

Contents

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Preliminaria | 2 |
| 1.1 | Jak wyglądają aktualnie wybory? | 2 |
| 1.2 | Prawo Ciesielskiego | 4 |
| 2 | Treść właściwa | 5 |
| 2.1 | Metody głosowania (system wyborczy) | 5 |
| 3 | Deser | 7 |

1 Preliminaria

1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?

Materiał ten nie ma w żadnym stopniu charakteru politycznego, a wyłącznie charakter matematyczny.

Rozważmy poniższe dane, oparte na 6 partiach, 1000 głosach i 6 mandatów do rozdania:

| Nazwa | Głosy | : 1 | : 2 | : 3 | : 4 | Otrzymane mandaty |
|-------------|-------|------------|------------|------------|-----|-------------------|
| Filateliści | 380 | 380 | 190 | 127 | 87 | 3 |
| Gitarzyści | 192 | 192 | 96 | 64 | | 2 |
| Szachiści | 180 | 180 | 90 | | | 1 |
| Piłkarze | 96 | 96 | 48 | | | 1 |
| Lotniarze | 90 | 90 | | | | 0 |
| Kolejarze | 62 | 62 | | | | 0 |

System ten działa w następujący sposób:

- Liczby głosów dzielone są przez kolejne liczby naturalne dodatnie (tak jak w tabeli).
- Wybierane są z tej tabeli 6 największych liczb (wytluszczone druk).
- Liczba mandatów zależy od liczby wytluszczonych liczb w wierszu partii.

Przykład 1.1

Rozważmy tę samą tabelę, ale założmy, że partia **Gitarzyści** nie przekroczyła progu 5%.

| Nazwa | Głosy | : 1 | : 2 | : 3 | : 4 | Otrzymane mandaty |
|-------------|-------|------------|------------|------------|-----|-------------------|
| Filateliści | 380 | 380 | 190 | 127 | 87 | 3 |
| Gitarzyści | 192 | 192 | 96 | 64 | — | — |
| Szachiści | 180 | 180 | 90 | | | 2 |
| Piłkarze | 96 | 96 | 48 | | | 1 |
| Lotniarze | 90 | 90 | | | | 1 |
| Kolejarze | 62 | 62 | | | | 0 |

Przykład 1.2

Rozważmy następującą tabelę z 5 mandatami do rozdania:

| Nazwa | Głosy : 1 | : 2 | : 3 | : 4 | Mandaty |
|---------|-------------|-------------|-------------|------|---------|
| Rybacy | 6000 | 3000 | 2000 | 1500 | 3 |
| Myśliwi | 5700 | 2850 | 1900 | | 2 |
| Artyści | 1950 | 975 | | | 0 |

Partia **Rybacy** prowadziła kampanię przeciwko **Myśliwym**, w wyniku czego liczba otrzymanych głosów zmieniła się następująco:

- Partia **Rybacy** zyskała 400 głosów (+400)
- Partia **Myśliwi** straciła 600 głosów (-600)
- Partia **Artyści** zyskała 200 głosów (+200)

| Nazwa | Głosy : 1 | : 2 | : 3 | : 4 | Mandaty |
|---------|-------------|-------------|------|-----|---------|
| Rybacy | 6400 | 3200 | 2133 | | 3 |
| Myśliwi | 5100 | 2550 | 1700 | | 2 |
| Artyści | 2150 | 1075 | | | 0 |

Tym oto sposobem partia **Myśliwi** straciła jeden mandat na rzecz partii **Artyści**.

