

高等数学

tabuyos¹

2021 年 1 月 20 日

¹Aaron Liew

Contents

第一章 函数与极限	3
1.1 映射与函数	3
1.1.1 习题 1-1	3
1.2 数列的极限	5
1.2.1 习题 1-2	5

1.1 映射与函数

1.1.1 习题 1-1

想一想 1

1. 求下列函数的自然定义域:

1. $y = \sqrt{3x+2}$

解: $\mathbb{D}(x) \in [-\frac{2}{3}, +\infty)$

2. $y = \frac{1}{1-x^2}$

解: $\mathbb{D}(x) \neq \pm 1$

3. $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$

解: $\mathbb{D}(x) \neq \pm 1, 0$

4. $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

解: $\mathbb{D}(x) \in (-2, 2)$

5. $y = \sin \sqrt{x}$

解: $\mathbb{D}(x) \in [0, +\infty)$

6. $y = \tan(x+1)$

解: $\mathbb{D}(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

7. $y = \arcsin(x-3)$

解: $\mathbb{D}(x) \in [2, 4]$

8. $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{3}$

解: $\mathbb{D}(x) \in (-\infty, 3]$ 且 $x \neq 0$

9. $y = \ln(x+1)$

解: $\mathbb{D}(x) \in (-1, +\infty)$

10. $y = e^{\frac{1}{x}}$

解: $\mathbb{D}(x) \neq 0$ 2. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x$

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$

(4) $f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$

3. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

求 $\varphi(\frac{\pi}{6}), \varphi(\frac{\pi}{4}), \varphi(-\frac{\pi}{4}), \varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

1. $y = \frac{x}{1-x}, \quad (-\infty, 1);$

2. $y = x + \ln x, \quad (0, +\infty).$

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的, 证明:

- (1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;
- (2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是其函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非偶函数又非其函数?

- (1) $y = x^2(1 - x^2)$
- (2) $y = 3x^2 - x^3$
- (3) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$
- (4) $y = x(x-1)(x+1)$
- (5) $y = \sin x - \cos(x+1)$
- (6) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$

8. 下列各函数中那些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期

- (1) $y = \cos(x-2)$
- (2) $y = \cos 4x$
- (3) $y = 1 + \sin \pi x$
- (4) $y = x \cos x$
- (5) $y = \sin^2 x$

9. 下列函数的反函数:

- (1) $y = \sqrt[3]{x+1}$
- (2) $y = \frac{1-x}{1+x}$
- (3) $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0)$
- (4) $y = 2 \sin 3x \quad (-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6})$
- (5) $y = 1 + \ln(x+2)$
- (6) $y = \frac{2^x}{2^x+1}$

10. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是在 X 上既有上界又有下界.

11. 在下列各题中, 求有所给函数构成的复合函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

- (1) $y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{4}$
- (2) $y = \sin u, u = 2x, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4}$
- (3) $y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2, x_1 = 1, x_2 = 2$
- (4) $y = e^u, u = x^2, x_1 = 0, x_2 = 1$
- (5) $y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1$

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $\mathbb{D} = [0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

- (1) $f(x^2)$
- (2) $f(\sin x)$
- (3) $f(x+a) \quad (a > 0)$
- (4) $f(x+a) + f(x-a) \quad (a > 0)$

13. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1 \end{cases} \quad g(x) = e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

1.2 数列的极限

1.2.1 习题 1-2

想一想 2

1. 下列各题中, 哪些数列收敛, 哪些数列发散? 对收敛数列, 通过观察 x_n 的变化趋势, 写出它们的极限:

(1) $\{\frac{1}{2^n}\}$

(5) $\{n(-1)^n\}$

(2) $\{(-1)^n \frac{1}{n}\}$

(6) $\{\frac{2^n-1}{3^n}\}$

(3) $\{2 + \frac{1}{n^2}\}$

(7) $\{n - \frac{1}{n}\}$

(4) $\{\frac{n-1}{n+1}\}$

(8) $\{[(-1)^n + 1] \frac{n+1}{n}\}$