

# Matematyczne aspekty wyborów

Na podstawie wykładu  
Krzysztofa Ciesielskiego

Skrypt autorstwa  
Arkadiusza Dąbala

Wersja z dnia:  
2025-10-02

# Contents

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>2</b>
1.1	Jak wyglądają aktualnie wybory? . . . . .	2
1.2	Prawo Ciesielskiego . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Metody głosowania (system wyborczy)</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Metoda zwycięzcy</b>	<b>6</b>
3.1	Metody klasyczne: . . . . .	6
3.2	Metody semi-klasyczne: . . . . .	7
3.3	Metoda ani klasyczna, ani semi-klasyczna: . . . . .	7
<b>4</b>	<b>MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie</b>	<b>10</b>
4.1	Własności metod wyborczych . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Metoda TAK/NIE</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Metody porządkowe</b>	<b>25</b>
<b>7</b>	<b>MR - Metoda rozdziału</b>	<b>32</b>
7.1	Jak wyglądało głosowanie w USA? . . . . .	37
<b>8</b>	<b>Metoda wartościująca</b>	<b>41</b>
<b>9</b>	<b>Deser</b>	<b>47</b>

# 1 Wstęp

## 1.1 Jak wyglądają aktualnie wybory?

### Komentarz

Materiał ten nie ma w żadnym stopniu charakteru politycznego, a wyłącznie charakter matematyczny.

### Przykład 1.1

Rozważmy poniższe dane, oparte na 6 partiach, 1000 głosach i 6 mandatów do rozdania:

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	<b>380</b>	<b>190</b>	<b>127</b>	87	3
Gitarzyści	192	<b>192</b>	<b>96</b>	64		2
Szachiści	180	<b>180</b>	90			1
Piłkarze	96	<b>96</b>	48			1
Lotniarze	90	90				0
Kolejarze	62	62				0

System ten działa w następujący sposób:

- Liczby głosów dzielone są przez kolejne liczby naturalne dodatnie (tak jak w tabeli).
- Wybierane są z tej tabeli 6 największych liczb (wytluszczone druk).
- Liczba mandatów zależy od liczby wytluszczonych liczb w wierszu partii.

### Przykład 1.2

Rozważmy tę samą tabelę, ale założmy, że partia **Gitarzyści** nie przekroczyła progu 5%.

Nazwa	Głosy	: 1	: 2	: 3	: 4	Otrzymane mandaty
Filateliści	380	<b>380</b>	<b>190</b>	<b>127</b>	87	3
Gitarzyści	192	192	96	64	—	—
Szachiści	180	<b>180</b>	<b>90</b>			2
Piłkarze	96	<b>96</b>	48			1
Lotniarze	90	<b>90</b>				1
Kolejarze	62	62				0

### Przykład 1.3

Rozważmy następującą tabelę z 5 mandatami do rozdania:

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	<b>6000</b>	<b>3000</b>	<b>2000</b>	1500	3
Myśliwi	<b>5700</b>	<b>2850</b>	1900		2
Artyści	1950	975			0

Założmy teraz, że partia **Rybacy** prowadziła kampanię przeciwko **Myśliwym**, w wyniku czego liczba otrzymanych głosów zmieniła się następująco:

- Partia **Rybacy** zyskała 400 głosów (+400)
- Partia **Myśliwi** straciła 600 głosów (-600)
- Partia **Artyści** zyskała 200 głosów (+200)

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	Mandaty
Rybacy	<b>6400</b>	<b>3200</b>	2133		2
Myśliwi	<b>5100</b>	<b>2550</b>	1700		2
Artyści	<b>2150</b>	1075			1

#### Komentarz

Tym oto sposobem partia **Myśliwi** straciłszy jeden mandat na rzecz partii **Artyści**.

#### Przykład 1.4

Rozważmy wyniki głosowania dla dwóch partii z 6 mandatami do rozdania.

Nazwa	Głosy : 1	: 2	: 3	: 4	: 5	Mandaty
Matematycy	<b>1200</b>	<b>600</b>	<b>400</b>	<b>300</b>	<b>240</b>	5
Politycy	<b>201</b>	101				1

Popatrzymy na głosy bezpośrednio na konkretnych kandydatów z każdej partii:

Nazwa	Głosy
Kwadrat	<b>201</b>
Trójkąt	<b>200</b>
Stożek	<b>200</b>
Walec	<b>200</b>
Suma	<b>200</b>
Iloczyn	199

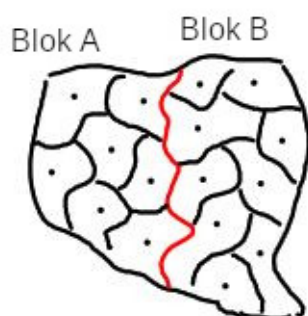
Nazwa	Głosy
Magister	<b>35</b>
Magistra	34
Urzędnik	33
Urzędas	33
Pani Basia	33
Pan Andrzej	33

#### Komentarz

Tym oto sposobem mandatu nie otrzymuje **Iloczyn**, mimo że zdobył więcej głosów niż **Magister**.

#### Przykład 1.5

Rozważmy sytuację, w której państwo jest podzielone na dwa bloki, oba mające po 50% wpływu na wyniki wyborów. Każdy blok ma przyznać po 4 mandaty.



W bloku A znajdowały się dwie partie: PZK (Partia Zwolenników Kawy) i PZH (Partia Zwolenników Herbaty), z których każda otrzymała po 25% głosów w ogólnokrajowym głosowaniu. W bloku B znajdowała się partia PZA (Partia Zwolenników Alkoholu) oraz inne partie, które nie przekroczyły progu 5%. Przedstawmy liczbę uzyskanych głosów w PZA:

Nazwa	Głosy
Żubr	<b>19995</b>
Żubrówka	<b>2</b>
Soplica	<b>2</b>
Pan Tadeusz	<b>1</b>

### Komentarz

I tym oto sposobem wygrywają osoby, które dostają 2 lub 1 głos.

## 1.2 Prawo Ciesielskiego

Rozważmy głosowanie względem 2 partii z 7 mandatami:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	<b>1050</b>	<b>350</b>	<b>210</b>	<b>150</b>	117	4
Sportowcy	<b>1008</b>	<b>336</b>	<b>202</b>	144		3

Na ten moment wygrywa partia **Kelnerzy** 4 mandatami. Partia **Sportowcy** postanowiła się rozdzielić na dwie partie i startować osobno:

Nazwa	Głosy:1	:3	:5	:7	:9	Mandaty
Kelnerzy	<b>1050</b>	<b>350</b>	<b>210</b>	150	117	3
Piłkarze	<b>504</b>	<b>168</b>	101			2
Siatkarze	<b>504</b>	<b>168</b>	101			2

### Komentarz

Tym oto sposobem partia **Sportowcy** zdobyła większość.

## 2 Metody głosowania (system wyborczy)

Wprowadźmy kilka oznaczeń, niech:

**W** - zbiór wszystkich wyborców,

**K** - zbiór wszystkich kandydatów.

- Ten sam układ głosów (zestaw głosów) daje ten sam wynik (funkcja).
- Każdy układ głosów daje jakiś wynik (może być  $\emptyset$ ).

### **Definicja 2.1 (Model)**

*Model to układ głosów (z przyporządkowanymi wyborcami).*

### **Definicja 2.2 (Metoda anonimowa)**

*Metoda jest anonimowa  $\Leftrightarrow$  gdy wszyscy wyborcy są traktowani tak samo, to znaczy*

$$\forall_{x,y \in W} \text{ zamiana głosów } x \text{ i } y \text{ nie zmienia wyniku.}$$

#### **Komentarz**

Alternatywnie, metoda nie jest anonimowa kiedy

$$\exists_{x,y \in W} \text{ takie, że zamiana głosów } x \text{ i } y \text{ istotnie zmienia wynik.}$$

### **Definicja 2.3 (Metoda neutralna)**

*Metoda jest neutralna gdy wszyscy kandydaci są traktowani tak samo, to znaczy*

$$\forall_{x,y \in K} \text{ zamiana ról } x \text{ i } y \text{ nie zmienia wyniku.}$$

#### **Komentarz**

Alternatywnie, metoda nie jest neutralna

$$\exists_{x,y \in K} \text{ takie, że zamiana ról } x \text{ i } y \text{ istotnie zmienia wynik,}$$

dokładniej definiując:

jeśli  $\exists k_1, k_2 \in K : W_1 = \{w_1, w_2, \dots, w_i\}$  głosowali na  $k_1$ , a  $W_2 = \{w_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_j\}$  głosowali na  $k_2$  to jeżeli kandydaci Ci "zamieniają się" wyborcami (zbiorami  $W_1, W_2$ ), to  $k_1$  i  $k_2$  zamieniają się wynikami.

### **Definicja 2.4**

*Trzy rodzaje metod ze względu na wyniki:*

- 1) Metoda zwycięzcy (MZ) – wybiera zwycięzcę (zwycięzców),
- 2) Metoda porządkowa (MP) – wynik to słaby porządek na zbiorze  $K$ ,
- 3) Metoda rozdziału (MR) – wynik to podział pewnych dóbr między kandydatów.

### 3 Metoda zwycięzcy

#### **Definicja 3.1 (Klasyczna metoda zwycięzcy)**

Klasyczna metoda zwycięzcy (klasyczna MZ) polega na tym, że każdy wyborca głosuje na dokładnie jednego kandydata. Zbiór

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow K\}$$

jest zbiorem modeli, gdzie  $m$  jest modelem. Klasyczną metodę zwycięzcy możemy opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

#### **Definicja 3.2 (Semi-klasyczna metoda zwycięzcy)**

Semi-klasyczna MZ polega na tym, że każdy wyborca głosuje na co najmniej jednego kandydata:

$$\Sigma = \{m : W \rightarrow P(K) \setminus \emptyset\}.$$

Metodę tę można opisać funkcją

$$f : \Sigma \rightarrow P(K).$$

#### **Definicja 3.3 (Metoda efektywna)**

Metoda zwycięzcy jest efektywna  $\Leftrightarrow$  zawsze wyłania przynajmniej jednego zwycięzcę.

### 3.1 Metody klasyczne:

- 1) Dyktatura –  $\exists p \in W$ : wynik jest tożsamy z głosem  $p$ .
- 2) Monarchia – dany kandydat  $k \in K$  wygrywa niezależnie od głosowania.
- 3) Metoda większości – wygrywa kandydat (lub kandydaci), który otrzymał najwięcej głosów.
- 4) Metoda bezwzględnej większości – wygrywa kandydat  $k \in K$ , który otrzymał co najmniej  $\lfloor \frac{\#W}{2} \rfloor + 1$  głosów.
- 5) Metoda super większości – wygrywa kandydat, który uzyskał co najmniej  $q$  głosów, gdzie  $q > \frac{\#W}{2}$ .
- 6) Metoda status quo – *Założenie*:  $\exists$  pewien stan z jednym zwycięzcą.  
Głosowanie metodą większości (lub super większości):
  - jeśli metoda daje wynik, zwycięża "nowy" kandydat,
  - jeśli metoda nie daje wyniku, zwycięża dotychczasowy kandydat.

#### **Komentarz**

Przykładem metody status quo jest referendum.

- 7) Metoda większości ważonej – ( $W = \{a_1, \dots, a_n\}$ ), gdzie głos  $a_i$  ma wagę  $w_i \geq 0$ . Wygrywa ten, kto otrzyma ponad  $\frac{w_1 + \dots + w_n}{2}$  punktów.
- 8) Metoda głosowania blokowego –  $W = W_1 \cup \dots \cup W_n$ , gdzie  $W_k$  to zbiór wyborców bloku.  $W_k$  podejmuje decyzję większością głosów. W przypadku remisu wybierają zwycięzcę w  $W_k$ . Głos z  $W_k$  ma wagę  $i_k$ . Wygrywa kandydat z największą liczbą punktów.

### 3.2 Metody semi-klasyczne:

- 9) Metoda  $n$ -głosów – każdy wyborca głosuje na  $n$  kandydatów, a zwycięża ten, kto uzyska najwięcej głosów.
- 10) Szeroka metoda  $n$ -głosów - każdy głosuje na  $n$  kandydatów, ale mamy  $n$  zwycięzców (lub więcej w przypadku remisu na ostatnim "wygrywającym" miejscu)

### 3.3 Metoda ani klasyczna, ani semi-klasyczna:

- 11) Metoda punktowa – każdy wyborca  $w \in W$  ma do rozdysponowania  $p$  punktów ( $p \in \mathbb{N}$ ) między kandydatów. Zwycięża kandydat z największą liczbą punktów.

#### **Definicja 3.4 (Metoda decyzyjna)**

Metoda zwycięzcy jest decyzyjna  $\Leftrightarrow$  w każdym modelu wyłania dokładnie jednego zwycięzcę.

#### **Definicja 3.5 (Metoda prawie decyzyjna)**

Metoda zwycięzcy jest prawie decyzyjna  $\Leftrightarrow$  w każdym modelu wyłania co najwyżej jednego zwycięzcę. Sytuacja, w której nie ma zwycięzcy, zachodzi wtedy, gdy więcej niż jeden kandydat uzyskał tę samą, najwyższą liczbę punktów.

#### **Zadanie 1**

Zbadaj kto jest zwycięzcą w głosowaniu przez 99 osób na kandydatów: **Anastazy**, **Bermudy**, **Cezary**, jeśli otrzymano następujące wyniki metodą porządkową:

Liczba głosów	Wynik porządkowy
18	ABC
15	ACB
24	BAC
8	BCA
16	CAB
18	CBA

#### **Zadanie 2**

Dane są wyniki głosowania:

Imię	Liczba głosów
Jaś	100
Małgosia	1

Zrób tak, by Małgosia wygrała.

#### **Zadanie 3**

Uzupełnij tabelę:

	Anonimowa	Neutralna	Efektywna
Dyktatura			
Monarchia			
Metoda Większości			



**Definicja 3.6 (Kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości)**

Metoda zwycięzcy (MZ) spełnia kryterium jednoznacznej bezwzględnej większości, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat, który otrzyma ponad 50% głosów, jest jedynym zwycięzcą.

**Stwierdzenie 3.1**

Mamy klasyczną metodę zwycięzcy, taką że  $\#K = 2$ , a głosowanie odbywa się według zasady bezwzględnej większości. Wówczas metoda jest prawie decyzyjna.

