Normal

Normal 1

Рассмотрим логистическое отображение

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1 - x_n),$$

где обычно предполагается $0 \le r \le 4$ и $0 \le x_n \le 1$.

1. Неподвижные точки логистического отображения.

Неподвижная точка x^* удовлетворяет уравнению

$$x^* = f_r(x^*) = rx^*(1 - x^*).$$

Перенесём всё в одну часть:

$$rx^*(1 - x^*) - x^* = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^*\big(r(1 - x^*) - 1\big) = 0.$$

Получаем два возможных значения:

$$x_1^* = 0, \qquad r(1 - x^*) - 1 = 0 \implies 1 - x^* = \frac{1}{r},\ r \ne 0,$$

то есть

$$x_2^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

Таким образом, формально логистическое отображение имеет две неподвижные точки: $x_1^* = 0$ и $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$ (вторая существует при $r \ne 0$).

2. При каких r одна неподвижная точка, а при каких несколько?

С точки зрения модели нас интересуют значения x^* из отрезка $[0, 1]$. Точка $x_1^* = 0$ всегда лежит в $[0, 1]$. Рассмотрим положение $x_2^* = 1 - \dfrac{1}{r}$.

- Если $0 < r < 1$, то $\dfrac{1}{r} > 1$ и $1 - \dfrac{1}{r} < 0$, то есть x_2^* лежит левее нуля и не принадлежит $[0, 1]$. В этом случае на $[0, 1]$ есть ровно одна неподвижная точка: $x^* = 0$.

- Если $r = 1$, то

  $$x_2^* = 1 - \frac{1}{1} = 0,$$

  обе формулы дают одну и ту же точку. Фактически остаётся одна неподвижная точка $x^* = 0$.

- Если $r > 1$, то $\frac{1}{r} < 1$ и

  $$0 < 1 - \frac{1}{r} < 1,$$

  поэтому обе точки

  $$x_1^* = 0, \qquad x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$$

  лежат на отрезке $[0, 1]$ и различны. Здесь у отображения две неподвижные точки.

- Если $r = 0$, то исходное уравнение принимает вид $x^* = 0$, и единственная неподвижная точка вновь равна нулю.

Итак, на отрезке $[0, 1]$ логистическое отображение имеет одну неподвижную точку при $0 \leq r \leq 1$ и две неподвижные точки при $r > 1$.

3. Максимальное количество неподвижных точек.
Неподвижные точки являются решениями уравнения

$$x = f_r(x) = rx(1 - x).$$

Переносим всё в левую часть:

$$rx(1 - x) - x = 0 \quad \Longrightarrow \quad -rx^2 + (r - 1)x = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно x. Из алгебры известно, что квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ имеет не более двух действительных корней. Следовательно, уравнение $f_r(x) = x$ не может иметь более двух решений, то есть логистическое отображение может иметь не более двух неподвижных точек.

Так как при $r > 1$ мы действительно получаем две различные неподвижные точки $x_1^* = 0$ и $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$, число два является максимальным.

Normal 2

Рассмотрим логистическое отображение

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = rx_n(1 - x_n),$$

где $x_0 \in (0, 1)$ и параметр r лежит в интервале $r \in (0, 1]$.

Формулировка задачи

Докажите, что при $x_0 \in (0, 1)$ и $r \in (0, 1]$ последовательность $\{x_n\}$, заданная логистическим отображением, монотонно убывает. Существует ли предел у данной последовательности при $r \in (0, 1]$? Докажите. Покажите графически.

Решение

Шаг 1. Монотонность последовательности.

Сначала заметим, что в Easy 1 было показано: если $0 < x_0 < 1$ и $0 < r \leq 1$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$0 < x_n < 1.$$

Далее покажем, что при тех же условиях последовательность $\{x_n\}$ строго убывает.

Пусть $x \in (0, 1)$. Тогда $0 < x < 1$ и $0 < 1 - x < 1$, а также $0 < r \leq 1$. Следовательно,

$$0 < r(1 - x) < 1,$$

поскольку произведение положительных чисел меньше единицы будет меньше любого из них. Умножая это неравенство на $x > 0$, получаем

$$0 < rx(1 - x) < x.$$

То есть для любого $x \in (0, 1)$ выполняется

$$0 < f_r(x) < x.$$

Применим это к $x = x_n$. Для каждого n имеем $0 < x_n < 1$, поэтому

$$0 < x_{n+1} = f_r(x_n) < x_n.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ строго убывает:

$$x_{n+1} < x_n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2. Существование предела.

Мы установили, что

$$0 < x_{n+1} < x_n \quad \forall n.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$:

- ограничена снизу числом 0 (так как $x_n > 0$);
- монотонно убывает.

По теореме о монотонной ограниченной последовательности такая последовательность имеет предел. Обозначим его через L:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L, \qquad L \geq 0.$$

Шаг 3. Нахождение предела.

