic nie dodajemy lub:

$$q_i < \lfloor q_i \rfloor, \quad a_i = \begin{cases} \lfloor q_i \rfloor, \\ \lceil q_i \rceil. \end{cases}$$

b) Jeżeli $p_i > p_j$, to:

$$m \cdot \frac{p_i}{p} > m \cdot \frac{p_j}{p} \implies q_i > q_j.$$

Rozważmy dwa przypadki:

a) $\lfloor q_i \rfloor > \lfloor q_j \rfloor$ lub $\lfloor q_j \rfloor + 1 \geq a_j$,

b) $\lfloor q_i \rfloor = \lfloor q_j \rfloor$, ale:

$$q_i - \lfloor q_i \rfloor > q_j - \lfloor q_j \rfloor \implies a_i \geq a_j.$$

□

Wniosek 7.4.1

Metoda Hamiltona nie spełnia warunku populacji.

Dowód: Twierdzenie Belińskiego-Younga.

□

Twierdzenie 7.5

Metoda Webstera dla $S = 2, m = 2$ spełnia warunki:

a) kwoty,

b) monotoniczności,

c) populacji.

Dowód:

a) Dla $S = 2$ mamy:

$$q_B = k + a,$$

$$q_C = l + b,$$

gdzie $k, l \in \mathbb{Z}$ oraz $a, b \in [0, 1)$.

Rozważmy przypadki:

a) Jeśli $a = b = 0$, to:

$$B \mapsto k, \quad C \mapsto l.$$

b) Jeśli $k + l + 1 = m$ oraz $a + b = 1$, to:

$$B \mapsto k \text{ lub } k + 1,$$

$$C \mapsto l \text{ lub } l + 1.$$

b) Zastosowanie metody dzielników.

c) Rozważanie zgodności z warunkiem populacji.

□

Zadanie 9

Metoda Balińskiego-Yonga - metoda wartościująca w sposób rekurencyjny

Mamy dane wkłady akcjonariuszy p_1, \dots, p_s

1. Zakładamy warunek początkowy $m = 0$, $a_1 = a_2 = \dots = a_s = 0$
2. Mam m przyznanych akcji dla a_1, \dots, a_s . Musimy przyznać $(m + 1)$ akcję.
3. Liczymy $\frac{p_i}{1+a_i}$ - wartość potencjalną dla i -tego akcjonariusza. ($i = 1, \dots, s$)
4. Kto ma największą wartość potencjalną jemu dajemy akcję z wyłączeniem tych, u których przepadem byłaby przekroczena górnna quota, czyli:

$$1 + a_i > \lceil q_i \rceil = \left\lceil \frac{(m + 1)p_i}{p} \right\rceil$$

Wyznacz jak należało by rodzielić pierwsze 8 (12) akcji.

Czyli uzupełnij tabelkę dla wkładów akcjonariuszy 7, 22, 71:

	w	q_1	q_2	q_3	a_1	a_2	a_3	$\frac{p_1}{1+a_1}$	$\frac{p_2}{1+a_2}$	$\frac{p_3}{1+a_3}$
1	100	0,07	0,22	0,71	0	0	1	7	22	71
2	50	0,14	0,44	1,42	0	0	2	7	22	35,5
3										

Zadanie 10

Wykazać, że nie może zaistnieć sytuacja, w której wszyscy akcjonariusze przekroczą górną quotę.

8 Metoda wartościująca

Definicja 8.1 (Metoda wartościująca – XXI wiek)

Niech S będzie zbiorem stopni (ocen wartości). Metoda $M : W \rightarrow \{f : K \rightarrow S\}$ polega na tym, że wyborca każdemu kandydatowi przypisuje ocenę.

Przykłady metod:

- Przyznawanie punktów metodą Brody.
- Metoda n -głosów, np. $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$.
- Metoda wartościująca: wynik to słaby porządek w K (w tym wyłączenie zwycięzcy).

Przykład 8.1

a) **Metoda mediany**

Dla kandydata A , gdzie $\#W = n$, oceny kandydata to s_1, \dots, s_n , uporządkowane w rankingu od najlepszej.