**Dowód:**

1° Załóżmy, że liczba wyborców  $\#W$  jest nieparzysta - OK.

2° Liczba wyborców  $\#W$  jest parzysta:

- jeden kandydat ma więcej niż 50% głosów - OK.
- remis, czyli obaj mają po 50% - nie ma zwycięzcy (dlatego metoda jest prawie decyzyjna).

□

**Stwierdzenie 3.2**

Metoda jest decyzyjna  $\Rightarrow$  metoda jest prawie decyzyjna.

**Definicja 3.7 (Metoda monotoniczna ze względu na zwycięzcę)**

**Z:** MZ - klasyczna lub semi-klasyczna.

Metoda jest monotoniczna ze względu na zwycięzcę, wtedy i tylko wtedy, gdy kandydat  $A$  jest zwycięzcą, a jeśli wybierzemy kandydata  $B$  różnego od  $A$  ( $B \neq A$ ) oraz jego grupę wyborców, to jeśli ta grupa zmieni swoje głosy bez straty dla  $A$  (czyli zmiana nastąpi zgodnie z następującymi dozwolonymi operacjami):

$M$	$\Rightarrow$	$N$
$A \ B$	$\Rightarrow$	$A \ B$
$- \ -$	$\Rightarrow$	$- \ -$
$+ \ +$	$\Rightarrow$	$+ \ +$
$- \ +$	$\Rightarrow$	$+ \ -$

to:  $\Rightarrow A$  nadal wygrywa.

**Komentarz**

Czyli, jeżeli ktoś, kto nie głosował na zwycięzcę ( $A$ ), a głosował na kandydata  $B$ , zmieni swój głos na zwycięzcę ( $A$ ), to ( $A$ ) nadal wygrywa.

**Definicja 3.8 (Metoda kwoty)**

MZ klasyczna lub semi-klasyczna jest metodą kwoty (większości kwalifikowanej), wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $q$  (kwota), taka że liczba głosów o tej własności, że kandydat  $A$  jest zwycięzcą wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  otrzymał co najmniej  $q$  głosów.

**Komentarz**

Często kwota wyrażana jest w procentach, a wówczas stosuje się nieraz nierówność słabą.

**Twierdzenie 3.1 (Maya - Kenneth Maya, 1952r)**

**Z:** Klasyczna metoda zwycięzcy oraz  $\#K = 2$ . Jeżeli metoda ta jest metodą:

(1) anonimową

(2) neutralną

(3) monotoniczną ze względu na zwycięzcę

(4) prawie decyzyjną

$\Rightarrow$  jest metodą bezwzględnej większości.

**Dowód:** Załóżmy, że  $A, B$  to kandydaci.

$\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$  interesują nas liczby głosów, które otrzymali kandydaci. Załóżmy:

$A$  -  $a$  głosów

$B$  -  $b$  głosów

Rozpatrzmy zatem przypadki:

1°  $\#W = 2n$  (parzysta), rozważmy dwa podprzypadki:

a) Jeśli  $a = n, b = n$ .

**Hipoteza:**  $A$  wygrywa (analogicznie, jeżeli nie wygrywa  $B$ ), a metoda jest neutralna, to przy wymianie wyborców  $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} B$  wygrywa (nie wygrywa  $A$ )  $\Rightarrow A$  i  $B$  wygrywają jednocześnie (nie wygrywa żaden)  $\Rightarrow$  co prowadzi do **⚡** (bo żaden z nich nie ma ponad 50%).

b) Jeśli  $a > b$ .

**Hipoteza:**  $B$  wygrywa, wtedy  $a - b$  wyborców zmienia głosy z  $A$  na  $B$ ,  $\stackrel{(3)}{\Rightarrow} B$  dalej wygrywa. Teraz  $B$  ma  $a$  głosów,  $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} A$  wygrywa,  $\stackrel{(4)}{\Rightarrow} A$  wygrywa i ma ponad połowę głosów.

2° Niech  $\#W = 2n + 1$  (nieparzysta).

Niech  $a > b$ .

**Hipoteza:**  $B$  wygrywa,  $a - b$  wyborców zmienia głosy i, jak w 1a), udowadniamy, że  $B$  musi mieć ponad połowę głosów.

Tak więc zawsze wygrywa ten, kto ma ponad połowę głosów.

□

## 4 MZU - Metoda zakładająca uporządkowanie

### **Definicja 4.1 (Metoda zakładająca uporządkowanie)**

Metoda zwycięzcy jest metodą zakładającą uporządkowanie (MZU) gdy

$\forall_{w \in W}$  wyborca  $w$  ustala  $K$  kandydatów w liniowym porządku, a jego głos zależy od tego porządku.

**Zapis:**

$A \overset{w,m}{<} B$  - w modelu  $m$  oznacza, że wyborca  $w$  stawia  $B$  wyżej niż  $A$ .

$A \overset{w}{<} B$  - gdy wiadomo, jaki model.

### **Przykład 4.1**

1. Metoda punktów Bordy (Jean Charles de Borda, 1733–1799, inżynier wojskowy) – Każdy wyborca przydziela punkty od  $n - 1$  do 0:

1 miejsce -  $n - 1$  punktów

2 miejsce -  $n - 2$  punktów

⋮

$n - 1$  miejsce - 1 punkt

$n$  miejsce - 0 punktów

Zwycięża ten, kto otrzyma największą liczbę punktów.

2. Metoda Hare’a (Sir Thomas Hare, 1806–1891, Anglia, prawnik, 1857 r.) – Polega na odrzucaniu tego kandydata (tych kandydatów), który ma najmniej pierwszych miejsc, i głosowaniu dalej (listy pozostają z usunięciem odrzuconego kandydata), aż ktoś uzyska ponad 50% głosów. Gdy następuje remis i nie ma kogo odrzucić, wszyscy wygrywają.

3. Metoda Coombsa (Clyde Coombs, 1912–1988, USA, psycholog) – Wypisujemy kolejność wyników głosowania, odrzucamy kandydata (lub kandydatów jeżeli ktoś zostanie), który ma najwięcej ostatnich miejsc, i głosujemy dalej, aż ktoś uzyska ponad 50% pierwszych miejsc. Gdy nie można nikogo odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.

4. Metoda odrzuceń ostatniego – Jak w metodzie Coombsa, przy czym odrzucamy „do oporu”. Gdy nie można nikogo więcej odrzucić, wygrywają wszyscy, którzy pozostali.

### **Komentarz**

Różnica między metodą Coombsa a metodą odrzucania ostatniego.

### **Metoda Coombsa**

Liczba:	4	2	3
I pozycja	C	<b>B</b>	<b>B</b>
II pozycja	A	C	A
III pozycja	B	A	C

Wygrywa B, bo ma ponad 50% pierwszych miejsc.

**Komentarz**

Kontynuacja...

**Metoda odrzuceń ostatniego**

Liczba:	4	2	3
I pozycja	C	B	B
II pozycja	<del>A</del>	C	A
III pozycja	<del>B</del>	<del>A</del>	C

Kolejność odrzuceń: B, A, C – C wygrywa.

5. Metoda Copelanda (Arthur H. Copeland, 1898–1970, matematyk) – Porównujemy parami kandydatów. Ten, kto więcej razy zostaje oceniony wyżej, dostaje 1 pkt, a w przypadku remisu obaj dostają po 0,5 pkt.

$$\#\{m : A \overset{m}{<} B\}$$

$$\#\{m : B \overset{m}{<} A\}$$

Decyduje suma punktów (zwycięzców może być więcej niż jeden).

6. Metoda turniejowa ( $Z: \#W = 2n+1$  nieparzysta) –  $k_1$  porównujemy z  $k_2$  (metodą powyżej), a następnie zwycięzcę pierwszego porównania porównujemy z  $k_3$  itd.
7. Metoda pozycyjna – Wyborcy przyznają punkty kandydatą w postaci  $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , gdzie  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ . np.  
 1 miejsce –  $p_1$  punktów  
 2 miejsce –  $p_2$  punktów  
 itd.

Zwycięża ten z największą liczbą punktów.

**Komentarz**

W szczególności:

Metoda Bordy:  $P(n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ Metoda większości:  $P(1, 0, \dots, 0)$ Metoda  $k$  głosów:  $P(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$   
 $k$  razy**Definicja 4.2 (Monotoniczność ze względu na transpozycję)**

MZU jest monotoniczna ze względu na transpozycje  $\Leftrightarrow \forall_{M-\text{model}} \forall_{w \in W} \forall_{A, B \in K}$ , jeśli w  $M$  głosuje się  $[\Delta, B, A, *]$  i w  $M$  wygrywa  $A$ , to w  $N$ , gdzie zmiana polega na  $[\Delta, A, B, *]$ , również wygrywa  $A$ .

**Komentarz**Zmiana polega na zamienieniu kolejności uporządkowania  $A$  i  $B$ . Dodatkowo porządek

ten był na wykładzie zapisany pionowo.

$$\begin{bmatrix} \Delta \\ B \\ A \\ * \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta \\ A \\ B \\ * \end{bmatrix}$$

**Umowa:** Jeśli nie jest zaznaczone inaczej, to w  $K, W$  różne oznaczenia oznaczają różnych kandydatów (wyborców).

**Definicja 4.3 (Słaba zasada Pareto)**

MZU spełnia słabą zasadę Pareto gdy

$$\forall_M (\exists_{A,B \in K} \forall_{w \in W} A \overset{w,M}{<} B) \Rightarrow A \text{ nie wygrywa w } M.$$

**Definicja 4.4 (Kandydat Condorceta)**

$A \in K$  jest kandydatem Condorceta (zwycięzcą Condorceta) gdy w "bezpośrednich porównaniach"  $A$  jest lepszy od każdego innego kandydata czyli

$$\forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} > \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}.$$

**Definicja 4.5 (Przeegrany Condorceta)**

$A \in K$  to przeegrany Condorceta (w modelu  $M$ ) gdy

$$\forall_{B \in K} : B \neq A \quad \#\{w : B \overset{w,M}{<} A\} < \#\{w : B \overset{w,M}{>} A\}.$$

**Definicja 4.6 (Kryterium Condorceta)**

Metoda spełnia kryterium Condorceta gdy

$$\forall_M \text{ istnieje kandydat Condorceta (w } M) \Rightarrow A - \text{ jedyny zwycięzca w } M.$$

**Definicja 4.7 (Kryterium przegranych Condorceta)**

Metoda spełnia kryterium przegranych Condorceta gdy

$$\forall_M \text{ istnieje przeegrany Condorceta } A \text{ w } M \Rightarrow A \text{ nie wygrywa w } M.$$

**Definicja 4.8 (Metoda jednoznacznie większościowa)**

Metoda jest jednoznacznie większościowa gdy

$$\forall_M \text{ kandydat } A \text{ w } M \text{ ma ponad połowę pierwszych miejsc} \Rightarrow A - \text{ jedyny zwycięzca.}$$

**Definicja 4.9 (Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji IIA)**

Metoda słabo niezależna od ubocznych opcji spełnia warunek niezależności porażki od ubocznych opcji (spełnia słaby warunek IIA) gdy

$$\forall_{A,B \in K} \forall_{M,N - \text{modele}} \text{ spełnia } \left[ \begin{array}{l} \forall_{w \in W} (B \overset{w,M}{<} A) \Leftrightarrow (B \overset{w,N}{<} A) \\ A \text{ wygrywa w } M, B \text{ nie wygrywa w } M \end{array} \right] \Rightarrow B \text{ nie wygrywa w } N.$$

Innymi słowy: zmiany nie wpływające na relacje przegrany-zwycięzca nie mogą dać przegrywającemu zwycięstwa.

**Twierdzenie 4.1**

MZU, anonimowa, neutralna  $\Rightarrow$  metoda nie jest decyzyjna.

**Dowód:** Rozważmy  $\#K = 2$ ,  $\#W = 2n$  i otrzymane głosy.

Głosy	n	n
1	A	B
2	B	A

**Hipoteza:** Metoda decyzyjna to np. wygrywa  $A \Rightarrow$  wygrywa  $B$  ⚡

Analogicznie zachodzi dla  $A$ .

□

### Przykład 4.2 (Paradoks Condorceta)

Rozważmy następującą tabelę:

Głosy	9	10	11
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B

Zachodzi  $A > B$ ,  $B > C$ ,  $C > A$ . Mamy więc grę w "kamień, papier, nożyce."

#### Twierdzenie 4.2

MZU spełnia kryterium Condorceta  $\Rightarrow$  jest jednoznacznie większościowa.

**Dowód:** A ma ponad połowę pierwszych miejsc  $\Rightarrow$  A - kandydat Condorceta  $\Rightarrow$  A jest jedynym zwycięzcą.

□

#### Twierdzenie 4.3

MZU spełnia słabe IIA oraz kryterium Condorceta  $\Rightarrow$  spełnia słabą zasadę Pareto.

**Dowód:** Mamy dany model  $M$  w którym  $\forall_{w \in W} A \overset{w,M}{<} B \overset{?}{\Rightarrow} A$  nie wygrywa w  $M$ .

Rozważmy model  $N$  w którym dla każdego wyborcy przesuwamy  $A$  i  $B$  na szczyt, czyli do postaci

$$\begin{bmatrix} B \\ A \\ \text{reszta} \end{bmatrix}$$

Spełnione jest zatem  $A \overset{w,M}{<} B \Leftrightarrow A \overset{w,N}{<} B$ .

W  $N$ :  $B$  jest kandydatem Condorceta.

W  $N$ :  $B$  jest jedynym zwycięzcą,  $B$  wygrywa,  $A$  nie wygrywa.

Słabe IIA  $\Rightarrow$   $A$  nie wygrywa w  $M$ .

□

#### Twierdzenie 4.4

MZU, monotoniczna ze względu na transpozycje  $\Leftrightarrow (\forall_{M-\text{model}} \forall_{A \in K} \forall_{B_1, \dots, B_n \in A} (A \neq B, \text{ ale może być } B_i = B_j) \forall_{w_1, \dots, w_n \in W} (\text{może być } w_i = w_j), \text{ jeżeli w modelu } M \text{ wygrywa } A, \text{ to model } N \text{ utworzony przez } [\Delta, B_i, A, *] \rightarrow [\Delta, A, B_i, *] \text{ dla } i = 1, \dots, n \Rightarrow \text{ w } N \text{ dalej wygrywa } A.))$

**Dowód:**  $\Leftarrow$  oczywiste.

$\Rightarrow$  Stosujemy założenie  $n$  razy (robimy  $n$  skoków i dalej wygrywa  $A$ ).

