Technicka Univerzita v Kosiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Meranie a interakcia kvantových obvodov

Diplomová práca

2020 Marián Sabat

Technicka Univerzita v Kosiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Meranie a interakcia kvantových obvodov

Diplomová práca

Študijný program:	Informatika
Študijný odbor:	9.2.1 Informatika
Školiace pracovisko:	Katedra počítačov a informatiky (KPI)
Školiteľ:	prof. Ing. Ján Kollár, CSc.
Konzultant:	

Košice 2020 **Marián Sabat**

Názov práce:	Meranie a interakcia kvantových obvodov
Pracovisko:	Katedra počítačov a informatiky, Technicka Univerzita v Kosiciach
Autor:	Marián Sabat
Školiteľ:	prof. Ing. Ján Kollár, CSc.
Konzultant:	
Dátum:	1. 1. 2020
Kľúčové slová:	Kvantove pocitace a ine klucove slova
Abstrakt:	ABSTRAKT

Thesis title: Measurement and interaction of quantum circutis

Department: Department of Computers and Informatics, Techincal University of Kosice
Author: Marián Sabat
Supervisor: prof. Ing. Ján Kollár, CSc.
Tutor:
Date: 1. 1. 2020
Keywords: Quantum comuters and other key words

Abstract: ABSTRAKT

Tu vložte zadávací list pomocou príkazu
`\thesisspec{cesta/k/suboru/so/zadavacim.listom}`
v preambule dokumentu.

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, ze vsetko som pisal sam ...

Košice, 1.1.2020 . . . .

Vlastnoručný podpis

Poďakovanie

Obsah

Zoznam obrázkov

Úvod

Na uvod, je uvod

1 Ciele prace (Formulacia ulohy)

2 Matematické základy kvantových systémov

Na pochopenie problematiky kvantových počítačov je nutná znalosť aspoň základnej lineárnej algebry. V tejto kapitole je opýsaný matematický aparát využívaný ako teoretický základ celej práce.

2.1 Matice

Maticou typu $m \times n$ je nazývaná sústava prvkov zapísaných do schémy s m riadkami a n stĺpcami, kde $n, m \in \mathbb{N}$ [1]. Teda:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.1.1 Násobenie matice skalárom

Toto násobenie je vykonané násobením každého prvku matice danou skalárnou hodnotou [1]. Majme maticu A typu 2×2 a skalárnu hodnotu k, potom platí

$$kA = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

Operácia násobenia matice skalárnou hodnotou je komutatívna, čiže na poradí operandov nezáleží. Nech B je matica a α, β sú skalárne hodnoty, potom

$$(\alpha + \beta)B = \alpha B + \beta B,$$

$$(\alpha\beta)B = \alpha(\beta B)$$

2.1.2 Násobenie matíc

Nech je daná matica A typu $m \times n$ a matica B typu $n \times p$, potom výsledná matica $C = AB$ je typu $m \times p$ a pre jej prvky platí

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = A_{i1}B_{ij} + \cdots + A_{in}B_{nj},$$

kde $i = 1, \ldots, m$, a $j = 1, \ldots, p$ [1]. Pre túto operáciu neplatí komutatívnosť.

2.1.3 Transpozícia matice

Ak A je matica typu $m \times n$, potom jej transponovaná matica A^T je typu $n \times m$ a platí [1]

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

2.1.4 Tenzorový súčin matíc

Nech A je matica typu $m \times n$ a B je typu $r \times s$. Tenzorový súčin alebo Kroneckerov súčin, označený ako $A \otimes B$ je definovaný ako [2]

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \cdots & & & \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \ldots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Nakoľko je $a_{ij}B$ submatica typu $r \times s$, je zjavné, že výsladná matica je typu $mr \times ns$.

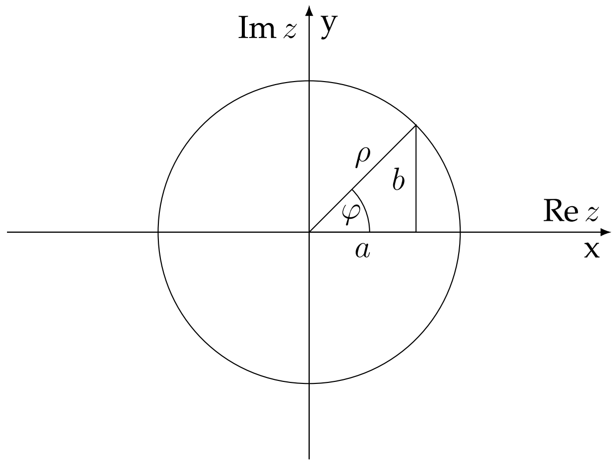
2.2 Komplexné čísla

Množinou komplexných čísel $\mathbb{C}$ je nazývaná množina $\mathbb{R}^2$ spolu s operáciami sčítania a násobenia. Ľubovoľný prvok $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ je nazývaný komplexné číslo [3]. Komplexné čísla možno reprezentovať nie len ako usporiadanú dvojicu, ale aj pomocou:

1. Algebraickej formy

   $$z = a + bi$$

   , kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $i^2 = -1$,



Obr. 2.1: Zobrazenie komplexného čísla z: x - reálna os, y - imagináran os

2. Polárnych súradníc ρ a φ,
   kde $\rho, \varphi \in \mathbb{R}$ a $\rho > 0$. V geometrickej reprezenácii (Obr. 2.1) je ρ veľkosť vektora $\vec{Oz}$, kde O je počiatok súradnicovej sústavy, a φ je uhol medzi osou x a daným vektorom.

Je zrejme, že pre vyjadrenie pomocou polárnych súradníc platí $a = \rho \cos \varphi$ a $b = \rho \sin \varphi$ [3]. Potom je možné zapísať

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

,kde $z \in \mathbb{C}$, $\rho, \varphi \in \mathbb{R}$ a $\rho > 1$. $e^{i\varphi}$ je komplexná jednotka, inak povedané jej absolútna hodnota je rová 1.

$$|e^{i\varphi}| = 1$$

A z Eulerovho vzťahu platí

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

2.2.1 Operácie na množine komplexých čísel

Súčet komplexných čísel

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $\rho_1 e^{i\varphi_1} + \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) + \rho_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = (\rho_1 \cos \varphi_1 + \rho_2 \cos \varphi_2) + i(\rho_1 \sin \varphi_1 + \rho_2 \sin \varphi_2)$

Násobenie komplexných čísel

- $(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bd)i$
- $\rho_1 e^{i\varphi_1}.\rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1\varphi_2)}$

Operácie rozdielu a podielu sú ľahko odvoditeľné obnomným spôsobom.

2.2.2 Základné charakteristiky komplexných čísel

Nech α je komplexné číslo $\alpha = a + bi, \alpha \in \mathbb{C}$. Potom hovoríme, že a, b sú zložky komplexného čísla α, pričom a je reálna a b je imaginárna zložka. Pri reprezenácií pomocou polárnych súradníc $\alpha = \rho e^{i\varphi}$ je ρ nazývané amplitúda (veľkosť, norma) komplexného čísla a φ je fáza komplexného čísla.

Pre komplexné číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je číslo $\alpha^\dagger$ ($\overline{\alpha}$ alebo α^*) nazývané združeným komplexným číslom (angl. conjugate of complex number) [3], pričom ak $\alpha = a + bi$, potom

$$\alpha^\dagger = a - bi,$$

$$\alpha^\dagger = \rho e^{-i\varphi}.$$

Z geometrickej reprezentácie komplexného čísla na Obr. 2.1 je zrejmé, že $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. Bolo už spomenuté, že ρ sa nazýva aj norma komplexného čísla. Normu komplexného čísla α možno označiť aj ako $|\alpha|$ a platí

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha^\dagger\alpha}.$$

Dôkaz:

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha^\dagger\alpha} = \sqrt{\rho e^{-i\varphi}.\rho e^{i\varphi}} = \sqrt{\rho^2} = \rho$$

2.3 Vektory

Vektor rozmeru n je usporiadaný súbor prvkov. Vo všeobecnosti je možné vektor A označiť ako

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

No je žiadúce označovať vektory pomocou Diracovho (Bra-ket) zápisu. Čiže vektory $u = \binom{\alpha}{\beta}$ a $v = \binom{\gamma}{\delta}$ je lepšie označiť ako

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$$

$$|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}$$

Toto označenie popisuje vektory v Hilbertovom priesotre (viac v kapitole 3.1), pričom platí nasledovné:

Ak $|\psi\rangle = \binom{\alpha}{\beta}$ je ket-vektor, potom

$$\langle\psi| = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}^{\dagger} = (\alpha^{\dagger}\beta^{\dagger})$$

je bra-vektor, kde $(\alpha, \beta, \alpha^{\dagger}, \beta^{\dagger} \in \mathbb{C})$ a $\alpha^{\dagger}, \beta^{\dagger}$ sú združené komplexné čísla ku α a β. $\langle\psi|$ je teda združenou transpozíciou (angl. transposed conjugate), a platí

$$\left\langle\psi^{\dagger}\right| = |\psi\rangle$$

$$\left|\psi^{\dagger}\right\rangle = \langle\psi|$$

2.4 Pojmi a definície

Vektor je **normalizovaný**, ak jeho norma (veľkosť) je rovná 1.

$$\left\|\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = 1$$

Vektory ψ_1 a ψ_2 sú navzájom **ortogonálne**, ak ich skalárny súčin je rovný 0. Ortogonálnosť (angl. orthogonality) je v tomto ponímaní teda možné zameniť s kolmosťou.

