Technicka Univerzita v Kosiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Meranie a interakcia kvantových obvodov

Diplomová práca

2020

Marián Sabat

Technicka Univerzita v Kosiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Meranie a interakcia kvantových obvodov

Diplomová práca

Študijný program:	Informatika
Študijný odbor:	9.2.1 Informatika
Školiace pracovisko:	Katedra počítačov a informatiky (KPI)
Školiteľ:	prof. Ing. Ján Kollár, CSc.
Konzultant:	

Košice 2020 **Marián Sabat**

Názov práce:	Meranie a interakcia kvantových obvodov
Pracovisko:	Katedra počítačov a informatiky, Technicka Univerzita v Kosiciach
Autor:	Marián Sabat
Školiteľ:	prof. Ing. Ján Kollár, CSc.
Konzultant:	
Dátum:	1. 1. 2020
Kľúčové slová:	Kvantove pocitace a ine klucove slova

Abstrakt: ABSTRAKT

Thesis title:	Measurement and interaction of quantum circutis
Department:	Department of Computers and Informatics, Techincal University of Kosice
Author:	Marián Sabat
Supervisor:	prof. Ing. Ján Kollár, CSc.
Tutor:	
Date:	1. 1. 2020
Keywords:	Quantum comuters and other key words

Abstract: ABSTRAKT

Tu vložte zadávací list pomocou príkazu

`\thesisspec{cesta/k/suboru/so/zadavacim.listom}`

v preambule dokumentu.

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, ze vsetko som pisal sam ...

Košice, 1.1.2020 . . . .

Vlastnoručný podpis

Poďakovanie

Obsah

Zoznam obrázkov

Úvod

Na uvod, je uvod

1 Ciele prace (Formulacia ulohy)

2 Matematické základy kvantových systémov

Na pochopenie problematiky kvantových počítačov je nutná znalosť aspoň základnej lineárnej algebry. V tejto kapitole je opýsaný matematický aparát využívaný ako teoretický základ celej práce.

2.1 Matice

Maticou typu $m \times n$ je nazývaná sústava prvkov zapísaných do schémy s m riadkami a n stĺpcami, kde $n, m \in \mathbb{N}$ [1]. Teda:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.1.1 Násobenie matice skalárom

Toto násobenie je vykonané násobením každého prvku matice danou skalárnou hodnotou [1]. Majme maticu A typu 2×2 a skalárnu hodnotu k, potom platí

$$kA = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix}$$

Operácia násobenia matice skalárnou hodnotou je komutatívna, čiže na poradí operandov nezáleží. Nech B je matica a α, β sú skalárne hodnoty, potom

$$(\alpha + \beta)B = \alpha B + \beta B,$$

$$(\alpha\beta)B = \alpha(\beta B)$$

2.1.2 Násobenie matíc

Nech je daná matica A typu $m \times n$ a matica B typu $n \times p$, potom výsledná matica $C = AB$ je typu $m \times p$ a pre jej prvky platí

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = A_{i1}B_{ij} + \cdots + A_{in}B_{nj},$$

kde $i = 1, \ldots, m$, a $j = 1, \ldots, p$ [1]. Pre túto operáciu neplatí komutatívnosť.

2.1.3 Transpozícia matice

Ak A je matica typu $m \times n$, potom jej transponovaná matica A^T je typu $n \times m$ a platí [1]

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

2.1.4 Tenzorový súčin matíc

Nech A je matica typu $m \times n$ a B je typu $r \times s$. Tenzorový súčin alebo Kroneckerov súčin, označený ako $A \otimes B$ je definovaný ako [2]

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2n}B \\ \cdots & & & \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \ldots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Nakoľko je $a_{ij}B$ submatica typu $r \times s$, je zjavné, že výsladná matica je typu $mr \times ns$.

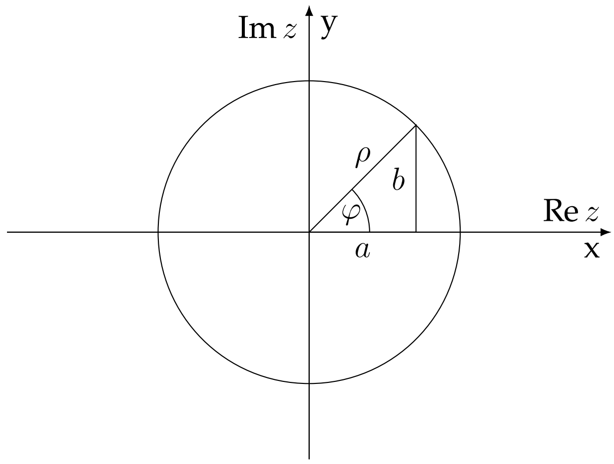
2.2 Komplexné čísla

Množinou komplexných čísel $\mathbb{C}$ je nazývaná množina $\mathbb{R}^2$ spolu s operáciami sčítania a násobenia. Ľubovoľný prvok $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ je nazývaný komplexné číslo [3]. Komplexné čísla možno reprezentovať nie len ako usporiadanú dvojicu, ale aj pomocou:

1. Algebraickej formy

   $$z = a + bi$$

   , kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $i^2 = -1$,



Obr. 2.1: Zobrazenie komplexného čísla z: x - reálna os, y - imagináran os

2. Polárnych súradníc ρ a φ,
   kde $\rho, \varphi \in \mathbb{R}$ a $\rho > 0$. V geometrickej reprezenácii (Obr. 2.1) je ρ veľkosť vektora $\vec{Oz}$, kde O je počiatok súradnicovej sústavy, a φ je uhol medzi osou x a daným vektorom.

Je zrejme, že pre vyjadrenie pomocou polárnych súradníc platí $a = \rho \cos\varphi$ a $b = \rho \sin\varphi$ [3]. Potom je možné zapísať

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

,kde $z \in \mathbb{C}$, $\rho, \varphi \in \mathbb{R}$ a $\rho > 1$. $e^{i\varphi}$ je komplexná jednotka, inak povedané jej absolútna hodnota je rová 1.

$$|e^{i\varphi}| = 1$$

A z Eulerovho vzťahu platí

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

2.2.1 Operácie na množine komplexých čísel

Súčet komplexných čísel

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $\rho_1 e^{i\varphi_1} + \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) + \rho_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) = (\rho_1 \cos\varphi_1 + \rho_2 \cos\varphi_2) + i(\rho_1 \sin\varphi_1 + \rho_2 \sin\varphi_2)$

Násobenie komplexných čísel

- $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bd)i$
- $\rho_1 e^{i\varphi_1}.\rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1\varphi_2)}$

Operácie rozdielu a podielu sú ľahko odvoditeľné obnomným spôsobom.

2.2.2 Základné charakteristiky komplexných čísel

Nech α je komplexné číslo $\alpha = a + bi, \alpha \in \mathbb{C}$. Potom hovoríme, že a, b sú zložky komplexného čísla α, pričom a je reálna a b je imaginárna zložka. Pri reprezenácií pomocou polárnych súradníc $\alpha = \rho e^{i\varphi}$ je ρ nazývané amplitúda (veľkosť, norma) komplexného čísla a φ je fáza komplexného čísla.

Pre komplexné číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je číslo $\alpha^\dagger$ ($\overline{\alpha}$ alebo α^*) nazývané združeným komplexným číslom (angl. conjugate of complex number) [3], pričom ak $\alpha = a + bi$, potom

$$\alpha^\dagger = a - bi,$$

$$\alpha^\dagger = \rho e^{-i\varphi}.$$

Z geometrickej reprezentácie komplexného čísla na Obr. 2.1 je zrejmé, že $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. Bolo už spomenuté, že ρ sa nazýva aj norma komplexného čísla. Normu komplexného čísla α možno označiť aj ako $|\alpha|$ a platí

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha^\dagger \alpha}.$$

Dôkaz:

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha^\dagger \alpha} = \sqrt{\rho e^{-i\varphi}.\rho e^{i\varphi}} = \sqrt{\rho^2} = \rho$$

2.3 Vektory

Vektor rozmeru n je usporiadaný súbor prvkov. Vo všeobecnosti je možné vektor A označiť ako

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

No je žiadúce označovať vektory pomocou Diracovho (Bra-ket) zápisu. Čiže vektory $u = \binom{\alpha}{\beta}$ a $v = \binom{\gamma}{\delta}$ je lepšie označiť ako

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

$$|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Toto označenie popisuje vektory v Hilbertovom priesotre (viac v kapitole 3.1.1), pričom platí nasledovné:

Ak $|\psi\rangle = \binom{\alpha}{\beta}$ je ket-vektor, potom

$$\langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^{\dagger} = (\alpha^{\dagger}\beta^{\dagger})$$

je bra-vektor, kde $(\alpha, \beta, \alpha^{\dagger}, \beta^{\dagger} \in \mathbb{C})$ a $\alpha^{\dagger}, \beta^{\dagger}$ sú združené komplexné čísla ku α a β. $\langle\psi|$ je teda združenou transpozíciou (angl. transposed conjugate), a platí

$$\left\langle\psi^{\dagger}\right| = |\psi\rangle$$

$$\left|\psi^{\dagger}\right\rangle = \langle\psi|$$

2.4 Pojmi a definície

Vektor je **normalizovaný**, ak jeho norma (veľkosť) je rovná 1.

$$\left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = 1$$

Vektory ψ_1 a ψ_2 sú navzájom **ortogonálne**, ak ich skalárny súčin je rovný 0. Ortogonálnosť (angl. orthogonality) je v tomto ponímaní teda možné zameniť s kolmosťou.