□

### Przykład 4.3

1. Metoda Blacka (1908-1991, ekonomista) - jeśli istnieje kandydat Condorceta, to on wygrywa. Jeśli nie istnieje, stosujemy punkty Bordy.
2. Metoda Condorceta - jeśli istnieje kandydat, który w "bezpośrednim porównaniu" wygrywa lub remisuje z każdym innym  $\Leftrightarrow$  on jest zwycięzcą.

3. Metoda nominacji - każdy, kto ma co najmniej jedno pierwsze miejsce, wygrywa.
4. Metoda ostatnich miejsc - każdy, kto nie ma żadnego ostatniego miejsca, wygrywa.
5. Metoda prezydencka - rozważamy dwóch kandydatów z największą liczbą pierwszych miejsc. Porównujemy ich "bezpośrednio". Jeśli na drugim miejscu jest remis, wszyscy z drugiego miejsca "przechodzą do finału" i tam stosujemy metodę Copelanda.

#### 4.1 Własności metod wyborczych

Metoda	Kryterium Condorceta	Kryterium przegranego Condorceta	Słaba zasada Pareto	Monotoniczność ze względu na transpozycję	IIA	Jednoznaczna większość
Punkty Bordy	-(1)	+	+	+	-(2)	-(1)
Hare'a	-(3)	-(3)	+	-(4)	-(5)	+(O)
Coombsa	-(14)	-(15)	+	-(13)	-(13)	+(O)
Odrzuceń ostatniego	-(11,12)	-(12)	+	-(13)	-(13)	-(11,12)
Copelanda	+	+	+	+	-(10)	+(O)
Większości	-(3)	-(3)	+(O)	+	-(6)	+
Dyktatura	-(7)	-(7)	+	+(O)	+	-(7)
Terminarzowa	+	+	-(8)	+	-(9)	+

Metoda punktów Bordy jest monotoniczna ze względu na transpozycję.

$A$  wygrywa. Niech  $A$  zdobędzie 1 punkt więcej. Innym się nie zwiększyło  $\Rightarrow A$  dalej wygrywa.

D1) **Metoda Bordy, Kryterium przegranego Condorceta**  $\forall_w A < B$  Punkty  $A <$  Punkty  $B$ . W punktacji  $A$  zdobywa 1 punkt za każdą parę  $(B, w)$ , w której wyborca  $w$  umieszcza  $B$  wyżej niż  $A$ .

$A$  jest przegranym Condorceta. Mamy  $k$  kandydatów,  $n$  wyborców, a kandydat  $K_1, \dots, K_{n-1}$  otrzyma mniej niż  $\frac{n}{2}$  punktów. W sumie,  $A$  zdobywa mniej niż  $\frac{k(k-1)}{2}$  punktów.

Łączna pula punktów do rozdziału wynosi  $n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$  (suma ciągu arytmetycznego). Wszyscy razem zdobywają mniej niż  $\frac{n(k-1)}{2}$  punktów, czyli łącznie mniej niż  $\frac{k \cdot n \cdot (k-1)}{2}$ .

D2) **Metoda Comba i Hare'a** Jeśli  $\forall_w A \overset{w}{<} B$ , to  $A$  wcześniej odpadnie od  $B$ .

D3) **IIA dyktatura** Jeśli  $A$  wygrywa,  $B \overset{d,M}{<} A$ , to  $B$  nie może wygrać.

D4) **Metoda terminarzowa - Kryterium Condorceta** Kandydat Condorceta wygrywa z każdym i nie odda zwycięstwa.

D5) **Terminarzowa - monotoniczność** Przy przesunięciu  $A$  również wygrywa.

D6) **Metoda Copelanda** Gdy  $A$  wygrywa z każdym, to zdobywa maksymalną liczbę punktów.

Zasada Pareto:  $\forall_w B \overset{w}{<} A \overset{?}{\Rightarrow} B$  nie wygrywa.

Jeśli  $B$  wygrywa w pojedynku z  $C$ , to również  $A$  wygrywa z  $C$ . Wówczas punkty  $A >$  punkty  $B$ , ponieważ  $A$  zdobywa punkty za parę  $(A, B)$ , a zatem punkty  $A$  są silniejsze.

D7) **Metoda Coombsa - Słaba zasada Pareto** Jeśli  $\forall_w B \overset{w}{<} A$ , to  $A$  nie odpadnie, zanim  $B$  nie odpadnie (czyli  $B$  odpadnie wcześniej niż  $A$ ).

K1)

3os	2os	Pkt
A	B	2
B	C	1
C	A	0

A jest kandydatem Condorceta, natomiast otrzymano punkty:

$$\begin{bmatrix} A = 6 \text{ pkt} \\ B = 7 \text{ pkt} \\ C = 2 \text{ pkt} \end{bmatrix}$$

K2)

1os	2os	2os	Pkt
C	A	B	2
A	B	A	1
B	C	C	0

 $\Rightarrow$ 

1os	2os	2os	Pkt
C	A	B	2
A	B	<b>C</b> ↑	1
B	C	A	0

, wykorzystując transpozycję otrzymujemy wyniki

$$\begin{bmatrix} A = 5 \\ B = 6 \\ C = 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A = 7 \\ B = 6 \\ C = 2 \end{bmatrix}, \text{ czyli } A \text{ wygrywa.}$$

K3)

2os	3os	2os
A	B	C
C	A	A
B	C	B

$\begin{bmatrix} A - \text{kandydat Condorceta} \\ B - \text{przegrany Condorceta} \end{bmatrix}$ , bo  $A : B \ 4 : 3 \Rightarrow A : C \ 5 : 2$ , ale wygrywa  $B$ .

K4)

6os	5os	4os	2os
A	C	B	B
B	A	C	A
C	B	A	C

 $\Rightarrow$ 

6os	5os	4os	2os
A	C	B	<b>A</b> ↑
B	A	C	B
C	B	A	C

, wygrywał  $B$ , po zmianie  $C$ .

K5)

2os	1os	2os
B	A	A
A	B	C
C	C	B

$B$  nie wygrywa,  $A$  wygrywa  $\Rightarrow$

2os	1os	2os
B	A	<b>C</b> ↑
A	B	A
C	C	B

, wygrywa  $B$

K6)

2os	3os	2os
A	B	A
B	A	C
C	C	B

,  $A$  wygrywa,  $B$  nie wygrywa  $\Rightarrow$

2os	3os	2os
A	B	<b>C</b> ↑
B	A	A
C	C	B

K7)

2os	1os (w tym jeden dyktator)
A	B
B	A

$\begin{bmatrix} A - \text{kandydat Condorceta} \\ B - \text{przegrany Condorceta} \end{bmatrix}$ , wygrywa  $B$ .

K8) Ustawiamy kolejność:  $ABCD$

1os	1os	1os
A	C	B
B	A	D
D	B	C
C	D	A

mamy

$$\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \\ C > D \end{bmatrix}, \text{ ostatecznie wygrywa } D,$$

mimo iż  $D < B$ .



K9) Ustawiamy kolejność  $ABC$

1os	1os	1os
C	B	A
A	C	B
B	A	C

mamy  $\begin{bmatrix} A > B \\ A < C \end{bmatrix}$ , wygrywa  $C \Rightarrow$

1os	1os	1os
C	B	B
A	C	<b>A</b> ↑
B	A	C

$B$  wygrywa.

K10)

2os	2os	1os	1os
A	C	D	B
D	A	B	C
B	B	C	D
C	D	A	A

otrzymujemy kolejno wyniki:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} > B (4 : 2) & \mathbf{B} > C (4 : 2) \\ A < \mathbf{C} (2 : 4) & \mathbf{B} = \mathbf{D} (3 : 3) \\ \mathbf{A} > D (4 : 2) & \mathbf{C} = \mathbf{D} (3 : 3) \end{bmatrix},$$

przyz-

nano punkty  $\begin{bmatrix} A -2 \text{ pkt} \\ B -1,5 \text{ pkt} \\ C -1,5 \text{ pkt} \\ D -1 \text{ pkt} \end{bmatrix}$ ,  $A$  wygrywa,  $C$  nie wygrywa.

Po zmianie:

2os	2os	1os	1os
A	C	D	B
D	A	B	C
↑	B	C	D
B	D	A	A

oraz punktacje:

$$\begin{bmatrix} A -2 \text{ pkt} \\ B -0,5 \text{ pkt} \\ C -2,5 \text{ pkt} \\ D -1 \text{ pkt} \end{bmatrix},$$

$C$  wygrywa.

K11)

4os	2os	3os
C	B	B
A	C	A
B	A	C

$B$  ma najwięcej głosów pierwszych, czyli jest kandydatem Condorceta,

ale kolejność odrzuceń to  $B, A$ , więc wygrywa  $C$ .

K12)

2os	1os	2os
C	B	B
A	C	A
B	A	C

$C$  to przegrany Condorceta, ale  $C$  wygrywa.

K13)

5os	4os	1os	2os
A	B	C	B
C	A	B	C
B	C	A	A

,  $A$  wygrywa,  $C$  i  $B$  nie wygrywają.

Przekształcamy do:

5os	4os	1os	2os
A	B	C	B
C	A	B	<b>A</b> ↑
B	C	A	C

,  $B$  wygrywa.

K14)

2os	1os	1os	1os	2os
E	D	A	C	B
A	B	B	B	C
D	A	C	D	A
C	E	E	E	D
B	C	D	A	E

$B$  -kandydat Condorceta,  $B$  odpada w I turze

K15)	2os	2os	2os	1os	$A$ -przeegrany Condorceta, ale $A$ wygrywa
	D	B	C	B	
	C	D	B	C	
	A	A	A	D	
	B	C	D	A	

**Lemat 4.1 (Lemat o decyzyjności)**

$Z$ :  $MZU$ , efektywna,  $\#K \geq 3$ ,  $\#W \geq 2$ . Metoda spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA  $\Rightarrow$  jest decyzyjna.

**Dowód:** Wiemy, że zwycięzca istnieje (chcemy wykazać, że jest jedyny). Załóżmy, że  $A$  i  $B$  są

zwycięzcami w modelu $M$ oraz $W = X \cup Y$	X	Y	Niech $C$ - inny kandydat
	$\vdots$	$\vdots$	
	A	B	
	$\vdots$	$\vdots$	
	B	A	
	$\vdots$	$\vdots$	

Tworzymy model	X	Y	, w którym relacje $A/B$ nie są zmienione.
	A	C	
	C	B	
	B	A	
	...	...	

$Q$

Kto wygrywa w  $Q$ ? Na pewno nie  $B$ , bo  $\forall_w B \overset{w}{<} C$ , ale również nie  $A$  (z IIA).

Jeżeli w  $Q$   $A$  wygrywa,  $B$  nie  $\Rightarrow$  w  $M$   $B$  nie wygrywa ⚡

Zatem wygrywa  $C$ .

Rozważmy model $R$	X	Y
	A	B
	B	C
	C	A
	...	...

$R$

Kto wygrywa w  $R$ ? -  $A$ ,  $B$  lub  $C$  (Pareto) Ale nie wygrywa  $C$  (z zasady Pareto). W  $R$ : relacje  $A/C$  są takie same jak w  $Q$ .

Założmy, że  $A$  wygrywa w  $R \Rightarrow C$  nie wygrywa w  $Q$ . Wobec tego w  $R$  wygrywa  $B$ .

Porównajmy  $M$  i  $R$ : relacje  $A/B$  w  $M$  i  $R$  są takie same. Wobec tego z IIA  $\Rightarrow$  w  $M$   $A$  nie wygrywa ⚡

□

**Twierdzenie 4.5 (Twierdzenie Arrowa dla metod zwycięzcy (1951))**

Założmy:  $\#K \geq 3$ ,  $\#W \geq 2$ ,  $MZU$ , efektywna, spełnia słabą zasadę Pareto i słabe IIA  $\Rightarrow$  dyktatura.

D: Z lematu o decyzyjności  $\Rightarrow$  jeśli zwycięzca istnieje, to jest jedyny.

Czy istnieje jedyny zwycięzca? (pytanie) dyktatura.

**Definicja 4.10 (na potrzeby dowodu)**

$w \in W$  - dyktator  $A$  z kontrolerem  $B \Leftrightarrow$  jeśli  $A \overset{w}{<} B \Rightarrow A$  nie wygrywa.

Podzielimy dowód na 3 kroki:

I krok -  $\forall_{A,B \in K} \exists_{w \in W}$  dyktator nad  $A$  z kontrolerem  $B$ .

II krok -  $w$ -dyktator nad  $A$  z kandydatem  $B \Rightarrow w$  dyktator nad  $B$  z kontrolerem  $A$  (dyktatora nad parą  $A, B$  oznaczamy  $d(A, B)$ ).

III krok - Jeżeli  $w = d(A, B) \Rightarrow \forall_{D,E} w = d(D, E)$  (gdzie  $D, E$  może być  $A$  lub  $B$ ).

Wtedy ten  $w$  z I kroku jest dyktatorem.

$w$
$A$
$B_1$
$B_2$
$\dots$
$B_n$

Dow. I) Niech  $C$  będzie trzecim kandydatem.

$C$
$A$
$B$
wszyscy

Wygrywa  $C$ . Jeden wyborca prze-

	inni	$W_1$	
	$C$	$A$	
suwa $C$ do tyłu:	$A$	$B$	Wygrywa $C$ lub $A$ .
	$B$	$C$	
	$\vdots$	$\vdots$	

	inni	$w_1$	$w_2$	
	$C$	$A$		
To samo z trzecim wyborcą:	$A$	$B$		Wygrywa $A$ lub $C$ , i tak dalej, aż
	$B$	$C$		
	$\vdots$	$\vdots$		

	wszyscy	
dojdzie do sytuacji:	$A$	Wówczas wygrywa $A$ (z zasady Pareto), a $C$ nie.
	$B$	
	$C$	

Pierwsze przejście, po którym  $C$  nie wygrywa (musi takie zaistnieć).

$X, Y$  - grupy wyborców.

X	w	Y		X	w	Y
$C$	$C$	$A$	$\Rightarrow$	$C$	$A$	$A$
$A$	$A$	$B$		$A$	$B$	$B$
$B$	$B$	$C$		$B$	$C$	$C$
$M_1$				$M_2$		

Pokażemy, że  $w$  jest dyktatorem nad  $B$  z kontrolerem  $A$ .

