

# Commande optimale

## Compte rendu du BE suspension (semi) active

Ayoub Belafki, Vincent Eychenne

4 AE-SE

Année 2022-2023

- 31 mai 2023 -

# Commande optimale

## Compte rendu du BE suspension (semi) active

Ayoub Belafki, Vincent Eychenne

4 AE-SE

Année 2022-2023

- 31 mai 2023 -

## Table des matières

Introduction	2
<b>1 Modélisation</b>	<b>3</b>
1.1 Équations du système . . . . .	3
1.2 Equation d'état du système . . . . .	4
<b>2 Analyse en boucle ouverte</b>	<b>5</b>
2.1 Fonctions de transfert . . . . .	5
2.2 Diagrammes de Bode . . . . .	5
2.3 Réponse à un échelon de 8cm (trottoir) . . . . .	6
<b>3 Commande optimale</b>	<b>8</b>
3.1 Coefficients q donnés . . . . .	8
3.2 Modification des coefficients . . . . .	10
<b>4 Placement de pôles</b>	<b>11</b>
<b>5 Conclusion</b>	<b>13</b>

## Introduction

Le but de ce bureau d'étude est d'examiner le fonctionnement des suspensions pilotées des voitures, qu'elles soient actives ou semi-actives. Dans un premier temps, nous avons effectué une identification du système en utilisant les principes de la mécanique. Ensuite, nous avons procédé à une analyse du système en boucle ouverte en traçant les courbes pertinentes à l'aide de Matlab. Enfin, nous avons développé une commande optimale en utilisant le critère quadratique, que nous avons ensuite comparé à la méthode du placement des pôles.

## 1 Modélisation

Nous modélisons un système dit de "quart de véhicule", représenté en Figure 1.

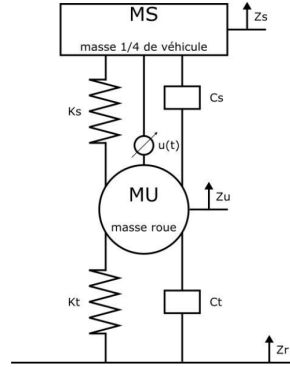


FIGURE 1 – Système "quart de véhicule"

Nous avons les variables suivantes :

- $Z_s$  déplacement vertical de la caisse par rapport à la position d'équilibre
- $Z_u$  déplacement vertical de la roue par rapport à la position d'équilibre
- $Z_r$  entrée de route (profil de la route)
- $K_s$  raideur du ressort de suspension
- $C_s$  coefficient de frottement de l'amortisseur
- $K_t$  raideur du pneu
- $C_t$  coefficient d'amortissement du pneu

### 1.1 Équations du système

Sur la caisse, les forces suivantes s'appliquent :

- Force du ressort
- Amortisseur
- Poids de la caisse

Sur la roue, les forces suivantes s'appliquent :

- Force de la raideur du pneu
- Amortissement du pneu
- Poids de la roue

Nous appliquons ici la deuxième loi de Newton :  $\sum \vec{F} = m \times \ddot{a}$

Nous considérons les deux déplacements :  $Z_u - Z_s$  et  $Z_u - Z_r$ .

Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} M_s \ddot{Z}_s &= -C_s(\dot{Z}_s - \dot{Z}_u) - K_s(Z_s - Z_u) + u(t) \\ M_u \ddot{Z}_u &= C_s(\dot{Z}_s - \dot{Z}_u) + K_s(Z_s - Z_u) - C_t(\dot{Z}_u - \dot{Z}_r) - K_t(Z_u - Z_r) + u(t) \end{cases}$$

## 1.2 Equation d'état du système

Nous choisissons :

- $X_1 = Z_S - Z_U$  Déplacement relatif caisse/roue,
- $X_2 = \dot{Z}_S$  Vitesse absolue verticale de la caisse,
- $X_3 = Z_U - Z_R$  Déplacement relatif roue/sol,
- $X_4 = \dot{Z}_U$  Vitesse absolue verticale de la roue

En injectant les variables d'état dans les équations précédemment obtenues, nous obtenons la représentation d'état suivante :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{-K_S}{M} & \frac{-C_S}{M} & 0 & \frac{C_S}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_S}{M_U} & \frac{C_S}{M_U} & \frac{-K_T}{M_U} & \frac{-(C_S+C_T)}{M_U} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{M} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{C_T}{M_U} \end{bmatrix} \dot{Z}_R$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

