Hard

Hard 1

1. Положим $r_\infty \approx 3.5699456\ldots$. Как изменяется длина цикла при $r \in (3; r_\infty)$?

   Решение. Рассматриваем логистическое отображение

   $$f_r(x) = rx(1-x), \qquad r \in (3; r_\infty),$$

   и орбиту точки x_0:

   $$x_{n+1} = f_r(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

   Пусть $m(r)$ обозначает длину устойчивого цикла, в который попадает орбита.

   Численный эксперимент показывает следующее поведение.

   При $r = 3$ орбита стремится к устойчивой неподвижной точке. Сразу после $r = 3$ эта неподвижная точка теряет устойчивость, и появляется устойчивый цикл порядка $m = 2$.

   При дальнейшем увеличении r наблюдается последовательность удвоений периода: существуют числа

   $$3 = r_1 < r_2 < r_3 < \cdots < r_n < \cdots < r_\infty,$$

   такие что

   $$\begin{aligned} r \in (r_1, r_2) &\Rightarrow m(r) = 2, \\ r \in (r_2, r_3) &\Rightarrow m(r) = 4, \\ r \in (r_3, r_4) &\Rightarrow m(r) = 8, \\ &\ldots \end{aligned}$$

   то есть при прохождении каждого r_n длина цикла удваивается:

   $$m(r) = 2, 4, 8, 16, \ldots$$

   Последовательность (r_n) монотонно возрастает и ограничена сверху числом r_∞, поэтому по теореме Вейерштрасса о монотонной ограниченной последовательности она имеет предел:

   $$\lim_{n\to\infty} r_n = r_\infty.$$

   Отсюда следует, что при $r \to r_\infty - 0$ длина устойчивого цикла $m(r)$ неограниченно возрастает (формально, $m(r)$ можно считать стремящейся к бесконечности).

2. Для $r \in (3; r_\infty)$ экспериментально установите, какие ограничения действуют на m?

   Решение. Исследуем отображение f_r численно для множества значений $r \in (3; r_\infty)$ и фиксируем длину устойчивого цикла $m(r)$. Результаты эксперимента показывают, что:

   - длина устойчивого цикла не принимает произвольные натуральные значения;
   - во всём интервале $r \in (3; r_\infty)$ наблюдаются только циклы длины
     $$m(r) = 2^k, \qquad k = 1, 2, 3, \dots,$$
     то есть возможны только периоды $2, 4, 8, 16, \dots$; циклы длины $3, 5, 6, \dots$ не встречаются;
   - последовательность возможных значений $m(r) = 2^k$ не ограничена сверху: для каждого натурального k можно подобрать параметр r из интервала $(3; r_\infty)$, при котором орбита попадает в цикл длины 2^k.

   Таким образом, основное ограничение на m для $r \in (3; r_\infty)$ заключается в том, что
   $$m = 2^k, \quad k \in \mathbb{N},$$
   причём сверху m неограничено.

[1]

Hard 2

Задание формулируется следующим образом:[2]

1. Напишите функцию, которая для заданного параметра r строит лестницу Ламерея.

2. Сделайте выводы: как выглядят циклы различных порядков на графике?

[1] Здесь имеется в виду не ограниченность сверху или снизу, а то, какую закономерность можно выделить, исследовав изменение длины цикла m.

[2] Формулировка задания взята из методички по лабораторной работе по логистическому отображению.

Решение пункта 1. Рассматриваем логистическое отображение

$$f_r(x) = rx(1-x), \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le r \le 4,$$

и последовательность, задаваемую итерациями

$$x_{n+1} = f_r(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Лестница Ламерея является графическим способом визуализации этих итераций на плоскости (x_n, x_{n+1}).

Алгоритм построения лестницы Ламерея для фиксированного параметра r:

1. Строим на отрезке $[0, 1]$ график функции $y = f_r(x)$ и прямую $y = x$.
2. Выбираем начальное значение $x_0 \in (0, 1)$ и начинаем из точки (x_0, x_0) на диагонали $y = x$.
3. На каждом шаге, имея точку (x_n, x_n):
   (a) проводим вертикальный отрезок до пересечения с графиком $y = f_r(x)$, получая точку (x_n, x_{n+1}), где $x_{n+1} = f_r(x_n)$;
   (b) затем проводим горизонтальный отрезок от точки (x_n, x_{n+1}) до диагонали $y = x$, то есть до точки (x_{n+1}, x_{n+1});
   (c) полагаем x_{n+1} новым значением и повторяем процедуру.

Так последовательно строится «ломаная-лестница», которая представляет собой геометрическое изображение итераций отображения f_r.

Ниже приводится пример функции на Python, реализующей описанный алгоритм (вставка кода может быть оформлена через `verbatim` или пакет `listings`):

Решение пункта 2. Используя построенную функцию, можно исследовать, как на графике выглядят циклы различных порядков при разных значениях параметра r.

- **Цикл порядка 1 (неподвижная точка).** Существует точка x^* такая, что $f_r(x^*) = x^*$. Лестница Ламерея, построенная из любого x_0 из некоторой окрестности x^*, постепенно «закручивается» вокруг точки (x^*, x^*) на диагонали $y = x$ и в пределе остаётся в ней. На графике видно, как ступеньки укорачиваются и сходятся к одной точке.

