

Sprawozdanie z Laboratorium 8.

Piotr Lewandowski

Dymitr Lubczyk

Krzysztof Tabeau

17 kwietnia 2021

Autorzy	Dymitr Lubczyk Krzysztof Tabeau Piotr Lewandowski
Wydział	Matematyki i Nauk Informacyjnych
Numer Zespołu	19
Data laboratorium	17:15 29.06.2020
Numer laboratorium	8
Prowadzący	dr inż. Izabela Duncin

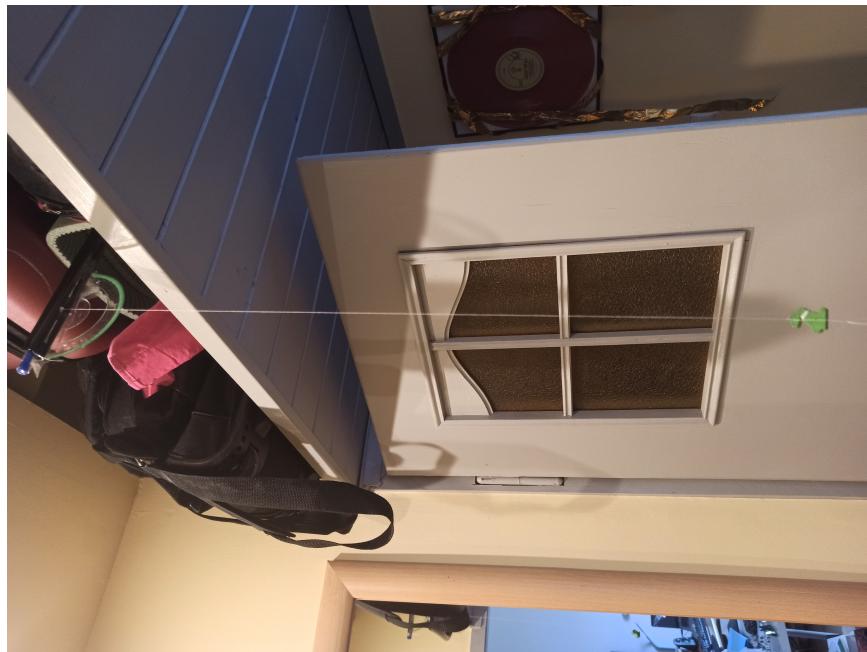
1 Materiały i metody

Wahadło matematyczne skonstruowaliśmy w następujący sposób:

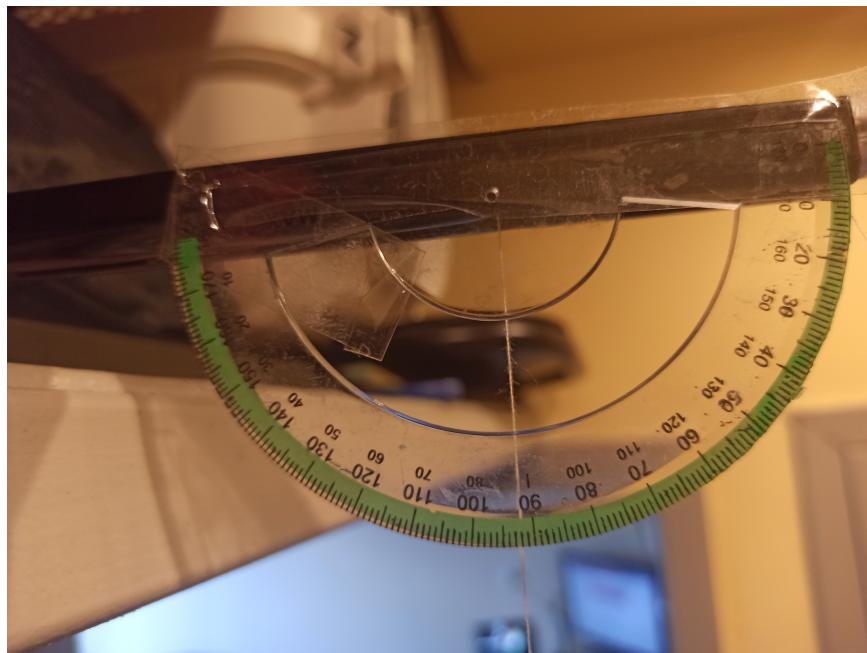
- Metalowy pręt z dziurką i wyżlobieniem położyliśmy na pawlaczu, tak aby częściowo wystawał.
- Na ukrytą część pręta położyliśmy ciężki przedmiot (walizkę), aby mieć pewność że nie będzie żadnych niepożądanych przemieszczeń
- Przez dziurkę w pręcie przełożyliśmy nić, którą przywiązaliśmy do długopisu
- Długopis położyliśmy w wyżlobieniu, tak aby jego ruch był zablokowany
- Do drugiego końca nici przywiązaliśmy pionek z gry planszowej, którego kształt jest zbliżony do kuli
- Przykleiliśmy kątomierz do pręta do ułatwienia pomiarów