FIGURE 2 – Représentation d'état du système

Nous avons un système de la forme :

$$\begin{aligned} &= \\ \begin{cases} \dot{X} &= AX + Bu + E\dot{Z}_R \\ Y &= CX \end{cases} \end{aligned}$$

## 2 Analyse en boucle ouverte

### 2.1 Fonctions de transfert

Nous analysons dans un premier temps le système en boucle ouverte. Cela signifie que l'amortissement est entièrement passif. Nous déterminons, à l'aide de MATLAB, la fonction de transfert de la caisse et de la roue :

```
Tf_Caisse =  
  
          1.19e04 s + 2.381e05  
-----  
s^4 + 25.79 s^3 + 3849 s^2 + 1.19e04 s + 2.381e05  
  
  
Tf_Roue =  
  
          3333 s^2 + 1.19e04 s + 2.381e05  
-----  
s^4 + 25.79 s^3 + 3849 s^2 + 1.19e04 s + 2.381e05
```

### 2.2 Diagrammes de Bode

Nous obtenons maintenant le diagramme de Bode de la caisse :

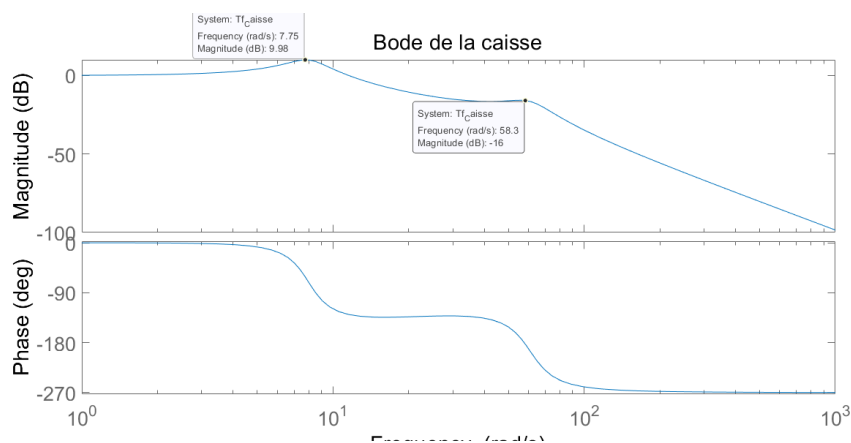


FIGURE 3 – Bode de la caisse

Nous remarquons deux fréquences de résonance :

## Commande optimale : Compte rendu du BE suspension (semi) active

---

- $\omega_1 = 7.75 \text{ rad/s}$
- $\omega_2 = 58.3 \text{ rad/s}$

De même, pour la roue :

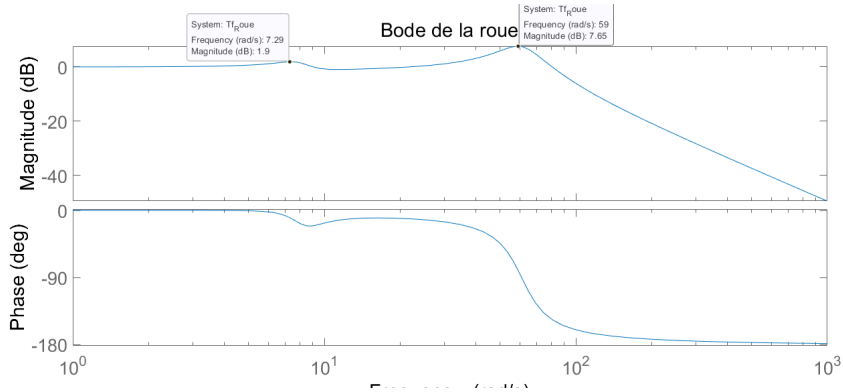


FIGURE 4 – Bode de la roue

Nous remarquons deux fréquences de résonance :

- $\omega_1 = 7.29 \text{ rad/s}$
- $\omega_2 = 59 \text{ rad/s}$

### 2.3 Réponse à un échelon de 8cm (trottoir)

Nous regardons maintenant la réponse de notre système à un échelon de 8cm représentant un trottoir.

