

Matematyczne aspekty wyborów

Na podstawie wykładu
Krzysztofa Ciesielskiego

Skrypt autorstwa
Arkadiusza Dąbala

Wersja z dnia:
2024-10-11

Contents

1 Preliminaria	2
1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?	2
1.2 Prawo Ciesielskiego	4
2 Treść właściwa	5
2.1 Metody głosowania (system wyborczy)	5
2.1.1 Metoda zwycięzcy	5
3 Deser	11

1 Preliminaria

1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?

Komentarz

Materiał ten nie ma w żadnym stopniu charakteru politycznego, a wyłącznie charakter matematyczny.

Przykład 1.1

Rozważmy poniższe dane, oparte na 6 partiach, 1000 głosach i 6 mandatów do rozdania:

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	380	190	127	87	3
Gitarzyści	192	192	96	64		2
Szachiści	180	180	90			1
Piłkarze	96	96	48			1
Lotniarze	90	90				0
Kolejarze	62	62				0

System ten działa w następujący sposób:

- Liczby głosów dzielone są przez kolejne liczby naturalne dodatnie (tak jak w tabeli).
- Wybierane są z tej tabeli 6 największych liczb (wytluszczone druk).
- Liczba mandatów zależy od liczby wytluszczonych liczb w wierszu partii.

Przykład 1.2

Rozważmy tę samą tabelę, ale założmy, że partia **Gitarzyści** nie przekroczyła progu 5%.

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	380	190	127	87	3
Gitarzyści	192	192	96	64	—	—
Szachiści	180	180	90			2
Piłkarze	96	96	48			1
Lotniarze	90	90				1
Kolejarze	62	62				0

Przykład 1.3

Rozważmy następującą tabelę z 5 mandatami do rozdania:

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	6000	3000	2000	1500	3
Myśliwi	5700	2850	1900		2
Artyści	1950	975			0

Partia **Rybacy** prowadziła kampanię przeciwko **Myśliwym**, w wyniku czego liczba otrzymanych głosów zmieniła się następująco:

- Partia **Rybacy** zyskała 400 głosów (+400)
- Partia **Myśliwi** straciła 600 głosów (-600)
- Partia **Artyści** zyskała 200 głosów (+200)

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	6400	3200	2133		3
Myśliwi	5100	2550	1700		2
Artyści	2150	1075			0

Komentarz

Tym oto sposobem partia **Myśliwi** stracili jeden mandat na rzecz partii **Artyści**.

Przykład 1.4

Rozważmy wyniki głosowania dla dwóch partii z 6 mandatami do rozdania.

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	: 5	Mandaty
Matematycy	1200	600	400	300	240	5
Politycy	201	101				1

Popatrzmy na głosy bezpośrednio na konkretnych kandydatów z każdej partii:

Nazwa	Głosy
Kwadrat	201
Trójkąt	200
Stożek	200
Walec	200
Suma	200
Iloczyn	199

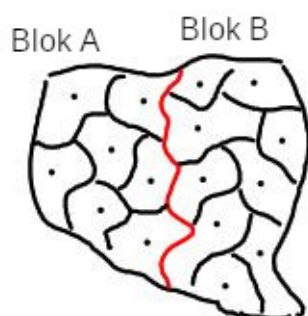
Nazwa	Głosy
Magister	35
Magistra	34
Urzędnik	33
Urzędas	33
Pani Basia	33
Pan Andrzej	33

Komentarz

Tym oto sposobem mandatu nie otrzymuje **Iloczyn**, mimo że zdobył więcej głosów niż **Magister**.

Przykład 1.5

Rozważmy sytuację, w której państwo jest podzielone na dwa bloki, oba mające po 50% wpływu na wyniki wyborów. Każdy blok ma przyznać po 4 mandaty.



W bloku A znajdowały się dwie partie: PZK (Partia Zwolenników Kawy) i PZH (Partia Zwolenników Herbaty), z których każda otrzymała po 25% głosów w ogólnokrajowym głosowaniu. W bloku B znajdowała się partia PZA (Partia Zwolenników Alkoholu) oraz inne partie, które nie przekroczyły progu 5%. Przedstawmy liczbę uzyskanych głosów w PZA:

Nazwa	Głosy
Żubr	19995
Żubrówka	2
Soplica	2
Pan Tadeusz	1

Komentarz

I tym oto sposobem wygrywają osoby, które dostają 2 lub 1 głos.

1.2 Prawo Ciesielskiego

Rozważmy głosowanie względem 2 partii z 7 mandatami:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	1050	350	210	150	117	4
Sportowcy	1008	336	202	144		3

Partia **Sportowcy** postanowiła się rozdzielić na dwie partie i startować osobno:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	1050	350	210	150	117	3
Piłkarze	504	168	101			2
Siatkarze	504	168	101			2

Komentarz

Tym oto sposobem partia **Sportowcy** zdobyła większość.