Dva vektory sú **ortonormálne**, ak sú zároveň ortogonálne a normalizované.

Pre príklad nech $|0\rangle = \binom{1}{0}$ a $|1\rangle = \binom{0}{1}$, $(|0\rangle, |1\rangle \in \mathbb{C}^2)$. Tieto vektory sú ortonormálne, pretože platí

1. $\langle 0 \mid 1\rangle = \langle 0| \,.\, |1\rangle = \left|0^{\dagger}\right\rangle . |1\rangle = (10).\binom{0}{1} = 0,$

2. $\|\, |0\rangle \,\|^2 = \langle 0 \mid 0\rangle = (10).\binom{1}{0} = 1$
   $\|\, |1\rangle \,\|^2 = \langle 1 \mid 1\rangle = (01).\binom{0}{1} = 1.$

Pre **skalárny súčin** dvoch vektorov platí

$$\langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \,.\, | \psi_2 \rangle = (\alpha_1^\dagger \beta_1^\dagger).\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \alpha_1^\dagger \alpha_2 + \beta_1^\dagger \beta_2.$$

Normu vektora $|\psi\rangle$ pomocou skalárneho súčinu je možné vypočítať ako

$$\| \, |\psi\rangle \, \| = \sqrt{\langle \psi \mid \psi \rangle},$$

pretože platí $\langle \psi \mid \psi \rangle = \alpha^\dagger \alpha + \beta^\dagger \beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \| \, |\psi\rangle \, \|^2$.

Operácia **tenzorového súčinu** dvoch vektorov je definovaná ako

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \,.\, \langle \psi_2 | = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}.(\alpha_2 \beta_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\alpha_2 \beta_2) \\ \beta_1(\alpha_2 \beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \beta_2 \\ \beta_1 \alpha_2 & \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix}$$

3 Teoretické základy kvantových systémov

V nasledujúcej kapitole sú uvedené poznatky z teórie kvantových výpočtov a kvantových obvodov.

3.1 Základné definície

Hilbertov priestor
Hilbertov priestor (angl. Hilber space) je úplný konečnorozmerný vektorový priestor, v ktorom je definovaná operácia skalárneho súčinu $\langle u \,|\, v \rangle$, kde u, v sú N-rozmerné vektory s komplexnými zložkami [4]. Konečnorozmerným vektorovým priestorom nazývame taký priestor, ktorého báza je množina lineárne nezávislých vektorov, a ktorá generuje celý tento priestor. Pre úplný priestor platí, že existuje Cauchyho postupnosť, ktorou je dosiahnuteľný ľubovoľný stav, charakterizovateľný N-rozmerným vektorom $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^N$, ktorý je vždy normalizovaý.

Unitárne zobrazenie
Unitárne zobrazenie (angl. Unitary map) je rotáciou, čiže zmenou ortonormálnej bázy.

Kvantový bit
Za kvantový bit je možné považovať objekt, ktorý popisuje stav kvantového systému. Z matematického pohľadu je to vektor v dvojrozmernom Hilberovom priesotre $\mathbb{C}^2$. No v reále ide o fotón. Budeme sa zaoberať dvojstavovými kvantovými systémami, kde je fotón nútený skolabovať do jedného z dvoch stavov. A teda vektor, ktorý bude popisovať tento kvantový bit vyjadríme ako

$u = \binom{\alpha}{\beta}$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ a $u \in \mathbb{C}^2$ [5]. No vhodnejším sa javí vyjadrenie tohto vektora superpozíciou, teda lineárnou kombináciou základných stavov $|0\rangle, |1\rangle$, ktoré zodpovedajé klasickým bitom $0, 1$. Teda

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle ,$$

kde monožina $\{|0\rangle, |1\rangle\} = \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ je nazývaná základná báza. Väčšinou je využívaná základná báza $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, no je možné sa stretnúť aj s bázami $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ a $\{|\circlearrowright\rangle, |\circlearrowleft\rangle\}$. Tieto bázy sú dosiahnuteľné zo základnej bázy unitárnymi transformáciami.

Superpozícia
Superpozíciou (angl. superposition) dvoch vektorov je vyjadrený stav kvantového bitu $|\psi\rangle$, $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$. Ide o lineárnu kombináciu a teda vo všeobecnosti tieto vektory môžu byť dva ľubovoľné, no lineárne nezávislé vektory u a v. Čiže

$$|\psi\rangle = \alpha u + \beta v.$$

Pre kvantové výpočty, ale má väčší význam využitie ortonormálnych vektorov.

