Matematyczne aspekty wyborów

Na podstawie wykładu

Krzysztofa Ciesielskiego

Skrypt autorstwa

Arkadiusza Dąbala

Wersja z dnia:

2025-10-02

Contents

1 Wstęp

1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?

Komentarz
Materiał ten nie ma w żadnym stopniu charakteru politycznego, a wyłącznie charakter matematyczny.

Przykład 1.1
Rozważmy poniższe dane, oparte na 6 partiach, 1000 głosach i 6 mandatów do rozdania:

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	**380**	**190**	**127**	87	3
Gitarzyści	192	**192**	**96**	64		2
Szachiści	180	**180**	90			1
Piłkarze	96	**96**	48			1
Lotniarze	90	90				0
Kolejarze	62	62				0

System ten działa w następujący sposób:

- Liczby głosów dzielone są przez kolejne liczby naturalne dodatnie (tak jak w tabeli).
- Wybierane są z tej tabeli 6 największych liczb (wytłuszczony druk).
- Liczba mandatów zależy od liczby wytłuszczonych liczb w wierszu partii.

Przykład 1.2
Rozważmy tę samą tabelę, ale załóżmy, że partia ***Gitarzyści*** *nie przekroczyła progu* 5%.

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	**380**	**190**	**127**	87	3
~~Gitarzyści~~	~~192~~	~~192~~	~~96~~	~~64~~	—	—
Szachiści	180	**180**	**90**			2
Piłkarze	96	**96**	48			1
Lotniarze	90	**90**				1
Kolejarze	62	62				0

Przykład 1.3
Rozważmy następującą tabelę z 5 mandatami do rozdania:

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	**6000**	**3000**	**2000**	1500	3
Myśliwi	**5700**	**2850**	1900		2
Artyści	1950	975			0

Załóżmy teraz, że partia **Rybacy** prowadziła kampanię przeciwko **Myśliwym**, w wyniku czego liczba otrzymanych głosów zmieniła się następująco:

- Partia **Rybacy** zyskała 400 głosów (+400)
- Partia **Myśliwi** straciła 600 głosów (-600)
- Partia **Artyści** zyskała 200 głosów (+200)

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	**6400**	**3200**	2133		2
Myśliwi	**5100**	**2550**	1700		2
Artyści	**2150**	1075			1

Komentarz
Tym oto sposobem partia **Myśliwi** straciła jeden mandat na rzecz partii **Artyści**.

Przykład 1.4
Rozważmy wyniki głosowania dla dwóch partii z 6 mandatami do rozdania.

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	: 5	Mandaty
Matematycy	**1200**	**600**	**400**	**300**	**240**	5
Politycy	**201**	101				1

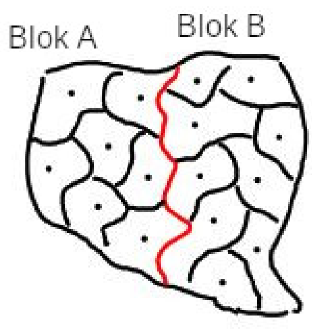
Popatrzmy na głosy bezpośrednio na konkretnych kandydatów z każdej partii:

Nazwa	Głosy
Kwadrat	**201**
Trójkąt	**200**
Stożek	**200**
Walec	**200**
Suma	**200**
Iloczyn	199

Nazwa	Głosy
Magister	**35**
Magistra	34
Urzędnik	33
Urzędas	33
Pani Basia	33
Pan Andrzej	33

Komentarz
Tym oto sposobem mandatu nie otrzymuje **Iloczyn**, mimo że zdobył więcej głosów niż **Magister**.

Przykład 1.5
Rozważmy sytuację, w której państwo jest podzielone na dwa bloki, oba mające po 50% *wpływu na wyniki wyborów. Każdy blok ma przyznać po 4 mandaty.*



W bloku A znajdowały się dwie partie: PZK (Partia Zwolenników Kawy) i PZH (Partia Zwolenników Herbaty), z których każda otrzymała po 25% głosów w ogólnokrajowym głosowaniu. W bloku B znajdowała się partia PZA (Partia Zwolenników Alkoholu) oraz inne partie, które nie przekroczyły progu 5%. Przedstawmy liczbę uzyskanych głosów w PZA:

Nazwa	Głosy
Żubr	**19995**
Żubrówka	**2**
Soplica	**2**
Pan Tadeusz	**1**

Komentarz
I tym oto sposobem wygrywają osoby, które dostają 2 lub 1 głos.

1.2 Prawo Ciesielskiego

Rozważmy głosowanie względem 2 partii z 7 mandatami:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	**1050**	**350**	**210**	**150**	117	4
Sportowcy	**1008**	**336**	**202**	144		3

Na ten moment wygrywa partia **Kelnerzy** 4 mandatami. Partia **Sportowcy** postanowiła się rozdzielić na dwie partie i startować osobno:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	**1050**	**350**	**210**	150	117	3
Piłkarze	**504**	**168**	101			2
Siatkarze	**504**	**168**	101			2

Komentarz
Tym oto sposobem partia **Sportowcy** zdobyła większość.

2 Metody głosowania (system wyborczy)

Wprowadźmy kilka oznaczeń, niech:

W - zbiór wszystkich wyborców,
K - zbiór wszystkich kandydatów.

- Ten sam układ głosów (zestaw głosów) daje ten sam wynik (funkcja).
- Każdy układ głosów daje jakiś wynik (może być $\emptyset$).

Definicja 2.1 (Model)
Model to układ głosów (z przyporządkowanymi wyborcami).

Definicja 2.2 (Metoda anonimowa)
Metoda jest anonimowa $\Leftrightarrow$gdy wszyscy wyborcy są traktowani tak samo, to znaczy

$$\forall_{x,y\in W} \text{ zamiana głosów } x \text{ i } y \text{ nie zmienia wyniku.}$$

Komentarz
Alternatywnie, metoda nie jest anonimowa kiedy

$$\exists_{x,y\in W} \text{ takie, że zamiana głosów } x \text{ i } y \textit{ istotnie} \text{ zmienia wynik.}$$

Definicja 2.3 (Metoda neutralna)
Metoda jest neutralna gdy wszyscy kandydaci są traktowani tak samo, to znaczy

$$\forall_{x,y\in K} \text{ zamiana ról } x \text{ i } y \text{ nie zmienia wyniku.}$$

Komentarz
Alternatywnie, metoda nie jest neutralna

$$\exists_{x,y\in K} \text{ takie, że zamiana ról } x \text{ i } y \textit{ istotnie} \text{ zmienia wynik,}$$

dokładniej definiując:

jeśli $\exists k_1, k_2 \in K : W_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_i\}$ głosowali na k_1, a $W_2 = \{w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_j\}$ głosowali na k_2 to jeżeli kandydaci Ci "zamienią się" wyborcami (zbiorami W_1, W_2), to k_1 i k_2 zamienią się wynikami.

Definicja 2.4
Trzy rodzaje metod ze względu na wyniki:

1) Metoda zwycięzcy (MZ) – wybiera zwycięzcę (zwycięzców),

2) Metoda porządkowa (MP) – wynik to słaby porządek na zbiorze K,

3) Metoda rozdziału (MR) – wynik to podział pewnych dóbr między kandydatów.

3 Metoda zwycięzcy

Definicja 3.1 (Klasyczna metoda zwycięzcy)
Klasyczna metoda zwycięzcy (klasyczna MZ) polega na tym, że każdy wyborca głosuje na dokładnie jednego kandydata. Zbiór

$$\Sigma = \{m : W \to K\}$$

jest zbiorem modeli, gdzie m jest modelem. Klasyczną metodę zwycięzcy możemy opisać funkcją

$$f : \Sigma \to P(K).$$

Definicja 3.2 (Semi-klasyczna metoda zwycięzcy)
Semi-klasyczna MZ polega na tym, że każdy wyborca głosuje na co najmniej jednego kandydata:

$$\Sigma = \{m : W \to P(K) \setminus \emptyset\}.$$

Metodę tę można opisać funkcją

$$f : \Sigma \to P(K).$$

Definicja 3.3 (Metoda efektywna)
Metoda zwycięzcy jest efektywna $\Leftrightarrow$zawsze wyłania przynajmniej jednego zwycięzcę.

3.1 Metody klasyczne:

1) Dyktatura – $\exists_{p \in W}$: wynik jest tożsamy z głosem p.

2) Monarchia – dany kandydat $k \in K$ wygrywa niezależnie od głosowania.

3) Metoda większości – wygrywa kandydat (lub kandydaci), który otrzymał najwięcej głosów.

4) Metoda bezwzględnej większości – wygrywa kandydat $k \in K$, który otrzymał co najmniej $\lfloor \frac{\#W}{2} \rfloor + 1$ głosów.

5) Metoda super większości – wygrywa kandydat, który uzyskał co najmniej q głosów, gdzie $q > \frac{\#W}{2}$.

6) Metoda status quo – *Założenie:* $\exists$ pewien stan z jednym zwycięzcą.
Głosowanie metodą większości (lub super większości):

   - jeśli metoda daje wynik, zwycięża "nowy" kandydat,
   - jeśli metoda nie daje wyniku, zwycięża dotychczasowy kandydat.

   Komentarz
   Przykładem metody status quo jest referendum.

7) Metoda większości ważonej – ($W = \{a_1, \dots, a_n\}$), gdzie głos a_i ma wagę $w_i \geq 0$. Wygrywa ten, kto otrzyma ponad $\frac{w_1 + \cdots + w_n}{2}$ punktów.

8) Metoda głosowania blokowego – $W = W_1 \cup \cdots \cup W_n$, gdzie W_k to zbiór wyborców bloku. W_k podejmuje decyzję większością głosów. W przypadku remisu wybierają zwycięzcę w W_k. Głos z W_k ma wagę i_k. Wygrywa kandydat z największą liczbą punktów.

3.2 Metody semi-klasyczne:

9) Metoda n-głosów – każdy wyborca głosuje na n kandydatów, a zwycięża ten, kto uzyska najwięcej głosów.

10) Szeroka metoda n-głosów - każdy głosuje na n kandydatów, ale mamy n zwycięzców (lub więcej w przypadku remisu na ostatnim "wygrywającym" miejscu)

3.3 Metoda ani klasyczna, ani semi-klasyczna:

11) Metoda punktowa – każdy wyborca $w \in W$ ma do rozdysponowania p punktów ($p \in \mathbb{N}$) między kandydatów. Zwycięża kandydat z największą liczbą punktów.

Definicja 3.4 (Metoda decyzyjna)
Metoda zwycięzcy jest decyzyjna $\Leftrightarrow$ w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę.

Definicja 3.5 (Metoda prawie decyzyjna)
Metoda zwycięzcy jest prawie decyzyjna $\Leftrightarrow$ w każdym modelu wyłania co najwyżej jednego zwycięzcę. Sytuacja, w której nie ma zwycięzcy, zachodzi wtedy, gdy więcej niż jeden kandydat uzyskał tę samą, najwyższą liczbę punktów.

Zadanie 1
*Zbadaj kto jest zwycięzcą w głosowaniu przez 99 osób na kandydatów: **Anastazy**, **Bermudy**, **Cezary**, jeśli otrzymano następujące wyniki metodą porządkową:*

Liczba głosów	*Wynik porządkowy*
18	ABC
15	ACB
24	BAC
8	BCA
16	CAB
18	CBA

Zadanie 2
Dane są wyniki głosowania:

Imię	*Liczba głosów*
Jaś	100
Małgosia	1

Zrób tak, by Małgosia wygrała.

Zadanie 3
Uzupełnij tabelę:

	Anonimowa	*Neutralna*	*Efektywna*
Dyktatura			
Monarchia			
Metoda Większości			

Definicja 3.6 (Kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości)
Metoda zwycięzcy (MZ) spełnia kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat, który otrzyma ponad 50% głosów, jest jedynym zwycięzcą.

Stwierdzenie 3.1
Mamy klasyczną metodę zwycięzcy, taką że $\#K = 2$, a głosowanie odbywa się według zasady bezwzględnej większości. Wówczas metoda jest prawie decyzyjna.

Dowód:

1° Załóżmy, że liczba wyborców $\#W$ jest nieparzysta - OK.

2° Liczba wyborców $\#W$ jest parzysta:

- jeden kandydat ma więcej niż 50% głosów - OK.
- remis, czyli obaj mają po 50% - nie ma zwycięzcy (dlatego metoda jest prawie decyzyjna).

□

Stwierdzenie 3.2
Metoda jest decyzyjna $\Rightarrow$ metoda jest prawie decyzyjna.

Definicja 3.7 (Metoda monotoniczna ze względu na zwycięzcę)
Z: *MZ - klasyczna lub semi-klasyczna.*

Metoda jest monotoniczna ze względu na zwycięzcę, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat A jest zwycięzcą, a jeśli wybierzemy kandydata B różnego od A ($B \neq A$) oraz jego grupę wyborców, to jeśli ta grupa zmieni swoje głosy bez straty dla A (czyli zmiana nastąpi zgodnie z następującymi dozwolonymi operacjami):

M	$\Rightarrow$	N
A B	$\Rightarrow$	A B
- -	$\Rightarrow$	- -
+ +	$\Rightarrow$	+ +
- +	$\Rightarrow$	+ -

to: $\Rightarrow$ A nadal wygrywa.