2 Treść właściwa

2.1 Metody głosowania (system wyborczy)

Wprowadźmy kilka oznaczeń, niech:

W - zbiór wszystkich wyborców,

K - zbiór wszystkich kandydatów.

- Ten sam układ głosów (zestaw głosów) daje ten sam wynik (funkcja).
- Każdy układ głosów daje jakiś wynik (może być \emptyset).

Definicja 2.1 (Model)

Model to układ głosów (z przyporządkowanymi wyborcami).

Definicja 2.2 (Metoda anonimowa)

Metoda jest anonimowa, wtedy i tylko wtedy (w skrócie: \Leftrightarrow), gdy wszyscy wyborcy są traktowani tak samo, $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in W}$ zamiana głosów x i y nie zmienia wyniku.

Komentarz

Alternatywnie, metoda nie jest anonimowa $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in W}$ takie, że zamiana głosów x i y istotnie zmienia wynik.

Definicja 2.3 (Metoda neutralna)

Metoda jest neutralna, \Leftrightarrow wszyscy kandydaci są traktowani tak samo, $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in K}$ zamiana ról x i y nie zmienia wyniku.

Komentarz

Alternatywnie, metoda nie jest neutralna $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in K}$ takie, że zamiana ról x i y istotnie zmienia wynik, dokładniej definiując:

jeśli $\exists k_1, k_2 \in K : W_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_i\}$ głosowali na k_1 , a $W_2 = \{w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_j\}$ głosowali na k_2 to jeżeli kandydaci Ci "zamieniają się" wyborcami (zbiorami W_1, W_2), to k_1 i k_2 zamieniają się wynikami.

Definicja 2.4

Trzy rodzaje metod ze względu na wyniki:

- 1) Metoda zwycięzcy (MZ) – wybiera zwycięzcę (zwycięzców),
- 2) Metoda porządkowa (MP) – wynik to słaby porządek na zbiorze K ,
- 3) Metoda rozdziału (MR) – wynik to podział pewnych dóbr między kandydatów.

2.1.1 Metoda zwycięzcy

Definicja 2.5 (Klasyczna metoda zwycięzcy)

Klasyczna metoda zwycięzcy (klasyczna MZ) polega na tym, że każdy wyborca głosuje na dokładnie jednego kandydata. Zbiór

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow K\}$$

jest zbiorem modeli, gdzie m jest modelem. Klasyczną metodę zwycięzcy możemy opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

Definicja 2.6 (Semi-klasyczna metoda zwycięzcy)

Semi-klasyczna MZ polega na tym, że każdy wyborca głosuje na co najmniej jednego kandydata:

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow P(K) \setminus \emptyset\}.$$

Metodę tę można opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

Definicja 2.7 (Metoda efektywna)

Metoda zwycięzcy jest efektywna \Leftrightarrow zawsze wyłania przynajmniej jednego zwycięzcę.

Przykład 2.1 (Przykłady metod głosowania)**Metody klasyczne:**

- 1) Dyktatura – $\exists p \in W$: wynik jest tożsamy z głosem p .
- 2) Monarchia – dany kandydat $k \in K$ wygrywa niezależnie od głosowania.
- 3) Metoda większości – wygrywa kandydat (lub kandydaci), który(a) otrzymał(a) najwięcej głosów.
- 4) Metoda bezwzględnej większości – wygrywa kandydat $k \in K$, który otrzymał co najmniej $\lfloor \frac{\#W}{2} \rfloor + 1$ głosów.
- 5) Metoda super większości – wygrywa kandydat, który uzyskał co najmniej q głosów, gdzie $q > \frac{\#W}{2}$.
- 6) Metoda status quo – *Założenie*: \exists pewien stan z jednym zwycięzcą.
Głosowanie metodą większości (lub super większości):
 - jeśli metoda daje wynik, zwycięża "nowy" kandydat,
 - jeśli metoda nie daje wyniku, zwycięża dotychczasowy kandydat.

Przykład: referendum.

- 7) Metoda większości ważonej – ($W = \{a_1, \dots, a_n\}$), gdzie głos a_i ma wagę $w_i \geq 0$. Wygrywa ten, kto otrzyma ponad $\frac{w_1 + \dots + w_n}{2}$ punktów.
- 8) Metoda głosowania blokowego – $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$, gdzie W_k to zbiór wyborców bloku. W_k podejmuje decyzję większością głosów. W przypadku remisu wybierają zwycięzcę w W_k . Głos z W_k ma wagę i_k . Wygrywa kandydat z największą liczbą punktów.