Wartość mediany (multivalue) definiujemy jako:

$$m(A) = \begin{cases} S_{\lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor}, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste,} \\ \text{nizsza z dwóch środkowych,} & \text{gdy } n \text{ parzyste.} \end{cases}$$

Przykład dla n nieparzystego:

- Oceny: S – świetny, D – dobry, P – przeciętny, Z – zły, F – fatalny.
- Dla 5 wyborców:

$$\begin{aligned} A &: S, D, \mathbf{D}, F, F, \\ B &: S, S, \mathbf{D}, Z, F, \\ C &: D, D, \mathbf{Z}, Z, Z. \end{aligned}$$

Przykład dla n parzystego:

- Oceny: W – wyborny, S – smaczny, Z – zjadliwy, N – niejadalny.
- Dla 4 wyborców:

$$\begin{aligned} A &: W, W, \mathbf{Z}, Z, \\ B &: W, S, \mathbf{Z}, N, \\ C &: Z, N, \mathbf{N}, N. \end{aligned}$$

Metoda znajduje zastosowanie w jury konkursów, gdzie dąży się do zadowolenia większości.

b) **Metoda symetrycznej mediany**

Analogiczna do metody mediany, jednak w przypadku n parzystego wybieramy lepszą z dwóch środkowych ocen:

$$m^*(A) = S_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}.$$

c) **Metoda Balińskiego-Larakiego (2011)**

Procedura:

a) Wyznaczamy $m(A)$ i $m(B)$.

b) Jeśli $m(A)$ jest lepsze od $m(B)$, to A jest lepszy od B . Notacja: $m(A) < m(B) \Rightarrow A \underset{M}{<} B$

c) Jeśli $m(A) = m(B)$, usuwamy tę ocenę z rankingu i powtarzamy procedurę z $n-1$ ocenami.

Przykład:

$$\begin{aligned} A : S, D, \mathbf{D}, F, F, \\ B : S, S, \mathbf{D}, Z, F, \\ C : D, D, \mathbf{Z}, Z, Z \quad (\text{odpada}). \end{aligned}$$

Po kolejnych iteracjach wyłaniamy zwycięzcę.

Wniosek: Remis jest możliwy tylko w przypadku tych samych ocen.

Definicja 8.2 (Metoda rankingowo niezależna od ubocznych opcji)

Metoda wartościująca jest rankingowo niezależna od ubocznych opcji wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{M,N} \forall_{A,B} \left[\begin{array}{l} M, N - \text{modele} \\ K_M = K_N \cup \{C\}, C \notin K_M \\ \forall v \in W \text{ oceny } v \text{ w } M = \text{oceny } v \text{ w } N \end{array} \right] \Rightarrow (A \underset{M}{<} B \Leftrightarrow A \underset{N}{<} B).$$

Twierdzenie 8.1

Metoda mediany i metoda Balińskiego-Larakiego ($B=L$) są rankingowo niezależne od ubocznych opcji.

Dowód: Dodanie kandydata nie zmienia ocen.

□

Lemat 8.1

Metoda punktów Bordy nie jest rankingowo niezależna od ubocznych opcji.

Model M:

3	2
A	B
B	A

$$\begin{bmatrix} A - 3 \text{ punkty} \\ B - 2 \text{ punkty} \end{bmatrix} \quad A \underset{M}{>} B$$

Model N:

3	2
C	B
A	C
B	A

$$\begin{bmatrix} A - 3 \text{ punkty} \\ B - 4 \text{ punkty} \end{bmatrix} \quad A \underset{M}{<} B$$

Definicja 8.3 (Metoda odporna na nieobecność)

Metoda (MP , MW) jest odporna na nieobecność wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{M,N} \forall_{A,B} \left[\begin{array}{l} M, N - \text{modele} \\ W_N = W_M \cup W^*, \quad W^* \cap W_M = \emptyset \\ v \in W_M \Rightarrow \text{glos } v \text{ w } M = \text{glos } v \text{ w } N \\ A \underset{M}{<} B \quad \text{oraz} \quad \forall_{v \in W^*} A \overset{v,N}{<} B \end{array} \right] \Rightarrow A \underset{N}{<} B.$$

Twierdzenie 8.2

Metoda punktów Bordy jest odporna na nieobecność.

Dowód: Kandydat B dostaje jeszcze więcej punktów niż A .

□

Lemat 8.2

Metoda Balińskiego-Larakiego ($B-L$) nie jest odporna na nieobecność. Metody mediany również nie są odporne na nieobecność.

