

Matematyczne aspekty wyborów

Skrypt autorstwa

Arkadiusz Dąbal

Na podstawie wykładu

Krzysztofa Ciesielskiego

Wersja z dnia:

2024-10-06

Contents

1 Preliminaria	2
1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?	2
1.2 Prawo Ciesielskiego	4
2 Treść właściwa	5
2.1 Metody głosowania (system wyborczy)	5
3 Deser	8

1 Preliminaria

1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?

Materiał ten nie ma w żadnym stopniu charakteru politycznego, a wyłącznie charakter matematyczny.

Rozważmy poniższe dane, oparte na 6 partiach, 1000 głosach i 6 mandatów do rozdania:

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	380	190	127	87	3
Gitarzyści	192	192	96	64		2
Szachiści	180	180	90			1
Piłkarze	96	96	48			1
Lotniarze	90	90				0
Kolejarze	62	62				0

System ten działa w następujący sposób:

- Liczby głosów dzielone są przez kolejne liczby naturalne dodatnie (tak jak w tabeli).
- Wybierane są z tej tabeli 6 największych liczb (wytluszczone druk).
- Liczba mandatów zależy od liczby wytluszczonych liczb w wierszu partii.

Przykład 1.1

Rozważmy tę samą tabelę, ale założmy, że partia **Gitarzyści** nie przekroczyła progu 5%.

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	380	190	127	87	3
Gitarzyści	192	192	96	64	—	—
Szachiści	180	180	90			2
Piłkarze	96	96	48			1
Lotniarze	90	90				1
Kolejarze	62	62				0

Przykład 1.2

Rozważmy następującą tabelę z 5 mandatami do rozdania:

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	6000	3000	2000	1500	3
Myśliwi	5700	2850	1900		2
Artyści	1950	975			0

Partia **Rybacy** prowadziła kampanię przeciwko **Myśliwym**, w wyniku czego liczba otrzymanych głosów zmieniła się następująco:

- Partia **Rybacy** zyskała 400 głosów (+400)
- Partia **Myśliwi** straciła 600 głosów (-600)
- Partia **Artyści** zyskała 200 głosów (+200)

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	6400	3200	2133		3
Myśliwi	5100	2550	1700		2
Artyści	2150	1075			0

Tym oto sposobem partia **Myśliwi** straciła jeden mandat na rzecz partii **Artyści**.

Przykład 1.3

Rozważmy wyniki głosowania dla dwóch partii z 6 mandatami do rozdania.

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	: 5	Mandaty
Matematycy	1200	600	400	300	240	5
Politycy	201	101				1

Popatrzmy na głosy bezpośrednio na konkretnych kandydatów z każdej partii:

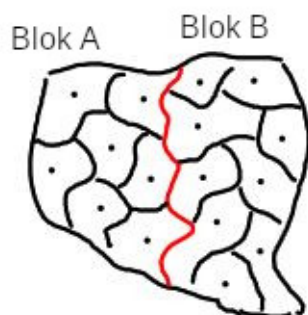
Nazwa	Głosy
Kwadrat	201
Trójkąt	200
Stożek	200
Walec	200
Suma	200
Iloczyn	199

Nazwa	Głosy
Magister	35
Magistra	34
Urzędnik	33
Urzędas	33
Pani Basia	33
Pan Andrzej	33

Tym oto sposobem mandatu nie otrzymuje **Iloczyn**, mimo że zdobył więcej głosów niż **Magister**.

Przykład 1.4

Rozważmy sytuację, w której państwo jest podzielone na dwa bloki, oba mające po 50% wpływu na wyniki wyborów. Każdy blok ma przyznać po 4 mandaty.



W bloku A znajdowały się dwie partie: PZK (Partia Zwolenników Kawy) i PZH (Partia Zwolenników Herbaty), z których każda otrzymała po 25% głosów w ogólnokrajowym głosowaniu. W bloku B znajdowała się partia PZA (Partia Zwolenników Alkoholu) oraz inne partie, które nie przekroczyły progu 5%. Przedstawmy liczbę uzyskanych głosów w PZA:

Nazwa	Głosy
Żubr	19995
Żubrówka	2
Soplica	2
Pan Tadeusz	1

I tym oto sposobem wygrywają osoby, które dostają 2 lub 1 głos.

1.2 Prawo Ciesielskiego

Rozważmy głosowanie względem 2 partii z 7 mandatami:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	1050	350	210	150	117	4
Sportowcy	1008	336	202	144		3

Partia **Sportowcy** postanowiła się rozdzielić na dwie partie i startować osobno:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	1050	350	210	150	117	3
Piłkarze	504	168	101			2
Siatkarze	504	168	101			2

Tym oto sposobem partia **Sportowcy** zdobyła większość.

2 Treść właściwa

2.1 Metody głosowania (system wyborczy)

Wprowadźmy kilka oznaczeń, niech:

W - zbiór wszystkich wyborców,

K - zbiór wszystkich kandydatów.

- Ten sam układ głosów (zestaw głosów) daje ten sam wynik (funkcja).
- Każdy układ głosów daje jakiś wynik (może być \emptyset).

Definition 2.1 (Model)

Model to układ głosów (z przyporządkowanymi wyborcami).

Definition 2.2 (Metoda anonimowa)

Metoda jest anonimowa, wtedy i tylko wtedy (w skrócie: \Leftrightarrow), gdy wszyscy wyborcy są traktowani tak samo, $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in W}$ zamiana głosów x i y nie zmienia wyniku.