Metody semi-klasyczne:

- 9) Metoda n-głosów – każdy wyborca głosuje na n kandydatów, a zwycięża ten, kto uzyska najwięcej głosów.
- 10) Szeroka metoda n-głosów – każdy głosuje na n kandydatów, ale mamy n zwycięzców (lub więcej w przypadku remisu na ostatnim "wygrywającym" miejscu)

Metoda ani klasyczna, ani semi-klasyczna:

- 11) Metoda punktowa – każdy wyborca $w \in W$ ma do rozdysponowania p punktów ($p \in \mathbb{N}$) między kandydatów. Zwycięża kandydat z największą liczbą punktów.

Definicja 2.8 (Metoda decyzyjna)

Metoda zwycięzcy jest decyzyjna \Leftrightarrow w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę.

Definicja 2.9 (Metoda prawie decyzyjna)

Metoda zwycięzcy jest prawie decyzyjna \Leftrightarrow w każdym modelu wyłania co najwyżej jednego zwycięzcę. Sytuacja, w której nie ma zwycięzcy, zachodzi wtedy, gdy więcej niż jeden kandydat uzyskał tę samą, najwyższą liczbę punktów.

Ćwiczenie 2.1 (Z ćwiczeń)

Zbadaj kto jest zwycięzcą w głosowaniu przez 99 osób na kandydatów: **Anastazy, Bermudy, Cezary**, jeśli otrzymano następujące wyniki metodą porządkową:

Liczba głosów	Wynik porządkowy
18	ABC
15	ACB
24	BAC
8	BCA
16	CAB
18	CBA

Ćwiczenie 2.2

Dane są wyniki głosowania:

Imię	Liczba głosów
Jaś	100
Małgosia	1

Zrób tak, by Małgosia wygrała.

Ćwiczenie 2.3

Uzupełnij tabelę:

	Anonimowa	Neutralna	Efektywna
Dyktatura	-	+	+
Monarchia	+	-	+
Metoda Większości	+	+	+

Definicja 2.10 (Kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości)

Metoda zwycięzcy (MZ) spełnia kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat, który otrzyma ponad 50% głosów, jest jedynym zwycięzcą.

Stwierdzenie 2.1

Mamy klasyczną metodę zwycięzcy, taką że $\#K = 2$, a głosowanie odbywa się według zasady bezwzględnej większości. Wówczas metoda jest prawie decyzyjna.

Dowód:

1° Załóżmy, że liczba wyborców $\#W$ jest nieparzysta - OK.

2° Liczba wyborców $\#W$ jest parzysta:

- jeden kandydat ma więcej niż 50% głosów - OK.
- remis, czyli obaj mają po 50% - nie ma zwycięzcy (dlatego metoda jest prawie decyzyjna).

□

Stwierdzenie 2.2

Metoda jest decyzyjna \Rightarrow metoda jest prawie decyzyjna.

Definicja 2.11 (Metoda monotoniczna ze względu na zwycięzcę)

Z: MZ - klasyczna lub semi-klasyczna. Metoda jest monotoniczna ze względu na zwycięzcę, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat A jest zwycięzcą, a jeśli wybierzemy kandydata B różnego od A ($B \neq A$) oraz jego grupę wyborców, to jeśli ta grupa zmieni swoje głosy bez straty dla A (czyli zmiana nastąpi zgodnie z następującymi dozwolonymi operacjami):

M	\Rightarrow	N
$A \ B$	\Rightarrow	$A \ B$
$- \ -$	\Rightarrow	$- \ -$
$+ \ +$	\Rightarrow	$+ \ +$
$- \ +$	\Rightarrow	$+ \ -$

to: $\Rightarrow A$ nadal wygrywa.

Komentarz

Czyli, jeżeli ktoś, kto nie głosował na zwycięzcę (A), a głosował na kandydata B , zmieni swój głos na zwycięzcę (A), to (A) nadal wygrywa.

Definicja 2.12 (Metoda kwoty)

MZ klasyczna lub semi-klasyczna jest metodą kwoty (większości kwalifikowanej), wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje q (kwota), taka że liczba głosów o tej własności, że kandydat A jest zwycięzcą wtedy i tylko wtedy, gdy A otrzymał co najmniej q głosów.

Komentarz

Często kwota wyrażana jest w procentach, a wówczas stosuje się nieraz nierówność słabą.

Twierdzenie 2.1 (Maya - Kenneth Maya, 1952r)

Z: Klasyczna metoda zwycięzcy oraz $\#K = 2$. Jeżeli metoda ta jest metodą:

- (1) anonimową
- (2) neutralną
- (3) monotoniczną ze względu na zwycięzcę
- (4) prawie decyzyjną

\Rightarrow jest metodą bezwzględnej większości.

Dowód: Załóżmy, że A, B to kandydaci.

