

ロボカップで使える数学

電気通信大学 情報理工学域 I 類 中野 湧
2024 年 12 月 22 日

1 導入

ロボカップではボールの方向を考えたり、モーターの出力を決定したりなどでさまざまな数式を用います。なにかみんなの知らない数学の「技」を持っているということは、誰も知らない技術を持っていることと同じだと思います（個人的な意見）。また、それを知っているだけで、できることがどんどん増えていきます。今日は様々な数学の「技」を紹介します。また、だんだん難しくなっていきますが、ぜひ興味を持っていただきたいです。

2 本題

三角関数 キーワード：三角関数，三角比

三角関数はロボカップジュニアで使用することの多い有名な関数です。右に三角形があります。そして直角三角形で直角ではないある角の角度を θ とします。この時、この角に対して三角関数は以下のように定義されます。

$$\sin \theta = \frac{a}{c}, \quad \cos \theta = \frac{b}{c}, \quad \tan \theta = \frac{a}{b} \quad (1)$$

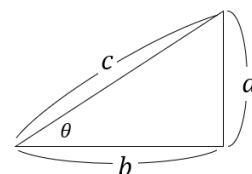


図 1: 直角三角形

なぜ、三角関数が使えると嬉しいのでしょうか。それは、ある任意の角度に対して辺の比を教えてくれるからです。有名角という物があります。 $\theta = 30^\circ$ です。これは三角定規の鋭い三角形の方と同じ形になります。このとき $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$ となります。つまり、 $\sin \theta = \frac{a}{c}$ と言っていたので、 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ となります、一方で、 $\theta = 20^\circ$ などは、求めるのは難しいです。しかしこのようなものでもコンピュータに聞けば辺の比を教えてくれます。

例題 1 図 1 において $a = 3, b = 4, c = 5, \theta = \theta_1^\circ$ であるとき、 $\sin \theta_1^\circ, \cos \theta_1^\circ, \tan \theta_1^\circ$ を求めてください。

EX1 次の式が成り立つことを証明してください。（※ $(a)^2 = a \times a$ ）

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \quad (2)$$

逆三角関数 キーワード：逆関数，逆三角関数

さきほど三角関数について紹介しました。でも実際のロボカップジュニアなどではむしろ角度の方が知りたいということがあります。例えば図のようにオレンジ色のボールがロボットに対してどのぐらいの角度にあるかという情報は、サッカーオープンでは超大事な情報です。関数は、逆関数という物を合わせて持っていることがあります。たとえば、 $y = x + 2$ という関数があります。これの逆関数とは y の値に対して x の関数を教えてくれるものです。この場合の逆関数は次のように求めることができます。

$$x = y - 2 \quad (3)$$

このように、 $x = (y \text{ の式})$ に書き換えることで逆関数を求めることができました。また、関数は $y = (x \text{ の式})$ と書く習慣があるので

$$y = x - 2 \quad (4)$$

と書けば、逆関数の完成です。ここで、三角関数にも実は逆関数という物があります。それが逆三角関数です。逆三角関数はどのような形の関数なのかなって思っちゃいますよね。でもたぶん計算が大変なので省きます。その代わりに、コンピュータに辺の比を教えると、角度を教えてくれる関数を紹介します。

- $\arcsin x$: $\sin \theta$ の逆関数
- $\arccos x$: $\cos \theta$ の逆関数
- $\arctan x$: $\tan \theta$ の逆関数

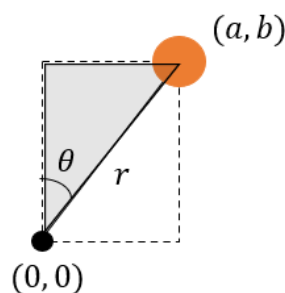
これがあると何がうれしいのでしょうか。上図で考えます。今 θ を求めたいです。灰色の部分をつ三角形と考えます。すると、三角形の斜辺以外の辺の長さはそれぞれ a, b ということがわかります。つまりこの三角形において次の式が成り立つはずで、(座標軸が書かれていないですが、横方向が x 座標、縦方向が y 座標と考えてください)

$$\tan \theta = \frac{a}{b} \quad (5)$$

ここで、私たちは θ を求めたいです。そこで逆三角関数 $\arctan x$ を用います。つまりこの関数に対して次の式が成り立つはずで、

$$\theta = \arctan \frac{a}{b} \quad (6)$$

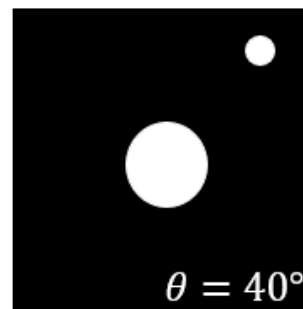
このように求められます。プログラムでは使用する言語での逆三角関数の使い方を調べてください。



例題 2 $a = \frac{1}{2}$ とします。 $\arcsin a, \arccos a$ で表される角度を求めてください。

EX2 $\cos \theta$ は $\frac{b}{r}$ なので、 $b = r \times \cos \theta$ で表すことができます。しかし θ は未知の値でわからないため、この式から逆三角関数を用いて θ を用いないものに変えてください。

よくロボカップジュニアでは，デバッグのためにディスプレイを載せているチームが多くいますね。右によくあるディスプレイを載せておきます。こういうディスプレイを作るにはどうすればいいでしょうか。ロボットに対してボールのある位置を描画する必要があります。つまり，ボールの角度分だけ外側のボールに見立てた円を，ロボットを中心として同じ角度分だけ回すことができるのが理想です。しかし，このボールの位置はどうやって計算するのでしょうか。地道に三角関数を用いて計算していけばなんか求めれそうですね。でもここではもっとわかりやすい計算方法を紹介します。（計算結果は地道に計算したものと同じになるかも。したことないです）行列という物を利用します。ここからしばらくは行列の話となります。読み飛ばしていただいても構いません。興味がある方のために参考程度に載せておきます。



さて，ある点 (x, y) を原点を中心に θ 度回転させた点 (x', y') を教えてくれる行列が以下のように定義されます。ただし θ は反時計回りを正の方向とします。

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7)$$

このように，行列による点の変換のことを一次変換と言います。どのように利用するかというと，この行列を左からかけることで，回転後の座標を得ることができます。

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \times \cos \theta - y \times \sin \theta \\ x \times \sin \theta + y \times \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9)$$

行列の掛け算のしかたについては説明を省略します。行列は面白いので是非調べてみてください。ということで，答えが出ました。つまり，点 (x, y) を回転させた後の座標というのは，点 $(x \times \cos \theta - y \times \sin \theta, x \times \sin \theta + y \times \cos \theta)$ ということがわかりました。とくに高校では複素数を用いた点の回転を習います。しかし普通の座標平面では複素数という物がありません。回転行列ではなくせめて上の回転後の座標を求める式を知っておくととても役立ちます。ちなみに，筆者は模試で使っていました笑。

EX3 行列による一次変換を用いて，点 $(3, 2)$ を原点を中心に 30° 回転させた座標を求めてください。

3 おわりに

今回のプレゼンでは数学の様々な関数について紹介しました。何個覚えられましたか？ぜひロボカップで使ってみてくださいね。また，ロボカップではもう一つベクトルという物も大事な考え方です。あわせて覚えておきたいですね。ご清聴ありがとうございました。