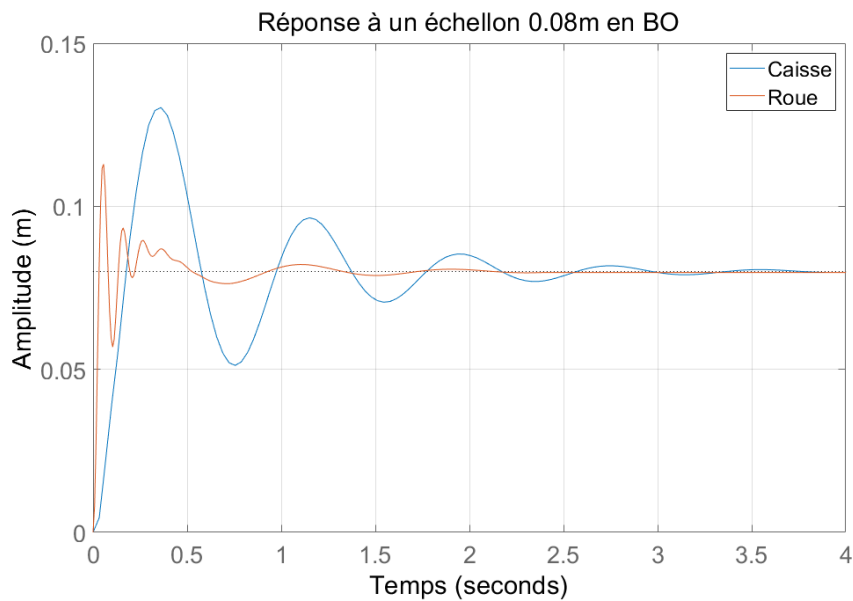


FIGURE 5 – Réponse à un échelon en boucle ouverte



Nous notons la présence d'oscillations importantes de la caisse (en bleu), réduisant le confort et les performances du véhicule. De plus, la voiture a besoin d'environ 3 secondes avant d'arrêter d'osciller.

Aussi, le comportement de la roue (en orange) est dangereux. La roue décolle du sol lors de l'impact avec le trottoir. Cela nuit à la tenue de route, car le contact avec le sol est rompu.

Afin d'améliorer le comportement, nous devons piloter l'amortisseur.

### 3 Commande optimale

#### 3.1 Coefficients q donnés

La commande par retour d'état nous permet de placer un correcteur K minimisant le critère suivant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (X_1^2 q_1 + X_2^2 q_2 + X_3^2 q_3 + X_4^2 q_4 + u^2 r)$$

Avec Q de la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{pmatrix}$$

Afin d'améliorer la performance d'amortissement, nous devons tenir compte des paramètres suivants :

- Faible déplacement de la roue, représenté par  $X_1$
- Confort des passagers : vitesse absolue de la roue par rapport à la caisse, représenté par  $X_2$
- Tenue de route : La roue doit rester en contact avec le sol, représenté par  $X_3$

Initialement, nous choisissons les coefficients de Q suivant :

$$Q = \begin{pmatrix} 4 \times 10^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 225 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec la fonction LQR de MATLAB, nous pouvons déterminer la nouvelle matrice A :

$$A_{BF} = A - B \times G$$

Avec G la matrice calculée grâce à la fonction LQR.

Nous obtenons alors la réponse à un échelon suivant :

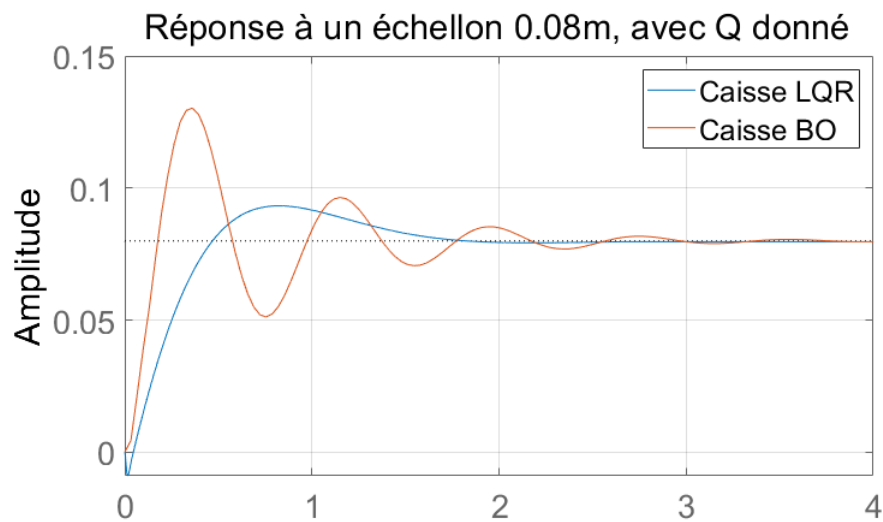


FIGURE 6 – Comparaison LQR et BO pour un échelon 8cm

Les mouvements de la caisse sont meilleurs, car sans oscillations. Aussi, nous obtenons le diagramme de Bode suivant :