Rozważmy  $P$  - dowolny model, w którym  $B \stackrel{w,P}{<} A$ .

Niech  $A/B$  oznacza pewną relację między  $A$  i  $B$ .

$W$	$V$	inni		$W$	$V$	inni
$A/B$	$A$	$A/B$	$\Rightarrow$	$C$	$A$	$A/B$
	$B$			$A/B$	$B$	$C$
				$\vdots$	$C$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P$				$Q$		

Kto wygrywa w  $Q$ ? -  $A$ ,  $B$  lub  $C$ . Jednak relacje  $B/C$  w modelach  $Q$  i  $M_1$  są takie same  $\Rightarrow$  w  $Q$   $B$  nie wygrywa (IIA). Z kolei relacje  $A/C$  w  $Q$  i  $M_2$  są takie same  $\stackrel{IIA}{\Rightarrow}$  w  $Q$   $C$  nie wygrywa.

W  $Q$  wygrywa  $A$ ,  $B$  nie wygrywa.

Relacje  $A/B$  w  $P$  i  $Q$  są takie same.  $\Rightarrow$  w  $P$   $B$  nie wygrywa.

Dow. II)  $w$  jest dyktatorem nad  $B$  z kontrolerem  $A$ ,  $v$  jest dyktatorem nad  $A$  z kontrolerem  $B$

$W$	$V$	inni
$A$	$B$	
$B$	$A$	
$\vdots$	$\vdots$	

Wygrywa  $A$  lub  $B$  (z zasady Pareto).  $B$  nie wygrywa (bo  $w$ ),  $A$  nie wygrywa (bo  $v$ ) ⚡

Dow. III) Niech  $w = d(A, B)$ . 1. Zauważmy, że  $\forall_{D,E} \exists d(D, E)$ . 2.  $\forall_{D,E} w = d(D, E)$ .

D 2.1. Załóżmy, że  $C$ , oraz że  $v = d(B, C)$  i  $v \neq w$ .

$W$	$V$	inni
$C$	$B$	$C$
$A$	$C$	$B$
$B$	$A$	$A$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Wygrywa  $B$  lub  $C$  (z zasady Pareto).  $B$  nie wygrywa (bo  $w$ ),  $C$  nie wygrywa (bo  $v$ ) ⚡

D 2.2. Zamieniamy  $A$  i  $B$  rolami,  $v = d(A, C)$ , i w ten sam sposób pokazujemy, że  $w = d(A, C)$ .

D 2.3.  $\stackrel{z2.1 \text{ i } 2.2}{C \neq A, B}$  oraz  $w = d(A, B)$ ,  $w = d(A, C)$ . Jeśli  $D \neq A, C$ , to podobne rozumowanie jak w 2.1 i 2.2 dla  $A, C, D$  pokazuje, że  $w = d(A, C) \Rightarrow w = d(C, D)$ .

Dla  $C, D \neq A, B$  OK. Jeden z  $C, D$  musi być równy  $A$  lub  $B$  (z 2.1 i 2.2).

□

#### **Wniosek 4.5.1 (Twierdzenie Arrowa o niemożliwości)**

Założmy, że  $\#K \geq 3$ ,  $\#W \geq 2$ . Wówczas: nie istnieje metoda zakładająca uporządkowanie (MZU) efektywna, która jednocześnie spełnia następujące warunki:

- anonimowa,
- słabą zasadę Pareto,
- słabe kryterium niezależności od opcji ubocznych (IIA).

#### **Przykład 4.4 (Przypadki szczególne w twierdzeniu Arrowa)**

1.  $\#K = 2$ ,  $\#W$  nieparzyste — metoda większości jest decyzyjna.
2.  $\#K = 3$ ,  $\#W = 5$  — reguła „ $\geq 3$  pierwsze miejsca” wyłania zwycięzcę.

#### **Twierdzenie 4.6 (Twierdzenie Taylora o niemożliwości)**

Dla  $\#K \geq 3$ ,  $\#W \geq 3$ : nie istnieje MZU efektywna, która spełnia jednocześnie kryterium Condorceta oraz słabe kryterium niezależności od ubocznych opcji (IIA).

**Dowód:** Z założeń IIA i kryterium Condorceta wynika słaba zasada Pareto. Słaba zasada Pareto wraz z IIA prowadzi do dyktatury (zgodnie z twierdzeniem Arrowa). Jednak dla  $\#W \geq 3$ , dyktatura nie spełnia kryterium Condorceta.

□

Przypadek  $\#W = 4$  jest znacznie prostszy do rozważenia.

## 5 Metoda TAK/NIE

$$\left[ \begin{array}{ll} \Sigma = \{M : W \rightarrow K\} & \Sigma = \{M : W \rightarrow \{\text{TAK}, \text{NIE}\}\} \\ f : \Sigma \rightarrow P(K) & f : \Sigma \rightarrow \{\text{TAK}, \text{NIE}\} \end{array} \right]$$

### **Przykład 5.1 (Szczególny przypadek metody status quo)**

Przypadek z dwoma kandydatami.

### **Definicja 5.1 (Założenia metody TAK/NIE)**

Założenia: ’

- $\forall_{w \in W} w : \text{TAK} \Rightarrow \text{wynik: TAK}$ ,
- $\forall_{w \in W} w : \text{NIE} \Rightarrow \text{wynik: NIE}$ .

### **Definicja 5.2 (Koalicja wygrywająca)**

Podzbiór  $A \subset W$  jest koalicją wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\{x \in A : x \text{ głosuje TAK}\} \Rightarrow \text{wynik: TAK}.$$

### **Definicja 5.3 (Monotoniczność metody TAK/NIE)**

Metoda TAK/NIE jest monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\left[ \begin{array}{l} A \subset A_1 \\ A \text{ jest koalicją wygrywającą} \end{array} \right] \Rightarrow A_1 \text{ jest koalicją wygrywającą}.$$

### **Definicja 5.4 (Wyborca decydujący)**

Założmy, że  $A$  jest koalicją wygrywającą. Wyborca  $p \in A$  jest decydujący dla  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \setminus \{p\}$  nie jest koalicją wygrywającą.

### **Definicja 5.5 (Wskaźnik Banzhafa)**

Założmy, że  $W = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Wskaźnik Banzhafa dla  $a_i$  jest równy liczbie:

$$B(a_i) = \#\{A : a_i \in A \text{ i } a_i \text{ jest decydujący dla } A\}.$$

### **Definicja 5.6 (Indeks Banzhafa (Penrose’a–Banzhafa))**

Indeks Banzhafa dla  $a_i$  definiuje się jako:

$$I_B(a_i) = \frac{B(a_i)}{B(a_1) + \dots + B(a_n)}.$$

### **Przykład 5.2**

Trzech wyborców:

- $w_1 = 50$ ,
- $w_2 = 45$ ,
- $w_3 = 1$ .

Do podjęcia decyzji TAK potrzeba 51 głosów.

#### **Komentarz**

Zapis tego warunku:  $W(51; 50, 45, 1)$  — gdzie  $W(\text{min}; \text{wagi wyborców})$ .

**\*\*Metoda liczenia wskaźnika Banzhafa (dla metod monotonicznych)\*\*:**

	Koalicje wygrywające \ Wyborcy	$w_1$	$w_2$	$\dots$	$w_n$
ALGORYTM:	$k_1$	+	+	$\dots$	-
	$k_2$	-	+	$\dots$	-
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$k_j$	+	-	$\dots$	-

Legenda:

- + (wyborca należy do koalicji),
- - (wyborca nie należy do koalicji).

### Komentarz

Policzmy teraz wskaźniki Banzhafa dla  $W(51; 50, 45, 1)$

**\*\*Koalicje wygrywające\*\*:**

- $\{w_1, w_2\}$ ,
- $\{w_1, w_3\}$ ,
- $\{w_1, w_2, w_3\}$ .

Liczba znaków + dla wyborcy  $w_1$  minus liczba znaków - to wskaźnik Banzhafa.

	Koalicja	$w_1$	$w_2$	$w_3$
<b>**Przykład**:</b>	$\{w_1, w_2\}$	+	+	-
	$\{w_1, w_3\}$	+	-	+
	$\{w_1, w_2, w_3\}$	+	+	+
		$3 = (3-0)$	$1 = (2-1)$	$1 = (2-1)$

**\*\*Wskaźniki Banzhafa\*\*:**

$$B(w_1) = 3,$$

$$B(w_2) = 1,$$

$$B(w_3) = 1.$$

$w_1$  jest decydującym wyborcą.

**\*\*Indeksy Banzhafa\*\*:**

$$I_B(w_1) = \frac{3}{5},$$

$$I_B(w_2) = \frac{1}{5},$$

$$I_B(w_3) = \frac{1}{5}.$$

Dlaczego to działa? Niech  $K$  to zbiór koalicji wygrywających, a  $p \in W$ . Dzielimy  $K$  na trzy podzbiory:

$$K_1 = \{A : p \notin A\},$$

$$K_2 = \{A \cup \{p\} : A \in K_1\},$$

$$K_3 = K \setminus (K_1 \cup K_2).$$

Zauważmy, że:

- $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ ,
- zbiory  $K_1, K_2, K_3$  są parami rozłączne,
- $\#K_1 = \#K_2$ .

Wskaźnik Banzhafa:

$$B(p) = \#K_3,$$

gdzie  $p$  jest decydujący dla  $A$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $A \in K_3$ .

### **Definicja 5.7 (Wskaźnik/Indeks Shapleya–Shubika)**

Dla metody monotonicznej: Porządkujemy wyborców jako  $W = (w_1, \dots, w_n)$ . W ciągu  $(w_1, \dots, w_n)$  wyborca  $w_k$  jest wpływającym wyborcą, jeśli:

$\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$  nie tworzy koalicji wygrywającej, a  $\{w_1, \dots, w_k\}$  już tak.

Wskaźnik Shapleya–Shubika:

$$S(w_k) = \#\{\text{ciągi, w których } w_k \text{ jest wpływającym wyborcą}\}.$$

Indeks Shapleya–Shubika:

$$I_S(w_k) = \frac{S(w_k)}{n!}.$$

### **Przykład 5.3**

#### **Komentarz**

Dalej działamy na przykładzie  $W(51; 50, 45, 1)$ .

Ciągi decyzyjne:

$$(w_1, \mathbf{w}_2 \mid, w_3)$$

$$(w_1, \mathbf{w}_3 \mid, w_2)$$

$$(w_2, \mathbf{w}_1 \mid, w_3)$$

$$(w_2, w_3, \mathbf{w}_1 \mid)$$

$$(w_3, \mathbf{w}_1 \mid, w_2)$$

$$(w_3, w_2, \mathbf{w}_1 \mid)$$

$$I_S(w_1) = \frac{4}{6}, \quad I_S(w_2) = \frac{1}{6}, \quad I_S(w_3) = \frac{1}{6},$$

### **Definicja 5.8 (Odporności na zamianę w metodzie TAK/NIE)**

Metoda TAK/NIE jest odporna na zamianę wtedy i tylko wtedy, gdy:

$\forall_{A,B}$  — koalicje wygrywające  $\forall_{a \in A, b \in B}$  co najmniej jedna z koalicji  $\left[ \begin{array}{l} (A \setminus \{a\} \cup \{b\}) \\ (B \setminus \{b\} \cup \{a\}) \end{array} \right]$  jest wygrywająca.



**Stwierdzenie 5.1**

Większość ważona w metodzie TAK/NIE jest odporna na zamianę.

D: Niech  $A, B$  będą koalicjami wygrywającymi,  $a \in A, b \in B$ . Wagi głosów  $a$  i  $b$  oznaczamy jako  $W_a, W_b$ . Zakładamy, że  $W_b \geq W_a$ . Wówczas:

$$W(A \setminus \{a\} \cup \{b\}) \geq W(A).$$

□

**Zadanie 4**

Porównać  $W(5; 4, 3, 2, 1)$  z:

a)  $W(9; 8, 7, 2, 1),$

b)  $W(9; 8, 7, 3, 2).$

**Zadanie 5**

Niech  $A, B, C, D$  oznaczają wyborców w  $W(3; A, B, C, D)$ , a pary  $AB$  i  $CD$  oznaczają koalicje wygrywające.

Wykazać, że to nie jest metoda z większością ważoną.

**Zadanie 6**

Dla grupy  $B + 6r$  (burmistrz i 6 radnych) wyznaczyć indeksy Shapleya–Shubika.

(Głosowanie przechodzi, gdy głosuje 5 radnych albo burmistrz i 2 radnych.)

## 6 Metody porządkowe

### Definicja 6.1 (Słaby porządek)

Zbiór  $K$  jest słabo uporządkowany wtedy i tylko wtedy, gdy  $\exists R$  — relacja równoważności w  $K$  taka, że  $K/R$  jest uporządkowany liniowo przez relację  $\leq$ .

Dla  $a, b \in K$  definiujemy:

$$a < b \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [a]_R < [b]_R,$$

gdzie relacja jest przechodnia i słabo antysymetryczna.

### Definicja 6.2 (Metoda porządkowa (MP))

Każdy wyborca porządkuje kandydatów w sposób liniowy.

Wynik wyborów jest słabym porządkiem w zbiorze  $K$ :

- $L(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ jest porządkiem w } K\}$ ,
- $S(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ jest słabym porządkiem w } K\}$ .

Zapis formalny:

$$\Sigma = \{M : W \rightarrow L(K)\}, \quad f : \Sigma \rightarrow S(K).$$

Każda efektywna metoda z założeniem większości wyborców (MZU) jest metodą porządkową (MP).

Zapis notacyjny:

- $A \overset{w}{<} B$ ,
- $A \overset{w,M}{<} B$ ,
- $A \underset{M}{<} B$  — w modelu  $M$ , po wyborach  $B$  znajduje się nad  $A$ .

### Przykład 6.1

Dyktatura porządkowa.

Wynik wyborów jest identyczny z głosem jednego wyborcy.

