1 Notatnki

Definicja 1.1 (Metoda anonimowa)
Metoda jest anonimowa $\Leftrightarrow$*gdy wszyscy wyborcy są traktowani tak samo, to znaczy* $\Leftrightarrow\forall_{x,y\in W}$ *zamiana głosów x i y nie zmienia wyniku.*

Definicja 1.2 (Metoda neutralna)
Metoda jest neutralna $\Leftrightarrow$*wszyscy kandydaci są traktowani tak samo, to znaczy* $\Leftrightarrow\forall_{x,y\in K}$ *zamiana ról x i y nie zmienia wyniku.*

Definicja 1.3 (Metoda efektywna)
Metoda zwycięzcy jest efektywna $\Leftrightarrow$*zawsze wyłania przynajmniej jednego zwycięzcę.*

Definicja 1.4 (Metoda decyzyjna)
Metoda zwycięzcy jest decyzyjna $\Leftrightarrow$*w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę.*

Definicja 1.5 (Metoda prawie decyzyjna)
Metoda zwycięzcy jest prawie decyzyjna $\Leftrightarrow$*w każdym modelu wyłania co najwyżej jednego zwycięzcę. Sytuacja, w której nie ma zwycięzcy, zachodzi wtedy, gdy więcej niż jeden kandydat uzyskał tę samą, najwyższą liczbę punktów.*

Definicja 1.6 (Kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości)
Metoda zwycięzcy (MZ) spełnia kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat, który otrzyma ponad 50% głosów, jest jedynym zwycięzcą.

Definicja 1.7 (Metoda monotoniczna ze względu na zwycięzcę)
Z: *MZ - klasyczna lub semi-klasyczna. Metoda jest monotoniczna ze względu na zwycięzcę, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat A jest zwycięzcą, a jeśli wybierzemy kandydata B różnego od A* $(B \neq A)$ *oraz jego grupę wyborców, to jeśli ta grupa zmieni swoje głosy bez straty dla A (czyli zmiana nastąpi zgodnie z następującymi dozwolonymi operacjami):*

M	$\Rightarrow$	*N*
A B	$\Rightarrow$	*A B*
- -	$\Rightarrow$	- -
+ +	$\Rightarrow$	+ +
- +	$\Rightarrow$	+ -

to: $\Rightarrow$ *A nadal wygrywa.*

Twierdzenie 1.1 (Maya - Kenneth Maya, 1952r)
Z: *Klasyczna metoda zwycięzcy oraz* $\#K = 2$*. Jeżeli metoda ta jest metodą:*

(1) anonimową

(2) neutralną

(3) monotoniczną ze względu na zwycięzcę

(4) prawie decyzyjną

$\Rightarrow$ *jest metodą bezwzględnej większości.*

Definicja 1.8 (Metoda zakładająca uporządkowanie)
Metoda zwycięzcy jest metodą zakładającą uporządkowanie (MZU) $\Leftrightarrow$*gdy* $\forall_{w\in W}$ *wyborca w ustala K kandydatów w liniowym porządku, a jego głos zależy od tego porządku.*

Definicja 1.9 (Monotoniczność ze względu na transpozycję)
MZU jest monotoniczna ze względu na transpozycje $\Leftrightarrow \forall_{M-model} \forall_{w \in W} \forall_{A,B \in K}$*, jeśli w* M *głosuje się* $[\Delta, B, A, *]$ *i w* M *wygrywa* A*, to w* N*, gdzie zmiana polega na* $[\Delta, A, B, *]$*, również wygrywa* A*.*

Definicja 1.10 (Słaba zasada Pareto)
MZU spełnia słabą zasadę Pareto $\Leftrightarrow \forall_M (\exists_{A,B \in K} \forall_{w \in W} A \overset{w,M}{<} B) \Rightarrow A$ *nie wygrywa w* M*.*

Definicja 1.11 (Kandydat Condorceta)
$A \in K$ *jest kandydatem Condorceta (zwycięzcą Condorceta)* $\Leftrightarrow$*w "bezpośrednich porównaniach" A jest lepszy od każdego innego kandydata* $\Leftrightarrow \forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} > \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}$.