Do pomiarów używaliśmy następujących narzędzi:

- Kątomierz - przedziałka co jeden stopień. Niepewność eksperymentatora to dwa stopnie, ponieważ kamera nagrywająca eksperiment była lekko przesunięta względem środka kątomierza.
- Metrówka - przedziałka co 1mm. Niepewność eksperymentatora względem długości wahadła to 5mm, ponieważ eksperiment był w warunkach domowych i nie zawsze można było łatwo skrócić nić do zamierzanej długości oraz metrówka nie była w najlepszym stanie.
- Linijka - przedziałka co 1mm. Niepewność eksperymentatora względem ciężarka to 0mm. Pomiary były przeprowadzane w statycznych i pewnych warunkach.
- Kamera - oprócz ułatwienia pomiarów, kamera również służyła do mierzenia czasu. Dokładność pomiaru czasu jest co do 1ms, ale niepewność eksperymentatora jest wielkości 211ms. Zmierzyliśmy ją wciskając start i pauzę od razu po sobie.



Rysunek 1: Domowe wahadło matematyczne



Rysunek 2: Kątomierz



Rysunek 3: Metrówka



Rysunek 4: Linijka

Doświadczenie przeprowadzaliśmy w dwie osoby. Jedna osoba wychylała wahadło za pomocą książki, tak aby było równe i aby wahadło poruszało się w jednej osi, a druga osoba instruowała pierwszą jak bardzo ma je wychylić, ponieważ tylko ta druga osoba widziała odchylenie na kątomierzu. Następnie pierwsza osoba puszczała wahadło i kamera nagrywała ruch i czas ruchu wahadła. W przypadku skracania nici przy pomiarach zależności okresu wahadła od jego długości. Jedna osoba nawijała nić na długopis, a druga naciągała metrówkę i sprawdzała czy jest już odpowiednia długość.

2 Wprowadzenie teoretyczne

Przeprowadzane doświadczenie składa się z dwóch części:

- Badanie zależności okresu drgań wahadła matematycznego od kąta wychylenia
- Badanie zależności okresu drgań wahadła różnicowego od zmiany długości nici

2.1 Wahadło matematyczne

Teoretycznym modelem, z którego pomocą można opisać ruch skonstruowanego przez nas wahadła jest tak zwane wahadło matematyczne, czyli punkt materialny zawieszony na nieważkiej i nierociągliwej nici, poruszający się po okręgu. W tym modelu brana jest pod uwagę jedynie siła grawitacji oraz siła reakcji nici. Celem tej części doświadczenia jest zaobserwowanie anharmoniczności wahadła matematycznego, czyli zależności okresu drgań wahadła od kąta maksymalnego wychylenia, która w poniższym wzorze na okres drgań jest reprezentowana przez czynnik $f(\alpha)$.

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} f(\alpha) \\ S &= l\alpha \\ m \frac{d^2S}{dt^2} &= -mg * \sin\alpha \\ \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= -\frac{g}{l} \sin\alpha \end{aligned}$$

2.2 Wahadło różnicowe

W tym ćwiczeniu konieczna jest możliwość zmiany długości wahadła, więc model wahadła matematycznego możemy o tę opcję rozszerzyć, tworząc wahadło różnicowe. Wpływ tej zmiany na okres ruchu wahadła przedstawiają poniższe wzory.

$$\begin{aligned} \delta l &= l_0 - l_i \\ \delta T &= T_0^2 - T_i^2 \\ T_i &= 2\pi \sqrt{\frac{l_i}{g}} f(\alpha) \\ T_0^2 - T_i^2 &= \frac{4\pi^2}{g} f^2(\alpha) (l_0 - l_i) \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia przyspieszenia grawitacyjnego wykorzystamy ostatnią z powyższych zależności w następujący sposób:

$$\begin{aligned} y &= ax \\ y &= \delta T \\ g = a &= \frac{4\pi^2}{g} f^2(\alpha) \\ x &= \delta l \end{aligned}$$