Поскольку $x_{n+1} = f_r(x_n)$ и f_r — многочлен (а значит, непрерывная функция), можно воспользоваться свойством предела непрерывной функции по последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f_r(x_n) = f_r\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = f_r(L).$$

С другой стороны, $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$, поэтому

$$L = f_r(L) = rL(1-L).$$

Получаем уравнение на L:

$$L = rL(1-L).$$

Перенесём всё в одну часть:

$$rL(1-L) - L = 0 \quad \Longrightarrow \quad L\big(r(1-L) - 1\big) = 0.$$

Возможны два случая:

$$L = 0 \quad \text{или} \quad r(1-L) - 1 = 0.$$

Второе уравнение даёт

$$1 - L = \frac{1}{r}, \qquad L = 1 - \frac{1}{r}.$$

Так как $0 < r \leq 1$, имеем $\frac{1}{r} \geq 1$ и, следовательно, $1 - \frac{1}{r} \leq 0$. С другой стороны, из убывания и положительности последовательности следует, что её предел удовлетворяет $L \geq 0$. Таким образом, значение $L = 1 - \frac{1}{r}$ не подходит (кроме случая $r = 1$, когда оно совпадает с 0), и единственный возможный предел равен нулю:

$$L = 0.$$

Вывод. При $x_0 \in (0,1)$ и $r \in (0,1]$ последовательность, задаваемая логистическим отображением, строго убывает и имеет предел, причём

$$x_n \downarrow 0, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Normal 3

Решение. Рассмотрим логистическое отображение

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n), \qquad r \in (2, 3),$$

и его ненулевую неподвижную точку

$$x^* = 1 - \frac{1}{r}.$$

Обозначим композицию

$$g(x) = f(f(x)).$$

Прямым вычислением (раскрывая скобки и упрощая) получаем

$$g(x) - x = f(f(x)) - x = -x\,(rx - r + 1)\,\big(r^2x^2 - r^2x - rx + r + 1\big).$$

Положим

$$q(x) = r^2x^2 - r^2x - rx + r + 1.$$

Это квадратичный трёхчлен с положительным старшим коэффициентом $r^2 > 0$, поэтому он достигает минимума в точке

$$x_0 = \frac{r^2 + r}{2r^2} = \frac{r + 1}{2r}.$$

Подставляя x_0 в $q(x)$, имеем

$$q(x_0) = -\frac{r^2}{4} + \frac{r}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}(r^2 - 2r - 3) = -\frac{1}{4}(r - 3)(r + 1) > 0$$

при $r \in (2, 3)$ (так как $r - 3 < 0$, $r + 1 > 0$). Значит, $q(x) > 0$ для всех x.

Следовательно, для любого $x \in (0, 1)$

$$g(x) - x = -x\,(rx - r + 1)\,q(x),$$

и знак $g(x) - x$ определяется только множителем $rx - r + 1 = r(x - x^*)$:

$$\begin{cases} 0 < x < x^* \implies rx - r + 1 < 0 \Rightarrow g(x) - x > 0 \Rightarrow g(x) > x, \\ x > x^* \implies rx - r + 1 > 0 \Rightarrow g(x) - x < 0 \Rightarrow g(x) < x. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим подпоследовательности. Пусть

$$y_n = x_{2n}, \qquad z_n = x_{2n+1}.$$

Тогда

$$y_{n+1} = x_{2n+2} = f(f(x_{2n})) = g(y_n), \qquad z_{n+1} = x_{2n+3} = f(f(x_{2n+1})) = g(z_n).$$

По условию задачи $x_{2n} > x^*$ и $x_{2n+1} < x^*$, то есть

$$y_n > x^*, \qquad z_n < x^* \quad \text{для всех } n.$$

Из свойств g:

- если $y_n > x^*$, то $g(y_n) < y_n$, значит
$$y_{n+1} = g(y_n) < y_n,$$
поэтому $\{y_n\} = \{x_{2n}\}$ строго убывает;
- если $z_n < x^*$, то $g(z_n) > z_n$, значит
$$z_{n+1} = g(z_n) > z_n,$$
поэтому $\{z_n\} = \{x_{2n+1}\}$ строго возрастает.

Так как $y_n > x^*$, последовательность $\{x_{2n}\}$ ограничена снизу точкой x^*, а $z_n < x^*$, значит $\{x_{2n+1}\}$ ограничена сверху той же точкой. Следовательно, обе подпоследовательности монотонны и ограничены, а потому сходятся. Известно, что при $r \in (1, 3]$ предел всей последовательности равен x^*, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = x^*.$$

Итак, при $r \in (2, 3)$ и $x_{2n} > x^*$, $x_{2n+1} < x^*$ подпоследовательность $\{x_{2n}\}$ монотонно убывает к x^*, а подпоследовательность $\{x_{2n+1}\}$ монотонно возрастает к x^*.