### Definicja 6.3 (Porządkowa zasada Pareto)

Metoda porządkowa (MP) spełnia (porządkową) zasadę Pareto wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_M \forall_{A,B \in K} \left( \forall_w A \overset{w,M}{<} B \right) \Rightarrow A \underset{M}{<} B.$$

### Definicja 6.4 (Metoda spełniająca postulat liberalizmu Sena)

Metoda spełnia postulat liberalizmu Sena, jeśli:

$$\forall_{w \in W} \exists_{A,B \in K (A \neq B)} \left( A \overset{w,M}{<} B \Rightarrow A \underset{M}{<} B \right) \text{ oraz } \left( A \overset{w,M}{>} B \Rightarrow A \underset{M}{>} B \right).$$

### Twierdzenie 6.1 (Twierdzenie Sena)

Niech  $\#K \geq 2$  oraz  $\#W \geq 2$ . Wtedy: Nie istnieje metoda spełniająca jednocześnie:

1. zasadę Pareto,
2. postulat liberalizmu Sena.

D: Niech  $w, v$  będą wyborcami, a  $A, B, C, D$  będą elementami  $K$ . Rozważmy następujące przypadki:

1. Dla  $w, v$  i pary  $A, B$ : Jeśli  $w : A \overset{w,M}{<} B \Rightarrow A \underset{M}{<} B$  oraz  $w : B \overset{w,M}{<} A \Rightarrow B \underset{M}{<} A$ , to mamy sytuację wzajemnej sprzeczności wynikającej z narzuconych preferencji.
2. Kolejność preferencji dla  $w$ :

$$\begin{bmatrix} w : \\ C \\ B \\ A \\ D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{Reszta:} \\ A \\ C \\ B \\ D \end{bmatrix}$$

Z powyższego wynika, że nie można jednocześnie spełnić zasady Pareto i postulatu liberalizmu Sena.

$$A \underset{M}{<} B, C \underset{M}{<} A, B \underset{M}{<} C \text{ (zasada Pareto).}$$

Jednak:

$$A \underset{M}{<} B \underset{M}{<} C \underset{M}{<} A$$

jest sprzecznością.

3. Kolejność preferencji:

$$\begin{bmatrix} w : \\ D \\ A \\ B \\ C \\ \text{reszta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \text{reszta:} \\ B \\ C \\ D \\ A \\ \text{reszta} \end{bmatrix}$$

Z zasady Pareto:

$$B \underset{M}{<} A \underset{M}{<} D \underset{M}{<} C \underset{M}{<} B$$

co prowadzi do sprzeczności.

□

### **Definicja 6.5 (Filtr)**

Niech  $X$  będzie zbiorem. Podzbiór  $F \subset P(X)$ , gdzie  $F \neq \emptyset$ , nazywamy **\*\*filtrem\*\***, jeśli spełnia następujące warunki:

- 1)  $\emptyset \notin F$
- 2) Jeśli  $A, B \in F$ , to  $A \cap B \in F$
- 3) Jeśli  $A \in F$  oraz  $A \subset B \subset X$ , to  $B \in F$

### **Przykład 6.2**

1. Niech  $X$  będzie zbiorem oraz  $p \in X$ . Wówczas zbiór

$$\{A \subset X : p \in A\}$$

jest filtrem.

2. Niech  $X$  będzie przestrzenią topologiczną,  $p \in X$ , a  $U$  otoczeniem punktu  $p$ . Wówczas zbiór wszystkich otoczeń  $p$  jest filtrem.

### **Definicja 6.6 (Ultrafiltr)**

Podzbiór  $F \subset P(X)$  nazywamy **\*\*ultrafiltrem\*\***, jeśli spełnia następujące warunki:

1)  $F$  jest filtrem.

2) Dla każdego  $A \subset X$  zachodzi dokładnie jedno z dwóch:  $A \in F$  albo  $X \setminus A \in F$ .

### Przykład 6.3

1. Zobacz przykład 2.11.1. Jest on Ultrafiltrem

### Stwierdzenie 6.1

Ultrafiltr jest filtrem maksymalnym, tzn. jeśli  $F$  jest ultrafiltrem, to dla każdego filtra  $G$ , jeśli  $F \subset G$ , to  $G = F$ .

Założmy, że istnieje filtr  $G$  taki, że  $\Rightarrow \forall_G F \subset G \Rightarrow G = F$ . Wówczas istnieje  $B \in G$ , takie że  $B \notin F$ . Ponieważ  $F$  jest ultrafiltrem, mamy  $X \setminus B \in F$ . Z definicji filtra wynika, że  $B \cap (X \setminus B) = \emptyset \in G$ , co prowadzi do sprzeczności, ponieważ  $\emptyset \notin G$ .

□

Uwaga

$$\forall_{F\text{-filtr}} \exists_{G\text{-ultrafiltr}} F \subset G$$

### Twierdzenie 6.2

Niech  $X$  będzie zbiorem skończonym, a  $F$  ultrafiltrem. Wówczas  $\exists_{p \in X}$  taki, że  $F$  jest generowany przez  $\{p\}$ .

D:

Przypadek 1)  $\exists_{p \in X} \{p\} \in F \Rightarrow \forall_{B: p \in B} B \in F$  ( $\{p\} \subset B$ ) (własność 3 z definicji filtra).

Założmy sprzecznie:  $\exists_{C \in F} : p \notin C$ . Wtedy  $p \in X \setminus C \in F$ . Ale  $C \cap (X \setminus C) = \emptyset \in F$ , co prowadzi do sprzeczności, ponieważ  $\emptyset \notin F$ .

Przypadek 2)  $\forall_{p \in X} \{p\} \notin F$  Założmy, że  $X = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Wówczas:

$$\begin{bmatrix} X \setminus \{p_1\} \in F, \\ X \setminus \{p_2\} \in F, \\ \vdots \\ X \setminus \{p_n\} \in F \end{bmatrix}$$

Jednak  $X \setminus \{p_1\} \cap X \setminus \{p_2\} \cap \dots \cap X \setminus \{p_n\} = \emptyset \notin F$ , co jest sprzecznością.

□

Wprowadźmy oznaczenia:  $K, W$  - zbiory  $L(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ liniowy porządek w } K\}$   
 $S(K) = \{(K, \leq) : \leq \text{ słaby porządek w } K\}$   $\Sigma = \{M : W \rightarrow L(K)\}$   $f : \Sigma \rightarrow S(K)$

Notacja:  $a \overset{x, M}{<} b$  oznacza  $a < b$  w porządku  $M(x)$   $W \ni x \xrightarrow{M} M(x)$  - porządek w  $K$   $a \underset{M}{<} b$  oznacza  $a < b$  w słabym porządku wyznaczonym przez  $f(M)$ .

### Definicja 6.7 (Warunek (DEC))

MZU

$$\forall_M (\forall_{x \in W} a \overset{x, M}{<} b) \Rightarrow a \underset{M}{<} b \text{ (I)} \quad \forall_{M, N} \forall_{x \in W} (a \overset{x, M}{<} b \iff a \overset{x, N}{<} b)$$

$$\iff$$

$$(a \underset{M}{<} b \iff a \underset{N}{<} b)$$

Zbiór  $T \subset W$  spełnia warunek (DEC) wtedy i tylko wtedy, gdy  $T$  jest zbiorem decyzyjnym:

$$\forall_{M \in \Sigma} \forall_{p, q \in K} (\forall_{x \in T} p \overset{x, M}{<} q) \Rightarrow p \underset{M}{<} q.$$

**Twierdzenie 6.3 (Twierdzenie Arrowa w wersji ultrafiltrów)**

Założenia:  $\#W \geq 3, \#K \geq 3, f : \Sigma \rightarrow S(K)$  spełnia zasadę Pareto (P) oraz IIA (I).

Teza:  $\{T \subset W : T \text{ spełnia (DEC)}\}$  jest ultrafiltrem.

**Dowód:**

1.  $D \neq \emptyset$ :  $W \in D$  (z P).
2.  $\emptyset \notin D$ : Weźmy  $a \neq b \in K$ ,

$$\left[ \begin{array}{l} \forall_{x \in W} a \overset{x, M}{<} b \Rightarrow a \underset{M}{<} b \\ \forall_{x \in \emptyset} b \overset{x, M}{<} a \Rightarrow b \underset{M}{<} a \end{array} \right] \Rightarrow \text{sprzeczność.}$$

3.  $T_1 \in D, T_1 \subset T_2 \overset{?}{\Rightarrow} T_2 \in D$ :

$$a, b \in K, M \in \Sigma, \forall_{x \in T_2} a \overset{x, M}{<} b \Rightarrow \forall_{x \in T_1} a \overset{x, M}{<} b \overset{T_1 \in D}{\Rightarrow} a \underset{M}{<} b.$$

4.  $T_1, T_2 \in D \overset{?}{\Rightarrow} T_1 \cap T_2 \in D$ : Rozważmy  $a, b \in K, M \in \Sigma$ . Czy

$$\forall_{x \in T_1 \cap T_2} a \overset{x, M}{<} b \Rightarrow a \underset{M}{<} b?$$

Weźmy  $c \in K, c \neq a, b$ . Czy istnieje  $N \in \Sigma$  (model), w którym

$$\forall_{x \in T_1} a \overset{x, N}{<} c, \quad \forall_{x \in T_2} c \overset{x, N}{<} b, \quad \forall_{x \in W} a \overset{x, N}{<} b \Rightarrow a \underset{N}{<} b?$$

Jeśli tak, to:

- Pierwsza i druga część implikują  $a \underset{N}{<} b$ .
- Na mocy (I):  $a \underset{M}{<} b$ .

$$M - \text{dany,} \quad R := \{x \in W : a \overset{x, M}{<} b\}.$$

Wtedy:

$x \in R$	$x \notin R$	$x \notin T_1$
$a \overset{x, M}{<} c \overset{x, M}{<} b$	$b \overset{x, M}{<} a \overset{x, M}{<} c$	$c \overset{x, M}{<} b \overset{x, M}{<} a$

5. Czy  $\forall_{T \subset W} (T \in D \text{ lub } W \setminus T \in D)$ ? Dowód podzielimy na 4 lematy.

**Lemat 6.1**

$\forall_{T \subset W}, \forall_{a, b \in K, a \neq b}$  :

$$\left[ \begin{array}{l} (\exists_{N \in \Sigma} : T = \{x \in W : a \overset{x, N}{<} b\} \text{ i } a \underset{N}{<} b) \\ \forall_{M \in \Sigma} : T = \{x \in W : a \overset{x, M}{<} b\} \Rightarrow a \underset{M}{<} b \end{array} \right].$$

Podane warunki są równoważne.

**Dowód:**

- $(\Rightarrow)$ :  $M : x \in T \Leftrightarrow a \overset{x,N}{<} b$  i  $a \overset{(I)}{\underset{N}{<}} b \Rightarrow a \overset{(I)}{\underset{M}{<}} b$ .

- $(\Leftarrow)$ : Weźmy  $N$  spełniający założenia. Wtedy:

$$a \overset{x,N}{<} b \Leftrightarrow x \in T \Rightarrow a \overset{(I)}{\underset{N}{<}} b.$$

**Lemat 6.2**

$\forall T \subset W, \forall a,b,c \in K, a \neq b \neq c :$

1.  $(a \underset{T}{*} b \Rightarrow c \underset{T}{*} b),$

2.  $(a \underset{T}{*} b \Rightarrow a \underset{T}{*} c).$

**Dowód:**

Ad 1. Rozważmy  $M : x \in T \Leftrightarrow c \overset{x,M}{<} b$ . Czy  $c \overset{(I)}{\underset{M}{<}} b$ ? Rozważmy model  $N$ , gdzie:

$$c \overset{x,N}{<} a \overset{x,N}{<} b \text{ (gdy } c \overset{x,M}{<} b) \text{ i } a \overset{x,N}{<} b \Rightarrow c \overset{(I)}{\underset{M}{<}} b.$$

Ad 2. Analogicznie dla  $M : x \in T \Leftrightarrow a \overset{x,M}{<} c$ .

**Lemat 6.3**

$Z: T \in W \exists a,b,a \neq b a \underset{T}{*} b \Leftrightarrow \forall c,d,c \neq d c \underset{T}{*} d$

**Dowód:** (wynika bezpośrednio z wcześniejszego lematu, ale formalny dowód)

$\Leftarrow$  oczywiste

$\Rightarrow a \underset{T}{*} b, c \neq d$  (1)  $c = a, d = b$  OK (2)  $c \neq a, d = b$  wynika z (2.1) (3)  $c = a, d \neq b$  wynika z

(2.2) (4)  $c \neq a, d \neq b$  (4.1)  $a \underset{T}{*} b \overset{(2.1)}{\Rightarrow} c \underset{T}{*} b \overset{(2.2)}{\Rightarrow} c \underset{T}{*} d$  (jeśli  $c \neq d$ ) (4.2)  $b = c a \underset{T}{*} b \overset{(2.2)}{\Rightarrow} a \underset{T}{*} d \Rightarrow c \underset{T}{*} d$

(jeśli  $a \neq d$ ) (4.3)  $a = d, b = c, \#K \geq 3 e \neq a, b, c, d a \underset{T}{*} b \overset{(2.2)}{\Rightarrow} a \underset{T}{*} e \overset{(2.2)}{\Rightarrow} c \underset{T}{*} d$

**Lemat 6.4**

$S \subset W, S \neq \emptyset, \exists a \neq b a \underset{S}{*} b \Rightarrow S \in D$

**Dowód:**  $M \in \Sigma, p, q \in K, \forall x \in S p \overset{x,M}{<} q \overset{?}{\Rightarrow} p \overset{(I)}{\underset{M}{<}} q$

$T := \{x \in W : p \overset{x,M}{<} q\}, S \subset T$

1.  $T = S$  2.  $T = W$  3.  $W = S \cup (T \setminus S) \cup (W \setminus T)$ , przy czym  $(T \setminus S), (W \setminus T) \neq \emptyset$

(1)  $a \underset{S}{*} b$  (lemat 3)  $\Rightarrow p \underset{S}{*} q \Rightarrow p \overset{(I)}{\underset{M}{<}} q$

(2)  $(P) \Rightarrow p \overset{(I)}{\underset{M}{<}} q$

(3)  $c \in K, c \neq p, q$  Definiujemy  $N$ :

$$x \in S \Rightarrow p \overset{x,N}{<} c \overset{x,N}{<} q$$

$$x \in (T \setminus S) \Rightarrow c \overset{x,N}{<} p \overset{x,N}{<} q$$

$$x \in (W \setminus T) \Rightarrow c \overset{x,N}{<} q \overset{x,N}{<} p \text{ (reszta dowolnie)}$$

$$\forall_{x \in W} c \stackrel{x,N}{<} q \stackrel{(P)}{\Rightarrow} c \stackrel{x,N}{<} q \quad x \in S \Leftrightarrow p \stackrel{x,N}{<} c$$

$$\text{Założenie: } a \underset{S}{*} b \stackrel{L,3}{\Rightarrow} p \underset{S}{*} c \stackrel{def???}{\Rightarrow} p \underset{N}{<} c \Rightarrow p \underset{N}{<} q$$

$$\text{Wniosek: } T = \{x \in W : p \stackrel{x,N}{<} q\} \text{ i } p \underset{N}{<} q \Rightarrow p \underset{T}{**} q \Rightarrow p \underset{T}{*} q \Rightarrow p \underset{M}{<} q$$

**Wracając do Twierdzenia Arrowa:**

**Dowód końcowy:**

$T \subset W$  Czy  $T \in D$  lub  $W \setminus T \in D$ ?