3 Wyniki

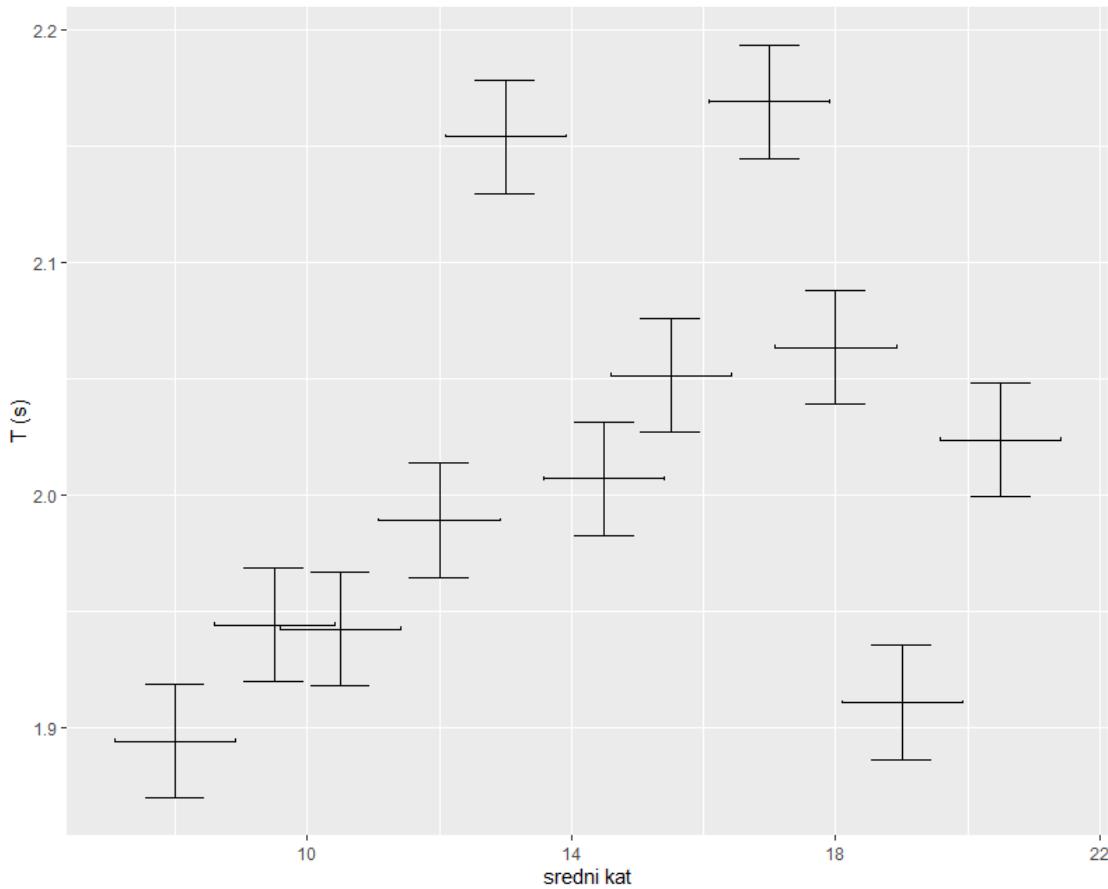
3.1 Pomiar

Do badania zależności okresu drgań wahadła od kąta wychylenia użyliśmy wahadła o długości 1m (z niepewnością 2,958 mm) i otrzymaliśmy następujące dane:

α_p	α_k	$\bar{\alpha}$	5T [s]	$\bar{T}[s]$
10	6	8	9,47	1,894
12	7	9,5	9,72	1,944
14	7	10,5	9,711	1,9422
16	8	12	9,945	1,989
18	8	13	10,771	2,1542
20	9	14,5	10,035	2,007
22	9	15,5	10,257	2,0514
24	10	17	10,846	2,1692
26	10	18	10,317	2,0634
28	10	19	9,553	1,9106
30	11	20,5	10,118	2,0236

Z następującymi niepewnościami: Dane zaprezentowane na wykresie:

α_p	α_k	$\bar{\alpha}$	5T	\bar{T}
1,290	1,290	0,91287	122,398ms	24,480ms

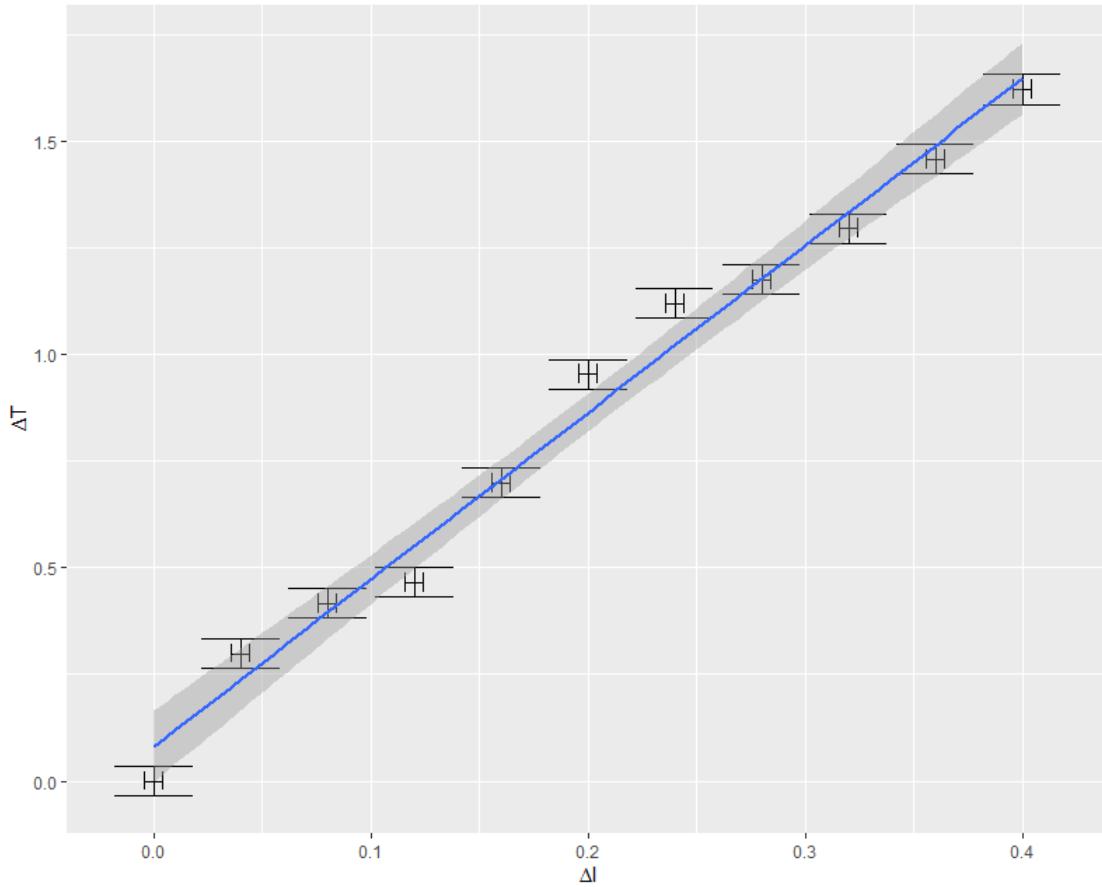


Do badania zależności okresu drgań wahadła od zmiany długości zebraliśmy poniższe dane:

Δl [cm]	$5T$ [s]	\bar{T} [s]	$\Delta T = T_0^2 - T_i^2$
0	10,035	2,007	0
4	9,656	1,9312	0,29851556
8	9,503	1,9006	0,41576864
12	9,437	1,8874	0,46577024
16	9,124	1,8248	0,69815396
20	8,767	1,7534	0,95363744
24	8,528	1,7056	1,11897764
28	8,446	1,6892	1,17465236
32	8,266	1,6532	1,29497876
36	8,017	1,6034	1,45715744
40	7,758	1,5516	1,62058644

Z następującymi niepewnościami: Dane zaprezentowane na wykresie:

Δl	$5T$	\bar{T}	Niepewność ΔT
4,1833 mm	122,398ms	24,480ms	34,6195 ms



Powyższy liniowy wykres można opisać parametrami $a = 3.91221$ z odchyleniem standardowym równym 0.15707 i $b = 0.08103$. Jak wiemy z teorii b powinno być równe 0, a a jest równe $\frac{4\pi^2}{g} * f(\alpha)$. Wiedząc, że $\alpha = 20$ i $f(\alpha) = 1.008$, możemy wyliczyć, że $g = 10,249(411)\frac{m}{s^2}$

