Matematyczne aspekty wyborów

Na podstawie wykładu

Krzysztofa Ciesielskiego

Skrypt autorstwa

Arkadiusza Dąbala

Wersja z dnia:

2024-10-18

Contents

1 Preliminaria

1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?

Komentarz
Materiał ten nie ma w żadnym stopniu charakteru politycznego, a wyłącznie charakter matematyczny.

Przykład 1.1
Rozważmy poniższe dane, oparte na 6 partiach, 1000 głosach i 6 mandatów do rozdania:

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	**380**	**190**	**127**	87	3
Gitarzyści	192	**192**	**96**	64		2
Szachiści	180	**180**	90			1
Piłkarze	96	**96**	48			1
Lotniarze	90	90				0
Kolejarze	62	62				0

System ten działa w następujący sposób:

- Liczby głosów dzielone są przez kolejne liczby naturalne dodatnie (tak jak w tabeli).
- Wybierane są z tej tabeli 6 największych liczb (wytłuszczony druk).
- Liczba mandatów zależy od liczby wytłuszczonych liczb w wierszu partii.

Przykład 1.2
Rozważmy tę samą tabelę, ale załóżmy, że partia ***Gitarzyści*** *nie przekroczyła progu* 5%.

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	**380**	**190**	**127**	87	3
~~Gitarzyści~~	~~192~~	~~192~~	~~96~~	~~64~~	—	—
Szachiści	180	**180**	**90**			2
Piłkarze	96	**96**	48			1
Lotniarze	90	**90**				1
Kolejarze	62	62				0

Przykład 1.3
Rozważmy następującą tabelę z 5 mandatami do rozdania:

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	**6000**	**3000**	**2000**	1500	3
Myśliwi	**5700**	**2850**	1900		2
Artyści	1950	975			0

Partia **Rybacy** prowadziła kampanię przeciwko **Myśliwym**, w wyniku czego liczba otrzymanych głosów zmieniła się następująco:

- Partia **Rybacy** zyskała 400 głosów (+400)
- Partia **Myśliwi** straciła 600 głosów (-600)
- Partia **Artyści** zyskała 200 głosów (+200)

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	**6400**	**3200**	2133		3
Myśliwi	**5100**	**2550**	1700		2
Artyści	**2150**	1075			0

Komentarz
Tym oto sposobem partia **Myśliwi** stracili jeden mandat na rzecz partii **Artyści**.

Przykład 1.4
Rozważmy wyniki głosowania dla dwóch partii z 6 mandatami do rozdania.

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	: 5	Mandaty
Matematycy	**1200**	**600**	**400**	**300**	**240**	5
Politycy	**201**	101				1

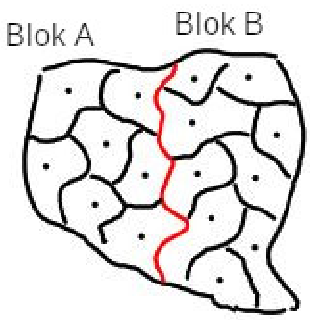
Popatrzmy na głosy bezpośrednio na konkretnych kandydatów z każdej partii:

Nazwa	Głosy
Kwadrat	**201**
Trójkąt	**200**
Stożek	**200**
Walec	**200**
Suma	**200**
Iloczyn	199

Nazwa	Głosy
Magister	**35**
Magistra	34
Urzędnik	33
Urzędas	33
Pani Basia	33
Pan Andrzej	33

Komentarz
Tym oto sposobem mandatu nie otrzymuje **Iloczyn**, mimo że zdobył więcej głosów niż **Magister**.

Przykład 1.5
Rozważmy sytuację, w której państwo jest podzielone na dwa bloki, oba mające po 50% *wpływu na wyniki wyborów. Każdy blok ma przyznać po 4 mandaty.*



W bloku A znajdowały się dwie partie: PZK (Partia Zwolenników Kawy) i PZH (Partia Zwolenników Herbaty), z których każda otrzymała po 25% głosów w ogólnokrajowym głosowaniu. W bloku B znajdowała się partia PZA (Partia Zwolenników Alkoholu) oraz inne partie, które nie przekroczyły progu 5%. Przedstawmy liczbę uzyskanych głosów w PZA:

Nazwa	Głosy
Żubr	**19995**
Żubrówka	**2**
Soplica	**2**
Pan Tadeusz	**1**

Komentarz
I tym oto sposobem wygrywają osoby, które dostają 2 lub 1 głos.