Komentarz
Czyli, jeżeli ktoś, kto nie głosował na zwycięzcę (A), a głosował na kandydata B, zmieni swój głos na zwycięzcę (A), to (A) nadal wygrywa.

Definicja 3.8 (Metoda kwoty)
MZ klasyczna lub semi-klasyczna jest metodą kwoty (większości kwalifikowanej), wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje q (kwota), taka że liczba głosów o tej własności, że kandydat A jest zwycięzcą wtedy i tylko wtedy, gdy A otrzymał co najmniej q głosów.

Komentarz
Często kwota wyrażana jest w procentach, a wówczas stosuje się nieraz nierówność słabą.

Twierdzenie 3.1 (Maya - Kenneth Maya, 1952r)
Z: *Klasyczna metoda zwycięzcy oraz* $\#K = 2$*. Jeżeli metoda ta jest metodą:*

(1) anonimową

(2) neutralną

(3) monotoniczną ze względu na zwycięzcę

(4) prawie decyzyjną

$\Rightarrow$ *jest metodą bezwzględnej większości.*

Dowód: Załóżmy, że A, B to kandydaci.
$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ interesują nas liczby głosów, które otrzymali kandydaci. Załóżmy:
A - a głosów
B - b głosów
Rozpatrzmy zatem przypadki:

1° $\#W = 2n$ (parzysta), rozważmy dwa podprzypadki:

a) Jeśli $a = n$, $b = n$.
Hipoteza: A wygrywa (analogicznie, jeżeli nie wygrywa B), a metoda jest neutralna, to przy wymianie wyborców $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ B wygrywa (nie wygrywa A) $\Rightarrow$ A i B wygrywają jednocześnie (nie wygrywa żaden) $\Rightarrow$ co prowadzi do $\lightning$(bo żaden z nich nie ma ponad 50%).

b) Jeśli $a > b$.
Hipoteza: B wygrywa, wtedy $a - b$ wyborców zmienia głosy z A na B, $\overset{(3)}{\Rightarrow}$ B dalej wygrywa. Teraz B ma a głosów, $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ A wygrywa, $\overset{(4)}{\Rightarrow}$ A wygrywa i ma ponad połowę głosów.

2° Niech $\#W = 2n + 1$ (nieparzysta).
Niech $a > b$.
Hipoteza: B wygrywa, $a - b$ wyborców zmienia głosy i, jak w 1a), udowadniamy, że B musi mieć ponad połowę głosów.

Tak więc zawsze wygrywa ten, kto ma ponad połowę głosów.

$\square$

4 MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie

Definicja 4.1 (Metoda zakładająca uporządkowanie)
Metoda zwycięzcy jest metodą zakładającą uporządkowanie (MZU) gdy

$$\forall_{w \in W} \text{ wyborca } w \text{ ustala } K \text{ kandydatów w liniowym porządku, a jego głos zależy od tego porządku.}$$

Zapis:

$A \overset{w,m}{<} B$ - w modelu m oznacza, że wyborca w stawia B wyżej niż A.
$A \overset{w}{<} B$ - gdy wiadomo, jaki model.

Przykład 4.1

1. *Metoda punktów Bordy (Jean Charles de Borda, 1733–1799, inżynier wojskowy) – Każdy wyborca przydziela punkty od $n-1$ do 0:*
   1 miejsce - $n-1$ punktów
   2 miejsce - $n-2$ punktów
   $\vdots$
   $n-1$ miejsce - 1 punkt
   n miejsce - 0 punktów

   Zwycięża ten, kto otrzyma największą liczbę punktów.

2. *Metoda Hare'a (Sir Thomas Hare, 1806–1891, Anglia, prawnik, 1857 r.) – Polega na odrzucaniu tego kandydata (tych kandydatów), który ma najmniej pierwszych miejsc, i głosowaniu dalej (listy pozostają z usunięciem odrzuconego kandydata), aż ktoś uzyska ponad 50% głosów. Gdy następuje remis i nie ma kogo odrzucić, wszyscy wygrywają.*

3. *Metoda Coombsa (Clyde Coombs, 1912–1988, USA, psycholog) – Wypisujemy kolejność wyników głosowania, odrzucamy kandydata (lub kandydatów jeżeli ktoś zostanie), który ma najwięcej ostatnich miejsc, i głosujemy dalej, aż ktoś uzyska ponad 50% pierwszych miejsc. Gdy nie można nikogo odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.*

4. *Metoda odrzuceń ostatniego – Jak w metodzie Coombsa, przy czym odrzucamy „do oporu". Gdy nie można nikogo więcej odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.*

Komentarz
Różnica między metodą Coombsa a metodą odrzucania ostatniego.

Metoda Coombsa

Liczba:	*4*	*2*	*3*
I pozycja	*C*	***B***	***B***
II pozycja	*A*	*C*	*A*
III pozycja	*B*	*A*	*C*

Wygrywa B, bo ma ponad 50% pierwszych miejsc.

Komentarz
Kontynuacja...
Metoda odrzuceń ostatniego

Liczba:	*4*	*2*	*3*
I pozycja	*C*	*B*	*B*
II pozycja	$\cancel{A}$	*C*	*A*
III pozycja	$\cancel{B}$	$\cancel{A}$	*C*

Kolejność odrzuceń: B, A, C – C wygrywa.

5. *Metoda Copelanda (Arthur H. Copeland, 1898–1970, matematyk) – Porównujemy parami kandydatów. Ten, kto więcej razy zostaje oceniony wyżej, dostaje 1 pkt, a w przypadku remisu obaj dostają po 0,5 pkt.*

   $\#\{m : A \overset{m}{<} B\}$
   $\#\{m : B \overset{m}{<} A\}$

   Decyduje suma punktów (zwycięzców może być więcej niż jeden).

6. *Metoda turniejowa (Z: $\#W = 2n+1$ nieparzysta) – k_1 porównujemy z k_2 (metodą powyżej),a następnie zwycięzcę pierwszego porównania porównujemy z k_3 itd.*

7. *Metoda pozycyjna – Wyborcy przyznają punkty kandydatą w postaci $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$, gdzie $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$. np.*
   1 miejsce – p_1 punktów
   2 miejsce – p_2 punktów
   itd.

   Zwycięża ten z największą liczbą punktów.

Komentarz
W szczególności:

Metoda Bordy: $P(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$
Metoda większości: $P(1, 0, \dots, 0)$
Metoda k głosów: $P(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k\ razy}, 0, \dots, 0)$

Definicja 4.2 (Monotoniczność ze względu na transpozycję)
MZU jest monotoniczna ze względu na transpozycje $\Leftrightarrow \forall_{M-model} \forall_{w \in W} \forall_{A,B \in K}$, *jeśli w M głosuje się* $[\Delta, B, A, *]$ *i w M wygrywa A, to w N, gdzie zmiana polega na* $[\Delta, A, B, *]$, *również wygrywa A.*

Komentarz
Zmiana polega na zamienieniu kolejności uporządkowania A i B. Dodatkowo porządek ten był na wykładzie zapisany pionowo. $\begin{bmatrix} \Delta \\ B \\ A \\ * \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \\ A \\ B \\ * \end{bmatrix}$

Umowa: Jeśli nie jest zaznaczone inaczej, to w K, W różne oznaczenia oznaczają różnych kandydatów (wyborców).

Definicja 4.3 (Słaba zasada Pareto)
MZU spełnia słabą zasadę Pareto gdy

$$\forall_M (\exists_{A,B\in K} \forall_{w\in W} A \overset{w,M}{<} B) \Rightarrow A \textit{ nie wygrywa w } M.$$

Definicja 4.4 (Kandydat Condorceta)
$A \in K$ jest kandydatem Condorceta (zwycięzcą Condorceta) gdy w "bezpośrednich porównaniach" A jest lepszy od każdego innego kandydata czyli

$$\forall_{B\in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} > \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}.$$

Definicja 4.5 (Przegrany Condorceta)
$A \in K$ to przegrany Condorceta (w modelu M) gdy

$$\forall_{B\in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} < \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}.$$

Definicja 4.6 (Kryterium Condorceta)
Metoda spełnia kryterium Condorceta gdy

$$\forall_M \textit{ istnieje kandydat Condorceta (w } M) \Rightarrow A \textit{ - jedyny zwycięzca w } M.$$

Definicja 4.7 (Kryterium przegranych Condorceta)
Metoda spełnia kryterium przegranych Condorceta gdy

$$\forall_M \textit{ istnieje przegrany Condorceta } A \textit{ w } M \Rightarrow A \textit{ nie wygrywa w } M.$$

Definicja 4.8 (Metoda jednoznacznie większościowa)
Metoda jest jednoznacznie większościowa gdy

$$\forall_M \textit{ kandydat } A \textit{ w } M \textit{ ma ponad połowę pierwszych miejsc} \Rightarrow A \textit{ - jedyny zwycięzca.}$$

Definicja 4.9 (Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji IIA)
Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji spełnia warunek niezależności porażki od ubocznych opcji (spełnia słaby warunek IIA) gdy

$$\forall_{A,B\in K} \forall_{M,N-modele} \textit{ spełnia} \begin{bmatrix} \forall_{w\in W} (B \overset{w,M}{<} A) \Leftrightarrow (B \overset{w,N}{<} A) \\ A \textit{ wygrywa w } M\textit{, } B \textit{ nie wygrywa w } M \end{bmatrix} \Rightarrow B \textit{ nie wygrywa w } N.$$

Innymi słowy: zmiany nie wpływające na relacje przegrany-zwycięzca nie mogą dać przegrywającemu zwycięstwa.

Twierdzenie 4.1
MZU, anonimowa, neutralna $\Rightarrow$ metoda nie jest decyzyjna.

Dowód: Rozważmy $\#K = 2$, $\#W = 2n$ i otrzymane głosy.

Głosy	n	n
1	A	B
2	B	A

Hipoteza: Metoda decyzyjna to np. wygrywa $A \Rightarrow$ wygrywa B ↯
Analogicznie zachodzi dla A.

□

Przykład 4.2 (Paradoks Condorceta)
Rozważmy następującą tabelę:

Głosy	*9*	*10*	*11*
1	*A*	*B*	*C*
2	*B*	*C*	*A*
3	*C*	*A*	*B*

Zachodzi $A > B$, $B > C$, $C > A$. *Mamy więc grę w "kamień, papier, nożyce."*

Twierdzenie 4.2
MZU spełnia kryterium Condorceta $\Rightarrow$ *jest jednoznacznie większościowa.*

Dowód: A ma ponad połowę pierwszych miejsc $\Rightarrow$ A - kandydat Condorceta $\Rightarrow$ A jest jedynym zwycięzcą.

□

Twierdzenie 4.3
MZU spełnia słabe IIA oraz kryterium Condorceta $\Rightarrow$ *spełnia słabą zasadę Pareto.*

Dowód: Mamy dany model M w którym $\forall_{w \in W} A \overset{w,M}{<} B \overset{?}{\Rightarrow} A$ nie wygrywa w M.

Rozważmy model N w którym dla każdego wyborcy przesuwamy A i B na szczyt, czyli do postaci

$$\begin{bmatrix} B \\ A \\ \text{reszta} \end{bmatrix}$$

Spełnione jest zatem $A \overset{w,M}{<} B \Leftrightarrow A \overset{w,N}{<} B$.

W N: B jest kandydatem Condorceta.
W N: B jest jedynym zwycięzcą, B wygrywa, A nie wygrywa.

$\overset{\textbf{Słabe IIA}}{\Rightarrow}$ A nie wygrywa w M.

□

Twierdzenie 4.4
MZU, monotoniczna ze względu na transpozycje $\Leftrightarrow (\forall_{M-model} \forall_{A \in K} \forall_{B_1,\ldots,B_n \in A} (A \neq B,$ *ale może być* $B_i = B_j) \forall_{w_1,\ldots,w_n \in W}$ *(może być* $w_i = w_j$*), jeżeli w modelu M wygrywa A, to model N utworzony przez* $[\Delta, B_i, A, *] \rightarrow [\Delta, A, B_i, *]$ *dla* $i = 1, \ldots, n \Rightarrow$ *w N dalej wygrywa A.)*

Dowód: $\Leftarrow$ oczywiste.
$\Rightarrow$ Stosujemy założenie n razy (robimy n skoków i dalej wygrywa A).

□

Przykład 4.3

1. Metoda Blacka (1908-1991, ekonomista) - jeśli istnieje kandydat Condorceta, to on wygrywa. Jeśli nie istnieje, stosujemy punkty Bordy.
2. Metoda Condorceta - jeśli istnieje kandydat, który w "bezpośrednim porównaniu" wygrywa lub remisuje z każdym innym $\Leftrightarrow$ on jest zwycięzcą.

3. Metoda nominacji - każdy, kto ma co najmniej jedno pierwsze miejsce, wygrywa.

4. Metoda ostatnich miejsc - każdy, kto nie ma żadnego ostatniego miejsca, wygrywa.

5. Metoda prezydencka - rozważamy dwóch kandydatów z największą liczbą pierwszych miejsc. Porównujemy ich "bezpośrednio". Jeśli na drugim miejscu jest remis, wszyscy z drugiego miejsca "przechodzą do finału" i tam stosujemy metodę Copelanda.

