

Zadania na lekcje

1. Wykaż, że:

a) jeśli $x + y = 2$, to $x^3 + y^3 \geq 2$

b) jeśli $x - y = 5$, to $x^3 - y^3 \geq 31, 25$

2. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, jeśli wiadomo, że przyjmuje ona wartości dodatnie $\Leftrightarrow x \in (-8; 2)$, zaś największą wartością tej funkcji jest $2\frac{1}{4}$.

3. Dana jest funkcja kwadratowa, dla której $f(-3) = 0$ oraz $f(-1) = f(5) = 3$. Czy funkcja ma najmniejszą czy największą wartość? Wyznacz tę wartość.

4. Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji:

a) $x^2 - 4x + 5$, gdzie $x \in \langle 0; 3 \rangle$

b) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x$, gdzie $x \in \langle 0; 6 \rangle$

c) $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 3$, gdzie $x \in \langle -2; 6 \rangle$

5. Dla jakich wartości parametru "k" pierwiastki funkcji

$$x^2 - (k - 1)x + 1 = 0$$

spełniają warunek $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geq 2k^2 - k - 21$?

6. Wyznacz wszystkie wartości parametru "k", dla których rozwiązania x_1, x_2 równania

$$2x^2 + kx + 2k = 0$$

spełniają warunek: $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + 3x_1x_2 \geq x_1 + x_2 - 4$.

Zadania domowe

1. Przekształć poniższe wyrażenia tak, aby skorzystać ze wzorów Viete'a, a następnie je zastosuj dla funkcji: $f(x) = \sqrt{3}x^2 - (2\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{2}$:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

b) $x_1^2 + x_2^2$

c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

d) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

2. Wykaż, że:

a) $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

b) $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$

c) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_2) \cdot x_1x_2$

d) $x_1^4 + x_2^4 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2(x_1x_2)^2$

(spoiler text for the hint goes here)