1.2 Prawo Ciesielskiego

Rozważmy głosowanie względem 2 partii z 7 mandatami:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	**1050**	**350**	**210**	150	117	4
Sportowcy	**1008**	**336**	202	144		3

Partia **Sportowcy** postanowiła się rozdzielić na dwie partie i startować osobno:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	**1050**	**350**	**210**	150	117	3
Piłkarze	**504**	**168**	101			2
Siatkarze	**504**	**168**	101			2

Komentarz
Tym oto sposobem partia **Sportowcy** zdobyła większość.

2 Treść właściwa

2.1 Metody głosowania (system wyborczy)

Wprowadźmy kilka oznaczeń, niech:

W - zbiór wszystkich wyborców,
K - zbiór wszystkich kandydatów.

- Ten sam układ głosów (zestaw głosów) daje ten sam wynik (funkcja).
- Każdy układ głosów daje jakiś wynik (może być $\emptyset$).

Definicja 2.1 (Model)
Model to układ głosów (z przyporządkowanymi wyborcami).

Definicja 2.2 (Metoda anonimowa)
Metoda jest anonimowa, wtedy i tylko wtedy (w skrócie: $\Leftrightarrow$), gdy wszyscy wyborcy są traktowani tak samo, $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in W}$ zamiana głosów x i y nie zmienia wyniku.

Komentarz
Alternatywnie, metoda nie jest anonimowa $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in W}$ takie, że zamiana głosów x i y *istotnie* zmienia wynik.

Definicja 2.3 (Metoda neutralna)
Metoda jest neutralna, $\Leftrightarrow$wszyscy kandydaci są traktowani tak samo, $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in K}$ zamiana ról x i y nie zmienia wyniku.

Komentarz
Alternatywnie, metoda nie jest neutralna $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in K}$ takie, że zamiana ról x i y *istotnie* zmienia wynik, dokładniej definiując:
jeśli $\exists k_1, k_2 \in K : W_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_i\}$ głosowali na k_1, a $W_2 = \{w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_j\}$ głosowali na k_2 to jeżeli kandydaci Ci "zamienią się" wyborcami (zbiorami W_1, W_2), to k_1 i k_2 zamienią się wynikami.

Definicja 2.4
Trzy rodzaje metod ze względu na wyniki:

1) Metoda zwycięzcy (MZ) – wybiera zwycięzcę (zwycięzców),

2) Metoda porządkowa (MP) – wynik to słaby porządek na zbiorze K,

3) Metoda rozdziału (MR) – wynik to podział pewnych dóbr między kandydatów.

2.1.1 Metoda zwycięzcy

Definicja 2.5 (Klasyczna metoda zwycięzcy)
Klasyczna metoda zwycięzcy (klasyczna MZ) polega na tym, że każdy wyborca głosuje na dokładnie jednego kandydata. Zbiór

$$\Sigma = \{m : W \to K\}$$

jest zbiorem modeli, gdzie m jest modelem. Klasyczną metodę zwycięzcy możemy opisać funkcją

$$f : \Sigma \to P(K).$$

Definicja 2.6 (Semi-klasyczna metoda zwycięzcy)
Semi-klasyczna MZ polega na tym, że każdy wyborca głosuje na co najmniej jednego kandydata:

$$\Sigma = \{m : W \to P(K) \setminus \emptyset\}.$$

Metodę tę można opisać funkcją

$$f : \Sigma \to P(K).$$

Definicja 2.7 (Metoda efektywna)
Metoda zwycięzcy jest efektywna $\Leftrightarrow$zawsze wyłania przynajmniej jednego zwycięzcę.

Przykład 2.1 (Przykłady metod głosowania)
Metody klasyczne:

1) Dyktatura – $\exists_{p \in W}$: wynik jest tożsamy z głosem p.

2) Monarchia – dany kandydat $k \in K$ wygrywa niezależnie od głosowania.

3) Metoda większości – wygrywa kandydat (lub kandydaci), który(a) otrzymał(a) najwięcej głosów.

4) Metoda bezwzględnej większości – wygrywa kandydat $k \in K$, który otrzymał co najmniej $\lfloor \frac{\#W}{2} \rfloor + 1$ głosów.

5) Metoda super większości – wygrywa kandydat, który uzyskał co najmniej q głosów, gdzie $q > \frac{\#W}{2}$.