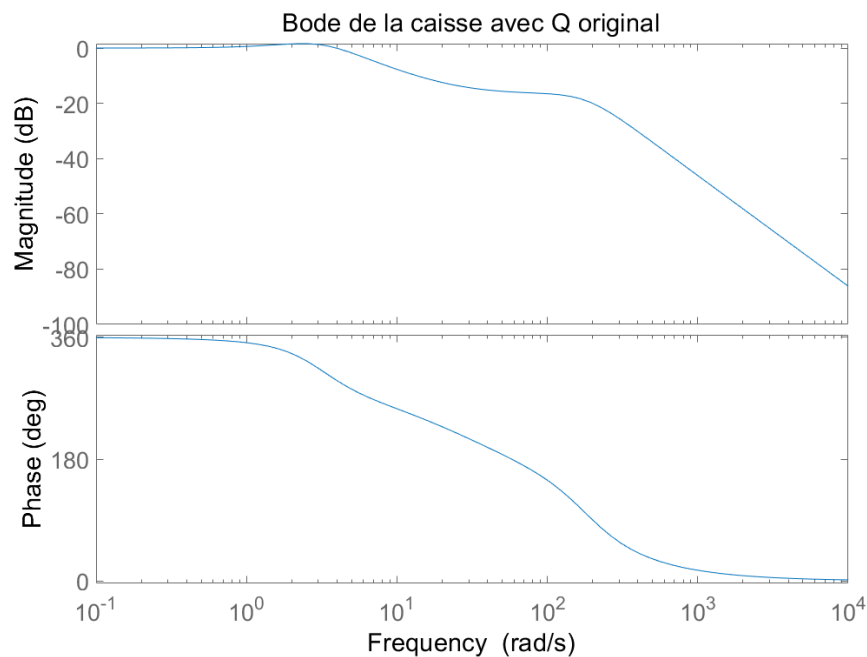


FIGURE 7 – Diagramme de Bode pour Q original

Les résonances ont été éliminées .  
Enfin, nous obtenons l'effort de commande suivant :

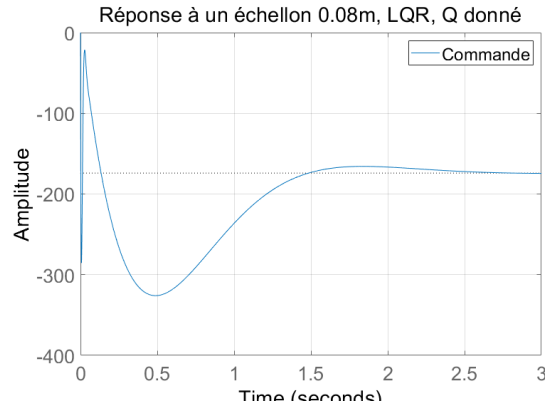


FIGURE 8 – Diagramme de Bode pour Q original

### 3.2 Modification des coefficients

Nous obtenons un résultat optimal pour les coefficients suivants :

$$Q = \begin{pmatrix} 40 \times 10^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 \times 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \times 225 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La réponse obtenue pour la caisse est la suivante :