4.1 Własności metod wyborczych

Metoda	Kryterium Condorceta	Kryterium przegranego Condorceta	Słaba zasada Pareto	Monotoniczność ze względu na transpozycję	IIA	Jednoznaczna większość
Punkty Bordy	-(1)	+	+	+	-(2)	-(1)
Hare'a	-(3)	-(3)	+	-(4)	-(5)	+(O)
Coombsa	-(14)	-(15)	+	-(13)	-(13)	+(O)
Odrzuceń ostatniego	-(11,12)	-(12)	+	-(13)	-(13)	-(11,12)
Copelanda	+	+	+	+	-(10)	+(O)
Większości	-(3)	-(3)	+(O)	+	-(6)	+
Dyktatura	-(7)	-(7)	+	+(O)	+	-(7)
Terminażowa	+	+	-(8)	+	-(9)	+

Metoda punktów Bordy jest monotoniczna ze względu na transpozycję.

A wygrywa. Niech A zdobędzie 1 punkt więcej. Innym się nie zwiększyło $\Rightarrow$ A dalej wygrywa.

D1) **Metoda Bordy, Kryterium przegranego Condorceta** $\forall_w A < B$ Punkty $A <$ Punkty B. W punktacji A zdobywa 1 punkt za każdą parę (B, w), w której wyborca w umieszcza B wyżej niż A.

A jest przegranym Condorceta. Mamy k kandydatów, n wyborców, a kandydat $K_1, ..., K_{n-1}$ otrzyma mniej niż $\frac{n}{2}$ punktów. W sumie, A zdobywa mniej niż $\frac{k(k-1)}{2}$ punktów.

Łączna pula punktów do rozdziału wynosi $n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$ (suma ciągu arytmetycznego). Wszyscy razem zdobywają mniej niż $\frac{n(k-1)}{2}$ punktów, czyli łącznie mniej niż $\frac{k \cdot n \cdot (k-1)}{2}$.

D2) **Metoda Comba i Hare'a** Jeśli $\forall_w A \overset{w}{<} B$, to A wcześniej odpadnie od B.

D3) **IIA dyktatura** Jeśli A wygrywa, $B \overset{d,M}{<} A$, to B nie może wygrać.

D4) **Metoda terminarzowa - Kryterium Condorceta** Kandydat Condorceta wygrywa z każdym i nie odda zwycięstwa.

D5) **Terminażowa - monotoniczność** Przy przesunięciu A również wygrywa.

D6) **Metoda Copelanda** Gdy A wygrywa z każdym, to zdobywa maksymalną liczbę punktów. Zasada Pareto: $\forall_w B \overset{w}{<} A \overset{?}{\Rightarrow} B$ nie wygrywa.

Jeśli B wygrywa w pojedynku z C, to również A wygrywa z C. Wówczas punkty $A >$ punkty B, ponieważ A zdobywa punkty za parę (A, B), a zatem punkty A są silniejsze.

D7) **Metoda Coombsa - Słaba zasada Pareto** Jeśli $\forall_w B \overset{w}{<} A$, to A nie odpadnie, zanim B nie odpadnie (czyli B odpadnie wcześniej niż A).

K1)

3os	2os	Pkt
A	B	2
B	C	1
C	A	0

A jest kandydatem Condorceta, natomiast otrzymano punkty: $\begin{bmatrix} A = 6 \text{ pkt} \\ B = 7 \text{ pkt} \\ C = 2 \text{ pkt} \end{bmatrix}$

K2)

1os	2os	2os	Pkt
C	A	B	2
A	B	A	1
B	C	C	0

$\Rightarrow$

1os	2os	2os	Pkt
C	A	B	2
A	B	**C**↑	1
B	C	A	0

, wykorzystując transpozycję otrzymujemy wyniki $\begin{bmatrix} A = 5 & & A = 7 \\ B = 6 & \Rightarrow & B = 6 \\ C = 4 & & C = 2 \end{bmatrix}$, czyli A wygrywa.

K3)

2os	3os	2os
A	B	C
C	A	A
B	C	B

$\begin{bmatrix} A - \text{kandydat Condorceta} \\ B - \text{przegrany Condorceta} \end{bmatrix}$, bo $A : B$ $4 : 3 \Rightarrow A : C$ $5 : 2$, ale wygrywa B.

K4)

6os	5os	4os	2os
A	C	B	B
B	A	C	A
C	B	A	C

$\Rightarrow$

6os	5os	4os	2os
A	C	B	**A**↑
B	A	C	B
C	B	A	C

, wygrywał B, po zmianie C.

K5)

2os	1os	2os
B	A	A
A	B	C
C	C	B

B nie wygrywa, A wygrywa $\Rightarrow$

2os	1os	2os
B	A	**C**↑
A	B	A
C	C	B

, wygrywa B

K6)

2os	3os	2os
A	B	A
B	A	C
C	C	B

, A wygrywa, B nie wygrywa $\Rightarrow$

2os	3os	2os
A	B	**C**↑
B	A	A
C	C	B

K7)

2os	1os (w tym jeden dyktator)
A	B
B	A

$\begin{bmatrix} A \text{ - kandydat Condorceta} \\ B \text{ - przegrany Condorceta} \end{bmatrix}$, wygrywa B.

K8) Ustawiamy kolejność: $ABCD$

1os	1os	1os
A	C	B
B	A	D
D	B	C
C	D	A

mamy $\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \\ C > D \end{bmatrix}$, ostatecznie wygrywa D, mimo iż $D < B$.

K9) Ustawiamy kolejność ABC

1os	1os	1os
C	B	A
A	C	B
B	A	C

mamy $\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \end{bmatrix}$, wygrywa $C \Rightarrow$

1os	1os	1os
C	B	B
A	C	**A**↑
B	A	C

, B wygrywa.

K10)

2os	2os	1os	1os
A	C	D	B
D	A	B	C
B	B	C	D
C	D	A	A

otrzymujemy kolejno wyniki: $\begin{bmatrix} \mathbf{A} > B\,(4:2) & \mathbf{B} > C\,(4:2) \\ A < \mathbf{C}\,(2:4) & \mathbf{B} = \mathbf{D}\,(3:3) \\ \mathbf{A} > D\,(4:2) & \mathbf{C} = \mathbf{D}\,(3:3) \end{bmatrix}$, przyznano punkty $\begin{bmatrix} A \text{ -2 pkt} \\ B \text{ -1,5 pkt} \\ C \text{ -1,5 pkt} \\ D \text{ -1 pkt} \end{bmatrix}$, A wygrywa, C nie wygrywa.

Po zmianie:

2os	2os	1os	1os
A	C	D	B
D	A	B	C
↑	B	C	D
B	D	A	A

oraz punktacje: $\begin{bmatrix} A \text{ -2 pkt} \\ B \text{ -0,5 pkt} \\ C \text{ -2,5 pkt} \\ D \text{ -1 pkt} \end{bmatrix}$, C wygrywa.

K11)

4os	2os	3os
C	B	B
A	C	A
B	A	C

B ma najwięcej głosów pierwszych, czyli jest kandydatem Condorceta, ale kolejność odrzuceń to B, A, więc wygrywa C.

K12)

2os	1os	2os
C	B	B
A	C	A
B	A	C

C to przegrany Condorceta, ale C wygrywa.

K13)

5os	4os	1os	2os
A	B	C	B
C	A	B	C
B	C	A	A

, A wygrywa, C i B nie wygrywają.

Przekształcamy do:

5os	4os	1os	2os
A	B	C	B
C	A	B	**A**↑
B	C	A	C

, B wygrywa.

K14)

2os	1os	1os	1os	2os
E	D	A	C	B
A	B	B	B	C
D	A	C	D	A
C	E	E	E	D
B	C	D	A	E

B -kandydat Condorceta, B odpada w I turze

K15)

2os	2os	2os	1os
D	B	C	B
C	D	B	C
A	A	A	D
B	C	D	A

A-przegrany Condorceta, ale A wygrywa

Lemat 4.1 (Lemat o decyzyjności)
Z: MZU, efektywna, $\#K \geq 3$, $\#W \geq 2$. Metoda spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA $\Rightarrow$ jest decyzyjna.

Dowód: Wiemy, że zwycięzca istnieje (chcemy wykazać, że jest jedyny). Załóżmy, że A i B są zwycięzcami w modelu M oraz $W = X \cup Y$

X	Y
$\vdots$	$\vdots$
A	B
$\vdots$	$\vdots$
B	A
$\vdots$	$\vdots$

Niech C - inny kandydat

Tworzymy model

X	Y
A	C
C	B
B	A
...	...

Q

, w którym relacje A/B nie są zmienione.

Kto wygrywa w Q? Na pewno nie B, bo $\forall_w\ B \overset{w}{<} C$, ale również nie A (z IIA).
Jeżeli w Q A wygrywa, B nie $\Rightarrow$ w M B nie wygrywa $\lightning$
Zatem wygrywa C.

Rozważmy model R

X	Y
A	B
B	C
C	A
...	...

R

Kto wygrywa w R? - A, B lub C (Pareto) Ale nie wygrywa C (z zasady Pareto). W R: relacje A/C są takie same jak w Q.

Załóżmy, że A wygrywa w $R \Rightarrow C$ nie wygrywa w Q. Wobec tego w R wygrywa B.

Porównajmy M i R: relacje A/B w M i R są takie same. Wobec tego z IIA $\Rightarrow$ w M A nie wygrywa $\lightning$

$\square$

Twierdzenie 4.5 (Twierdzenie Arrowa dla metod zwycięzcy (1951))
Załóżmy: $\#K \geq 3, \#W \geq 2$, MZU, efektywna, spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA $\Rightarrow$ dyktatura.

D: Z lematu o decyzyjności $\Rightarrow$ jeśli zwycięzca istnieje, to jest jedyny.
Czy istnieje jedyny zwycięzca? (pytanie) dyktatura.

Definicja 4.10 (na potrzeby dowodu)
$w \in W$ - dyktator A z kontrolerem $B \Leftrightarrow$ jeśli $A \overset{w}{<} B \Rightarrow A$ nie wygrywa.

Podzielimy dówód na 3 kroki:

I krok - $\forall_{A,B \in K} \exists_{w \in W}$ dyktator nad A z kontrolerem B.

II krok - w-dyktator nad A z kandydatem $B \Rightarrow w$ dyktator nad B z kontrolerem A (dyktatora nad parą A, B oznaczamy $d(A, B)$).

III krok - Jeżeli $w = d(A, B) \Rightarrow \forall_{D,E} w = d(D, E)$ (gdzie D, E może być A lub B).

Wtedy ten w z I kroku jest dyktatorem.

w
A
B_1
B_2
$\ldots$
B_n

Dow. I) Niech C będzie trzecim kandydatem.

C
A
B
wszyscy

Wygrywa C. Jeden wyborca przesuwa C do tyłu:

inni	W_1
C	A
A	B
B	C
$\vdots$	$\vdots$

Wygrywa C lub A.

To samo z trzecim wyborcą:

inni	w_1 w_2
C	A
A	B
B	C
$\vdots$	$\vdots$

Wygrywa A lub C, i tak dalej, aż dojdzie do sytuacji:

wszyscy
A
B
C

Wówczas wygrywa A (z zasady Pareto), a C nie.

Pierwsze przejście, po którym C nie wygrywa (musi takie zaistnieć).

X, Y - grupy wyborców.

X	w	Y
C	C	A
A	A	B
B	B	C

M_1

$\Rightarrow$

X	w	Y
C	A	A
A	B	B
B	C	C

M_2

Pokażemy, że w jest dyktatorem nad B z kontrolerem A.

Rozważmy P - dowolny model, w którym $B \overset{w,P}{<} A$.

Niech A/B oznacza pewną relację między A i B.

W	V	inni
A/B	A	A/B
	B	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

P

$\Rightarrow$

W	V	inni
C	A	A/B
A/B	B	C
$\vdots$	C	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Q

Kto wygrywa w Q? - A, B lub C. Jednak relacje B/C w modelach Q i M_1 są takie same $\Rightarrow$ w Q B nie wygrywa (IIA). Z kolei relacje A/C w Q i M_2 są takie same $\overset{IIA}{\Rightarrow}$ w Q C nie wygrywa.

W Q wygrywa A, B nie wygyrwa.

Relacje A/B w P i Q są takie same. $\Rightarrow$ w P B nie wygrywa.

Dow. II) w jest dyktatorem nad B z kontrolerem A, v jest dyktatorem nad A z kontrolerem B

W	V	inni
A	B	
B	A	
$\vdots$	$\vdots$	

Wygrywa A lub B (z zasady Pareto). B nie wygrywa (bo w), A nie wygrywa (bo v) $\lightning$

Dow. III) Niech $w = d(A, B)$. 1. Zauważmy, że $\forall_{D,E} \exists d(D, E)$. 2. $\forall_{D,E}$ $w = d(D, E)$.

D 2.1. Załóżmy, że C, oraz że $v = d(B, C)$ i $v \neq w$.

W	V	inni
C	B	C
A	C	B
B	A	A
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Wygrywa B lub C (z zasady Pareto). B nie wygrywa (bo w), C nie wygrywa (bo v) $\lightning$

D 2.2. Zamieniamy A i B rolami, $v = d(A, C)$, i w ten sam sposób pokazujemy, że $w = d(A, C)$.