6) Metoda status quo – *Założenie:* $\exists$ pewien stan z jednym zwycięzcą.
Głosowanie metodą większości (lub super większości):

   - jeśli metoda daje wynik, zwycięża "nowy" kandydat,
   - jeśli metoda nie daje wyniku, zwycięża dotychczasowy kandydat.

   Przykład: referendum.

7) Metoda większości ważonej – ($W = \{a_1, \dots, a_n\}$), gdzie głos a_i ma wagę $w_i \geq 0$. Wygrywa ten, kto otrzyma ponad $\frac{w_1 + \dots + w_n}{2}$ punktów.

8) Metoda głosowania blokowego – $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$, gdzie W_k to zbiór wyborców bloku. W_k podejmuje decyzję większością głosów. W przypadku remisu wybierają zwycięzcę w W_k. Głos z W_k ma wagę i_k. Wygrywa kandydat z największą liczbą punktów.

   Metody semi-klasyczne:

9) Metoda n-głosów – każdy wyborca głosuje na n kandydatów, a zwycięża ten, kto uzyska najwięcej głosów.

10) Szeroka metoda n-głosów - każdy głosuje na n kandydatów, ale mamy n zwycięzców (lub więcej w przypadku remisu na ostatnim "wygrywającym" miejscu)

    Metoda ani klasyczna, ani semi-klasyczna:

11) Metoda punktowa – każdy wyborca $w \in W$ ma do rozdysponowania p punktów ($p \in \mathbb{N}$) między kandydatów. Zwycięża kandydat z największą liczbą punktów.

Definicja 2.8 (Metoda decyzyjna)
Metoda zwycięzcy jest decyzyjna $\Leftrightarrow$w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę.

Definicja 2.9 (Metoda prawie decyzyjna)
Metoda zwycięzcy jest prawie decyzyjna $\Leftrightarrow$ *w każdym modelu wyłania co najwyżej jednego zwycięzcę. Sytuacja, w której nie ma zwycięzcy, zachodzi wtedy, gdy więcej niż jeden kandydat uzyskał tę samą, najwyższą liczbę punktów.*

Ćwiczenie 2.1 (Z ćwiczeń)
Zbadaj kto jest zwycięzcą w głosowaniu przez 99 osób na kandydatów: ***Anastazy***, ***Bermudy***, ***Cezary***, *jeśli otrzymano następujące wyniki metodą porządkową:*

Liczba głosów	Wynik porządkowy
18	ABC
15	ACB
24	BAC
8	BCA
16	CAB
18	CBA

Ćwiczenie 2.2
Dane są wyniki głosowania:

Imię	*Liczba głosów*
Jaś	*100*
Małgosia	*1*

Zrób tak, by Małgosia wygrała.

Ćwiczenie 2.3
Uzupełnij tabelę:

	Anonimowa	*Neutralna*	*Efektywna*
Dyktatura	-	+	+
Monarchia	+	-	+
Metoda Większości	+	+	+

Definicja 2.10 (Kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości)
Metoda zwycięzcy (MZ) spełnia kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat, który otrzyma ponad 50% głosów, jest jedynym zwycięzcą.

Stwierdzenie 2.1
Mamy klasyczną metodę zwycięzcy, taką że $\#K = 2$*, a głosowanie odbywa się według zasady bezwzględnej większości. Wówczas metoda jest prawie decyzyjna.*

Dowód:

1° Załóżmy, że liczba wyborców $\#W$ jest nieparzysta - OK.

2° Liczba wyborców $\#W$ jest parzysta:

- jeden kandydat ma więcej niż 50% głosów - OK.
- remis, czyli obaj mają po 50% - nie ma zwycięzcy (dlatego metoda jest prawie decyzyjna).

$\square$

Stwierdzenie 2.2
Metoda jest decyzyjna $\Rightarrow$ *metoda jest prawie decyzyjna.*

Definicja 2.11 (Metoda monotoniczna ze względu na zwycięzcę)
Z: *MZ - klasyczna lub semi-klasyczna. Metoda jest monotoniczna ze względu na zwycięzcę, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat A jest zwycięzcą, a jeśli wybierzemy kandydata B różnego od A ($B \neq A$) oraz jego grupę wyborców, to jeśli ta grupa zmieni swoje głosy bez straty dla A (czyli zmiana nastąpi zgodnie z następującymi dozwolonymi operacjami):*

M	$\Rightarrow$	N
A B	$\Rightarrow$	A B
- -	$\Rightarrow$	- -
+ +	$\Rightarrow$	+ +
- +	$\Rightarrow$	+ -

to: $\Rightarrow$ A nadal wygrywa.