Alternatywnie, metoda nie jest anonimowa $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in W}$ takie, że zamiana głosów x i y istotnie zmienia wynik.

Definition 2.3 (Metoda neutralna)

Metoda jest neutralna, \Leftrightarrow wszyscy kandydaci są traktowani tak samo, $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in K}$ zamiana ról x i y nie zmienia wyniku.

Alternatywnie, metoda nie jest neutralna $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in K}$ takie, że zamiana ról x i y istotnie zmienia wynik.

Definition 2.4

Trzy rodzaje metod ze względu na wyniki:

- 1) Metoda zwycięzcy (MZ) – wybiera zwycięzcę (zwycięzców),
- 2) Metoda porządkowa (MP) – wynik to słaby porządek na zbiorze K ,
- 3) Metoda rozdziału (MR) – wynik to podział pewnych dóbr między kandydatów.

Definition 2.5 (Klasyczna metoda zwycięzcy)

Klasyczna metoda zwycięzcy (klasyczna MZ) polega na tym, że każdy wyborca głosuje na dokładnie jednego kandydata. Zbiór

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow K\}$$

jest zbiorem modeli, gdzie m jest modelem. Klasyczną metodę zwycięzcy możemy opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

Definition 2.6 (Semi-klasyczna metoda zwycięzcy)

Semi-klasyczna MZ polega na tym, że każdy wyborca głosuje na co najmniej jednego kandydata:

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow P(K) \setminus \emptyset\}.$$

Metodę tę można opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

Definition 2.7 (Metoda efektywna)

Metoda zwycięzcy jest efektywna \Leftrightarrow zawsze wyłania przynajmniej jednego zwycięzcę.

Przykład 2.1 (Przykłady metod głosowania)

- 1) Dyktatura – $\exists p \in W$: wynik jest tożsamy z głosem p .
- 2) Monarchia – dany kandydat $k \in K$ wygrywa niezależnie od głosowania.
- 3) Metoda większości – wygrywa kandydat (lub kandydaci), który(a) otrzymał(a) najwięcej głosów.
- 4) Metoda bezwzględnej większości – wygrywa kandydat $k \in K$, który otrzymał co najmniej $\lfloor \frac{\#W}{2} \rfloor + 1$ głosów.
- 5) Metoda super większości – wygrywa kandydat, który uzyskał co najmniej q głosów, gdzie $q > \frac{\#W}{2}$.
- 6) Metoda status quo – *Założenie*: \exists pewien stan z jednym zwycięzcą.
Głosowanie metodą większości (lub super większości):
 - jeśli metoda daje wynik, zwycięża "nowy" kandydat,
 - jeśli metoda nie daje wyniku, zwycięża dotychczasowy kandydat.

Przykład: referendum.

- 7) Metoda n-głosów – każdy wyborca głosuje na n kandydatów, a zwycięża ten, kto uzyska najwięcej głosów.
- 8) Metoda punktowa – każdy wyborca $w \in W$ ma do rozdysponowania p punktów ($p \in \mathbb{N}$) między kandydatów. Zwycięża kandydat z największą liczbą punktów.
- 9) Metoda większości ważonej – ($W = \{a_1, \dots, a_n\}$), gdzie głos a_i ma wagę $w_i \geq 0$. Wygrywa ten, kto otrzyma ponad $\frac{w_1 + \dots + w_n}{2}$ punktów.
- 10) Metoda głosowania blokowego – $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$, gdzie W_k to zbiór wyborców bloku. W_k podejmuje decyzję większością głosów. W przypadku remisu wybierają zwycięzcę w W_k . Głos z W_k ma wagę i_k . Wygrywa kandydat z największą liczbą punktów.

Definicja 2.8 (Metoda decyzyjna)

Metoda zwycięzcy jest decyzyjna \Leftrightarrow w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę.

Definicja 2.9 (Metoda prawie decyzyjna)

Metoda zwycięzcy jest prawie decyzyjna \Leftrightarrow w każdym modelu wyłania co najwyżej jednego zwycięzcę. Sytuacja, w której nie ma zwycięzcy, zachodzi wtedy, gdy więcej niż jeden kandydat uzyskał tę samą, najwyższą liczbę punktów.

Ćwiczenie 2.1 (Z ćwiczeń)

Zbadaj kto jest zwycięzcą w głosowaniu przez 99 osób na kandydatów: **Anastazy, Bermudy, Cezary**, jeśli otrzymano następujące wyniki metodą porządkową:

Liczba głosów	Wynik porządkowy
18	ABC
15	ACB
24	BAC
8	BCA
16	CAB
18	CBA

Ćwiczenie 2.2

Dane są wyniki głosowania:

<i>Imię</i>	<i>Liczba głosów</i>
<i>Jaś</i>	<i>100</i>
<i>Małgosia</i>	<i>1</i>

Zrób tak, by Małgosia wygrała.

Ćwiczenie 2.3

Uzupełnij tabelę:

	<i>Anonimowa</i>	<i>Neutralna</i>	<i>Efektywna</i>
<i>Dyktatura</i>			
<i>Monarchia</i>			
<i>Metoda Większości</i>			

3 Deser

W sumie to deseru jeszcze nie ma, ale ma być na ostatnim wykładzie!!!