4 Analiza i rachunek niepewności

Niepewność liczyliśmy w następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
u_B(\alpha_P) = u_B(\alpha_K) = u_B(\alpha) &= \sqrt{\frac{\Delta\alpha^2 + \Delta\alpha_e^2}{3}} = \sqrt{\frac{1+5}{3}} = 1,290 \\
u_B(5T) &= \frac{\Delta T}{\sqrt{3}} + \frac{\Delta T_e}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{211}{\sqrt{3}} = 0,122398s \\
\bar{\alpha} &= \frac{\alpha_P + \alpha_K}{2} \\
u_B(\bar{\alpha}) &= \sqrt{(\frac{\delta\bar{\alpha}}{\delta\alpha_P})^2 * u_B(\alpha)^2 + (\frac{\delta\bar{\alpha}}{\delta\alpha_K})^2 * u_B(\alpha)^2} = u_B(\alpha) * \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 0,91287 \\
\bar{T} &= \frac{5T}{5} \\
u_B(\bar{T}) &= \sqrt{(\frac{\delta\bar{T}}{\delta 5T})^2 * u_B(5T)^2} = \frac{1}{5} * u_B(5T) = 24,480ms \\
l &= L + \frac{1}{2}d \\
u_B(\bar{L}) &= \sqrt{\frac{\Delta L^2 + \Delta L_e^2}{3}} = \sqrt{\frac{26}{3}} = 2,9439mm \\
u_B(\bar{d}) &= \sqrt{\frac{\Delta d^2 + \Delta d_e^2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0,5774mm \\
u_B(l) &= \sqrt{(\frac{\delta l}{\delta L})^2 * u_B(L)^2 + (\frac{\delta l}{\delta d})^2 * u_B(d)^2} = 2,9580mm \\
\delta l &= l_P - l_K \\
u_B(l_P) = u_B(l_K) &= u_B(l) \\
u_B(\Delta l) &= \sqrt{(\frac{\delta \Delta l}{\delta l_P})^2 * u_B(l)^2 + (\frac{\delta \Delta l}{\delta l_K})^2 * u_B(l)^2} = \sqrt{2} * u_B(l) = 4,1833mm \\
u_B(\Delta T) &= \sqrt{(\frac{\delta \Delta T}{\delta T_0})^2 * u_B(T)^2 + (\frac{\delta \Delta T}{\delta T_i})^2 * u_B(T)^2} = \sqrt{2} * u_B(T) = 34,6195ms \\
u_a(g) &= \sqrt{(\frac{\delta g}{\delta a})^2 * u(a)^2} = \frac{4\pi^2}{a^2} * f(\alpha)^2 * u(a) = 0,411 \frac{m}{s^2}
\end{aligned}$$

Doświadczenie było przeprowadzane w warunkach domowych bez przyrządów wysokiej jakości do mierzenia danych. Wahadło było wprowadzane w ruch przez człowieka, więc zawsze jest szansa na niedokładność, której się nie da zmierzyć. Przykładowo jeśli niechcący wprawi się wahadło w ruch lekko eliptyczny to wychylenie będzie obarczone błędem. Same przyrządy były obarczone dużą niepewnością co skutkuje w gorszych obliczaniach.

5 Dyskusja wyników i wnioski

W pierwszej części eksperimentu uzyskane przez nas wyniki dość znacznie odbiegają od wartości teoretycznych. Jest to spowodowane dużą niepewnością całego układu pomiarowego, wynikającej z jego prowizorycznej konstrukcji, błąd mógł się pojawić z powodów, których nie uwzględniliśmy w naszych obliczeniach, takich jak na przykład poruszanie się elementów urządzenia względem siebie, lub poruszanie się wahadła poza przewidzianą płaszczyzną. W drugiej części doświadczenia udało się nam uniknąć tego typu problemów i uzyskana przez nas charakterystyka jest zgodna z teoretycznymi przewidywaniami. Obliczona wartość przyspieszenia ziemskiego jest większa od rzeczywistej, jednak zważając na wykorzystaną metodę i narzędzia, jest to stosunkowo dobry wynik.