Definicja 1.12 (Przegrany Condorceta)
$A \in K$ *to przegrany Condorceta (w modelu* M*)* $\Leftrightarrow \forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} < \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}$.

Definicja 1.13 (Kryterium Condorceta)
Metoda spełnia kryterium Condorceta $\Leftrightarrow \forall_M$ *: Istnieje kandydat Condorceta (w* M*)* $\Rightarrow$ *A - jedyny zwycięzca w* M*.*

Definicja 1.14 (Kryterium przegranych Condorceta)
Metoda spełnia kryterium przegranych Condorceta $\Leftrightarrow \forall_M$ *: Istnieje przegrany Condorceta A w* $M \Rightarrow A$ *nie wygrywa w* M*.*

Definicja 1.15 (Metoda jednoznacznie większościowa)
Metoda jest jednoznacznie większościowa $\Leftrightarrow \forall_M$ *kandydat A w M ma ponad połowę pierwszych miejsc* $\Rightarrow$ *A - jedyny zwycięzca.*

Definicja 1.16 (Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji IIA)
Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji spełnia warunek niezależności porażki od ubocznych opcji (spełnia słaby warunek IIA*)* $\Leftrightarrow$

$$\forall_{A,B \in K} \forall_{M,N-modele} \text{ spełnia } \begin{bmatrix} \forall_{w \in W} (B \overset{w,M}{<} A) \Leftrightarrow (B \overset{w,N}{<} A) \\ A \text{ wygrywa w } M,\ B \text{ nie wygrywa w } M \end{bmatrix} \Rightarrow B \text{ nie wygrywa w } N.$$

Innymi słowy: zmiany nie wpływające na relacje przegrany-zwycięzca nie mogą dać przegrywającemu zwycięstwa.

Twierdzenie 1.2
MZU, anonimowa, neutralna $\Rightarrow$ *metoda nie jest decyzyjna.*

Twierdzenie 1.3
MZU spełnia kryterium Condorceta $\Rightarrow$ *jest jednoznacznie większościowa.*

Lemat 1.1 (Lemat o decyzyjności)
Z: MZU, efektywna, $\#K \geq 3$*,* $\#W \geq 2$*. Metoda spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA* $\Rightarrow$ *jest decyzyjna.*

Twierdzenie 1.4 (Twierdzenie Arrowa dla metod zwycięzcy (1951))
Załóżmy: $\#K \geq 3, \#W \geq 2$*, MZU, efektywna, spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA* $\Rightarrow$ *dyktatura.*

Wniosek 1.4.1 (Twierdzenie Arrowa o niemożliwości)
Załóżmy, że $\#K \geq 3$*,* $\#W \geq 2$*. Wówczas: nie istnieje metoda zakładająca uporządkowanie (MZU) efektywna, która jednocześnie spełnia następujące warunki:*

- *anonimowa,*

- *słabą zasadę Pareto,*

- *słabe kryterium niezależności od opcji ubocznych (IIA).*

Twierdzenie 1.5 (Twierdzenie Taylora o niemożliwości)
Dla $\#K \geq 3$, $\#W \geq 3$: nie istnieje MZU efektywna, która spełnia jednocześnie kryterium Condorceta oraz słabe kryterium niezależności od ubocznych opcji (IIA).

$$\begin{bmatrix} \Sigma = \{M : W \to K\} & \Sigma = \{M : W \to \{\text{TAK}, \text{NIE}\}\} \\ f : \Sigma \to P(K) & f : \Sigma \to \{\text{TAK}, \text{NIE}\} \end{bmatrix}$$

Definicja 1.17 (Założenia metody TAK/NIE)
Założenia:´

- $\forall_{w \in W}\ w : TAK \Rightarrow$ *wynik: TAK,*
- $\forall_{w \in W}\ w : NIE \Rightarrow$ *wynik: NIE.*

Definicja 1.18 (Koalicja wygrywająca)
Podzbiór $A \subset W$ jest koalicją wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\{x \in A : x \text{ głosuje TAK}\} \Rightarrow \text{wynik: TAK}.$$

Definicja 1.19 (Monotoniczność metody TAK/NIE)
Metoda TAK/NIE jest monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{bmatrix} A \subset A_1 \\ A \text{ jest koalicją wygrywającą} \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 \text{ jest koalicją wygrywającą}.$$