Normal 4

Рассматривается отображение

$$x_{n+1} = g(x_n) = r x_n (1 - x_n)(2 - x_n), \qquad r \in \left[0; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right], \ x_0 \in (0, 1). \tag{1}$$

1. Неподвижные точки

Неподвижная точка x^* удовлетворяет условию

$$x^* = g(x^*) = rx^*(1 - x^*)(2 - x^*).$$

Переносим всё в одну сторону:

$$rx^*(1 - x^*)(2 - x^*) - x^* = 0 \iff x^*\big(r(1 - x^*)(2 - x^*) - 1\big) = 0.$$

Отсюда сразу получаем одну неподвижную точку

$$x_0^* = 0.$$

Оставшиеся неподвижные точки удовлетворяют уравнению

$$r(1 - x^*)(2 - x^*) = 1.$$

Раскроем скобки:

$$(1 - x)(2 - x) = 2 - 3x + x^2,$$

поэтому

$$2 - 3x^* + (x^*)^2 = \frac{1}{r} \quad \iff \quad (x^*)^2 - 3x^* + \left(2 - \frac{1}{r}\right) = 0.$$

Это квадратное уравнение, откуда

$$x_{1,2}^* = \frac{3 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{r}}}{2}, \qquad r > 0.$$

Итак, при $r > 0$ отображение (1) имеет три неподвижные точки:

$$x_0^* = 0, \qquad x_{1,2}^* = \frac{3 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{r}}}{2}.$$

2. Диапазон параметра r, при котором x_n монотонно сходится к нулю

Пусть $0 < x_0 < 1$. Покажем, что при $0 < r \leq \frac{1}{2}$ последовательность $x_{n+1} = g(x_n)$ положительна, строго убывает и сходится к нулю.

2.1. Знак x_{n+1} и сравнение с x_n

Возьмём произвольное $x \in (0,1)$. Тогда

$$0 < 1 - x < 1, \qquad 1 < 2 - x < 2,$$

значит $(1-x)(2-x) > 0$ и при $r > 0$

$$g(x) = rx(1-x)(2-x) > 0.$$

Сравним $g(x)$ с x:

$$g(x) < x \iff r(1-x)(2-x) < 1 \quad (x > 0).$$

Подставим

$$(1-x)(2-x) = 2 - 3x + x^2.$$

Для $x \in [0,1]$:

$$(1-x)(2-x) - 2 = x^2 - 3x = x(x-3) \leq 0,$$

поэтому

$$0 < (1-x)(2-x) \leq 2.$$

Если $0 < r \leq \frac{1}{2}$, то

$$r(1-x)(2-x) \leq 2r \leq 1,$$

и при $x > 0$ неравенство строгое:

$$r(1-x)(2-x) < 1.$$

Следовательно,

$$0 < g(x) < x \quad \text{для всех } x \in (0,1),\ 0 < r \leq \frac{1}{2}.$$

Подставляя $x = x_n$, получаем: если $0 < x_n < 1$, то

$$0 < x_{n+1} = g(x_n) < x_n < 1.$$

Поскольку $0 < x_0 < 1$, по индукции имеем

$$0 < x_{n+1} < x_n < 1 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Значит, $\{x_n\}$ — положительная строго убывающая последовательность, ограниченная снизу нулём. По теореме о монотонной ограниченной последовательности, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \geq 0.$$

2.2. Нахождение предела

Функция g — многочлен, следовательно, непрерывна. Тогда

$$L = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = g(L).$$

То есть L является неподвижной точкой отображения, а значит $L \in \{0, x_1^*, x_2^*\}$. Кроме того, $0 \le L \le 1$, поскольку все $x_n \in (0,1)$.

Предположим, что $L > 0$. Тогда из равенства $L = g(L)$ и деления на L получаем

$$1 = r(1-L)(2-L).$$

Но для $L \in (0,1]$ верно

$$0 < (1-L)(2-L) < 2$$

и при $0 < r \le \frac{1}{2}$ имеем

$$r(1-L)(2-L) < 2r \le 1.$$

Отсюда $r(1-L)(2-L) \ne 1$, противоречие. Следовательно, единственно возможный предел

$$L = 0.$$

Таким образом, при

$$0 < r \le \frac{1}{2}, \quad x_0 \in (0,1)$$

последовательность (1) строго убывает и сходится к нулю:

$$x_n \downarrow 0, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

При $r = 0$ имеем $x_1 = x_2 = \cdots = 0$, т.е. последовательность тоже монотонна и сходится к нулю.

Покажем, что при $r > \dfrac{1}{2}$ не выполняется условие задачи: не для всех $x_0 \in (0,1)$ последовательность монотонно сходится к нулю.

Так как $r > \dfrac{1}{2}$, то $\dfrac{1}{r} < 2$ и

$$(1-x)(2-x) \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

По непрерывности существует $\delta > 0$ такое, что

$$0 < x < \delta \implies (1-x)(2-x) > \frac{1}{r}.$$

Тогда для $0 < x < \delta$ имеем

$$g(x) = rx(1 - x)(2 - x) > x.$$

Выбирая $x_0 \in (0, \delta)$, получаем $x_1 > x_0$, то есть последовательность не является монотонно убывающей. Следовательно, при $r > \frac{1}{2}$ условие монотонной сходимости к нулю не выполняется.

Итог: последовательность (1) монотонно сходится к нулю при

$$\boxed{0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \quad x_0 \in (0, 1).}$$