$\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ interesują nas liczby głosów, które otrzymali kandydaci. Załóżmy:

A - a głosów

B - b głosów

Rozpatrzmy zatem przypadki:

1° $\#W = 2n$ (parzysta), rozważmy dwa podprzypadki:

a) Jeśli $a = n, b = n$.

Hipoteza: A wygrywa (analogicznie, jeżeli nie wygrywa B), a metoda jest neutralna, to przy wymianie wyborców $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} B$ wygrywa (nie wygrywa A) $\Rightarrow A$ i B wygrywają jednocześnie (nie wygrywa żaden) \Rightarrow co prowadzi do \blacksquare (bo żaden z nich nie ma ponad 50%).

b) Jeśli $a > b$.

Hipoteza: B wygrywa, wtedy $a - b$ wyborców zmienia głosy z A na B , $\stackrel{(3)}{\Rightarrow} B$ dalej wygrywa. Teraz B ma a głosów, $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} A$ wygrywa, $\stackrel{(4)}{\Rightarrow} A$ wygrywa i ma ponad połowę głosów.

2° Niech $\#W = 2n + 1$ (nieparzysta).

Niech $a > b$.

Hipoteza: B wygrywa, $a - b$ wyborców zmienia głosy i, jak w 1a), udowadniamy, że B musi mieć ponad połowę głosów.

Tak więc zawsze wygrywa ten, kto ma ponad połowę głosów.

□

Definicja 2.13 (Metoda zakładająca uporządkowanie)

Metoda zwycięzcy jest metodą zakładającą uporządkowanie (MZU) wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{w \in W}$ ustala K kandydatów w liniowym porządku, a jego głos zależy od tego porządku.

Zapis:

$A \stackrel{w,m}{<} B$ w modelu m oznacza, że wyborca w stawia B wyżej niż A .

$A \stackrel{w}{<} B$ - gdy wiadomo, jaki model.

Przykład 2.2

1. Metoda punktów Borda (Jean Charles de Borda, 1733–1799, inżynier wojskowy) – Każdy wyborca przydziela punkty od $n - 1$ do 0 : 1. $n - 1$ 2. $n - 2$: $n - 1 - 1$ $n - 0$
Zwycięża ten, kto otrzyma największą liczbę punktów.
2. Metoda Hare’a (Sir Thomas Hare, 1806–1891, Anglia, prawnik, 1857 r.) – Polega na odrzucaniu tego kandydata (tych kandydatów), który ma najmniej pierwszych miejsc, i głosowaniu dalej (listy pozostają z usunięciem odrzuconego kandydata), aż ktoś uzyska ponad 50% głosów. Gdy następuje remis i nie ma kogo odrzucić, wszyscy wygrywają.
3. Metoda Coombsa (Clyde Coombs, 1912–1988, USA, psycholog) – Wypisujemy kolejność, odrzucamy kandydata, który ma najwięcej ostatnich miejsc, i głosujemy dalej, aż ktoś uzyska ponad 50% pierwszych miejsc. Gdy nie można nikogo odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.
4. Metoda odrzuceń ostatniego – Jak w metodzie Coombsa, przy czym odrzucamy „do oporu”. Gdy nie można nikogo więcej odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.

Przykład 2.3

Różnica między metodą Coombsa a metodą odrzucania ostatniego.

Metoda Coombsa

Liczba:	4	2	3
I pozycja	C	B	B
II pozycja	A	C	A
III pozycja	B	A	C

Wygrywa B , bo ma ponad 50% pierwszych miejsc.

Metoda odrzuceń ostatniego

Liczba:	4	2	3
I pozycja	C	B	B
II pozycja	A	C	A
III pozycja	B	A	C

Kolejność odrzuceń: B, A, C – C wygrywa.

5. Metoda Copelanda (Arthur H. Copeland, 1898–1970, matematyk) – Porównujemy parami kandydatów. Ten, kto więcej razy zostaje oceniony wyżej, dostaje 1 pkt, a w przypadku remisu obaj dostają po 0,5 pkt.

$$\#\{m : A \overset{m}{<} B\}$$

$$\#\{m : B \overset{m}{<} A\}$$

Decyduje suma punktów (zwycięzców może być więcej niż jeden).

6. Metoda turniejowa (Z: $\#W = 2n + 1$ nieparzysta) – k_1 porównujemy z k_2 (metodą powyżej), następnie porównujemy z k_3 itd.
7. Metoda pozycyjna – $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$, gdzie $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$. 1 – p_1 punktów, 2 – p_2 punktów itd.
Zwycięża ten z największą liczbą punktów.

UWAGA – w szczególności:

Metoda Bordy: $P(n - 1, n - 2, \dots, 1, 0)$

Metoda większości: $P(1, 0, \dots, 0)$

Metoda k głosów: $P(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$
 k razy

3 Deser

W sumie to deseru jeszcze nie ma, ale ma być na ostatnim wykładzie!!!