D 2.3. $C \overset{z2.1\text{ i }2.2}{\neq} A, B$ oraz $w = d(A, B)$, $w = d(A, C)$. Jeśli $D \neq A, C$, to podobne rozumowanie jak w 2.1 i 2.2 dla A, C, D pokazuje, że $w = d(A, C) \Rightarrow w = d(C, D)$.

Dla $C, d \neq A, B$ OK. Jeden z C, D musi być równy A lub B (z 2.1 i 2.2).

$\square$

Wniosek 4.5.1 (Twierdzenie Arrowa o niemożliwości)
Załóżmy, że $\#K \geq 3$, $\#W \geq 2$. Wówczas: nie istnieje metoda zakładająca uporządkowanie (MZU) efektywna, która jednocześnie spełnia następujące warunki:

- *anonimowa,*

- *słabą zasadę Pareto,*

- *słabe kryterium niezależności od opcji ubocznych (IIA).*

Przykład 4.4 (Przypadki szczególne w twierdzeniu Arrowa)
1. $\#K = 2$, $\#W$ nieparzyste — metoda większości jest decyzyjna.

2. $\#K = 3$, $\#W = 5$ — reguła „≥ 3 pierwsze miejsca" wyłania zwycięzcę.

Twierdzenie 4.6 (Twierdzenie Taylora o niemożliwości)
Dla $\#K \geq 3$, $\#W \geq 3$: nie istnieje MZU efektywna, która spełnia jednocześnie kryterium Condorceta oraz słabe kryterium niezależności od ubocznych opcji (IIA).

Dowód: Z założeń IIA i kryterium Condorceta wynika słaba zasada Pareto. Słaba zasada Pareto wraz z IIA prowadzi do dyktatury (zgodnie z twierdzeniem Arrowa). Jednak dla $\#W \geq 3$, dyktatura nie spełnia kryterium Condorceta.

$\square$

Przypadek $\#W = 4$ jest znacznie prostszy do rozważenia.

5 Metoda TAK/NIE

$$\begin{bmatrix} \Sigma = \{M : W \to K\} & \Sigma = \{M : W \to \{\text{TAK}, \text{NIE}\}\} \\ f : \Sigma \to P(K) & f : \Sigma \to \{\text{TAK}, \text{NIE}\} \end{bmatrix}$$

Przykład 5.1 (Szczególny przypadek metody status quo)
Przypadek z dwoma kandydatami.

Definicja 5.1 (Założenia metody TAK/NIE)
Założenia:´

- $\forall_{w \in W}\ w : TAK \Rightarrow$ *wynik: TAK,*
- $\forall_{w \in W}\ w : NIE \Rightarrow$ *wynik: NIE.*

Definicja 5.2 (Koalicja wygrywająca)
Podzbiór $A \subset W$ jest koalicją wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\{x \in A : x \text{ głosuje TAK}\} \Rightarrow \text{wynik: TAK}.$$

Definicja 5.3 (Monotoniczność metody TAK/NIE)
Metoda TAK/NIE jest monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{bmatrix} A \subset A_1 \\ A \text{ jest koalicją wygrywającą} \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 \text{ jest koalicją wygrywającą}.$$

Definicja 5.4 (Wyborca decydujący)
Załóżmy, że A jest koalicją wygrywającą. Wyborca $p \in A$ jest decydujący dla A wtedy i tylko wtedy, gdy $A \setminus \{p\}$ nie jest koalicją wygrywającą.

Definicja 5.5 (Wskaźnik Banzhafa)
Załóżmy, że $W = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Wskaźnik Banzhafa dla a_i jest równy liczbie:

$$B(a_i) = \#\{A : a_i \in A \text{ i } a_i \text{ jest decydujący dla } A\}.$$

Definicja 5.6 (Indeks Banzhafa (Penrose'a–Banzhafa))
Indeks Banzhafa dla a_i definiuje się jako:

$$I_B(a_i) = \frac{B(a_i)}{B(a_1) + \cdots + B(a_n)}.$$

Przykład 5.2
Trzech wyborców:

- $w_1 = 50$,
- $w_2 = 45$,
- $w_3 = 1$.

Do podjęcia decyzji TAK potrzeba 51 głosów.

Komentarz
Zapis tego warunku: $W(51; 50, 45, 1)$ — gdzie $W(min; wagi\ wyborców)$.

***Metoda liczenia wskaźnika Banzhafa (dla metod monotonicznych)**:*

ALGORYTM:

Koalicje wygrywające \ Wyborcy	w_1	w_2	$\dots$	w_n
k_1	+	+	$\dots$	-
k_2	-	+	$\dots$	-
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
k_j	+	-	$\dots$	-

Legenda:

- $+$ *(wyborca należy do koalicji),*
- $-$ *(wyborca nie należy do koalicji).*

Komentarz
Policzymy teraz wskaźniki Banzhafa dla $W(51; 50, 45, 1)$

***Koalicje wygrywające**:*

- $\{w_1, w_2\}$,
- $\{w_1, w_3\}$,
- $\{w_1, w_2, w_3\}$.

Liczba znaków $+$ dla wyborcy w_1 minus liczba znaków $-$ to wskaźnik Banzhafa.

***Przykład**:*

Koalicja	w_1	w_2	w_3
$\{w_1, w_2\}$	+	+	-
$\{w_1, w_3\}$	+	-	+
$\{w_1, w_2, w_3\}$	+	+	+
	3 =(3-0)	1 =(2-1)	1 =(2-1)

***Wskaźniki Banzhafa**:*

$$B(w_1) = 3,$$
$$B(w_2) = 1,$$
$$B(w_3) = 1.$$

w_1 jest decydującym wyborcą.
***Indeksy Banzhafa**:*

$$I_B(w_1) = \frac{3}{5},$$
$$I_B(w_2) = \frac{1}{5},$$
$$I_B(w_3) = \frac{1}{5}.$$

Dlaczego to działa? Niech K to zbiór koalicji wygrywających, a $p \in W$. Dzielimy K na trzy podzbiory:

$$K_1 = \{A : p \notin A\},$$
$$K_2 = \{A \cup \{p\} : A \in K_1\},$$
$$K_3 = K \setminus (K_1 \cup K_2).$$

Zauważmy, że:

- $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$,
- zbiory K_1, K_2, K_3 są parami rozłączne,
- $\#K_1 = \#K_2$.

Wskaźnik Banzhafa:

$$B(p) = \#K_3,$$

gdzie p jest decydujący dla A wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in K_3$.

Definicja 5.7 (Wskaźnik/Indeks Shapleya–Shubika)
Dla metody monotonicznej: Porządkujemy wyborców jako $W = (w_1, \ldots, w_n)$. W ciągu $(w_1, \ldots, w_n)$ wyborca w_k jest wpływającym wyborcą, jeśli:

$$\{w_1, \ldots, w_{k-1}\} \textit{ nie tworzy koalicji wygrywającej, a } \{w_1, \ldots, w_k\} \textit{ już tak.}$$

Wskaźnik Shapleya–Shubika:

$$S(w_k) = \#\{\textit{ciągi, w których } w_k \textit{ jest wpływającym wyborcą}\}.$$

Indeks Shapleya–Shubika:

$$I_S(w_k) = \frac{S(w_k)}{n!}.$$

Przykład 5.3

Komentarz
Dalej działamy na przykładzie $W(51; 50, 45, 1)$.

Ciągi decyzyjne:

$$\begin{gathered}(w_1, \mathbf{w_2}|\,, w_3)\\ (w_1, \mathbf{w_3}|\,, w_2)\\ (w_2, \mathbf{w_1}|\,, w_3)\\ (w_2, w_3, \mathbf{w_1}|\,)\\ (w_3, \mathbf{w_1}|\,, w_2)\\ (w_3, w_2, \mathbf{w_1}|\,)\end{gathered}$$

$$I_S(w_1) = \frac{4}{6},\ I_S(w_2) = \frac{1}{6},\ I_S(w_3) = \frac{1}{6},$$

Definicja 5.8 (Odporności na zamianę w metodzie TAK/NIE)
Metoda TAK/NIE jest odporna na zamianę wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{A,B\ -\ \text{koalicje wygrywające}} \forall_{a \in A, b \in B} \textit{co najmniej jedna z koalicji } \begin{bmatrix}(A \setminus \{a\} \cup \{b\})\\ (B \setminus \{b\} \cup \{a\})\end{bmatrix} \textit{ jest wygrywająca.}$$

Stwierdzenie 5.1
Większość ważona w metodzie TAK/NIE jest odporna na zamianę.

D: Niech A, B będą koalicjami wygrywającymi, $a \in A$, $b \in B$. Wagi głosów a i b oznaczamy jako W_a, W_b. Zakładamy, że $W_b \geq W_a$. Wówczas:

$$W(A \setminus \{a\} \cup \{b\}) \geq W(A).$$

$\square$

Zadanie 4
Porównać $W(5; 4, 3, 2, 1)$ *z:*

a) $W(9; 8, 7, 2, 1)$,

b) $W(9; 8, 7, 3, 2)$.

Zadanie 5
Niech A, B, C, D *oznaczają wyborców w* $W(3; A, B, C, D)$, *a pary* AB *i* CD *oznaczają koalicje wygrywające.*

Wykazać, że to nie jest metoda z większością ważoną.

Zadanie 6
Dla grupy $B + 6r$ *(burmistrz i 6 radnych) wyznaczyć indeksy Shapleya–Shubika.*

(Głosowanie przechodzi, gdy głosuje 5 radnych albo burmistrz i 2 radnych.)

6 Metody porządkowe

Definicja 6.1 (Słaby porządek)
Zbiór K jest słabo uporządkowany wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists R$ — relacja równoważności w K taka, że K/R jest uporządkowany liniowo przez relację $\leq$.

Dla $a, b \in K$ definiujemy:

$$a < b \overset{def}{\Leftrightarrow} [a]_R < [b]_R,$$

gdzie relacja jest przechodnia i słabo antysymetryczna.

Definicja 6.2 (Metoda porządkowa (MP))
Każdy wyborca porządkuje kandydatów w sposób liniowy.

Wynik wyborów jest słabym porządkiem w zbiorze K:

- $L(K) = \{(K, \leq) : \leq$ *jest porządkiem w K*$\}$,
- $S(K) = \{(K, \leq) : \leq$ *jest słabym porządkiem w K*$\}$.

Zapis formalny:

$$\Sigma = \{M : W \to L(K)\}, \quad f : \Sigma \to S(K).$$

Każda efektywna metoda z założeniem większości wyborców (MZU) jest metodą porządkową (MP).

Zapis notacyjny:

- $A \overset{w}{<} B$,
- $A \overset{w,M}{<} B$,
- $A \underset{M}{<} B$ — w modelu M, po wyborach B znajduje się nad A.

Przykład 6.1
Dyktatura porządkowa.

Wynik wyborów jest identyczny z głosem jednego wyborcy.

Definicja 6.3 (Porządkowa zasada Pareto)
Metoda porządkowa (MP) spełnia (porządkową) zasadę Pareto wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_M \forall_{A,B \in K} \left(\forall_w \, A \overset{w,M}{<} B \right) \Rightarrow A \underset{M}{<} B.$$

Definicja 6.4 (Metoda spełniająca postulat liberalizmu Sena)
Metoda spełnia postulat liberalizmu Sena, jeśli:

$$\forall_{w \in W} \exists_{A,B \in K \; (A \neq B)} \left(A \overset{w,M}{<} B \Rightarrow A \underset{M}{<} B \right) \; oraz \; \left(A \overset{w,M}{>} B \Rightarrow A \underset{M}{>} B \right).$$

Twierdzenie 6.1 (Twierdzenie Sena)
Niech $\#K \geq 2$ oraz $\#W \geq 2$. Wtedy: Nie istnieje metoda spełniająca jednocześnie:

1. *zasadę Pareto,*
2. *postulat liberalizmu Sena.*

D: Niech w, v będą wyborcami, a A, B, C, D będą elementami K. Rozważmy następujące przypadki:

1. Dla w, v i pary A, B: Jeśli $w : A \overset{w,M}{<} B \Rightarrow A \underset{M}{<} B$ oraz $w : B \overset{w,M}{<} A \Rightarrow B \underset{M}{<} A$, to mamy sytuację wzajemnej sprzeczności wynikającej z narzuconych preferencji.

2. Kolejność preferencji dla w:

$$\begin{bmatrix} w: \\ C \\ B \\ A \\ D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{Reszta:} \\ A \\ C \\ B \\ D \end{bmatrix}$$

Z powyższego wynika, że nie można jednocześnie spełnić zasady Pareto i postulatu liberalizmu Sena.

$A \underset{M}{<} B$, $C \underset{M}{<} A$, $B \underset{M}{<} C$ (zasada Pareto).

Jednak:

$$A \underset{M}{<} B \underset{M}{<} C \underset{M}{<} A$$

jest sprzecznością.

3. Kolejność preferencji:

$$\begin{bmatrix} w: \\ D \\ A \\ B \\ C \\ \text{reszta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{reszta:} \\ B \\ C \\ D \\ A \\ \text{reszta} \end{bmatrix}$$

Z zasady Pareto:

$$B \underset{M}{<} A \underset{M}{<} D \underset{M}{<} C \underset{M}{<} B$$

co prowadzi do sprzeczności.