Przykład 1.3

Rozważmy wyniki głosowania dla dwóch partii z 6 mandatami do rozdania.

| Nazwa | Głosy : 1 | : 2 | : 3 | : 4 | : 5 | Mandaty |
|------------|-------------|------------|------------|------------|------------|---------|
| Matematycy | 1200 | 600 | 400 | 300 | 240 | 5 |
| Politycy | 201 | 101 | | | | 1 |

Popatrzmy na głosy bezpośrednio na konkretnych kandydatów z każdej partii:

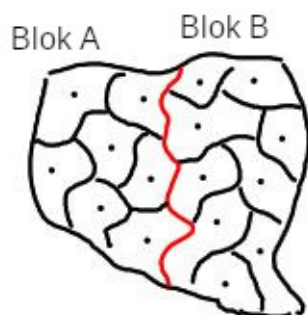
| Nazwa | Głosy |
|---------|------------|
| Kwadrat | 201 |
| Trójkąt | 200 |
| Stożek | 200 |
| Walec | 200 |
| Suma | 200 |
| Iloczyn | 199 |

| Nazwa | Głosy |
|-------------|-----------|
| Magister | 35 |
| Magistra | 34 |
| Urzędnik | 33 |
| Urzędas | 33 |
| Pani Basia | 33 |
| Pan Andrzej | 33 |

Tym oto sposobem mandatu nie otrzymuje **Iloczyn**, mimo że zdobył więcej głosów niż **Magister**.

Przykład 1.4

Rozważmy sytuację, w której państwo jest podzielone na dwa bloki, oba mające po 50% wpływu na wyniki wyborów. Każdy blok ma przyznać po 4 mandaty.



W bloku A znajdowały się dwie partie: PZK (Partia Zwolenników Kawy) i PZH (Partia Zwolenników Herbaty), z których każda otrzymała po 25% głosów w ogólnokrajowym głosowaniu. W bloku B znajdowała się partia PZA (Partia Zwolenników Alkoholu) oraz inne partie, które nie przekroczyły progu 5%. Przedstawmy liczbę uzyskanych głosów w PZA:

| Nazwa | Głosy |
|-------------|--------------|
| Żubr | 19995 |
| Żubrówka | 2 |
| Soplica | 2 |
| Pan Tadeusz | 1 |

I tym oto sposobem wygrywają osoby, które dostają 2 lub 1 głos.

1.2 Prawo Ciesielskiego

Rozważmy głosowanie względem 2 partii z 7 mandatami:

| Nazwa | Głosy:1 | :3 | :5 | :7 | :9 | Mandaty |
|-----------|-------------|------------|------------|-----|-----|---------|
| Kelnerzy | 1050 | 350 | 210 | 150 | 117 | 4 |
| Sportowcy | 1008 | 336 | 202 | 144 | | 3 |

Partia **Sportowcy** postanowiła się rozdzielić na dwie partie i startować osobno:

| Nazwa | Głosy:1 | :3 | :5 | :7 | :9 | Mandaty |
|-----------|-------------|------------|------------|-----|-----|---------|
| Kelnerzy | 1050 | 350 | 210 | 150 | 117 | 3 |
| Piłkarze | 504 | 168 | 101 | | | 2 |
| Siatkarze | 504 | 168 | 101 | | | 2 |

Tym oto sposobem partia **Sportowcy** zdobyła większość.

2 Treść właściwa

2.1 Metody głosowania (system wyborczy)

Wprowadźmy kilka oznaczeń, niech:

W - zbiór wszystkich wyborców,

K - zbiór wszystkich kandydatów.

- Ten sam układ głosów (zestaw głosów) daje ten sam wynik (funkcja).
- Każdy układ głosów daje jakiś wynik (może być \emptyset).

Definition 2.1 (Model)

Model to układ głosów (z przyporządkowanymi wyborcami).

Definition 2.2 (Metoda anonimowa)

Metoda jest anonimowa, wtedy i tylko wtedy (w skrócie: \Leftrightarrow), gdy wszyscy wyborcy są traktowani tak samo, $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in W}$ zamiana głosów x i y nie zmienia wyniku.

Alternatywnie, metoda nie jest anonimowa $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in W}$ takie, że zamiana głosów x i y istotnie zmienia wynik.

Definition 2.3 (Metoda neutralna)

Metoda jest neutralna, \Leftrightarrow wszyscy kandydaci są traktowani tak samo, $\Leftrightarrow \forall_{x,y \in K}$ zamiana ról x i y nie zmienia wyniku.