Weźmy  $a, b, c \in K$  (różne),  $M \in \Sigma$

$x \in T : c \stackrel{x,M}{<} b \stackrel{x,M}{<} a \quad x \in W \setminus T : a \stackrel{x,M}{<} c \stackrel{x,M}{<} b$  (reszta dowolnie)

$$\forall_{x \in W} c \stackrel{x,M}{<} b \stackrel{?}{\Rightarrow} c \underset{M}{<} b \quad (\Delta)$$

Są 3 możliwości:

1.  $b \underset{M}{<} a$  2.  $a \underset{M}{<} b$  3.  $a, b$  w tej samej klasie równoważności

$$(1) \Rightarrow b \underset{M}{<} a \Leftrightarrow x \in T, b \underset{T}{**} a \stackrel{L1}{\Rightarrow} b \underset{T}{*} a \stackrel{L4}{\Rightarrow} T \in D$$

$$(2) \Rightarrow a \underset{x,M}{<} b \Leftrightarrow x \in W \setminus T \Rightarrow a \underset{W \setminus T}{**} b \stackrel{L1}{\Rightarrow} a \underset{T}{*} b \stackrel{L4}{\Rightarrow} W \setminus T \in D$$

$$(3) \stackrel{(\Delta)}{\Rightarrow} c \underset{M}{<} a \text{ wtedy mamy: } c \stackrel{x,M}{<} a \Leftrightarrow x \in T \Rightarrow c \underset{T}{**} a \stackrel{L1}{\Rightarrow} c \underset{T}{*} a \stackrel{L4}{\Rightarrow} T \in D$$

□

### **Wniosek 6.3.1**

*Założenia:  $\#W \geq 3, \#K \geq 2, W$  skończony. Jeśli  $f : \Sigma \rightarrow S(K)$  spełnia (P) i (I), to  $\exists_{w \in W} \forall_{M \in \Sigma} M(w) = f(M)$ .*

**Dowód:** Jeśli  $W$  jest skończony, to  $\exists_w \{w\}$  spełnia warunek (DEC). Wówczas:

$$\forall_{a,b \in K} \forall_{M \in \Sigma} (a \stackrel{w,M}{<} b \Rightarrow a \underset{M}{<} b).$$

□

### **Wniosek 6.3.2 (Twierdzenie Arrowa, 1950)**

*Założenia:  $\#W \geq 3, \#K \geq 3, W$  skończony. Jeśli metoda porządkowa (MP) spełnia zasadę Pareto oraz IIA, to MP jest dyktaturą porządkową.*

**Dowód:** Z poprzedniego wniosku wynika, że dla  $w$ , dla którego  $\{w\}$  jest zbiorem decyzyjnym,  $w$  jest dyktatorem.

#### **Zadanie 7**

Sprawdzić, czy

$$F := \{B : B \supset A\}$$

jest filtrem (lub ultrafiltrem).

#### **Zadanie 8**

Sprawdzić, czy następujące zbiory są filtrami:

$$a) F_1 = \{D : \exists_{E \in S} E \subset D\}$$

$$b) F_2 = \{D : \exists_{E \in S} D \subset E\}$$

### **Definicja 6.8 (Liberalizm Senna)**

$$\forall_{w \in W} \exists_{a,b \in K; a \neq b} \forall_M w \text{ decyduje o } (a, b)$$

**Twierdzenie 6.4**

Dla  $K$  i  $W$  istnieje metoda spełniająca postulat liberalizmu Senna wtedy i tylko wtedy, gdy  $\#W < \#K$ .

Część ( $\Leftarrow$ ): Niech  $K = \{k_1, \dots, k_n\}$  oraz  $W = \{w_1, \dots, w_s\}$ , gdzie  $s \leq n - 1$ .

Przypisujemy:

$$w_1 : k_1, k_n \quad w_2 : k_2, k_n \quad \dots \quad w_s : k_s, k_n.$$

Metoda:  $k_n$  pozostaje ostatnim kandydatem, a  $k_1, \dots, k_s$  w stosunku do  $k_n$  są ustalane przez odpowiednie  $w_1, \dots, w_s$ . Pozostałe kandydaty ustawiamy numerami rosnąco:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ k_n \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Część ( $\Rightarrow$ ):

Wprowadźmy oznaczenia:

$\cdot$  oznacza  $k_i$ ,  $|$  oznacza  $w_i$ , który łączy tych kandydatów, o których decyduje.

Założmy, że  $\#''|'' > \#''\cdot''$ .

1. Rysujemy odpowiedni graf.
2. Odrzucamy kropki bez kreski oraz te z jedną kreską. Pozostaje  $n$  kropek i  $l$  kresek, przy czym  $l \geq n$ .
3. Wybieramy  $\cdot, |, \cdot, |, \cdot, |, \dots$  aż powstanie cykl.

Wówczas:

$$\begin{bmatrix} w_1 \text{ decyduje o } k_1, k_2 \\ w_2 \text{ decyduje o } k_2, k_3 \\ \vdots \\ w_s \text{ decyduje o } k_s, k_1 \end{bmatrix}$$

co prowadzi do:

$$\begin{bmatrix} k_1 \overset{w_1}{<} k_2 \\ k_2 \overset{w_2}{<} k_3 \\ \vdots \\ k_s \overset{w_s}{<} k_1 \end{bmatrix}.$$

□



## 7 MR - Metoda rozdziału

### Definicja 7.1

Wprowadzamy oznaczenia:

$S$  - liczba akcjonariuszy (stanów)

$m$  - liczba akcji (foteli)

$P_1, \dots, P_s$  - wkłady akcjonariuszy (populacje)

$a_1, \dots, a_s$  - liczba akcji dla akcjonariuszy

$$(S, M, [p_1, \dots, p_s]) \mapsto (a_1, \dots, a_s)$$

gdzie spełnione jest  $p = p_1 + \dots + p_s$ ,  $a_1 + \dots + a_s = m$

$\frac{p_i}{p}$  - udział akcjonariusza  $i$

$m \cdot \frac{p_i}{p}$  (zazwyczaj  $\notin \mathbb{Z}$ ) - to, co powinien dostać

$W = \frac{p}{m}$  - wartość akcji (jednej)

$q_i := m \cdot \frac{p_i}{p} = \frac{p_i}{\frac{p}{m}} = \frac{p_i}{W}$  - quota

$\lfloor q_i \rfloor = \lfloor \frac{m \cdot p_i}{p} \rfloor$  - dolna quota

$\lceil q_i \rceil = \lceil \frac{m \cdot p_i}{p} \rceil$  - górna quota

### Definicja 7.2 (Warunki sensowności metody rozdziału)

1. (Warunek quoty)  $\lfloor q_i \rfloor \leq a_i \leq \lceil q_i \rceil$  (uwzględniając  $q_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow g_i = a_i$ )
2. (Warunek monotoniczności)  $p_i > p_j \Rightarrow a_i \geq a_j$  (analogicznie w drugą stronę)
3. (Warunek populacji) Dla  $S, m$  danych:

$$p_1, \dots, p_s \mapsto a_1, \dots, a_s$$

jeśli nastąpiła zmiana:

$$\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_s \longrightarrow \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s,$$

to:

$$\exists_{i,j} \bar{p}_i > p_i, \bar{a}_i < a_i \quad \text{oraz} \quad \bar{p}_j < p_j, \bar{a}_j > a_j$$

4. (Warunek monotoniczności akcji) Dla  $p_1, \dots, p_n$  stałych, jeśli  $\bar{m} > m$ , to  $\forall_i \bar{a}_i \geq a_i$ .  
Nie mogą zajść wszystkie te warunki na raz.

### Przykład 7.1

#### 1) Metoda reszt (metoda Hamiltona)

$$a_i = \lfloor q_i \rfloor + \epsilon_i, \quad \text{gdzie } \epsilon_i = 0 \text{ lub } 1,$$

bierzemy największe reszty  $q_i - \lfloor q_i \rfloor$  aż do "wyczerpania"  $m$ .

**Przykład:**  $S = 3$ ,  $m = 10$ ,  $W = \frac{1000}{10} = 100$

	$p_i$	$q_i$	$\lfloor q_i \rfloor$	$r_i$	Wynik
1	264	2,64	2	<b>0,64</b>	3
2	361	3,61	3	0,61	3
3	375	3,75	3	<b>0,75</b>	4
	$\Sigma = 1000$		8		10

### **Paradoks Alabamy**

Dla  $S = 3$ ,  $m = 10$ ,  $W = 100$ , po zmianie liczby akcji na  $m = 11$ ,  $W = 90,9$ , wyniki się zmieniają:

$p_i$	$q_i$	$\lfloor q_i \rfloor$	Wynik	$\Rightarrow$	$p_i$	$q_i$	$\lfloor q_i \rfloor$	Wynik
145	1,45	1	2		145	1,595	1	1
340	3,40	3	3		340	3,740	3	4
515	5,15	5	5		515	5,665	5	6
$\Sigma = 1000$		9	10		$\Sigma = 1000$		9	11

### **Paradoks Oklahomy**

Po zmianie liczby akcjonariuszy i akcji, np.  $S = 4$ ,  $m = 13$ ,  $W = 76,9$ , także mogą wystąpić sprzeczne wyniki.

$p_i$	$q_i$	$\lfloor q_i \rfloor$	Wynik	$\Rightarrow$	$p_i$	$q_i$	$\lfloor q_i \rfloor$	Wynik
7264183	37606	37,606	38		7264183	37606	37,606	38
694466	3595	3,595	3		694466	3595	3,595	3
—	—	—	—		—	—	—	—

## 2) **Metoda Jeffersona**

Bierzemy liczbę  $v$  (umowną wartość akcji), obliczamy:

$$\bar{q}_i = \frac{p_i}{v},$$

i dobieramy  $v$ , by suma dolnych kwot  $\lfloor \bar{q}_i \rfloor$  wynosiła  $m$ .

Bierzemy liczbę  $v$  - umowna wartość akcji (w-prawdziwa)

$\frac{p_i}{v}$  - kwoty umowne

Dobieramy tak, by suma dolnych kwot umownych wynosiła  $m$ .

Niech  $S = 3$ ,  $m = 10$ ,  $W = 100$ ,  $v = 90$ .

$p_i$	$q_i$	$\bar{q}_i$	$\lfloor \bar{q}_i \rfloor$
264	2,64	1	2
361	3,61	3	3
375	3,75	5	5
$\Sigma = 1000$		9	10

Jak dobrać  $v$ ?

- za mało akcji  $\rightarrow$  zmniejszamy  $v$ ,
- za dużo akcji  $\rightarrow$  zwiększamy  $v$ .

## 3) **Przybliżanie do wartościami umownymi do górnych quot (Metoda Adamsa)**

Niech  $S = 2$ ,  $m = 10$ ,  $W = 100$ ,  $v = 115$ .

	$p_i$	$q_i$		$\bar{q}_i$	Wynik
A	120	1,8	2	1,04	2
B	880	8,8	9	7,65	8
	$\Sigma = 1000$		11		10

4) **Zaokrąglenie do bliższej dolnej/górnej (Metoda Webstera)**

Niech  $S = 3$ ,  $m = 5$ .

	$p_i$	$q_i$	Wynik
A	480	2,66	3
B	240	1,33	1
C	100	0,55	1
	$\Sigma = 820$		5

$$\bar{q}_i > \frac{\lfloor \bar{q}_i \rfloor + \lceil \bar{q}_i \rceil}{2} \nearrow \lceil \bar{q}_i \rceil$$

$$\bar{q}_i < \frac{\lfloor \bar{q}_i \rfloor + \lceil \bar{q}_i \rceil}{2} \searrow \lfloor \bar{q}_i \rfloor$$

5) **Metoda Hilla**

Jak w metodzie Webstera, ale

$$\bar{q}_i > \sqrt{\lfloor \bar{q}_i \rfloor \cdot \lceil \bar{q}_i \rceil} \nearrow \lceil \bar{q}_i \rceil$$

$$\bar{q}_i < \sqrt{\lfloor \bar{q}_i \rfloor \cdot \lceil \bar{q}_i \rceil} \searrow \lfloor \bar{q}_i \rfloor$$

6) **Metoda Deana - ze średnią harmoniczną (to samo, ale ze średnią harmoniczną)**

**Twierdzenie 7.1**

Metoda Jeffersona  $\Leftrightarrow$  wyznaczaniu liczb akcji za pomocą ilorazów.

**Dowód:** Niech  $m$  będzie liczbą akcji. Rozpatrzmy ilorazy  $p_i$  przez  $1, 2, 3, 4, \dots$

$\alpha :$	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$
$\beta :$	$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$
$\gamma :$	$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$

Niech:

- $t$  - największy z wyników nie dający akcji,
- $T$  - najmniejszy z wyników dający akcje.

□

**Stwierdzenie 7.1**

Dla każdego  $v \in (t, T)$  Metoda Jeffersona z wartością umowną  $v$  daje w sumie  $m$  akcji, gdzie  $t < v < T$ .

**Dowód:** Niech:

- $p_i$ : układ  $i$  daje  $a_i$  akcji,
- $v$  - umowna wartość akcji,
- $q = \frac{p_i}{v}$  - umowna quota.

Metoda Jeffersona jest równoważna Metodzie d'Hondta. Dzielimy wtedy przez kolejne dodatnie liczby całkowite, a największe liczby wyznaczają przypisywane akcje.