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle ,$$

$$|\psi\rangle = \alpha |+\rangle + \beta |-\rangle ,$$

$$|\psi\rangle = \alpha |\circlearrowright\rangle + \beta |\circlearrowleft\rangle ,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a platí $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Previazanosť kvantových bitov
dajaka previazanost

3.2 Systém s jedným kvantovým bitom

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle ,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$. Čiže stav kvantového systému $|\psi\rangle$ je superpozíciou stavov $|0\rangle$ a $|1\rangle$.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\langle\psi| = (\alpha^{\dagger}\beta^{\dagger})$$
$$\langle\psi\,|\,\psi\rangle = (\alpha^{\dagger}\beta^{\dagger})\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \alpha^{\dagger}\alpha + \beta^{\dagger}\beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = ||\,|\psi\rangle\,||^2$$

3.3 System s viacerymi kvantovymi bitmy

3.4 Princip merania

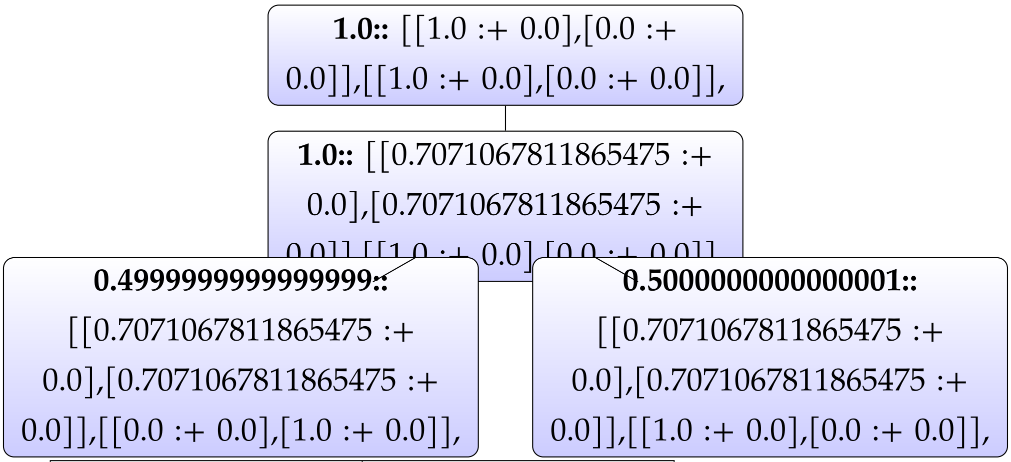
4 Kvantovy system

4.1 IBM QX

4.1.1 Stavy a ich zapis

4.1.2 Operacie kvantovych hradiel

5 Meranie jednoduchého kvantového obvodu



0.5000000000000001	0.4999999999999999
00	10

0.25	0.2499999999999999	0.2500000000000001	0.25
01	11	00	10

1.0:: [[1.0 :+ 0.0],[0.0 :+ 0.0]],[[1.0 :+ 0.0],[0.0 :+ 0.0]],

1.0:: [[0.7071067811865475 :+ 0.0],[0.7071067811865475 :+ 0.0]],[[1.0 :+ 0.0],[0.0 :+ 0.0]],

0.4999999999999999:: [[0.7071067811865475 :+ 0.0],[0.7071067811865475 :+

0.5000000000000001:: [[0.7071067811865475 :+ 0.0],[0.7071067811865475 :+

0.4999999999999999:: [[0.9999999999999998 :+ 0.0],[0.0 :+ 0.0]],[[0.0 :+ 0.0],[1.0 :+ 0.0]],

0.5000000000000001:: [[0.9999999999999998 :+ 0.0],[0.0 :+ 0.0]],[[1.0 :+ 0.0],[0.0 :+ 0.0]],

0.5000000000000001 00	0.4999999999999999 10

0.25 01	0.2499999999999999 11	0.2500000000000001 00	0.25 10

0.4999999999999999 01	0.5000000000000001 00

6 Celkove zhodnotenie vysledkov (Vyhodnotenie)

7 Záver

Literatúra

[1] Lieven Vandenberghe Stephen Boyd. *Introduction to Applied Linear Algebra*. Cambridge University Press, 2018.

[2] Alexander Graham. *Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications*. Ellis Horwood limited, 1981.

[3] Dorin Andrica Titu Andreescu. *Complex Numbers from A to...Z*. Birkhäuser, 2006.

[4] Issac L. Chuang Michael A. Nielsen. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.

[5] Michele Mosca Phillip Kaye Raymond LaFlamme. *An Introduction to Quantum Computing*. Oxford University Press, 2007.