Komentarz
Czyli, jeżeli ktoś, kto nie głosował na zwycięzcę (A), a głosował na kandydata B, zmieni swój głos na zwycięzcę (A), to (A) nadal wygrywa.

Definicja 2.12 (Metoda kwoty)
MZ klasyczna lub semi-klasyczna jest metodą kwoty (większości kwalifikowanej), wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje q (kwota), taka że liczba głosów o tej własności, że kandydat A jest zwycięzcą wtedy i tylko wtedy, gdy A otrzymał co najmniej q głosów.

Komentarz
Często kwota wyrażana jest w procentach, a wówczas stosuje się nieraz nierówność słabą.

Twierdzenie 2.1 (Maya - Kenneth Maya, 1952r)
Z: *Klasyczna metoda zwycięzcy oraz $\#K = 2$. Jeżeli metoda ta jest metodą:*

(1) anonimową

(2) neutralną

(3) monotoniczną ze względu na zwycięzcę

(4) prawie decyzyjną

$\Rightarrow$ jest metodą bezwzględnej większości.

Dowód: Załóżmy, że A, B to kandydaci.
$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ interesują nas liczby głosów, które otrzymali kandydaci. Załóżmy:
A - a głosów
B - b głosów
Rozpatrzmy zatem przypadki:

1° $\#W = 2n$ (parzysta), rozważmy dwa podprzypadki:

a) Jeśli $a = n$, $b = n$.
Hipoteza: A wygrywa (analogicznie, jeżeli nie wygrywa B), a metoda jest neutralna, to przy wymianie wyborców $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ B wygrywa (nie wygrywa A) $\Rightarrow$ A i B wygrywają jednocześnie (nie wygrywa żaden) $\Rightarrow$ co prowadzi do ϟ(bo żaden z nich nie ma ponad 50%).

b) Jeśli $a > b$.

Hipoteza: B wygrywa, wtedy $a - b$ wyborców zmienia głosy z A na B, $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ B dalej wygrywa. Teraz B ma a głosów, $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ A wygrywa, $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ A wygrywa i ma ponad połowę głosów.

2° Niech $\#W = 2n + 1$ (nieparzysta).
Niech $a > b$.
Hipoteza: B wygrywa, $a - b$ wyborców zmienia głosy i, jak w 1a), udowadniamy, że B musi mieć ponad połowę głosów.

Tak więc zawsze wygrywa ten, kto ma ponad połowę głosów.

□

Definicja 2.13 (Metoda zakładająca uporządkowanie)
Metoda zwycięzcy jest metodą zakładającą uporządkowanie (MZU) wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{w \in W}$ ustala K kandydatów w liniowym porządku, a jego głos zależy od tego porządku.

Zapis:
$A \overset{w,m}{<} B$ w modelu m oznacza, że wyborca w stawia B wyżej niż A.
$A \overset{w}{<} B$ - gdy wiadomo, jaki model.

Przykład 2.2

1. *Metoda punktów Bordy (Jean Charles de Borda, 1733–1799, inżynier wojskowy) – Każdy wyborca przydziela punkty od $n-1$ do 0: 1. $n-1$ 2. $n-2$ $\vdots$ $n-1$ - 1 n - 0*
Zwycięża ten, kto otrzyma największą liczbę punktów.

2. *Metoda Hare'a (Sir Thomas Hare, 1806–1891, Anglia, prawnik, 1857 r.) – Polega na odrzucaniu tego kandydata (tych kandydatów), który ma najmniej pierwszych miejsc, i głosowaniu dalej (listy pozostają z usunięciem odrzuconego kandydata), aż ktoś uzyska ponad 50% głosów. Gdy następuje remis i nie ma kogo odrzucić, wszyscy wygrywają.*

3. *Metoda Coombsa (Clyde Coombs, 1912–1988, USA, psycholog) – Wypisujemy kolejność, odrzucamy kandydata, który ma najwięcej ostatnich miejsc, i głosujemy dalej, aż ktoś uzyska ponad 50% pierwszych miejsc. Gdy nie można nikogo odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.*

4. *Metoda odrzuceń ostatniego – Jak w metodzie Coombsa, przy czym odrzucamy „do oporu". Gdy nie można nikogo więcej odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.*

Przykład 2.3
Różnica między metodą Coombsa a metodą odrzucania ostatniego.