Wyniki głosowania w modelu M :

A	5	5	4	2	2
B	3	3	3	3	2

$$\Rightarrow A >_M B$$

Wyniki głosowania w modelu N (po dodaniu głosu):

A	5	5	4	2	2	2
B	3	3	3	3	2	1

$$\Rightarrow A <_M B$$

Twierdzenie 8.3 (Twierdzenie Saariego (1992))

Z: $K = \{k_1, \dots, k_n\}$, $n \geq 3$. T: Istnieje model, w którym k_i wygrywa samodzielnie metodą i -głosów ($i = 1, \dots, n-1$), natomiast k_n wygrywa metodą punktów Bordy. (Bez dowodu)

Przykład 8.2

a)

3	2	2	4
A	A	B	C
B	C	C	B
C	B	A	A

Metoda 1-głosu - wygrywa A (5 głosów)

Metoda 2-głosów - wygrywa B (9 głosów)

Metoda punktów Bordy - wygrywa C (12 punktów)

b)

2	2	2	3
A	A	C	D
B	D	B	B
C	C	D	C
D	B	A	A

Metoda 1-głosu - wygrywa A (4 głosy)

Metoda 2-głosów - wygrywa B (7 głosów)

Metoda 3-głosów - wygrywa C (9 głosów)

Metoda punktów Bordy - wygrywa D (15 punktów)

Definicja 8.4 (Grupowa metoda n -głosów)

Grupowa metoda n -głosów - wyborca głosuje na n kandydatów, wygrywa n z największą liczbą głosów.

Przykład 8.3

	30	30	20	20
1	A	A	B	C
2	B	C	C	B
3	C	B	A	A

Głosowanie na 1 głos

A - 60 - wygrywa

B - 20

C - 20

Głosowanie na 2 głosy

A - 60

B - 70 - wygrywa

C - 70 - wygrywa

Twierdzenie 8.4

$\#K \geq 2n + 1$, $n \geq 1$, $\#W$ odpowiednio duża.

Dla kandydatów k_1, \dots, k_{2n+1} istnieje model, w którym:

- w głosowaniu grupowym metodą n głosów wygrywają k_1, \dots, k_n ,
- w głosowaniu grupowym metodą $(n+1)$ głosów wygrywają k_{n+1}, \dots, k_{2n+1} (w obu przypadkach każdy kandydat ma ponad 50% głosów).

Dowód: Idea dla $n = 3$, $2n + 1 = 7$:

	○	○	○	□	□	□	□
1	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
2	k_2	k_3	k_1	k_5	k_6	k_7	k_4
3	k_3	k_1	k_2	k_6	k_7	k_4	k_5
4				k_7	k_4	k_5	k_6
5	Wypełniamy odpowiednio rzędami,						
6	dając kandydata w tej kolumnie,						
7	w której go jeszcze nie było.						

Zbiory ○ i □ są równoliczne.

Zarys ogólny:

	n grup				n + 1 grup			
	p	p	...	p	q	q	...	q
1	k_1	k_2		k_n	k_{n+1}	k_{n+2}		k_{2n+1}
2	k_2	k_3		k_1	k_{n+2}	k_{n+3}		k_{n+1}
3	k_3	k_4		k_2	k_{n+3}	k_{n+4}		k_{n+2}
\vdots								
$n - 1$	k_{n-1}	k_n		k_{n-2}	k_{2n-1}	k_{2n}	\dots	k_{2n-2}
n	k_n	k_1		k_{n-1}	k_{2n}	k_{2n+1}		k_{2n-1}
$n + 1$	*				k_{2n+1}	k_{n+1}		k_{2n}
$n + 2$								
\vdots	Δ							
$2n + 1$								

* - W tych grupach mamy po p wyborców, każdy z k_{n+1}, \dots, k_{2n+1} pojawia się z częstotliwością $w\left(\frac{1+2n\epsilon}{2(n+1)}\right)$.

Δ - W każdym rzędzie (miejsca $n + 1, \dots, 2n + 1$) każdy z kandydatów k_{n+1}, \dots, k_{2n+1} pojawia się $w\left(\frac{2n\epsilon+1}{2(n+1)}\right)$ razy, a każdy z k_1, \dots, k_n pojawia się $w\left(\frac{1}{2n} - \epsilon\right)$ razy. Wstawiamy każdego w kolumnę, w której go jeszcze nie było.