Rozważmy:

$$\frac{p_i}{1}, \frac{p_i}{2}, \dots, \frac{p_i}{a_i}, \frac{p_i}{a_i + 1}$$

gdzie:

- $\frac{p_i}{a_i}$  - daje TAK,
- $\frac{p_i}{a_i+1}$  - daje NIE,
- $\frac{p_i}{a_i} \geq T$ ,
- $\frac{p_i}{a_i+1} \leq t$ .

Zachodzi:

$$\frac{p_i}{a_i+1} \leq t < v < T \leq \frac{p_i}{a_i}$$

czyli:

$$\frac{p_i}{a_i+1} < v < \frac{p_i}{a_i}$$

co można przekształcić do:

$$\frac{1}{a_i} < \frac{v}{p_i} < \frac{1}{a_i}$$

oraz:

$$a_i < \frac{p_i}{v} < 1 + a_i$$

Stąd:

$$a_i = \left\lfloor \frac{p_i}{v} \right\rfloor$$

co daje odpowiedni efekt dla danego  $v$ .

□

### ***Twierdzenie 7.2 (Balińskiego-Younga)***

*Dla  $S \geq 4$  i  $m \geq 7$  nie istnieje metoda spełniająca jednocześnie warunki:*

- *quoty,*
- *monotoniczności,*
- *populacji.*

**Dowód:** Niech:

- $S$  - liczba akcjonariuszy,
- $m$  - liczba akcji,
- $p_1, \dots, p_S$  - wkłady ( $p = p_1 + \dots + p_S$ ),
- $a_1, \dots, a_S$  - akcje.

Zakładamy:

$$S \geq 4, \quad m \geq 7, \quad \epsilon < \frac{1}{2} \ (\epsilon > 0), \quad b, c > 0$$

Model M zakłada, że spełnione są warunki quoty i monotoniczności.

	Wkład	Quota	akcji
$p_1$	$b(5 + \epsilon)$	$5 + \epsilon$	5, 6
$p_2$	$b \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0, 1
$p_3$	$b \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{\epsilon}{3}\right)$	$\frac{2}{3} - \frac{\epsilon}{3}$	0, 1
$p_4$	$b \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2\epsilon}{3}\right)$	$\frac{2}{3} - \frac{2\epsilon}{3}$	0, 1
$p_5$			
$\vdots$			
$p_S$			

$b$  dobieramy w taki sposób, aby  $p_1, \dots, p_S$  były liczbami całkowitymi. Oraz aby  $p_5 + \dots + p_S$  dawały  $m - 7$  akcji.

Zachodzi również:

$$p_1 > p_2 > p_3 > p_4$$

oraz:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \Rightarrow a_4 = 0, \quad \text{bo} \quad a_1 + a_2 + a_3 = 7$$

Tworzymy podobny model  $N$

	Wkład	Quota	akcji
$\bar{p}_1$	$c(4 - \epsilon)$	$4 - \epsilon$	3, 4
$\bar{p}_2$	$c\left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right)$	$2 - \frac{\epsilon}{2}$	1, 2
$\bar{p}_3$	$c\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}$	0, 1
$\bar{p}_4$	$c\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)$	$\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}$	0, 1
$\bar{p}_5$			
$\vdots$			
$\bar{p}_S$			

Mamy zatem:

$$p_i, \bar{p}_i \in \mathbf{Z}$$

Zachodzi:

$$\bar{p}_1 > \bar{p}_2 > \bar{p}_3 > \bar{p}_4$$

oraz:

$$\bar{a}_1 \geq \bar{a}_2 \geq \bar{a}_3 \geq \bar{a}_4, \quad \Sigma = 7, \quad \bar{a}_4 = 1$$

Jeśli można tak dobrać  $b, c$  to otrzymujemy, że:

$$p_1 < \bar{p}_1, \quad p_4 > \bar{p}_4$$

to:

$$b(5 + \epsilon) < c(4 - \epsilon) \quad b\left(\frac{2}{3} - \frac{2\epsilon}{3}\right) > c\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)$$

co prowadzi do (przy  $\epsilon \rightarrow 0$ )

$$\frac{c}{b} \geq \frac{5}{4} \quad \text{i} \quad \frac{c}{b} \leq \frac{4}{3}$$

co daje sprzeczność z warunkiem populacji.

Np.:

$$c = 6 \cdot 13 \cdot 600, \quad b = 6 \cdot 10 \cdot 600, \quad z = \frac{1}{600}, \quad \frac{c}{b} = \frac{13}{10}, \quad 1,25 < 1,3 < 1,33$$

Przykładowe wartości:

$$p_1 = 6 \cdot 10 \cdot 600 \cdot \frac{3001}{600} = 6 \cdot 30010 < 6 \cdot 13 \cdot 600 \cdot \frac{2399}{600} = 6 \cdot 31187 = \bar{p}_1$$

$$p_4 = 6 \cdot 10 \cdot 600 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{599}{600} = 40 \cdot 5599 = 23960 > 6 \cdot 13 \cdot 600 \cdot \frac{301}{600} = 23478 = \bar{p}_4$$

$$p_4 > \bar{p}_4$$

□

## 7.1 Jak wyglądało głosowanie w USA?

Rok	Stany	Miejsca
1789	13	66
1791	15	105 <i>Metoda Jeffersona</i>
1840		223 <i>Metoda Webstera</i>
1850		234 <i>Metoda Hamiltona</i>
1880		325 <i>Paradox Alabamy*</i>

### 1880 - Paradox Alabamy:

- Przedział miejsc: 275-350
- Przydział dla Alabamy:

299	8 miejsc
300	7 miejsc

**1901:** 386 miejsc, *Metoda Hamiltona-Webstera*

	350-356	357	358-382	383-385	386	387-388	389-390	399-400
Main	3	3	3	4	3	4	3	4
Colorado	3	2	3	3	3	3	3	3

**1907:** 391 miejsc, *Paradox Oklahomy* (+5 miejsc dla 357), *Metoda Webstera*

**1910:** 433 miejsca, *Metoda Hilla*

**1910-1920:** Dyskusja: *Metoda Webstera* czy *Metoda Hilla*?

W 1930 roku uznano, że *Metoda Webstera-Hilla* daje te same rezultaty.

**1940:** Porównanie metod dla dwóch stanów:

Stan	Metoda Hilla	Metoda Webstera
Arkansas	7	6
Michigan	17	18

Od 1940 roku obowiązuje *Metoda Hilla*.

### **Definicja 7.3 (Metoda dzielników)**

*Metoda rozdziału nazywana jest metodą dzielników, jeśli istnieje funkcja  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$ , taka że:*

a)  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = x$

b) *Funkcja jest rosnąca:*  $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Przydziały są obliczane jako  $a_i = f\left(\frac{p_i}{v}\right)$ , gdzie  $v$  dobierane jest tak, aby  $\sum_{i=1}^s a_i = m$ .  
Poszczególne metody:

- **Metoda Jeffersona:**  $f(x) = \lfloor x \rfloor$
- **Metoda Adamsa:**  $f(x) = \lceil x \rceil$

- **Metoda Webstera:**

$$f(x) = \begin{cases} k & x \in [k, \frac{2k+1}{2}) \\ k+1 & x \in [\frac{2k+1}{2}, k+1) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- **Metoda Hilla:**

$$f(x) = \begin{cases} k & x \in [k, \sqrt{k(k+1)}) \\ k+1 & x \in [\sqrt{k(k+1)}, k+1) \end{cases}$$

- **Metoda Deana:**

$$f(x) = \begin{cases} k & x \in [k, \frac{2k(k+1)}{2k+1}) \\ k+1 & x \in [\frac{2k(k+1)}{2k+1}, k+1) \end{cases}$$

**Twierdzenie 7.3**

Metoda dzielników spełnia:

- a) warunek populacji,
- b) warunek monotoniczności.

**Dowód:**

a) **Dowód nie wprost:**

Założmy, że  $\exists \bar{a}_i < a_i$  i  $\bar{a}_j > a_j$  (oznaczymy to jako  $(*)$ ), oraz że:

$$\bar{p}_i > p_i, \quad \bar{p}_j < p_j$$

Rozważmy:

- Dla  $a_i, a_j$ : parametr  $v$ ,
- Dla  $\bar{a}_i, \bar{a}_j$ : parametr  $u$ .

Przydziały są obliczane jako:

$$\bar{a}_i = f\left(\frac{\bar{p}_i}{u}\right), \quad \bar{a}_j = f\left(\frac{\bar{p}_j}{u}\right),$$

oraz

$$a_i = f\left(\frac{p_i}{v}\right), \quad a_j = f\left(\frac{p_j}{v}\right).$$

Funkcja  $f$  jest rosnąca, co oznacza, że:

$$f(x) > f(y) \implies x > y.$$

Z założenia  $(*)$  wynika:

$$f\left(\frac{\bar{p}_i}{u}\right) < f\left(\frac{p_i}{v}\right), \quad f\left(\frac{\bar{p}_j}{u}\right) > f\left(\frac{p_j}{v}\right).$$

Z rosnącego charakteru  $f$  mamy:

$$\frac{\bar{p}_i}{u} < \frac{p_i}{v}, \quad \frac{\bar{p}_j}{u} > \frac{p_j}{v}.$$

Przekształcając:

$$\bar{p}_i < \frac{u}{v} \cdot p_i, \quad \bar{p}_j > \frac{u}{v} \cdot p_j.$$

Otrzymujemy z pierwszej nierówności:  $\frac{u}{v} > 1$ , a z drugiej nierówności:  $\frac{u}{v} < 1$ , co prowadzi do sprzeczności.

b) Jeśli  $p_i < p_j$ , to:

$$\frac{p_i}{v} > \frac{p_j}{v} \implies f\left(\frac{p_i}{v}\right) > f\left(\frac{p_j}{v}\right).$$

Założenie metody dzielników oraz rosnący charakter  $f$  prowadzą do tezy.

□

### **Wniosek 7.3.1**

*Metoda dzielników nie spełnia warunku kwoty.*

**Dowód:** Twierdzenie Belińskiego-Younga.

□

### **Twierdzenie 7.4**

*Metoda Hamiltona spełnia:*

a) *warunek kwoty,*

b) *warunek monotoniczności.*

**Dowód:**

a) Rozważmy:

$$q_i = \lfloor q_i \rfloor, \quad q_i - \lfloor q_i \rfloor = 0.$$

W takim przypadku nic nie dodajemy lub:

$$q_i < \lfloor q_i \rfloor, \quad a_i = \begin{cases} \lfloor q_i \rfloor, \\ \lceil q_i \rceil. \end{cases}$$

b) Jeśli  $p_i > p_j$ , to:

$$m \cdot \frac{p_i}{p} > m \cdot \frac{p_j}{p} \implies q_i > q_j.$$

Rozważmy dwa przypadki:

a)  $\lfloor q_i \rfloor > \lfloor q_j \rfloor$  lub  $\lfloor q_j \rfloor + 1 \geq a_j$ ,

b)  $\lfloor q_i \rfloor = \lfloor q_j \rfloor$ , ale:

$$q_i - \lfloor q_i \rfloor > q_j - \lfloor q_j \rfloor \implies a_i \geq a_j.$$

□

### **Wniosek 7.4.1**

*Metoda Hamiltona nie spełnia warunku populacji.*

**Dowód:** Twierdzenie Belińskiego-Younga.

□

### **Twierdzenie 7.5**

*Metoda Webstera dla  $S = 2, m = 2$  spełnia warunki:*

a) *kwoty,*

b) *monotoniczności,*

c) *populacji.*



**Dowód:**

a) Dla  $S = 2$  mamy:

$$\begin{aligned}q_B &= k + a, \\q_C &= l + b,\end{aligned}$$

gdzie  $k, l \in \mathbb{Z}$  oraz  $a, b \in [0, 1)$ .  
Rozważmy przypadki:

a) Jeśli  $a = b = 0$ , to:

$$B \mapsto k, \quad C \mapsto l.$$

b) Jeśli  $k + l + 1 = m$  oraz  $a + b = 1$ , to:

$$\begin{aligned}B &\mapsto k \text{ lub } k + 1, \\C &\mapsto l \text{ lub } l + 1.\end{aligned}$$

b) Zastosowanie metody dzielników.

c) Rozważanie zgodności z warunkiem populacji.

□

**Zadanie 9**

*Metoda Balińskiego-Yonga - metoda wartościująca w sposób rekurencyjny*

*Mamy dane wkłady akcjonariuszy  $p_1, \dots, p_s$*

- 1. Zakładamy warunek początkowy  $m = 0, a_1 = a_2 = \dots = a_s = 0$*
- 2. Mam  $m$  przyznanych akcji dla  $a_1, \dots, a_s$ . Musimy przyznać  $(m + 1)$  akcję.*
- 3. Liczymy  $\frac{p_i}{1+a_i}$  - wartość potencjalną dla  $i$ -tego akcjonariusza. ( $i = 1, \dots, s$ )*
- 4. Kto ma największą wartość potencjalną jemu dajemy akcję z wyłączeniem tych, u których przypadkiem byłaby przekroczona górna quota, czyli:*

$$1 + a_i > \lceil q_i \rceil = \left\lceil \frac{(m + 1)p_i}{p} \right\rceil$$

*Wyznacz jak należało by rozdzielić pierwsze 8 (12) akcji.*

Czyli uzupełnij tabelkę dla wkładów akcjonariuszy 7, 22, 71:

	$w$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\frac{p_1}{1+a_1}$	$\frac{p_2}{1+a_2}$	$\frac{p_3}{1+a_3}$
1	100	0,07	0,22	0,71	0	0	1	7	22	<b>71</b>
2	50	0,14	0,44	1,42	0	0	2	7	22	<b>35,5</b>
3										

### **Zadanie 10**

Wykazać, że nie może zaistnieć sytuacja, w której wszyscy akcjonariusze przekroczą górną quotę.

## **8 Metoda wartościująca**

### **Definicja 8.1 (Metoda wartościująca – XXI wiek)**

Niech  $S$  będzie zbiorem stopni (ocen wartości). Metoda  $M : W \rightarrow \{f : K \rightarrow S\}$  polega na tym, że wyborca każdemu kandydatowi przypisuje ocenę.

Przykłady metod:

- Przyznawanie punktów metodą Brody.
- Metoda  $n$ -głosów, np.  $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ .
- Metoda wartościująca: wynik to słaby porządek w  $K$  (w tym wyłonienie zwycięzcy).