Metoda Coombsa

Liczba:	*4*	*2*	*3*
I pozycja	*C*	***B***	***B***
II pozycja	*A*	*C*	*A*
III pozycja	*B*	*A*	*C*

Wygrywa B, bo ma ponad 50% pierwszych miejsc.

Metoda odrzuceń ostatniego

Liczba:	*4*	*2*	*3*
I pozycja	*C*	*B*	*B*
II pozycja	$\cancel{A}$	*C*	*A*
III pozycja	$\cancel{B}$	$\cancel{A}$	*C*

Kolejność odrzuceń: B, A, C – C wygrywa.

5. *Metoda Copelanda (Arthur H. Copeland, 1898–1970, matematyk) – Porównujemy parami kandydatów. Ten, kto więcej razy zostaje oceniony wyżej, dostaje 1 pkt, a w przypadku remisu obaj dostają po 0,5 pkt.*

   $\#\{m : A \overset{m}{<} B\}$
   $\#\{m : B \overset{m}{<} A\}$

   Decyduje suma punktów (zwycięzców może być więcej niż jeden).

6. *Metoda turniejowa (Z: $\#W = 2n+1$ nieparzysta) – k_1 porównujemy z k_2 (metodą powyżej), następnie porównujemy z k_3 itd.*

7. *Metoda pozycyjna – $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, gdzie $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n$. 1 – p_1 punktów, 2 – p_2 punktów itd.*
   Zwycięża ten z największą liczbą punktów.

UWAGA – w szczególności:
Metoda Bordy: $P(n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$
Metoda większości: $P(1, 0, \ldots, 0)$
Metoda k głosów: $P(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k\ razy}, 0, \ldots, 0)$

Definicja 2.14 (Monotoniczność ze względu na transpozycję)
MZU jest monotoniczna ze względu na transpozycje $\Leftrightarrow \forall_{M-model} \forall_{w \in W} \forall_{A,B \in K}$ jeśli w M głosuje $[\Delta, B, A, *]$ w M wygrywa A to jeśli w w N zmiana polega na $[\Delta, A, B, *]$ to w N wygrywa A.

> **Komentarz**
> Zmiana polega na zamienieniu kolejności uporządkowania A i B. Dodatkowo porządek ten był na wykładzie zapisany pionowo.

Umowa: Jeśli nie jest zaznaczone inaczej, to w K,W różne oznaczenia oznaczają różnych kandydatów (wyborców).

Definicja 2.15 (Słaba zasada Pareto)
MZU spełnia słabą zasadę Pareto $\Leftrightarrow \forall_m (\exists_{A,B \in K} \forall_{w \in W} A \overset{w,M}{<} B) \Rightarrow A$ nie wygrywa w M.

Definicja 2.16 (Kandydat Condorceta)
$A \in K$ jest kandydatem Condorceta (zwyciężca Condorceta) $\Leftrightarrow$w "bezpośrednich porównaniach" A jest lepszy od każdego innego kandydata $\Leftrightarrow \forall_{B \in K} : B \neq A \#w : B \overset{w,M}{<} A > \#w : B \overset{w,M}{>} A$.

Definicja 2.17 (Przegrany Condorceta)
$A \in K$ to przegrany Condorceta (w modelu M) $\Leftrightarrow \forall_{B \in K} : B \neq A \#w : B \overset{w,M}{<} A < \#w : B \overset{w,M}{>} A$

Definicja 2.18 (Kryterium Condorceta)
Metoda spełnia kryterium Condorceta $\Leftrightarrow \forall_M$: Istenieje kandydat Condorceta (w M) $\Rightarrow$ A- jedyny zwyciężca w M

Definicja 2.19 (Kryterium przegranych Condorceta)
Metoda spełnia kryterium przegranych Condorceta $\Leftrightarrow \forall_M$: *Istnieje przegrany Condorceta* A *w* $M \Rightarrow A$ *nie wygrywa w* M

Definicja 2.20 (Metoda jednoznacznie większościowa)
Metoda jednoznacznie większościowa $\Leftrightarrow \forall_M$ *kandydat* A *w* M *ma ponad połowę pierwszych miejsc* $\Rightarrow A$ *- jedyny zwyciężca*

Definicja 2.21 (Metoda słabo nieznaleźna od ubocznych opcji)
Metoda słabo nieznaleźna od ubocznych opcji spełnia warunek niezależności porażki od ubocznych opcji (spełnia słaby warunek IIA) $\Leftrightarrow$

$$\forall_{A,B\in K}\forall_{M,W-modele}\begin{bmatrix} \forall_{w\in W} B \overset{w,M}{<} A \Leftrightarrow B \overset{w,N}{<} A \\ A \text{ wygrywa w } M,\ B \text{ nie wygrywa w } M \end{bmatrix} \Rightarrow B \text{ nie wygrywa w } N.$$

Innymi słowy: zmiany nie wpływające na relacje przegrany-zwyciężca nie mogą dać przegrywającemu zwycięstwa.

