Easy

Easy 1

Рассмотрим логистическое отображение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \qquad r \in [0, 1].$$

Утверждение. Пусть $0 < x_0 < 1$ и $r \in [0, 1]$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$0 \leq x_n < 1.$$

Более того, если $0 < r \leq 1$, то неравенства строгие:

$$0 < x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Сначала докажем вспомогательную лемму.

Лемма. Если $0 < x < 1$, то

$$0 < x(1 - x) < 1.$$

Доказательство леммы. Из $0 < x < 1$ следует, что $0 < 1 - x < 1$. Так как произведение двух положительных чисел положительно, имеем

$$x(1 - x) > 0.$$

Кроме того, из неравенства $1 - x < 1$ и условия $x > 0$ получаем

$$x(1 - x) < x \cdot 1 = x < 1.$$

Следовательно,

$$0 < x(1 - x) < 1,$$

что и требовалось доказать. □

Теперь вернёмся к логистическому отображению.

1) Случай $r = 0$. Тогда по определению

$$x_{n+1} = 0 \cdot x_n(1 - x_n) = 0 \quad \text{для всех } n \geq 0.$$

При этом $0 < x_0 < 1$ и $x_n = 0$ для всех $n \geq 1$, то есть

$$0 \leq x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Строгого неравенства $0 < x_n$ для $n \geq 1$ здесь нет; это вырожденный случай.

2) Случай $0 < r \leq 1$. Докажем по индукции, что при $0 < x_0 < 1$ выполняется

$$0 < x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

База индукции. По условию $0 < x_0 < 1$, то есть утверждение верно при $n = 0$.

Индукционный переход. Пусть для некоторого $n \geq 0$ выполнено $0 < x_n < 1$. Тогда по лемме

$$0 < x_n(1 - x_n) < 1.$$

Так как $0 < r \leq 1$, умножая неравенство на положительное число r, получаем

$$0 < rx_n(1 - x_n) < r \leq 1.$$

По определению логистического отображения

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

следовательно,

$$0 < x_{n+1} < 1.$$

То есть из условия $0 < x_n < 1$ следует $0 < x_{n+1} < 1$, и индукционный переход выполнен.

По принципу математической индукции имеем

$$0 < x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

при $0 < x_0 < 1$ и $0 < r \leq 1$.

Объединяя оба рассмотренных случая ($r = 0$ и $0 < r \leq 1$), получаем утверждение задачи:

$$0 \leq x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

для всех $r \in [0, 1]$, причём при $0 < r \leq 1$ неравенства являются строгими.

$\square$

Easy 2

Сделайте вывод: как параметр r влияет на поведение функции зависимости x_{n+1} от x_n? Постройте эту функцию для нескольких различных значений r.

Рассмотрим семейство функций

$$f_r(x) = rx(1 - x), \qquad x \in [0, 1],\ r \geq 0.$$

Заметим, что

$$f_r(x) = r(x - x^2) = -r(x^2 - x).$$

Преобразуем квадратный трёхчлен $x^2 - x$ по формуле полного квадрата:

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

поэтому

$$x - x^2 = -\left(x^2 - x\right) = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Тогда

$$f_r(x) = r\left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{r}{4} - r\left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Так как $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ для всех x, то

$$f_r(x) \leq \frac{r}{4} \quad \text{для всех } x,$$

и равенство достигается только при $x = \frac{1}{2}$. Следовательно, вершина параболы имеет координаты

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{r}{4}\right).$$

Кроме того,

$$f_r(0) = 0, \qquad f_r(1) = 0,$$

поэтому график всегда проходит через точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Коэффициент при x^2 равен $-r \leq 0$, значит, парабола «открыта вниз», а ось симметрии проходит через точку $x = \frac{1}{2}$.

Отсюда следует, что параметр r отвечает за вертикальное растяжение графика: при изменении r положение нулей $x = 0$ и $x = 1$, а также оси симметрии $x = \frac{1}{2}$ не меняются, но значение в вершине равно $r/4$, поэтому при увеличении r парабола становится выше. При $0 \leq r \leq 4$ выполняется $\frac{r}{4} \leq 1$, откуда

$$0 \leq f_r(x) \leq 1 \quad \text{для всех } x \in [0, 1],$$

то есть логистическое отображение переводит отрезок $[0, 1]$ в себя.

Для иллюстрации можно построить графики $f_r(x)$ для нескольких значений параметра, например $r = 0{,}5;\ 1;\ 2{,}5;\ 3{,}5$. Полученные кривые будут иметь одинаковую форму и отличаться только по высоте вершины.

Easy 3 (вариант $N = 4$)

Для моего варианта

$$x_{n+1} = g_r(x_n) = r x_n (1 - x_n)(2 - x_n), \qquad r \in \Big[0; \frac{3\sqrt{3}}{2}\Big].$$

1. Построение графиков. Положим $h(x) = x(1-x)(2-x)$, тогда $g_r(x) = rh(x)$. Функция $h(x)$ является кубическим многочленом и на отрезке $[0,1]$ имеет нули при $x = 0$ и $x = 1$, а между ними положительна, поскольку $x > 0$, $1 - x > 0$ и $2 - x > 1$. При фиксированном x зависимость от параметра r линейная, то есть изменение r приводит только к вертикальному растяжению графика.

Для нескольких значений параметра, например $r = 0{,}5;\ 1{,}5;\ 2{,}3$, мы строим графики функций $x_{n+1} = g_r(x_n)$ на отрезке $x_n \in [0,1]$. Все полученные кривые проходят через точки $(0,0)$ и $(1,0)$ и имеют одинаковую форму, отличаясь только высотой.

2. Сравнение с логистическим отображением. Логистическое отображение задаётся формулой

$$f_r(x) = rx(1-x),$$

а в моём варианте

$$g_r(x) = rx(1-x)(2-x).$$

Сходства. Обе функции содержат общий множитель $x(1-x)$, поэтому

$$f_r(0) = g_r(0) = 0, \qquad f_r(1) = g_r(1) = 0.$$

При допустимых значениях параметра r каждая из них переводит отрезок $[0,1]$ в себя, а параметр r отвечает за вертикальное растяжение графика: при увеличении r кривые становятся выше, сохраняя положение нулей $x = 0$ и $x = 1$.

Различия. Функция $f_r(x)$ является квадратичной (парабола), а $g_r(x)$ — кубическим многочленом, поэтому её график несимметричен: подъём при малых x более крутой, а спад ближе к $x = 1$ более пологий. Дополнительный множитель $(2-x) > 1$ на отрезке $[0,1]$ усиливает значения $g_r(x)$ по сравнению с $f_r(x)$, поэтому допустимый диапазон параметра r у варианта уже: здесь $r \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, тогда как для логистического отображения допустимы значения $r \le 4$.

Вывод. Логистическое отображение и отображение моего варианта имеют схожую качественную динамику, что связано с общим множителем $x(1-x)$ и ограниченностью на $[0,1]$. Отличия в форме графиков и в допустимых значениях r вызваны дополнительным множителем $(2 - x)$, который делает кривую более крутой при малых x и смещает максимальные значения, а значит, влияет на то, при каких r появляются различные режимы поведения последовательности $\{x_n\}$.