### **Przykład 8.1**

#### **a) Metoda mediany**

Dla kandydata  $A$ , gdzie  $\#W = n$ , oceny kandydata to  $s_1, \dots, s_n$ , uporządkowane w rankingu od najlepszej.

Wartość mediany (multivalue) definiujemy jako:

$$m(A) = \begin{cases} S_{\lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor}, & \text{gdy } n \text{ nieparzyste,} \\ \text{niższa z dwóch środkowych,} & \text{gdy } n \text{ parzyste.} \end{cases}$$

Przykład dla  $n$  nieparzystego:

- Oceny:  $S$  – świetny,  $D$  – dobry,  $P$  – przeciętny,  $Z$  – zły,  $F$  – fatalny.
- Dla 5 wyborców:

$A : S, D, \mathbf{D}, F, F,$

$B : S, S, \mathbf{D}, Z, F,$

$C : D, D, \mathbf{Z}, Z, Z.$

Przykład dla  $n$  parzystego:

- Oceny:  $W$  – wyborny,  $S$  – smaczny,  $Z$  – zjadliwy,  $N$  – niejadalny.
- Dla 4 wyborców:

$A : W, W, \mathbf{Z}, Z,$

$B : W, S, \mathbf{Z}, N,$

$C : Z, N, \mathbf{N}, N.$

Metoda znajduje zastosowanie w jury konkursów, gdzie dąży się do zadowolenia większości.

#### **b) Metoda symetrycznej mediany**

Analogiczna do metody mediany, jednak w przypadku  $n$  parzystego wybieramy lepszą z dwóch środkowych ocen:

$$m^*(A) = S_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}.$$

c) **Metoda Balińskiego-Larakiiego (2011)**

Procedura:

- a) Wyznaczamy  $m(A)$  i  $m(B)$ .
- b) Jeśli  $m(A)$  jest lepsze od  $m(B)$ , to  $A$  jest lepszy od  $B$ . Notacja:  $m(A) < m(B) \Rightarrow A \underset{M}{<} B$
- c) Jeśli  $m(A) = m(B)$ , usuwamy tę ocenę z rankingu i powtarzamy procedurę z  $n-1$  ocenami.

Przykład:

$$\begin{aligned} A &: S, D, \mathbf{D}, F, F, \\ B &: S, S, \mathbf{D}, Z, F, \\ C &: D, D, \mathbf{Z}, Z, Z \quad (\text{odpada}). \end{aligned}$$

Po kolejnych iteracjach wyłaniamy zwycięzcę.

**Wniosek:** Remis jest możliwy tylko w przypadku tych samych ocen.

**Definicja 8.2 (Metoda rankingowo niezależna od ubocznych opcji)**

Metoda wartościująca jest rankingowo niezależna od ubocznych opcji wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{M,N} \forall_{A,B} \left[ \begin{array}{c} M, N - \text{modele} \\ K_M = K_N \cup \{C\}, C \notin K_M \\ \forall v \in W \text{ oceny } v \text{ w } M = \text{oceny } v \text{ w } N \end{array} \right] \Rightarrow (A \underset{M}{<} B \Leftrightarrow A \underset{N}{<} B).$$

**Twierdzenie 8.1**

Metoda mediany i metoda Balińskiego-Larakiiego ( $B=L$ ) są rankingowo niezależne od ubocznych opcji.

**Dowód:** Dodanie kandydata nie zmienia ocen.

□

**Lemat 8.1**

Metoda punktów Bordy nie jest rankingowo niezależna od ubocznych opcji.

**Model M:**

3	2
A	B
B	A

$$\left[ \begin{array}{l} A - 3 \text{ punkty} \\ B - 2 \text{ punkty} \end{array} \right] \quad A \underset{M}{>} B$$

**Model N:**

3	2
C	B
A	C
B	A

$$\left[ \begin{array}{l} A - 3 \text{ punkty} \\ B - 4 \text{ punkty} \end{array} \right] \quad A \underset{M}{<} B$$

**Definicja 8.3 (Metoda odporna na nieobecność)**

Metoda (MP, MW) jest odporna na nieobecność wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{M,N} \forall_{A,B} \left[ \begin{array}{c} M, N - \text{modele} \\ W_N = W_M \cup W^*, \quad W^* \cap W_M = \emptyset \\ v \in W_M \Rightarrow \text{głos } v \text{ w } M = \text{głos } v \text{ w } N \\ A \underset{M}{<} B \quad \text{oraz} \quad \forall_{v \in W^*} A \overset{v,N}{<} B \end{array} \right] \Rightarrow A \underset{N}{<} B.$$

**Twierdzenie 8.2**

Metoda punktów Bordy jest odporna na nieobecność.

**Dowód:** Kandydat  $B$  dostaje jeszcze więcej punktów niż  $A$ .

□

**Lemat 8.2**

Metoda Balińskiego-Laraki (B-L) nie jest odporna na nieobecność. Metody mediany również nie są odporne na nieobecność.

Wyniki głosowania w modelu  $M$ :

A	5	5	<b>4</b>	2	2
B	3	3	<b>3</b>	3	2

 $\Rightarrow A \underset{M}{>} B$ 

Wyniki głosowania w modelu  $N$  (po dodaniu głosu):

A	5	5	4	<b>2</b>	2	2
B	3	3	3	<b>3</b>	2	1

 $\Rightarrow A \underset{M}{<} B$ 
**Twierdzenie 8.3 (Twierdzenie Saari (1992))**

$Z: K = \{k_1, \dots, k_n\}$ ,  $n \geq 3$ .  $T$ : Istnieje model, w którym  $k_i$  wygrywa samodzielnie metodą  $i$ -głosów ( $i = 1, \dots, n-1$ ), natomiast  $k_n$  wygrywa metodą punktów Bordy. (Bez dowodu)

**Przykład 8.2**

a)

3	2	2	4
A	A	B	C
B	C	C	B
C	B	A	A

Metoda 1-głosu - wygrywa A (5 głosów)

Metoda 2-głosów - wygrywa B (9 głosów)

Metoda punktów Bordy - wygrywa C (12 punktów)

b)

2	2	2	3
A	A	C	D
B	D	B	B
C	C	D	C
D	B	A	A

Metoda 1-głosu - wygrywa A (4 głosy)

Metoda 2-głosów - wygrywa B (7 głosów)

Metoda 3-głosów - wygrywa C (9 głosów)

Metoda punktów Bordy - wygrywa D (15 punktów)

**Definicja 8.4 (Grupowa metoda  $n$ -głosów)**

Grupowa metoda  $n$ -głosów - wyborca głosuje na  $n$  kandydatów, wygrywa  $n$  z największą liczbą głosów.

### Przykład 8.3

	30	30	20	20
1	A	A	B	C
2	B	C	C	B
3	C	B	A	A

Głosowanie na 1 głos

A - 60 - wygrywa

B - 20

C - 20

Głosowanie na 2 głosy

A - 60

B - 70 - wygrywa

C - 70 - wygrywa

### Twierdzenie 8.4

$\#K \geq 2n + 1$ ,  $n \geq 1$ ,  $\#W$  odpowiednio duża.

Dla kandydatów  $k_1, \dots, k_{2n+1}$  istnieje model, w którym:

- w głosowaniu grupową metodą  $n$  głosów wygrywają  $k_1, \dots, k_n$ ,
- w głosowaniu grupową metodą  $(n + 1)$  głosów wygrywają  $k_{n+1}, \dots, k_{2n+1}$  (w obu przypadkach każdy kandydat ma ponad 50% głosów).

**Dowód:** Idea dla  $n = 3$ ,  $2n + 1 = 7$ :

	○	○	○	□	□	□	□
1	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$
2	$k_2$	$k_3$	$k_1$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_4$
3	$k_3$	$k_1$	$k_2$	$k_6$	$k_7$	$k_4$	$k_5$
4				$k_7$	$k_4$	$k_5$	$k_6$
5	Wypełniamy odpowiednio rzędami, dając kandydata w tej kolumnie, w której go jeszcze nie było.						
6							
7							

Zbiory ○ i □ są równoliczne.

Zarys ogólny:

	$n$ grup				$n + 1$ grup			
	$p$	$p$	$\dots$	$p$	$q$	$q$	$\dots$	$q$
1	$k_1$	$k_2$		$k_n$	$k_{n+1}$	$k_{n+2}$		$k_{2n+1}$
2	$k_2$	$k_3$		$k_1$	$k_{n+2}$	$k_{n+3}$		$k_{n+1}$
3	$k_3$	$k_4$		$k_2$	$k_{n+3}$	$k_{n+4}$		$k_{n+2}$
$\vdots$								
$n - 1$	$k_{n-1}$	$k_n$		$k_{n-2}$	$k_{2n-1}$	$k_{2n}$	$\dots$	$k_{2n-2}$
$n$	$k_n$	$k_1$		$k_{n-1}$	$k_{2n}$	$k_{2n+1}$		$k_{2n-1}$
$n + 1$	*				$k_{2n+1}$	$k_{n+1}$		$k_{2n}$
$n + 2$	$\Delta$							
$\vdots$								
$2n + 1$								

\* - W tych grupach mamy po  $p$  wyborców, każdy z  $k_{n+1}, \dots, k_{2n+1}$  pojawia się z częstotliwością  $w \left( \frac{1+2n\epsilon}{2(n+1)} \right)$ .

$\Delta$  - W każdym rzędzie (miejsca  $n + 1, \dots, 2n + 1$ ) każdy z kandydatów  $k_{n+1}, \dots, k_{2n+1}$  pojawia się  $w \left( \frac{2n\epsilon+1}{2(n+1)} \right)$  razy, a każdy z  $k_1, \dots, k_n$  pojawia się  $w \left( \frac{1}{2n} - \epsilon \right)$  razy. Wstawiamy każdego w kolumnę, w której go jeszcze nie było.

Możemy zadać sobie pytania co do poprawności takiego rozkładu, mianowicie:

- 1) Dobrze zdefiniowane
- 2)  $nw \left( \frac{1}{2n} + \epsilon \right) > nw \left( \frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1} \right)$ , czyli  $p > q$ .
- 3)  $nw \left( \frac{1}{2n} + \epsilon \right) < nw \left( \frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1} \right)$ .
- 4)  $nw \left( \frac{1}{2n} + \epsilon \right) > \frac{w}{2}$ .
- 5)  $nw \left( \frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1} \right) + \frac{2}{n+1} > \frac{w}{2}$ .

Okaże się, że dla  $\epsilon < \frac{1}{2(2n^2+2)}$  będzie ok. Dobieramy  $n$  tak, aby wyszły liczby całkowite.

D:

- 1) a) Suma w rzędzie =  $w$ :

$$\begin{aligned}
 np + (n+1)q &= nw \left( \frac{1}{2n} + \epsilon \right) + (n+1)w \left( \frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1} \right) = \\
 &= w \left[ \frac{1}{2} + n\epsilon + \frac{n+1}{2(n+1)} - (n+1)\epsilon + \frac{(n+1)\epsilon}{n+1} \right] = w.
 \end{aligned}$$

- b) Czy w każdym miejscu liczba  $> 0$ ? Dla  $p$  jest ok:

$$\frac{1}{2(n+1)} + \frac{\epsilon(1-n-1)}{n+1} > 0, \quad n\epsilon < \frac{1}{2}, \quad \epsilon < \frac{1}{2n}.$$

c) Czy suma każdego przy  $n + 1$  miejsc jest  $\leq w$ :

$$wn \left( \frac{1}{2n} + \epsilon \right) = w \left( \frac{1}{2} + n\epsilon \right) < w, \quad n\epsilon < \frac{1}{2}, \quad \epsilon < \frac{1}{2n}.$$

$$w \left( \frac{n}{2(n+1)} - \epsilon n + \frac{\epsilon n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) = w \left( \frac{n+2}{2(n+1)} - \epsilon n \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) \right) < w.$$

Głosy na  $k_i$  do miejsc  $n + 1$ , ( $i = n + 1, \dots, 2n + 1$ ).

2)  $w \left( \frac{1}{2n+1} + \epsilon \right) > w \left( \frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1} \right)$  – oczywiste (prawa strona jest silnie mniejsza od lewej).

3)  $nw \left( \frac{1}{2n} + \epsilon \right) < nw \left( \frac{1}{2(n+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon}{n+1} \right)$ :

$$\frac{1}{2} + n\epsilon < \frac{n+1}{2(n+1)} - (n+1) \left( \frac{n+1\epsilon - \epsilon}{n+1} \right) + \frac{1}{n+1}.$$

$$n\epsilon < \frac{1}{n+1} - n\epsilon, \quad 2n\epsilon < \frac{1}{n+1}, \quad \epsilon < \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Sprawdzenie (4), (5) do domu.

□

## 9 Deser

### **Twierdzenie 9.1 (Gibbard-Satterthwaite'a (1973,1975))**

*Z: MZU, decyzyjna,  $\#K \geq 3, \#w \geq 2, \forall A \in K \exists$  model  $M$  w którym  $A$  wygrywa oraz metoda ta nie jest dyktaturą  $T$ : Metoda jest podatna na manipulację, tzn  $\exists_{model} \exists_{w \in W}$  i taki  $w$  zgłosuje inaczej niż w tym modelu, to zwycięzca zmieni się na bardziej odpowiadającego wyborcy  $w$ .*

### **Kompromis Jagielloński**

Wojciech Słomczyński, Karol Życzkowski

Próg przy którym wniosek jest przyjęty

$$q = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{N_1 + \dots + N_k}}{\sqrt{N_1} + \dots + \sqrt{N_k}} \right)$$

gdzie  $N_i$  - populacja kraju

### **Wbory w roku 1990**

§3 Progi wejścia §3.1  $P \geq 5\%$  §3.2  $K \geq 8\%$  §3.3 Jeżeli nic lub któryś z warunków przez tylko 1 komitet to progi są obniżane do

$$P \geq 3\%$$

$$K \geq 5\%$$

Czy wchodzi?	Głosy	Czy wchodzi po zmianie progu?
+	20,4(K)	+
+	15,4(P)	+
+	10,6(P)	+
+	7,3(P)	+
-	6,4(K)	+
+	5,7(P)	+
+	5,4(P)	+
+	4,9(P)	+
-	4,4(P)	+
-	4,0(P)	+
-	3,2(P)	+

### **Przypadek wyborów w Krakowie z dwoma kartami**

**Metoda Capińskiego - średnia na nogę czołówki**

**Metoda Ciesielskiego**



Egzamin 31 stycznia 11:00