- **Цикл порядка 2.** Существуют два различных значения x_1, x_2, удовлетворяющих условиям $f_r(x_1) = x_2,\ f_r(x_2) = x_1$. Лестница после переходного процесса начинает периодически повторять один и тот же «прямоугольник»:

$$(x_1, x_1) \to (x_1, x_2) \to (x_2, x_2) \to (x_2, x_1) \to (x_1, x_1) \to \dots$$

  На диагонали $y = x$ видно две устойчивые точки цикла, а на плоскости (x_n, x_{n+1}) — замкнутая ломаная из четырёх отрезков.

- **Цикл порядка 4.** Существуют четыре точки x_1, x_2, x_3, x_4, такие что $f_r(x_1) = x_2,\ f_r(x_2) = x_3,\ f_r(x_3) = x_4,\ f_r(x_4) = x_1$. Лестница Ламерея образует замкнутую ломаную из восьми отрезков (4 вертикальных и 4 горизонтальных), последовательно проходящую через точки (x_i, x_i) на диагонали. Геометрически это более «зазубренный» многоугольник.

- **Цикл порядка m.** В общем случае, если существует цикл длины m:

$$f_r(x_1) = x_2,\ \dots,\ f_r(x_{m-1}) = x_m,\ f_r(x_m) = x_1,$$

  то после переходного процесса лестница Ламерея превращается в замкнутую ломаную из $2m$ отрезков, которая по порядку соединяет все точки (x_i, x_i) на диагонали $y = x$ и затем периодически повторяется. При увеличении порядка цикла m количество ступеней возрастает, и фигура становится всё более сложной, но остаётся периодической.

Таким образом, по виду лестницы Ламерея на графике можно визуально распознать порядок цикла: число «вершинок» на диагонали и число повторяющихся ступеней прямо связано с длиной цикла m.

Hard 3

Исследуйте: как изменяется длина цикла заданного вариантом отображения $g(x_n)$ с изменением параметра r? Постройте соответствующие графики. Есть ли сходства с логистическим отображением?

Решение. Рассмотрим вариант отображения

$$x_{n+1} = g_r(x_n) = r\, x_n(1 - x_n)(2 - x_n),$$

который задаёт последовательность (x_n) при фиксированном параметре r и начальном значении x_0.

Нас интересует длина устойчивого цикла $m(r)$, в который попадает последовательность при данной величине параметра r.

Численный алгоритм исследования. Для каждого значения параметра r из некоторого отрезка (например, $0 \le r \le 3\sqrt{3}/2$) выполняем следующие шаги:

1. Выбираем начальное значение x_0 (например, $x_0 = 0{,}2$).
2. Строим последовательность по правилу
$$x_{n+1} = g_r(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
и выполняем большое число итераций. Первые N_{tr} членов (переходный процесс) отбрасываем.
3. Для оставшихся членов $\{x_n\}$ пытаемся найти наименьшее натуральное число m, для которого выполняется приближенное равенство
$$x_{n+m} \approx x_n \quad \text{для всех достаточно больших } n.$$
Найденное m интерпретируется как длина цикла $m(r)$. Если подходящее m не удаётся обнаружить (например, при очень больших периодах), считаем, что режим близок к хаотическому.
4. Строим график зависимости $m(r)$ от параметра r: по оси абсцисс откладываем r, по оси ординат — найденную длину цикла $m(r)$.

Наблюдаемые результаты. Численный эксперимент показывает следующую картину:

- При малых значениях r последовательность (x_n) стремится к неподвижной точке, то есть наблюдается цикл порядка $m(r) = 1$.
- При увеличении r в некоторый момент неподвижная точка теряет устойчивость и появляется цикл порядка 2.
- Дальнейшее изменение параметра r приводит к *каскаду удвоения периода*: последовательно возникают циклы порядков
$$m(r) = 2,\ 4,\ 8,\ 16, \dots = 2^k.$$
Интервалы значений r, на которых устойчив цикл данного порядка 2^k, становятся всё более узкими, а их границы образуют возрастающую последовательность, сходящуюся к некоторому числу r_∞.

- При r вблизи и правее r_∞ наблюдаются режимы с очень большими периодами и режимы, которые можно считать хаотическими. На графике $m(r)$ это выражается в том, что длина цикла либо сильно возрастает, либо перестаёт быть чётко определённой. Внутри хаотической области встречаются небольшие «окна периодичности», где снова возникают циклы конечной длины.

Сходство с логистическим отображением. Аналогичное поведение наблюдается и для логистического отображения

$$f_r(x) = rx(1-x).$$

В обоих случаях при изменении параметра r система проходит через следующие стадии:

1. устойчивый неподвижный пункт (цикл порядка 1);
2. каскад удвоения периода: $1 \to 2 \to 4 \to 8 \to \dots$;
3. переход к хаотическому режиму при $r > r_\infty$ с наличием «окон периодичности» внутри области хаоса.

Таким образом, у отображения $g_r(x)$ и логистического отображения наблюдается качественно одинаковая схема изменения длины цикла: каскад удвоения периода и последующий переход к хаосу при росте параметра r.