Definicja 1.20 (Wskaźnik Banzhafa)
Załóżmy, że $W = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Wskaźnik Banzhafa dla a_i jest równy liczbie:

$$B(a_i) = \#\{A : a_i \in A \text{ i } a_i \text{ jest decydujący dla } A\}.$$

Definicja 1.21 (Indeks Banzhafa (Penrose'a–Banzhafa))
Indeks Banzhafa dla a_i definiuje się jako:

$$I_B(a_i) = \frac{B(a_i)}{B(a_1) + \cdots + B(a_n)}.$$

Definicja 1.22 (Wskaźnik/Indeks Shapleya–Shubika)
Dla metody monotonicznej: Porządkujemy wyborców jako $W = (w_1, \ldots, w_n)$. W ciągu $(w_1, \ldots, w_n)$ wyborca w_k jest wpływającym wyborcą, jeśli:

$$\{w_1, \ldots, w_{k-1}\} \text{ nie tworzy koalicji wygrywającej, a } \{w_1, \ldots, w_k\} \text{ już tak.}$$

Wskaźnik Shapleya–Shubika:

$$S(w_k) = \#\{\text{ciągi, w których } w_k \text{ jest wpływającym wyborcą}\}.$$

Indeks Shapleya–Shubika:

$$I_S(w_k) = \frac{S(w_k)}{n!}.$$

Definicja 1.23 (Słaby porządek)
Zbiór K jest słabo uporządkowany wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists R$ — relacja równoważności w K taka, że K/R jest uporządkowany liniowo przez relację $\leq$.

Dla $a, b \in K$ definiujemy:

$$a < b \overset{def}{\Leftrightarrow} [a]_R < [b]_R,$$

gdzie relacja jest przechodnia i słabo antysymetryczna.

Definicja 1.24 (Metoda porządkowa (MP))
Każdy wyborca porządkuje kandydatów w sposób liniowy.

Wynik wyborów jest słabym porządkiem w zbiorze K:

- $L(K) = \{(K, \leq) : \leq$ *jest porządkiem w K*$\}$,
- $S(K) = \{(K, \leq) : \leq$ *jest słabym porządkiem w K*$\}$.

Zapis formalny:

$$\Sigma = \{M : W \to L(K)\}, \quad f : \Sigma \to S(K).$$

Definicja 1.25 (Porządkowa zasada Pareto)
Metoda porządkowa (MP) spełnia (porządkową) zasadę Pareto wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_M \forall_{A,B \in K} \left(\forall_w \; A \overset{w,M}{<} B \right) \Rightarrow A \underset{M}{<} B.$$

Definicja 1.26 (Metoda spełniająca postulat liberalizmu Sena)
Metoda spełnia postulat liberalizmu Sena, jeśli:

$$\forall_{w \in W} \exists_{A,B \in K \; (A \neq B)} \; \left(A \overset{w,M}{<} B \Rightarrow A \underset{M}{<} B \right) \; \text{oraz} \; \left(A \overset{w,M}{>} B \Rightarrow A \underset{M}{>} B \right).$$

Twierdzenie 1.6 (Twierdzenie Sena)
Niech $\#K \geq 2$ oraz $\#W \geq 2$. Wtedy: Nie istnieje metoda spełniająca jednocześnie:

1. *zasadę Pareto,*
2. *postulat liberalizmu Sena.*

Definicja 1.27 (Filtr)
*Niech X będzie zbiorem. Podzbiór $F \subset P(X)$, gdzie $F \neq \emptyset$, nazywamy **filtrem**, jeśli spełnia następujące warunki:*

1) $\emptyset \notin F$

2) Jeśli $A, B \in F$, to $A \cap B \in F$

3) Jeśli $A \in F$ oraz $A \subset B \subset X$, to $B \in F$

Definicja 1.28 (Ultrafiltr)
*Podzbiór $F \subset P(X)$ nazywamy **ultrafiltrem**, jeśli spełnia następujące warunki:*

1) F jest filtrem.

2) Dla każdego $A \subset X$ zachodzi dokładnie jedno z dwóch: $A \in F$ albo $X \setminus A \in F$.