Dva vektory sú **ortonormálne**, ak sú zároveň ortogonálne a normalizované.

Pre príklad nech $|0\rangle = \binom{1}{0}$ a $|1\rangle = \binom{0}{1}$, $(|0\rangle, |1\rangle \in \mathbb{C}^2)$. Tieto vektory sú ortonormálne, pretože platí

1. $\langle 0 \,|\, 1\rangle = \langle 0| \,.\, |1\rangle = \left|0^{\dagger}\right\rangle . \,|1\rangle = (10).\binom{0}{1} = 0,$
2. $\| \,|0\rangle\, \|^2 = \langle 0 \,|\, 0\rangle = (10).\binom{1}{0} = 1$
   $\| \,|1\rangle\, \|^2 = \langle 1 \,|\, 1\rangle = (01).\binom{0}{1} = 1.$

Pre **skalárny súčin** dvoch vektorov platí

$$\langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \,.\, | \psi_2 \rangle = (\alpha_1^\dagger \beta_1^\dagger).\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \alpha_1^\dagger \alpha_2 + \beta_1^\dagger \beta_2.$$

Normu vektora $|\psi\rangle$ pomocou skalárneho súčinu je možné vypočítať ako

$$\| \, |\psi\rangle \, \| = \sqrt{\langle \psi \mid \psi \rangle},$$

pretože platí $\langle \psi \mid \psi \rangle = \alpha^\dagger \alpha + \beta^\dagger \beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \| \, |\psi\rangle \, \|^2$.

Operácia **tenzorového súčinu** dvoch vektorov je definovaná ako

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \,.\, \langle \psi_2 | = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}.(\alpha_2 \beta_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\alpha_2 \beta_2) \\ \beta_1(\alpha_2 \beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1 \beta_2 \\ \beta_1 \alpha_2 & \beta_1 \beta_2 \end{pmatrix}$$

3 Teoretické základy kvantových systémov

3.1 Zakladne definicie

3.1.1 Hilbertov priestor ... atd

Hilbertov priestor (angl. Hilbert space) je úplný vektorový priestor s operáciou skalárneho súčinu $< u|v >$, u, v sú N-rozmerné vektory s komplexnými zložkami. Pre takto definovaný priestor platí, že existuje Cauchyho postupnosť, ktorou je dosiahnuteľný ľubovoľný stav, charakterizovateľný N-rozmerným vektorom $\phi \in \mathbb{C}^N$, ktorý je normalizovaý.

Unitárne zobrazenie (angl. Unitary map) je rotáciou - teda zmenou ortonormálnej bázy.

Kvantový bit je vektor v dvojrozmernom Hilberovom priesotre $\mathbb{C}^2$. Vo všeobecnosti môžeme vektor $u = \binom{\alpha}{\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $u \in \mathbb{C}^2$ vyjadriť superpozíciou, teda lineárnou kombináciou základných stavov $|0 >, |1 >$, ktoré zodpovedajé klasickým bitom $0, 1$. Teda

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha|0 > +\beta|1 >,$$

kde monožina $\{|0 >, |1 >\} = \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ je základná množina. Bázy $\{|+ >, |- >\}$ a $\{|qL >, |qR >\}$ sú ďalšie významné bázy v Hilbertovom priesotre, ktoré sú dosiahnuteľné zo základnej bázy unitárnymi transformáciami.

Stav $|\phi >, |\phi > \in \mathbb{C}^2$ je superpozíciou stavov základnej bázy $\{|0 >, |1 >\}$, teda lineárnou kombináciou týchto vektorov. Superpozícia je daná vzťahom $|\phi >= \alpha|0 > +\beta|1 >$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

3.1.2 Systém s jedným kvantovým bitom

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \beta\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$. Čiže stav kvantového systému $|\psi\rangle$ je superpozíciou stavov $|0\rangle$ a $|1\rangle$.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$\langle\psi| = (\alpha^\dagger \beta^\dagger)$$

$$\langle\psi\,|\,\psi\rangle = (\alpha^\dagger \beta^\dagger)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \alpha^\dagger\alpha + \beta^\dagger\beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = ||\,|\psi\rangle\,||^2$$