$\square$

Definicja 6.5 (Filtr)
*Niech X będzie zbiorem. Podzbiór $F \subset P(X)$, gdzie $F \neq \emptyset$, nazywamy **filtrem**, jeśli spełnia następujące warunki:*

1) $\emptyset \notin F$

2) Jeśli $A, B \in F$, to $A \cap B \in F$

3) Jeśli $A \in F$ oraz $A \subset B \subset X$, to $B \in F$

Przykład 6.2
1. *Niech X będzie zbiorem oraz $p \in X$. Wówczas zbiór*

$$\{A \subset X : p \in A\}$$

   jest filtrem.

2. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną, $p \in X$, a U otoczeniem punktu p. Wówczas zbiór wszystkich otoczeń p jest filtrem.*

Definicja 6.6 (Ultrafiltr)
*Podzbiór $F \subset P(X)$ nazywamy **ultrafiltrem**, jeśli spełnia następujące warunki:*

1) F jest filtrem.

2) Dla każdego $A \subset X$ zachodzi dokładnie jedno z dwóch: $A \in F$ albo $X \setminus A \in F$.

Przykład 6.3
1. Zobacz przykład 2.11.1. Jest on Ultrafiltrem

Stwierdzenie 6.1
Ultrafiltr jest filtrem maksymalnym, tzn. jeśli F jest ultrafiltrem, to dla każdego filtra G, jeśli $F \subset G$, to $G = F$.

Załóżmy, że istnieje filtr G taki, że $\Rightarrow \forall_G F \subset G \Rightarrow G = F$. Wówczas istnieje $B \in G$, takie że $B \notin F$. Ponieważ F jest ultrafiltrem, mamy $X \setminus B \in F$. Z definicji filtra wynika, że $B \cap (X \setminus B) = \emptyset \in G$, co prowadzi do sprzeczności, ponieważ $\emptyset \notin G$.

□

Uwaga
$\forall_{F\text{- filtr}} \exists_{G\text{- ultrafiltr}}\ F \subset G$

Twierdzenie 6.2
Niech X będzie zbiorem skończonym, a F ultrafiltrem. Wówczas $\exists_{p \in X}$ taki, że F jest generowany przez $\{p\}$.

D:
Przypadek 1) $\exists_{p \in X}\ \{p\} \in F \Rightarrow \forall_{B : p \in B}\ B \in F \quad (\{p\} \subset B)$ (własność 3 z definicji filtra).
Załóżmy sprzecznie: $\exists_{C \in F} : p \notin C$. Wtedy $p \in X \setminus C \in F$. Ale $C \cap (X \setminus C) = \emptyset \in F$, co prowadzi do sprzeczności, ponieważ $\emptyset \notin F$.
Przypadek 2) $\forall_{p \in X}\ \{p\} \notin F$ Załóżmy, że $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Wówczas:

$$\begin{bmatrix} X \setminus \{p_1\} \in F, \\ X \setminus \{p_2\} \in F, \\ \vdots \\ X \setminus \{p_n\} \in F \end{bmatrix}$$

Jednak $X \setminus \{p_1\} \cap X \setminus \{p_2\} \cap \cdots \cap X \setminus \{p_n\} = \emptyset \notin F$, co jest sprzecznością.

□

Wprowadźmy oznaczenia: K, W - zbiory $L(K) = \{(K, \leq) \ : \leq$ liniowy porządek w $K\}$ $S(K) = \{(K, \leq) \ : \leq$ słaby porządek w $K\}$ $\Sigma = \{M : W \to L(K)\}$ $f : \Sigma \to S(K)$
Notacja: $a \overset{x,M}{<} b$ oznacza $a < b$ w porządku $M(x)$ $W \ni x \overset{M}{\to} M(x)$ - porządek w K $a \underset{M}{<} b$ oznacza $a < b$ w słabym porządku wyznaczonym przez $f(M)$.

Definicja 6.7 (Warunek (DEC))
MZU

$$\forall_M (\forall_{x \in W}\ a \overset{x,M}{<} b) \Rightarrow a \underset{M}{<} b\ (I)\ \forall_{M,N} \forall_{x \in W}\ (a \overset{x,M}{<} b \iff a \overset{x,N}{<} b)$$

$$\iff$$

$$(a \underset{M}{<} b \iff a \underset{N}{<} b)$$

Zbiór $T \subset W$ spełnia warunek (DEC) wtedy i tylko wtedy, gdy T jest zbiorem decyzyjnym:

$$\forall_{M\in\Sigma}\forall_{p,q\in K}\ (\forall_{x\in T}\ p \overset{x,M}{<} q) \Rightarrow p \underset{M}{<} q.$$

Twierdzenie 6.3 (Twierdzenie Arrowa w wersji ultrafiltrów)
Założenia: $\#W \geq 3, \#K \geq 3, f : \Sigma \to S(K)$ spełnia zasadę Pareto (P) oraz IIA (I).
Teza: $\{T \subset W : T$ spełnia (DEC)$\}$ jest ultrafiltrem.

Dowód:

1. $D \neq \emptyset$: $W \in D$ (z P).

2. $\emptyset \notin D$: Weźmy $a \neq b \in K$,

$$\begin{bmatrix} \forall_{x\in W} a \overset{x,M}{<} b \Rightarrow a \underset{M}{<} b \\ \forall_{x\in\emptyset} b \overset{x,M}{<} a \Rightarrow b \underset{M}{<} a \end{bmatrix} \Rightarrow \text{sprzeczność.}$$

3. $T_1 \in D, T_1 \subset T_2 \overset{?}{\Rightarrow} T_2 \in D$:

$$a, b \in K, M \in \Sigma, \forall_{x\in T_2} a \overset{x,M}{<} b \Rightarrow \forall_{x\in T_1} a \overset{x,M}{<} b \overset{T_1\in D}{\Rightarrow} a \underset{M}{<} b.$$

4. $T_1, T_2 \in D \overset{?}{\Rightarrow} T_1 \cap T_2 \in D$: Rozważmy $a, b \in K, M \in \Sigma$. Czy

$$\forall_{x\in T_1\cap T_2} a \overset{x,M}{<} b \Rightarrow a \underset{M}{<} b?$$

Weźmy $c \in K$, $c \neq a, b$. Czy istnieje $N \in \Sigma$ (model), w którym

$$\forall_{x\in T_1} a \overset{x,N}{<} c, \quad \forall_{x\in T_2} c \overset{x,N}{<} b, \quad \forall_{x\in W} a \overset{x,N}{<} b \Rightarrow a \overset{x,M}{<} b?$$

Jeśli tak, to:

- Pierwsza i druga część implikują $a \underset{N}{<} b$.
- Na mocy (I): $a \underset{M}{<} b$.

$$M \text{ - dany}, \quad R := \{x \in W : a \overset{x,M}{<} b\}.$$

Wtedy:

$x \in R$	$x \notin R$	$x \notin T_1$
$a \overset{x,M}{<} c \overset{x,M}{<} b$	$b \overset{x,M}{<} a \overset{x,M}{<} c$	$c \overset{x,M}{<} b \overset{x,M}{<} a$

5. Czy $\forall_{T\subset W}(T \in D$ lub $W \setminus T \in D)$? Dowód podzielimy na 4 lematy.

Lemat 6.1
$\forall_{T\subset W}, \forall_{a,b\in K, a\neq b}$:

$$\begin{bmatrix} (\exists_{N\in\Sigma} : T = \{x \in W : a \overset{x,N}{<} b\} \ i \ a \underset{N}{<} b) \\ \forall_{M\in\Sigma} : T = \{x \in W : a \overset{x,M}{<} b\} \Rightarrow a \underset{M}{<} b \end{bmatrix}.$$

Podane warunki są równoważne.

Dowód:

- $(\Rightarrow)$: $M : x \in T \Leftrightarrow a \overset{x,N}{<} b$ i $a \underset{N}{<} b \overset{(I)}{\Rightarrow} a \underset{M}{<} b$.
- $(\Leftarrow)$: Weźmy N spełniający założenia. Wtedy:

$$a \overset{x,N}{<} b \Leftrightarrow x \in T \Rightarrow a \underset{N}{<} b.$$

Lemat 6.2
$\forall_{T \subset W}, \forall_{a,b,c \in K, a \neq b \neq c}$:

1. $(a \underset{T}{*} b \Rightarrow c \underset{T}{*} b)$,
2. $(a \underset{T}{*} b \Rightarrow a \underset{T}{*} c)$.

Dowód:

Ad 1. Rozważmy $M : x \in T \Leftrightarrow c \overset{x,M}{<} b$. Czy $c \underset{M}{<} b$? Rozważmy model N, gdzie:

$$c \overset{x,N}{<} a \overset{x,N}{<} b \text{ (gdy } c \overset{x,M}{<} b) \text{ i } a \overset{x,N}{<} b \Rightarrow c \underset{M}{<} b.$$

Ad 2. Analogicznie dla $M : x \in T \Leftrightarrow a \overset{x,M}{<} c$.

Lemat 6.3
Z: $T \in W$ $\exists_{a,b,a \neq b}$ $a \underset{T}{*} b \Leftrightarrow \forall_{c,d,c \neq d}$ $c \underset{T}{*} d$

Dowód: (wynika bezpośrednio z wcześniejszego lematu, ale formalny dowód)
$\Leftarrow$ oczywiste
$\Rightarrow$ $a \underset{T}{*} b$, $c \neq d$ (1) $c = a, d = b$ OK (2) $c \neq a, d = b$ wynika z (2.1) (3) $c = a, d \neq b$ wynika z (2.2) (4) $c \neq a, d \neq b$ (4.1) $a \underset{T}{*} b \overset{(2.1)}{\Rightarrow} c \underset{T}{*} b \overset{(2.2)}{\Rightarrow} c \underset{T}{*} d$ (jeśli $c \neq d$) (4.2) $b = c$ $a \underset{T}{*} b \overset{(2.2)}{\Rightarrow} a \underset{T}{*} d \Rightarrow c \underset{T}{*} d$ (jeśli $a \neq d$) (4.3) $a = d, b = c$, $\#K \geq 3$ $e \neq a, b, c, d$ $a \underset{T}{*} b \overset{(2.2)}{\Rightarrow} a \underset{T}{*} e \overset{(2.2)}{\Rightarrow} c \underset{T}{*} d$

Lemat 6.4
$S \subset W, S \neq \emptyset$, $\exists_{a \neq b}$ $a \underset{S}{*} b \Rightarrow S \in D$

Dowód: $M \in \Sigma$, $p, q \in K$, $\forall_{x \in S}$ $p \overset{x,M}{<} q \overset{?}{\Rightarrow} p \underset{M}{<} q$

$T := \{x \in W : p \overset{x,M}{<} q\}$, $S \subset T$
1. $T = S$ 2. $T = W$ 3. $W = S \cup (T \setminus S) \cup (W \setminus T)$, przy czym $(T \setminus S), (W \setminus T) \neq \emptyset$
(1) $a \underset{S}{*} b$ (lemat 3) $\Rightarrow p \underset{S}{*} q \Rightarrow p \underset{M}{<} q$
(2) $(P) \Rightarrow p \underset{M}{<} q$
(3) $c \in K$, $c \neq p, q$ Definiujemy N:

$$x \in S \;\Rightarrow\; p \overset{x,N}{<} c \overset{x,N}{<} q$$

$$x \in (T \setminus S) \;\Rightarrow\; c \overset{x,N}{<} p \overset{x,N}{<} q$$

$$x \in (W \setminus T) \;\Rightarrow\; c \overset{x,N}{<} q \overset{x,N}{<} p \text{ (reszta dowolnie)}$$

$\forall_{x\in W}\ c \overset{x,N}{<} q \overset{(P)}{\Rightarrow} c \overset{x,N}{<} q\ x \in S \Leftrightarrow p \overset{x,N}{<} c$
Założenie: $a \underset{S}{*} b \overset{L.3}{\Rightarrow} p \underset{S}{*} c \overset{def???}{\Rightarrow} p \underset{N}{<} c \Rightarrow p \underset{N}{<} q$
Wniosek: $T = \{x \in W : p \overset{x,N}{<} q\}$ i $p \underset{N}{<} q \Rightarrow p \underset{T}{**} q \Rightarrow p \underset{T}{*} q \Rightarrow p \underset{M}{<} q$

Wracając do Twierdzenia Arrowa:

Dowód końcowy:

$T \subset W$ Czy $T \in D$ lub $W \setminus T \in D$?
Weźmy $a, b, c \in K$ (różne), $M \in \Sigma$
$x \in T : c \overset{x,M}{<} b \overset{x,M}{<} a\ x \in W \setminus T : a \overset{x,M}{<} c \overset{x,M}{<} b$ (reszta dowolnie)
$\forall_{x\in W}\ c \overset{x,M}{<} b \overset{?}{\Rightarrow} c \underset{M}{<} b\ (\Delta)$
Są 3 możliwości:
1. $b \underset{M}{<} a$ 2. $a \underset{M}{<} b$ 3. a, b w tej samej klasie równoważności
(1) $\Rightarrow b \underset{M}{<} a \Leftrightarrow x \in T,\ b \underset{T}{**} a \overset{L1}{\Rightarrow} b \underset{T}{*} a \overset{L4}{\Rightarrow} T \in D$
(2) $\Rightarrow a \overset{x,M}{<} b \Leftrightarrow x \in W \setminus T \Rightarrow a \underset{W\setminus T}{**} b \overset{L1}{\Rightarrow} a \underset{T}{*} b \overset{L4}{\Rightarrow} W \setminus T \in D$
(3) $\overset{(\Delta)}{\Rightarrow} c \underset{M}{<} a$ wtedy mamy: $c \overset{x,M}{<} a \Leftrightarrow x \in T \Rightarrow c \underset{T}{**} a \overset{L1}{\Rightarrow} c \underset{T}{*} a \overset{L4}{\Rightarrow} T \in D$

□

Wniosek 6.3.1
Założenia: $\#W \geq 3, \#K \geq 2, W$ *skończony. Jeśli* $f : \Sigma \to S(K)$ *spełnia (P) i (I), to* $\exists_{w\in W}\ \forall_{M\in\Sigma}\ M(w) = f(M)$.