Definicja 1.29 (Liberalizm Senna)

$$\forall_{w \in W} \exists_{a,b \in K; a \neq b} \forall_M \; w \text{ decyduje o } (a, b)$$

Twierdzenie 1.7
Dla K i W istnieje metoda spełniająca postulat liberalizmu Senna wtedy i tylko wtedy, gdy $\#W < \#K$.

Definicja 1.30 (Warunki sensowności metody rozdziału)
1. (Warunek quoty) $\lfloor q_i \rfloor \leq a_i \leq \lceil q_i \rceil$ (uwzględniając $q_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow g_i = a_i$)

2. (Warunek monotoniczności) $p_i > p_j \Rightarrow a_i \geq a_j$ (analogicznie w drugą stronę)

3. (Warunek populacji) Dla S, m danych:

$$p_1, \ldots, p_s \longmapsto a_1, \ldots, a_s$$

jeśli nastąpiła zmiana:

$$\bar{p_1}, \ldots, \bar{p_s} \longrightarrow \bar{a_1}, \ldots, \bar{a_s},$$

to:

$$!\exists_{i,j} \bar{p_i} > p_i, \bar{a_i} < a_i \quad oraz \quad \bar{p_j} < p_j, \bar{a_j} > a_j$$

4. (Warunek monotoniczności akcji) Dla $p_1, \ldots, p_n$ stałych, jeśli $\bar{m} > m$, to $\forall_i \bar{a_i} \geq a_i$.
Nie mogą zajść wszystkie te warunki na raz.

Paradoks Alabamy
Dla $S = 3$, $m = 10$, $W = 100$, po zmianie liczby akcji na $m = 11$, $W = 90,9$, wyniki się zmieniają:

p_i	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	Wynik
145	$1,45$	1	2
340	$3,40$	3	3
515	$5,15$	5	5
$\Sigma = 1000$		9	10

$\Rightarrow$

p_i	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	Wynik
145	$1,595$	1	1
340	$3,740$	3	4
515	$5,665$	5	6
$\Sigma = 1000$		9	11

Paradoks Oklahomy
Po zmianie liczby akcjonariuszy i akcji, np. $S = 4$, $m = 13$, $W = 76,9$, także mogą wystąpić sprzeczne wyniki.

Twierdzenie 1.8 (Tw. Balińskiego-Younga)
Dla $S \geq 4$ i $m \geq 7$ nie istnieje metoda spełniająca jednocześnie warunki:

- *quoty,*
- *monotoniczności,*
- *populacji.*

Definicja 1.31 (Metoda dzielników)
Metoda rozdziału nazywana jest metodą dzielników, jeśli istnieje funkcja $f : [0, \infty) \to \mathbb{N}$, taka że:

a) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = x$

b) Funkcja jest rosnąca: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Definicja 1.32 (Metoda wartościująca – XXI wiek)
Niech S będzie zbiorem stopni (ocen wartości). Metoda $M : W \to \{f : K \to S\}$ polega na tym, że wyborca każdemu kandydatowi przypisuje ocenę.

Definicja 1.33 (Metoda rankingowo niezależna od ubocznych opcji)
Metoda wartościująca jest rankingowo niezależna od ubocznych opcji wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{M,N}\,\forall_{A,B}\left[\begin{array}{c} M,N\ -\ modele \\ K_M = K_N \cup \{C\},\ C \notin K_M \\ \forall v \in W\ \ oceny\ v\ w\ M =\ oceny\ v\ w\ N \end{array}\right] \Rightarrow (A \underset{M}{<} B \Leftrightarrow A \underset{N}{<} B).$$

Definicja 1.34 (Metoda odporna na nieobecność)
Metoda (MP, MW) jest odporna na nieobecność wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{M,N}\forall_{A,B}\left[\begin{array}{c} M,N\ -\ modele \\ W_N = W_M \cup W^*, \quad W^* \cap W_M = \emptyset \\ v \in W_M \Rightarrow\ głos\ v\ w\ M =\ głos\ v\ w\ N \\ A \underset{M}{<} B \quad oraz \quad \forall_{v \in W^*} A \overset{v,N}{<} B \end{array}\right] \Rightarrow A \underset{N}{<} B.$$