Alternatywnie, metoda nie jest neutralna $\Leftrightarrow \exists_{x,y \in K}$ takie, że zamiana ról x i y istotnie zmienia wynik.

Definition 2.4

Trzy rodzaje metod ze względu na wyniki:

- 1) Metoda zwycięzcy (MZ) – wybiera zwycięzcę (zwycięzców),
- 2) Metoda porządkowa (MP) – wynik to słaby porządek na zbiorze K ,
- 3) Metoda rozdziału (MR) – wynik to podział pewnych dóbr między kandydatów.

Definition 2.5 (Klasyczna metoda zwycięzcy)

Klasyczna metoda zwycięzcy (klasyczna MZ) polega na tym, że każdy wyborca głosuje na dokładnie jednego kandydata. Zbiór

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow K\}$$

jest zbiorem modeli, gdzie m jest modelem. Klasyczną metodę zwycięzcy możemy opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

Definition 2.6 (Semi-klasyczna metoda zwycięzcy)

Semi-klasyczna MZ polega na tym, że każdy wyborca głosuje na co najmniej jednego kandydata:

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow P(K) \setminus \emptyset\}.$$

Metodę tę można opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

Definition 2.7 (Metoda efektywna)

Metoda zwycięzcy jest efektywna \Leftrightarrow zawsze wyłania przynajmniej jednego zwycięzcę.

Przykłady:

- 1) Dyktatura – $\exists p \in W$: wynik jest tożsamy z głosem p .
- 2) Monarchia – dany kandydat $k \in K$ wygrywa niezależnie od głosowania.
- 3) Metoda większości – wygrywa kandydat (lub kandydaci), który(a) otrzymał(a) najwięcej głosów.
- 4) Metoda bezwzględnej większości – wygrywa kandydat $k \in K$, który otrzymał co najmniej $\lfloor \frac{\#W}{2} \rfloor + 1$ głosów.
- 5) Metoda super większości – wygrywa kandydat, który uzyskał co najmniej q głosów, gdzie $q > \frac{\#W}{2}$.
- 6) Metoda status quo – *Założenie*: \exists pewien stan z jednym zwycięzcą.
Głosowanie metodą większości (lub super większości):
 - jeśli metoda daje wynik, zwycięża "nowy" kandydat,
 - jeśli metoda nie daje wyniku, zwycięża dotychczasowy kandydat.

Przykład: referendum.

- 7) Metoda n -głosów – każdy wyborca głosuje na n kandydatów, a zwycięża ten, kto uzyska najwięcej głosów.
- 8) Metoda punktowa – każdy wyborca $w \in W$ ma do rozdysponowania p punktów ($p \in \mathbb{N}$) między kandydatów. Zwycięża kandydat z największą liczbą punktów.
- 9) Metoda większości ważonej – ($W = \{a_1, \dots, a_n\}$), gdzie głos a_i ma wagę $w_i \geq 0$. Wygrywa ten, kto otrzyma ponad $\frac{w_1 + \dots + w_n}{2}$ punktów.
- 10) Metoda głosowania blokowego – $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$, gdzie W_k to zbiór wyborców bloku. W_k podejmuje decyzję większością głosów. W przypadku remisu wybierają zwycięzcę w W_k . Głos z W_k ma wagę i_k . Wygrywa kandydat z największą liczbą punktów.

Definition 2.8 (Metoda decyzyjna)

Metoda zwycięzcy jest decyzyjna \Leftrightarrow w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę.

Definition 2.9 (Metoda prawie decyzyjna)

Metoda zwycięzcy jest prawie decyzyjna \Leftrightarrow w każdym modelu wyłania co najwyżej jednego zwycięzcę. Sytuacja, w której nie ma zwycięzcy, zachodzi wtedy, gdy więcej niż jeden kandydat uzyskał tę samą, najwyższą liczbę punktów.

3 Deser

W sumie to deseru jeszcze nie ma, ale ma być na ostatnim wykładzie!!! :)