Dowód: Jeśli W jest skończony, to $\exists_w\ \{w\}$ spełnia warunek (DEC). Wówczas:

$$\forall_{a,b\in K}\forall_{M\in\Sigma}\ (a \overset{w,M}{<} b \Rightarrow a \underset{M}{<} b).$$

□

Wniosek 6.3.2 (Twierdzenie Arrowa, 1950)
Założenia: $\#W \geq 3, \#K \geq 3, W$ *skończony. Jeśli metoda porządkowa (MP) spełnia zasadę Pareto oraz IIA, to MP jest dyktaturą porządkową.*

Dowód: Z poprzedniego wniosku wynika, że dla w, dla którego $\{w\}$ jest zbiorem decyzyjnym, w jest dyktatorem.

Zadanie 7
Sprawdzić, czy

$$F := \{B : B \supset A\}$$

jest filtrem (lub ultrafiltrem).

Zadanie 8
Sprawdzić, czy następujące zbiory są filtrami:

a) $F_1 = \{D : \exists_{E\in S}\ E \subset D\}$

b) $F_2 = \{D : \exists_{E\in S}\ D \subset E\}$

Definicja 6.8 (Liberalizm Senna)

$$\forall_{w\in W}\exists_{a,b\in K; a\neq b}\forall_M\ w \text{ decyduje o } (a, b)$$

Twierdzenie 6.4
Dla K i W istnieje metoda spełniająca postulat liberalizmu Senna wtedy i tylko wtedy, gdy $\#W < \#K$.

Część ($\Leftarrow$): Niech $K = \{k_1, \ldots, k_n\}$ oraz $W = \{w_1, \ldots, w_s\}$, gdzie $s \leq n-1$.
Przypisujemy:

$$w_1 : k_1, k_n \quad w_2 : k_2, k_n \quad \ldots \quad w_s : k_s, k_n.$$

Metoda: k_n pozostaje ostatnim kandydatem, a $k_1, \ldots, k_s$ w stosunku do k_n są ustalane przez odpowiednie $w_1, \ldots, w_s$. Pozostałe kandydaty ustawiamy numerami rosnąco:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ k_n \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Część ($\Rightarrow$):
Wprowadźmy oznaczenia:

$\cdot$ oznacza k_i, $\quad |$ oznacza w_i, który łączy tych kandydatów, o których decyduje.

Załóżmy, że $\#"|" > \#" \cdot "$.

1. Rysujemy odpowiedni graf.

2. Odrzucamy kropki bez kreski oraz te z jedną kreską. Pozostaje n kropek i l kresek, przy czym $l \geq n$.

3. Wybieramy $\cdot, |, \cdot, |, \cdot, |, \ldots$ aż powstanie cykl.

Wówczas:

$$\begin{bmatrix} w_1 \text{ decyduje o } k_1, k_2 \\ w_2 \text{ decyduje o } k_2, k_3 \\ \vdots \\ w_s \text{ decyduje o } k_s, k_1 \end{bmatrix}$$

co prowadzi do:

$$\begin{bmatrix} k_1 \overset{w_1}{<} k_2 \\ k_2 \overset{w_2}{<} k_3 \\ \vdots \\ k_s \overset{w_s}{<} k_1 \end{bmatrix}.$$

□

7 MR - Metoda rozdziału

Definicja 7.1
Wprowadzamy oznaczenia:
S *- liczba akcjonariuszy (stanów)*
m *- liczba akcji (foteli)*
$P_1, \ldots, P_s$ *- wkłady akcjonariuszy (populacje)*
$a_1, \ldots, a_s$ *- liczba akcji dla akcjonariuszy*

$$(S, M, [p_1, \ldots, p_s]) \longmapsto (a_1, \ldots, a_s)$$

gdzie spełnione jest $p = p_1 + \cdots + p_s$, $a_1 + \cdots + a_s = m$

$\frac{p_i}{p}$ *- udział akcjonariusza i*
$m \cdot \frac{p_i}{p}$ *(zazwyczaj* $\notin \mathbb{Z}$*) - to, co powinien dostać*
$W = \frac{p}{m}$ *- wartość akcji (jednej)*
$q_i := m \cdot \frac{p_i}{p} = \frac{p_i}{\frac{p}{m}} = \frac{p_i}{W}$ *- quota*
$\lfloor q_i \rfloor = \lfloor \frac{m \cdot p_i}{p} \rfloor$ *- dolna quota*
$\lceil q_i \rceil = \lceil \frac{m \cdot p_i}{p} \rceil$ *- górna quota*

Definicja 7.2 (Warunki sensowności metody rozdziału)

1. *(Warunek quoty)* $\lfloor q_i \rfloor \le a_i \le \lceil q_i \rceil$ *(uwzględniając* $q_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow g_i = a_i$*)*
2. *(Warunek monotoniczności)* $p_i > p_j \Rightarrow a_i \ge a_j$ *(analogicznie w drugą stronę)*
3. *(Warunek populacji) Dla* S, m *danych:*

$$p_1, \ldots, p_s \longmapsto a_1, \ldots, a_s$$

jeśli nastąpiła zmiana:

$$\bar{p_1}, \ldots, \bar{p_s} \longrightarrow \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s,$$

to:

$$!\exists_{i,j} \bar{p_i} > p_i, \bar{a}_i < a_i \quad \textit{oraz} \quad \bar{p_j} < p_j, \bar{a_j} > a_j$$

4. *(Warunek monotoniczności akcji) Dla* $p_1, \ldots, p_n$ *stałych, jeśli* $\bar{m} > m$*, to* $\forall_i \bar{a}_i \ge a_i$.
Nie mogą zajść wszystkie te warunki na raz.

Przykład 7.1
1) ***Metoda reszt (metoda Hamiltona)***

$$a_i = \lfloor q_i \rfloor + \epsilon_i, \quad \textit{gdzie } \epsilon_i = 0 \textit{ lub } 1,$$

bierzemy największe reszty $q_i - \lfloor q_i \rfloor$ *aż do "wyczerpania"* m.

Przykład: $S = 3$, $m = 10$, $W = \frac{1000}{10} = 100$

	p_i	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	r_i	*Wynik*
1	264	2,64	2	***0,64***	3
2	361	3,61	3	0,61	3
3	375	3,75	3	***0,75***	4
	$\Sigma = 1000$		8		10

Paradoks Alabamy
Dla $S = 3$, $m = 10$, $W = 100$, po zmianie liczby akcji na $m = 11$, $W = 90,9$, wyniki się zmieniają:

p_i	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	*Wynik*		p_i	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	*Wynik*
145	$1,45$	1	2		145	$1,595$	1	1
340	$3,40$	3	3	$\Rightarrow$	340	$3,740$	3	4
515	$5,15$	5	5		515	$5,665$	5	6
$\Sigma = 1000$		9	10		$\Sigma = 1000$		9	11

Paradoks Oklahomy
Po zmianie liczby akcjonariuszy i akcji, np. $S = 4$, $m = 13$, $W = 76,9$, także mogą wystąpić sprzeczne wyniki.

p_i	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	*Wynik*		p_i	q_i	$\lfloor q_i \rfloor$	*Wynik*
7264183	37606	$37,606$	38		7264183	37606	$37,606$	38
694466	3595	$3,595$	3	$\Rightarrow$	694466	3595	$3,595$	3
−−	−−	−−	−−		−−	−−	−−	−−

2) ***Metoda Jeffersona***
Bierzemy liczbę v (umowną wartość akcji), obliczamy:

$$\bar{q}_i = \frac{p_i}{v},$$

i dobieramy v, by suma dolnych kwot $\lfloor \bar{q}_i \rfloor$ wynosiła m.

Bierzemy liczbę v - umowna wartość akcji (w-prawdziwa)
$\frac{p_i}{v}$ - kwoty umowne
Dobieramy tak, by suma dolnych kwot umownych wynosiła m.

Niech $S = 3$, $m = 10$, $W = 100$, $v = 90$.

p_i	q_i	$\bar{q}_i$	$\lfloor \bar{q}_i \rfloor$
264	*2,64*	*1*	*2*
361	*3,61*	*3*	*3*
375	*3,75*	*5*	*5*
$\Sigma = 1000$		*9*	*10*

Jak dobrać v?

- *za mało akcji $\rightarrow$ zmniejszamy v,*
- *za dużo akcji $\rightarrow$ zwiększamy v.*

3) ***Przybliżanie do wartościami umownymi do górnych quot (Metoda Adamsa)***

Niech $S = 2$, $m = 10$, $W = 100$, $v = 115$.

	p_i	q_i		$\bar{q}_i$	*Wynik*
A	*120*	*1,8*	*2*	*1,04*	*2*
B	*880*	*8,8*	*9*	*7,65*	*8*
	$\Sigma = 1000$		*11*		*10*

*4) **Zaokrąglenie do bliższej dolnej/górnej (Metoda Webstera)***

Niech $S = 3$, $m = 5$.

	p_i	q_i	*Wynik*
A	*480*	*2,66*	*3*
B	*240*	*1,33*	*1*
C	*100*	*0,55*	*1*
	$\Sigma = 820$		*5*

$\bar{q}_i > \frac{\lfloor \bar{q}_i \rfloor + \lceil \bar{q}_i \rceil}{2} \nearrow \lceil \bar{q}_i \rceil$

$\bar{q}_i < \frac{\lfloor \bar{q}_i \rfloor + \lceil \bar{q}_i \rceil}{2} \searrow \lfloor \bar{q}_i \rfloor$

*5) **Metoda Hilla***

Jak w metodzie Webstera, ale

$\bar{q}_i > \sqrt{\lfloor \bar{q}_i \rfloor \cdot \lceil \bar{q}_i \rceil} \nearrow \lceil \bar{q}_i \rceil$

$\bar{q}_i < \sqrt{\lfloor \bar{q}_i \rfloor \cdot \lceil \bar{q}_i \rceil} \searrow \lfloor \bar{q}_i \rfloor$

*6) **Metoda Deana - ze średnią harmoniczną** (to samo, ale ze średnią harmoniczną)*

Twierdzenie 7.1
Metoda Jeffersona $\Leftrightarrow$wyznaczaniu liczb akcji za pomocą ilorazów.

Dowód: Niech m będzie liczbą akcji. Rozpatrzmy ilorazy p_i przez $1, 2, 3, 4, \ldots$

$\alpha :$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$
$\beta :$	$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$
$\gamma :$	$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$

Niech:

- t - największy z wyników nie dający akcji,
- T - najmniejszy z wyników dający akcje.

□

Stwierdzenie 7.1
Dla każdego $v \in (t, T)$ Metoda Jeffersona z wartością umowną v daje w sumie m akcji, gdzie $t < v < T$.
***Dowód:** Niech:*

- *p_i: układ i daje a_i akcji,*
- *v - umowna wartość akcji,*
- *$q = \frac{p_i}{v}$ - umowna quota.*

Metoda Jeffersona jest równoważna Metodzie d'Hondta. Dzielimy wtedy przez kolejne dodatnie liczby całkowite, a największe liczby wyznaczają przypisywane akcje.

Rozważmy:

$$\frac{p_i}{1}, \frac{p_i}{2}, \ldots, \frac{p_i}{a_i}, \frac{p_i}{a_i + 1}$$

gdzie:

- $\frac{p_i}{a_i}$ - daje TAK,
- $\frac{p_i}{a_i+1}$ - daje NIE,
- $\frac{p_i}{a_i} \geq T$,
- $\frac{p_i}{a_i+1} \leq t$.

Zachodzi:
$$\frac{p_i}{a_i+1} \leq t < v < T \leq \frac{p_i}{a_i}$$
czyli:
$$\frac{p_i}{a_i+1} < v < \frac{p_i}{a_i}$$
co można przekształcić do:
$$\frac{1}{a_i} < \frac{v}{p_i} < \frac{1}{a_i}$$
oraz:
$$a_i < \frac{p_i}{v} < 1 + a_i$$
Stąd:
$$a_i = \left\lfloor \frac{p_i}{v} \right\rfloor$$
co daje odpowiedni efekt dla danego v.

□

Twierdzenie 7.2 (Balińskiego-Younga)
Dla $S \geq 4$ i $m \geq 7$ nie istnieje metoda spełniająca jednocześnie warunki:

- *quoty,*
- *monotoniczności,*
- *populacji.*

Dowód: Niech:

- S - liczba akcjonariuszy,
- m - liczba akcji,
- $p_1, \ldots, p_S$ - wkłady ($p = p_1 + \cdots + p_S$),
- $a_1, \ldots, a_S$ - akcje.