Możemy zadać sobie pytania co do poprawności takiego rozkładu, mianowicie:

1) Dobrze zdefiniowane

$$2) nw\left(\frac{1}{2n} + \epsilon\right) > nw\left(\frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1}\right), \text{ czyli } p > q.$$

$$3) nw\left(\frac{1}{2n} + \epsilon\right) < nw\left(\frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1}\right).$$

$$4) nw\left(\frac{1}{2n} + \epsilon\right) > \frac{w}{2}.$$

$$5) nw\left(\frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{2(n+1)}\right) + \frac{2}{n+1} > \frac{w}{2}.$$

Okaże się, że dla $\epsilon < \frac{1}{2(2n^2+2)}$ będzie ok. Dobieramy n tak, aby wyszły liczby całkowite.

D:

1) a) Suma w rzędzie = w :

$$\begin{aligned} np + (n+1)q &= nw\left(\frac{1}{2n} + \epsilon\right) + (n+1)w\left(\frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1}\right) = \\ &= w\left[\frac{1}{2} + n\epsilon + \frac{n+1}{2(n+1)} - (n+1)\epsilon + \frac{(n+1)\epsilon}{n+1}\right] = w. \end{aligned}$$

b) Czy w każdym miejscu liczba > 0 ? Dla p jest ok:

$$\frac{1}{2(n+1)} + \frac{\epsilon(1-n-1)}{n+1} > 0, \quad n\epsilon < \frac{1}{2}, \quad \epsilon < \frac{1}{2n}.$$

c) Czy suma każdego przy $n+1$ miejsc jest $\leq w$:

$$wn \left(\frac{1}{2n} + \epsilon \right) = w \left(\frac{1}{2} + n\epsilon \right) < w, \quad n\epsilon < \frac{1}{2}, \quad \epsilon < \frac{1}{2n}.$$

$$w \left(\frac{n}{2(n+1)} - \epsilon n + \frac{\epsilon n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) = w \left(\frac{n+2}{2(n+1)} - \epsilon n \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right) < w.$$

Głosy na k_i do miejsc $n+1$, ($i = n+1, \dots, 2n+1$).

2) $w \left(\frac{1}{2n+1} + \epsilon \right) > w \left(\frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1} \right)$ – oczywiste (prawa strona jest silnie mniejsza od lewej).

3) $nw \left(\frac{1}{2n} + \epsilon \right) < nw \left(\frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1} \right)$:

$$\frac{1}{2} + n\epsilon < \frac{n+1}{2(n+1)} - (n+1) \left(\frac{n+1\epsilon - \epsilon}{n+1} \right) + \frac{1}{n+1}.$$

$$n\epsilon < \frac{1}{n+1} - n\epsilon, \quad 2n\epsilon < \frac{1}{n+1}, \quad \epsilon < \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Sprawdzenie (4), (5) do domu.

□

9 Deser

Twierdzenie 9.1 (Gibberda-Satterthwaite'a (1973,1975))

Z: MZU, decyzyjna, $\#K \geq 3, \#w \geq 2, \forall_{A \in K} \exists \text{ model } M \text{ w którym } A \text{ wygrywa oraz metoda ta nie jest dyktaturą}$ T: Metoda jest podatna na manipulację, tzn $\exists_{\text{model}} \exists_{w \in W} \text{ i taki } w \text{ zagłosuje inaczej niż w tym modelu, to zwycięzca zmieni się na bardziej odpowiadającego wyborcy } w.$

Kompromis Jagielloński

Wojciech Słomczyński, Karol Życzkowski

Próg przy którym wniosek jest przyjęty

$$q = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{N_1 + \dots + N_k}}{\sqrt{N_1} + \dots + \sqrt{N_k}} \right)$$

gdzie N_i - populacja kraju

Wybory w roku 1990

§3 Progi wejścia §3.1 $P \geq 5\%$ §3.2 $K \geq 8\%$ §3.3 Jeżeli nic lub któryś z warunków przez tylko 1 komitet to progi są obniżane do

$$P \geq 3\%$$

$$K \geq 5\%$$

Czy wchodzi?	Głosy	Czy wchodzi po zmianie progu?
+	20,4(K)	+
+	15,4(P)	+
+	10,6(P)	+
+	7,3(P)	+
-	6,4(K)	+
+	5,7(P)	+
+	5,4(P)	+
+	4,9(P)	+
-	4,4(P)	+
-	4,0(P)	+
-	3,2(P)	+

Przypadek wyborów w Krakowie z dwoma kartami

Metoda Capińskiego - średnia na nogę czołówki

Metoda Ciesielskiego



Egzamin 31 stycznia 11:00