3.1.3 System s viacerymi kvantovymi bitmy

3.1.4 Princip merania

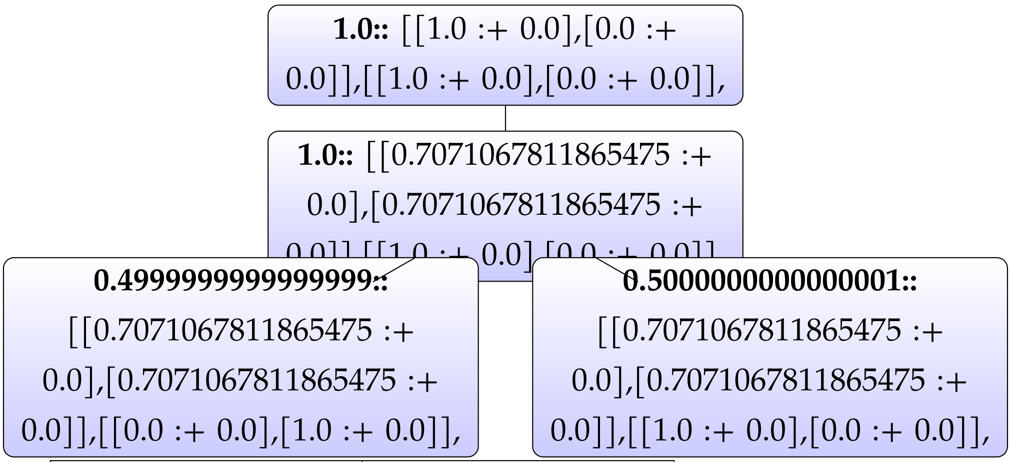
4 Kvantovy system

4.1 IBM QX

4.1.1 Stavy a ich zapis

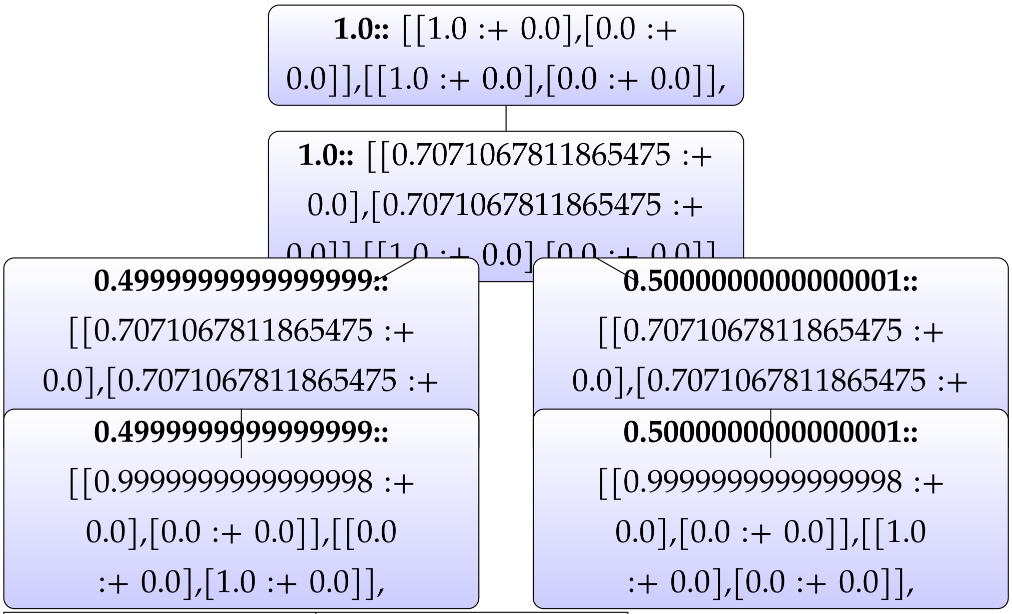
4.1.2 Operacie kvantovych hradiel

5 Meranie jednoduchého kvantového obvodu



0.5000000000000001 00	0.4999999999999999 10

0.25 01	0.2499999999999999 11	0.2500000000000001 00	0.25 10



0.5000000000000001	0.4999999999999999
00	10

0.25	0.2499999999999999	0.2500000000000001	0.25
01	11	00	10

0.4999999999999999	0.5000000000000001
01	00

6 Celkove zhodnotenie vysledkov (Vyhodnotenie)

7 Záver

Literatúra

[1] Lieven Vandenberghe Stephen Boyd. *Introduction to Applied Linear Algebra*. Cambridge University Press, 2018.

[2] Alexander Graham. *Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications*. Ellis Horwood limited, 1981.

[3] Dorin Andrica Titu Andreescu. *Complex Numbers from A to...Z*. Birkhäuser, 2006.