Zakładamy:
$$S \geq 4, \quad m \geq 7, \quad \epsilon < \frac{1}{2}\ (\epsilon > 0), \quad b, c > 0$$
Model M zakłada, że spełnione są warunki quoty i monotoniczności.

	Wkład	Quota	akcji
p_1	$b(5+\epsilon)$	$5+\epsilon$	$5,6$
p_2	$b \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$0,1$
p_3	$b \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{\epsilon}{3}\right)$	$\frac{2}{3} - \frac{\epsilon}{3}$	$0,1$
p_4	$b \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2\epsilon}{3}\right)$	$\frac{2}{3} - \frac{2\epsilon}{3}$	$0,1$
p_5			
$\vdots$			
p_S			

b dobieramy w taki sposób, aby $p_1, \dots, p_S$ były liczbami całkowitymi. Oraz aby $p_5 + \dots + p_S$ dawały $m - 7$ akcji.

Zachodzi również:

$$p_1 > p_2 > p_3 > p_4$$

oraz:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \Rightarrow a_4 = 0, \quad \text{bo} \quad a_1 + a_2 + a_3 = 7$$

Tworzymy podobny model N

	Wkład	Quota	akcji
$\bar{p_1}$	$c(4-\epsilon)$	$4-\epsilon$	$3,4$
$\bar{p_2}$	$c\left(2-\frac{\epsilon}{2}\right)$	$2-\frac{\epsilon}{2}$	$1,2$
$\bar{p_3}$	$c\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)$	$\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}$	$0,1$
$\bar{p_4}$	$c\left(1+\frac{\epsilon}{2}\right)$	$\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}$	$0,1$
$\bar{p_5}$			
$\vdots$			
$\bar{p_S}$			

Mamy zatem:

$$p_i, \bar{p_i} \in \mathbf{Z}$$

Zachodzi:

$$\bar{p_1} > \bar{p_2} > \bar{p_3} > \bar{p_4}$$

oraz:

$$\bar{a_1} \geq \bar{a_2} \geq \bar{a_3} \geq \bar{a_4}, \quad \Sigma = 7, \quad \bar{a_4} = 1$$

Jeśli można tak dobrać b, c to otrzymujemy, że:

$$p_1 < \bar{p_1}, \quad p_4 > \bar{p_4}$$

to:

$$b(5+\epsilon) < c(4-\epsilon) \qquad b\left(\frac{2}{3} - \frac{2\epsilon}{3}\right) > c\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)$$

co prowadzi do (przy $\epsilon \to 0$)

$$\frac{c}{b} \geq \frac{5}{4} \quad \text{i} \quad \frac{c}{b} \leq \frac{4}{3}$$

co daje sprzeczność z warunkiem populacji.

Np.:

$$c = 6 \cdot 13 \cdot 600, \quad b = 6 \cdot 10 \cdot 600, \quad z = \frac{1}{600}, \quad \frac{c}{b} = \frac{13}{10}, \quad 1,25 < 1,3 < 1,33$$

Przykładowe wartości:

$$p_1 = 6 \cdot 10 \cdot 600 \cdot \frac{3001}{600} = 6 \cdot 30010 < 6,13 \cdot 600 \cdot \frac{2399}{600} = 6 \cdot 31187 = \bar{p_1}$$

$$p_4 = 6 \cdot 10 \cdot 600 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{599}{600} = 40 \cdot 5599 = 23960 > 6 \cdot 13 \cdot 600 \cdot \frac{301}{600} = 23478 = \bar{p_4}$$

$$p_4 > \bar{p_4}$$

□

7.1 Jak wyglądało głosowanie w USA?

Rok	**Stany**	**Miejsca**	
1789	13	66	
1791	15	105	*Metoda Jeffersona*
1840		223	*Metoda Webstera*
1850		234	*Metoda Hamiltona*
1880		325	*Paradox Alabamy**

1880 - Paradox Alabamy:

- Przedział miejsc: 275-350
- Przydział dla Alabamy:

299	8 miejsc
300	7 miejsc

1901: 386 miejsc, *Metoda Hamiltona-Webstera*

	350-356	357	358-382	383-385	386	387-388	389-390	399-400
Main	3	3	3	4	3	4	3	4
Colorado	3	2	3	3	3	3	3	3

1907: 391 miejsc, *Paradox Oklahomy* (+5 miejsc dla 357), *Metoda Webstera*
1910: 433 miejsca, *Metoda Hilla*
1910-1920: Dyskusja: *Metoda Webstera* czy *Metoda Hilla*?
W 1930 roku uznano, że *Metoda Webstera-Hilla* daje te same rezultaty.
1940: Porównanie metod dla dwóch stanów:

Stan	Metoda Hilla	Metoda Webstera
Arkansas	7	6
Michigan	17	18

Od 1940 roku obowiązuje *Metoda Hilla.*

Definicja 7.3 (Metoda dzielników)
Metoda rozdziału nazywana jest metodą dzielników, jeśli istnieje funkcja $f : [0, \infty) \to \mathbb{N}$*, taka że:*

a) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = x$

b) Funkcja jest rosnąca: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Przydziały są obliczane jako $a_i = f\left(\frac{p_i}{v}\right)$, gdzie v dobierane jest tak, aby $\sum_{i=1}^{s} a_i = m$. Poszczególne metody:

- **Metoda Jeffersona:** $f(x) = \lfloor x \rfloor$
- **Metoda Adamsa:** $f(x) = \lceil x \rceil$

- **Metoda Webstera:**

$$f(x) = \begin{cases} k & x \in [k, \frac{2k+1}{2}) \\ k+1 & x \in [\frac{2k+1}{2}, k+1) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- **Metoda Hilla:**

$$f(x) = \begin{cases} k & x \in [k, \sqrt{k(k+1)}) \\ k+1 & x \in [\sqrt{k(k+1)}, k+1) \end{cases}$$

- **Metoda Deana:**

$$f(x) = \begin{cases} k & x \in [k, \frac{2k(k+1)}{2k+1}) \\ k+1 & x \in [\frac{2k(k+1)}{2k+1}, k+1) \end{cases}$$

Twierdzenie 7.3
Metoda dzielników spełnia:

a) warunek populacji,

b) warunek monotoniczności.

Dowód:

a) **Dowód nie wprost:**
Załóżmy, że $\exists \bar{a}_i < a_i$ i $\bar{a}_j > a_j$ *(oznaczmy to jako (*))*, oraz że:

$$\bar{p}_i > p_i, \quad \bar{p}_j < p_j$$

Rozważmy:

- Dla a_i, a_j: parametr v,
- Dla $\bar{a}_i, \bar{a}_j$: parametr u.

Przydziały są obliczane jako:

$$\bar{a}_i = f\left(\frac{\bar{p}_i}{u}\right), \quad \bar{a}_j = f\left(\frac{\bar{p}_j}{u}\right),$$

oraz

$$a_i = f\left(\frac{p_i}{v}\right), \quad a_j = f\left(\frac{p_j}{v}\right).$$

Funkcja f jest rosnąca, co oznacza, że:

$$f(x) > f(y) \implies x > y.$$

Z założenia (*) wynika:

$$f\left(\frac{\bar{p}_i}{u}\right) < f\left(\frac{p_i}{v}\right), \quad f\left(\frac{\bar{p}_j}{u}\right) > f\left(\frac{p_j}{v}\right).$$

Z rosnącego charakteru f mamy:

$$\frac{\bar{p}_i}{u} < \frac{p_i}{v}, \quad \frac{\bar{p}_j}{u} > \frac{p_j}{v}.$$

Przekształcając:

$$\bar{p}_i < \frac{u}{v} \cdot p_i, \quad \bar{p}_j > \frac{u}{v} \cdot p_j.$$

Otrzymujemy z pierwszej nierówności: $\frac{u}{v} > 1$, a z drugiej nierówności: $\frac{u}{v} < 1$, co prowadzi do sprzeczności.

b) Jeśli $p_i < p_j$, to:

$$\frac{p_i}{v} > \frac{p_j}{v} \implies f\left(\frac{p_i}{v}\right) > f\left(\frac{p_j}{v}\right).$$

Założenie metody dzielników oraz rosnący charakter f prowadzą do tezy.

□

Wniosek 7.3.1
Metoda dzielników nie spełnia warunku kwoty.

Dowód: Twierdzenie Belińskiego-Younga.

□

Twierdzenie 7.4
Metoda Hamiltona spełnia:

a) warunek kwoty,

b) warunek monotoniczności.

Dowód:

a) Rozważmy:

$$q_i = \lfloor q_i \rfloor, \quad q_i - \lfloor q_i \rfloor = 0.$$

W takim przypadku nic nie dodajemy lub:

$$q_i < \lfloor q_i \rfloor, \quad a_i = \begin{cases} \lfloor q_i \rfloor, \\ \lceil q_i \rceil. \end{cases}$$

b) Jeśli $p_i > p_j$, to:

$$m \cdot \frac{p_i}{p} > m \cdot \frac{p_j}{p} \implies q_i > q_j.$$

Rozważmy dwa przypadki:

a) $\lfloor q_i \rfloor > \lfloor q_j \rfloor$ lub $\lfloor q_j \rfloor + 1 \geq a_j$,

b) $\lfloor q_i \rfloor = \lfloor q_j \rfloor$, ale:

$$q_i - \lfloor q_i \rfloor > q_j - \lfloor q_j \rfloor \implies a_i \geq a_j.$$

□

Wniosek 7.4.1
Metoda Hamiltona nie spełnia warunku populacji.

Dowód: Twierdzenie Belińskiego-Younga.

□

Twierdzenie 7.5
Metoda Webstera dla $S = 2, m = 2$ spełnia warunki:

a) kwoty,

b) monotoniczności,

c) populacji.

Dowód:

a) Dla $S = 2$ mamy:

$$q_B = k + a,$$
$$q_C = l + b,$$

gdzie $k, l \in \mathbb{Z}$ oraz $a, b \in [0, 1)$.
Rozważmy przypadki:

a) Jeśli $a = b = 0$, to:

$$B \mapsto k, \quad C \mapsto l.$$

b) Jeśli $k + l + 1 = m$ oraz $a + b = 1$, to:

$$B \mapsto k \text{ lub } k + 1,$$
$$C \mapsto l \text{ lub } l + 1.$$

b) Zastosowanie metody dzielników.

c) Rozważanie zgodności z warunkiem populacji.

$\square$

Zadanie 9
Metoda Balińskiego-Yonga - metoda wartościująca w sposób rekurencyjny

Mamy dane wkłady akcjonariuszy $p_1, \ldots, p_s$

1. *Zakładamy warunek początkowy $m = 0$, $a_1 = a_2 = \cdots = a_s = 0$*
2. *Mam m przyznanych akcji dla $a_1, \ldots, a_s$. Musimy przyznać $(m + 1)$ akcję.*
3. *Liczymy $\frac{p_i}{1+a_i}$ - wartość potencjalną dla i-tego akcjonariusza. $(i = 1, \ldots, s)$*
4. *Kto ma największą wartość potencjalną jemu dajemy akcję z wyłączeniem tych, u których przepadkiem byłaby przekroczona górna quota, czyli:*

$$1 + a_i > \lceil q_i \rceil = \left\lceil \frac{(m + 1)p_i}{p} \right\rceil$$

Wyznacz jak należało by rodzielić pierwsze 8 (12) akcji.

Czyli uzupełnij tabelkę dla wkładów akcjonariuszy 7, 22, 71:

	w	q_1	q_2	q_3	a_1	a_2	a_3	$\frac{p_1}{1+a_1}$	$\frac{p_2}{1+a_2}$	$\frac{p_3}{1+a_3}$
1	100	0,07	0,22	0,71	0	0	1	7	22	**71**
2	50	0,14	0,44	1,42	0	0	2	7	22	**35,5**
3										

Zadanie 10
Wykazać, że nie może zaistnieć sytuacja, w której wszyscy akcjonariusze przekroczą górną quotę.

8 Metoda wartościująca

Definicja 8.1 (Metoda wartościująca – XXI wiek)
Niech S będzie zbiorem stopni (ocen wartości). Metoda $M : W \to \{f : K \to S\}$ polega na tym, że wyborca każdemu kandydatowi przypisuje ocenę.

Przykłady metod:

- Przyznawanie punktów metodą Brody.
- Metoda n-głosów, np. $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$.
- Metoda wartościująca: wynik to słaby porządek w K (w tym wyłonienie zwycięzcy).