Twierdzenie 2.2
MZU, anonimowa, neutralna $\Rightarrow$ *nie jest decyzyjna.*

Dowód. Rozważmy $\#K = 2$, $\#W = 2n$ i otrzymali głosy

	n	n
1	A	B
2	B	A

.

Hp. decyzyjna to np. wygrywa A $\Rightarrow$ wygyrwa B sprzeczność analogicznie dla A.

□

Przykład 2.4 (Paradoks Condorceta)
Rozważmy następującą tabelę

1	*A*	*B*	*C*
2	*B*	*C*	*A*
3	*C*	*A*	*B*

Zachodzi $A > B$, $B > C$, $C > A$. *Czyli mamy grę w kamień papier i nożyce.*

Twierdzenie 2.3
MZU spełnia kryterium Condorceta $\Rightarrow$ *jest jednoznacznie większościowa.*

Dowód. A ma ponad połowę 1 miejsc $\Rightarrow$ A - kandydat Condorcera $\Rightarrow$ A jedyny zwyciężcą.

□

Twierdzenie 2.4
MZU spełnia słabe IIA i A spełnia kryterium Condorceta $\Rightarrow$ *spełnia słabą zasadę Pareto.*

Dowód. Bierzemy $M\ \forall_W A \overset{w,M}{<} B \overset{?}{\Rightarrow} AniewygrywawM$.

Rozważmy model $N : wkadegowyborcy$ (przesuwamy A,B na szczyt) [B,A,reszta] $A \overset{w,M}{<} B$ $\Leftrightarrow A \overset{w,N}{<} B$.

w N: - B kandydat conderceta

w N - B jedyny zwyciężca, B wygrywa, A nie wygrywa

$\overset{\textbf{Słabe IIA}}{\Rightarrow}$ A nie wygyrwa w M.

□

Twierdzenie 2.5
MZU, monotoniczna ze względu na transpozycje $\Leftrightarrow \forall_{M-model} \forall_{A \in K} \forall_{B_1,\ldots,B_n \in A} (A \neq B, alemoeby B_i = B_j)$ $\forall_{w,\ldots,w_n \in W}$ *(może być* $w_i = w_j$*)*
w modelu M *wygrywa* A
model N *utworzony przez* $[\Delta, B_i, A, *]$ -> $[\Delta, A, B_i, *]$ *dla* $i = 1, \ldots, n \Rightarrow$ *w* N *dalej wygyrwa* A.

Dowód. $\Leftarrow$ oczywiste.
$\Rightarrow$ stosujemy założenie n razy (robimy n skoków i dalej wygrywa A).

Przykład 2.5

1. Metoda Blacka (1908-1991, ekonomista) - istnieje kandydat Condorceta $\Rightarrow$ on wygyrwa. Nie istnieje $\Rightarrow$ stosujemy punkty Bordy.
2. Metoda Condorceta - jeśli istnieje kandydat, który z każdym innym w "bezpośrednim porównaniu" wygrywa lub remisuje $\Leftrightarrow$on jest zwycię żcą.
3. Metoda nominacji - każdy kto ma co najmniej 1 pierwsze miejsce wygrywa,
4. Metoda ostatnich miejsc - każdy, kto nie ma żadnego ostatniego miejsca wygrywa.
5. Metoda prezydencka - rozważamy dwóch kandydatów z największą liczbą pierwszych miejsc. Ich porównujemy "bezpośrednio". Gdy na drugim miejscu remis, wszyscy z drugiego miejsca "przechodzą do finału" i tutaj stosujemy metodę Copelanda.

Metoda punktów Bordy jest monotoniczna ze względu na transpozycję.
A wygrywa. Niech $A + 1$ pkt. Innym się nie zwiększyło $\Rightarrow$ A dalej wygrywa.

3 Deser

W sumie to deseru jeszcze nie ma, ale ma być na ostatnim wykładzie!!!