Przykład 8.1
a) ***Metoda mediany***
Dla kandydata A, gdzie $\#W = n$, oceny kandydata to $s_1, \ldots, s_n$, uporządkowane w rankingu od najlepszej.
Wartość mediany (multivalue) definiujemy jako:

$$m(A) = \begin{cases} S_{\lfloor \frac{n}{2}+1 \rfloor}, & \textit{gdy } n \textit{ nieparzyste}, \\ \textit{niższa z dwóch środkowych}, & \textit{gdy } n \textit{ parzyste}. \end{cases}$$

Przykład dla n nieparzystego:

- *Oceny: S – świetny, D – dobry, P – przeciętny, Z – zły, F – fatalny.*
- *Dla 5 wyborców:*

$$\begin{gathered} A : S, D, \mathbf{D}, F, F, \\ B : S, S, \mathbf{D}, Z, F, \\ C : D, D, \mathbf{Z}, Z, Z. \end{gathered}$$

Przykład dla n parzystego:

- *Oceny: W – wyborny, S – smaczny, Z – zjadliwy, N – niejadalny.*
- *Dla 4 wyborców:*

$$\begin{gathered} A : W, W, \mathbf{Z}, Z, \\ B : W, S, \mathbf{Z}, N, \\ C : Z, N, \mathbf{N}, N. \end{gathered}$$

Metoda znajduje zastosowanie w jury konkursów, gdzie dąży się do zadowolenia większości.

b) ***Metoda symetrycznej mediany***
Analogiczna do metody mediany, jednak w przypadku n parzystego wybieramy lepszą z dwóch środkowych ocen:

$$m^*(A) = S_{\frac{\lfloor n+1 \rfloor}{2}}.$$

c) ***Metoda Balińskiego-Larakiego (2011)***
Procedura:

a) *Wyznaczamy $m(A)$ i $m(B)$.*

b) *Jeśli $m(A)$ jest lepsze od $m(B)$, to A jest lepszy od B. Notacja: $m(A) < m(B) \Rightarrow A \underset{M}{<} B$*

c) *Jeśli $m(A) = m(B)$, usuwamy tę ocenę z rankingu i powtarzamy procedurę z $n-1$ ocenami.*

Przykład:

$$\begin{aligned} &A : S, D, \mathbf{D}, F, F, \\ &B : S, S, \mathbf{D}, Z, F, \\ &C : D, D, \mathbf{Z}, Z, Z \quad \textit{(odpada).} \end{aligned}$$

Po kolejnych iteracjach wyłaniamy zwycięzcę.

Wniosek: *Remis jest możliwy tylko w przypadku tych samych ocen.*

Definicja 8.2 (Metoda rankingowo niezależna od ubocznych opcji)
Metoda wartościująca jest rankingowo niezależna od ubocznych opcji wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{M,N} \forall_{A,B} \begin{bmatrix} M, N \text{ -- } \textit{modele} \\ K_M = K_N \cup \{C\},\ C \notin K_M \\ \forall v \in W \ \ \textit{oceny } v \textit{ w } M = \ \textit{oceny } v \textit{ w } N \end{bmatrix} \Rightarrow (A \underset{M}{<} B \Leftrightarrow A \underset{N}{<} B).$$

Twierdzenie 8.1
Metoda mediany i metoda Balińskiego-Larakiego (B=L) są rankingowo niezależne od ubocznych opcji.

Dowód: Dodanie kandydata nie zmienia ocen.

□

Lemat 8.1
Metoda punktów Bordy nie jest rankingowo niezależna od ubocznych opcji.

Model M:

3	2
A	B
B	A

$$\begin{bmatrix} A \text{ -- 3 punkty} \\ B \text{ -- 2 punkty} \end{bmatrix} \quad A \underset{M}{>} B$$

Model N:

3	2
C	B
A	C
B	A

$$\begin{bmatrix} A \text{ -- 3 punkty} \\ B \text{ -- 4 punkty} \end{bmatrix} \quad A \underset{M}{<} B$$

Definicja 8.3 (Metoda odporna na nieobecność)
Metoda (MP, MW) jest odporna na nieobecność wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{M,N} \forall_{A,B} \begin{bmatrix} M, N \text{ -- } \textit{modele} \\ W_N = W_M \cup W^*, \quad W^* \cap W_M = \emptyset \\ v \in W_M \Rightarrow \ \textit{głos } v \textit{ w } M = \ \textit{głos } v \textit{ w } N \\ A \underset{M}{<} B \quad \textit{oraz} \quad \forall_{v \in W^*} A \overset{v,N}{<} B \end{bmatrix} \Rightarrow A \underset{N}{<} B.$$

Twierdzenie 8.2
Metoda punktów Bordy jest odporna na nieobecność.

Dowód: Kandydat B dostaje jeszcze więcej punktów niż A.

$\square$

Lemat 8.2
Metoda Balińskiego-Larakiego (B-L) nie jest odporna na nieobecność. Metody mediany również nie są odporne na nieobecność.

Wyniki głosowania w modelu M:

A	5	5	**4**	2	2
B	3	3	**3**	3	2

$\Rightarrow A \underset{M}{>} B$

Wyniki głosowania w modelu N (po dodaniu głosu):

A	5	5	4	**2**	2	2
B	3	3	3	**3**	2	1

$\Rightarrow A \underset{M}{<} B$

Twierdzenie 8.3 (Twierdzenie Saariego (1992))
Z: $K = \{k_1, \ldots, k_n\}$, $n \geq 3$. T: Istnieje model, w którym k_i wygrywa samodzielnie metodą i-głosów ($i = 1, \ldots, n-1$), natomiast k_n wygrywa metodą punktów Bordy. (Bez dowodu)

Przykład 8.2

a)

3	2	2	4
A	A	B	C
B	C	C	B
C	B	A	A

Metoda 1-głosu - wygrywa A (5 głosów)
Metoda 2-głosów - wygrywa B (9 głosów)
Metoda punktów Bordy - wygrywa C (12 punktów)

b)

2	2	2	3
A	A	C	D
B	D	B	B
C	C	D	C
D	B	A	A

Metoda 1-głosu - wygrywa A (4 głosy)
Metoda 2-głosów - wygrywa B (7 głosów)
Metoda 3-głosów - wygrywa C (9 głosów)
Metoda punktów Bordy - wygrywa D (15 punktów)

Definicja 8.4 (Grupowa metoda n-głosów)
Grupowa metoda n-głosów - wyborca głosuje na n kandydatów, wygrywa n z największą liczbą głosów.

Przykład 8.3

	30	30	20	20
1	A	A	B	C
2	B	C	C	B
3	C	B	A	A

Głosowanie na 1 głos
A - 60 - wygrywa
B - 20
C - 20

Głosowanie na 2 głosy
A - 60
B - 70 - wygrywa
C - 70 - wygrywa

Twierdzenie 8.4
$\#K \geq 2n+1$, $n \geq 1$, $\#W$ odpowiednio duża.
Dla kandydatów $k_1, \ldots, k_{2n+1}$ istnieje model, w którym:

- *w głosowaniu grupową metodą n głosów wygrywają $k_1, \ldots, k_n$,*
- *w głosowaniu grupową metodą $(n+1)$ głosów wygrywają $k_{n+1}, \ldots, k_{2n+1}$ (w obu przypadkach każdy kandydat ma ponad 50% głosów).*

Dowód: Idea dla $n = 3$, $2n+1 = 7$:

	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
1	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
2	k_2	k_3	k_1	k_5	k_6	k_7	k_4
3	k_3	k_1	k_2	k_6	k_7	k_4	k_5
4				k_7	k_4	k_5	k_6
5	Wypełniamy odpowiedno rzędami,						
6	dając kandydata w tej kulumnie,						
7	w której go jeszcze nie było.						

Zbiory $\circ$ i $\square$ są równoliczne.

Zarys ogólny:

	n grup				$n+1$ grup			
	p	p	$\ldots$	p	q	q	$\ldots$	q
1	k_1	k_2		k_n	k_{n+1}	k_{n+2}		k_{2n+1}
2	k_2	k_3		k_1	k_{n+2}	k_{n+3}		k_{n+1}
3	k_3	k_4		k_2	k_{n+3}	k_{n+4}		k_{n+2}
$\vdots$								
$n-1$	k_{n-1}	k_n		k_{n-2}	k_{2n-1}	k_{2n}	$\ldots$	k_{2n-2}
n	k_n	k_1		k_{n-1}	k_{2n}	k_{2n+1}		k_{2n-1}
$n+1$			*		k_{2n+1}	k_{n+1}		k_{2n}
$n+2$								
$\vdots$					Δ			
$2n+1$								

* - W tych grupach mamy po p wyborców, każdy z $k_{n+1}, \ldots, k_{2n+1}$ pojawia się z częstotliwością $w\left(\frac{1+2n\epsilon}{2(n+1)}\right)$.

Δ - W każdym rzędzie (miejsca $n+1, \ldots, 2n+1$) każdy z kandydatów $k_{n+1}, \ldots, k_{2n+1}$ pojawia się $w\left(\frac{2n\epsilon+1}{2(n+1)}\right)$ razy, a każdy z $k_1, \ldots, k_n$ pojawia się $w\left(\frac{1}{2n} - \epsilon\right)$ razy. Wstawiamy każdego w kolumnę, w której go jeszcze nie było.

Możemy zadać sobie pytania co do poprawności takiego rozkładu, mianowicie:

1) Dobrze zdefiniowane

2) $nw\left(\frac{1}{2n} + \epsilon\right) > nw\left(\frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1}\right)$, czyli $p > q$.

3) $nw\left(\frac{1}{2n} + \epsilon\right) < nw\left(\frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1}\right)$.

4) $nw\left(\frac{1}{2n} + \epsilon\right) > \frac{w}{2}$.

5) $nw\left(\frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{2(n+1)}\right) + \frac{2}{n+1} > \frac{w}{2}$.

Okaże się, że dla $\epsilon < \frac{1}{2(2n^2+2)}$ będzie ok. Dobieramy n tak, aby wyszły liczby całkowite.

D:

1) a) Suma w rzędzie $= w$:

$$np + (n+1)q = nw\left(\frac{1}{2n} + \epsilon\right) + (n+1)w\left(\frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1}\right) =$$

$$= w\left[\frac{1}{2} + n\epsilon + \frac{n+1}{2(n+1)} - (n+1)\epsilon + \frac{(n+1)\epsilon}{n+1}\right] = w.$$

b) Czy w każdym miejscu liczba > 0? Dla p jest ok:

$$\frac{1}{2(n+1)} + \frac{\epsilon(1-n-1)}{n+1} > 0, \quad n\epsilon < \frac{1}{2}, \quad \epsilon < \frac{1}{2n}.$$

c) Czy suma każdego przy $n+1$ miejsc jest $\leq w$:

$$wn\left(\frac{1}{2n}+\epsilon\right)=w\left(\frac{1}{2}+n\epsilon\right)<w, \quad n\epsilon<\frac{1}{2}, \quad \epsilon<\frac{1}{2n}.$$

$$w\left(\frac{n}{2(n+1)}-\epsilon n+\frac{\epsilon n}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)=w\left(\frac{n+2}{2(n+1)}-\epsilon n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)<w.$$

Głosy na k_i do miejsc $n+1$, $(i=n+1,\ldots,2n+1)$.

2) $w\left(\frac{1}{2n+1}+\epsilon\right)>w\left(\frac{1}{2(n+1)}-\epsilon+\frac{\epsilon}{n+1}\right)$ – oczywiste (prawa strona jest silnie mniejsza od lewej).

3) $nw\left(\frac{1}{2n}+\epsilon\right)<nw\left(\frac{1}{2(n+1)}-\epsilon+\frac{\epsilon}{n+1}\right)$:

$$\frac{1}{2}+n\epsilon<\frac{n+1}{2(n+1)}-(n+1)\left(\frac{n+1\epsilon-\epsilon}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1}.$$

$$n\epsilon<\frac{1}{n+1}-n\epsilon, \quad 2n\epsilon<\frac{1}{n+1}, \quad \epsilon<\frac{1}{2n(n+1)}.$$

Sprawdzenie (4), (5) do domu.

$\square$

9 Deser

Twierdzenie 9.1 (Gibbarda-Satterthwaite'a (1973,1975))
Z: MZU, decyzyjna, $\#K \geq 3, \#w \geq 2$, $\forall_{A \in K} \exists$ *model* M *w którym* A *wygrywa oraz metoda ta nie jest dyktaturą T: Metoda jest podatna na manipulację, tzn* $\exists_{model} \exists_{w \in W}$ *i taki* w *zagłosuje inaczej niż w tym modelu, to zwycięzca zmieni się na bardziej odpowiadającego wyborcy* w*.*

Kompromis Jagielloński
Wojciech Słomczyński, Karol Życzkowski

Próg przy którym wniosek jest przyjęty

$$q = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{N_1 + \cdots + N_k}}{\sqrt{N_1} + \cdots + \sqrt{N_k}}\right)$$

gdzie N_i - populacja kraju

Wbory w roku 1990
§3 Progi wejścia §3.1 $P \geq 5\%$ §3.2 $K \geq 8\%$ §3.3 Jeżeli nic lub któryś z warunków przez tylko 1 komitet to progi są obniżane do
$P \geq 3\%$
$K \geq 5\%$

Czy wchodzi?	Głosy	Czy wchodzi po zmianie progu?
+	20,4(K)	+
+	15,4(P)	+
+	10,6(P)	+
+	7,3(P)	+
-	6,4(K)	+
+	5,7(P)	+
+	5,4(P)	+
+	4,9(P)	+
-	4,4(P)	+
-	4,0(P)	+
-	3,2(P)	+

Przypadek wyborów w Krakowie z dwoma kartami

Metoda Capińskiego - średnia na nogę czołówki
Metoda Ciesielskiego

Egzamin 31 stycznia 11:00