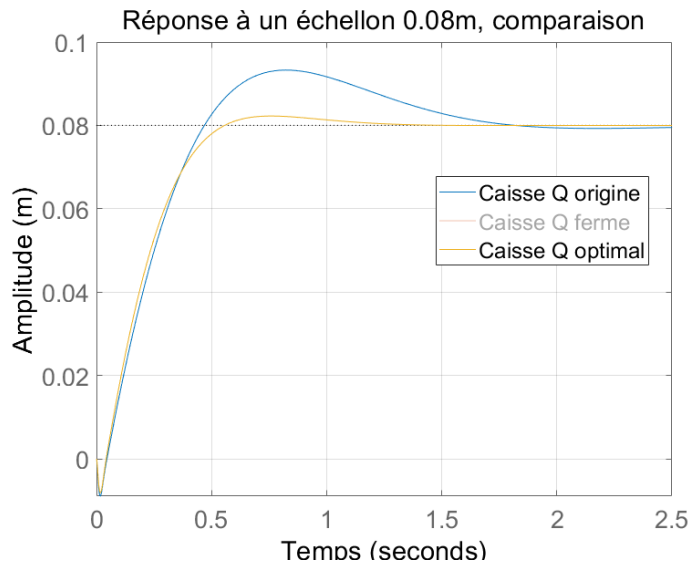


FIGURE 9 – Réponse de la caisse à un échelon, Q optimal

Le dépassement est maintenant quasi-nul. La réponse obtenue pour la roue est satisfaisante, même si elle n'a été que légèrement améliorée avec les nouveaux coefficients.

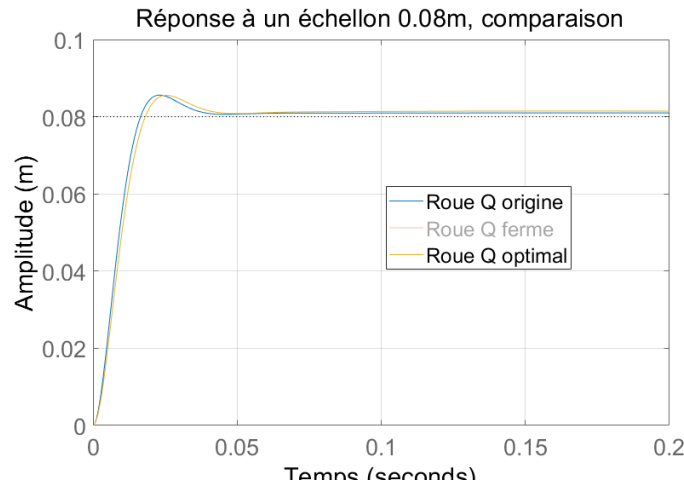


FIGURE 10 – Réponse de la caisse à un échelon, Q optimal

La commande LQR nous aura permis de grandement améliorer le fonctionnement de notre véhicule, en annulant les oscillations et en réduisant le dépassement et le temps de réponse.

Nous allons maintenant comparer cette méthode avec la méthode par placement de pôles.

## 4 Placement de pôles

Nous récupérons les pôles de la fonction de transfert de la caisse. Nous obtenons les pôles suivants en BO :

Nous avons les pôles suivants :

```
>> pole(Sys_Caisse)

ans =

-11.4947 +59.9051i
-11.4947 -59.9051i
-1.4021 + 7.8756i
-1.4021 - 7.8756i
```

## Commande optimale : Compte rendu du BE

### suspension (semi) active

---

Nous utilisons la fonction place de MATLAB pour calculer  $K_p$ . Nous choisissons de garder les pôles les plus rapides et imposons deux pôles lents. Nos pôles idéaux sont les suivants :

```
p =  
  
1.0e+02 *  
  
-0.1142 + 0.5996i -0.1142 - 0.5996i -5.0000 + 0.0000i -2.0000 + 0.0000i
```

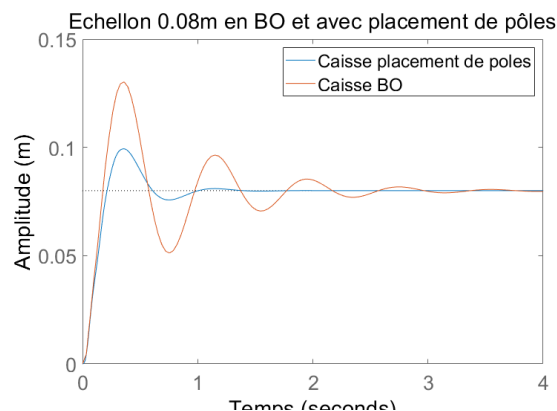
Nous obtenons les gains  $K_p$  suivants :

```
Kpp =  
  
1.0e+03 *  
  
4.2282 1.5343 -0.6971 0.0294
```

Notre nouvelle matrice A en boucle fermée devient :

$$A_p = A - B \times K_p$$

Avec  $K_p$  la matrice de gain pour le retour d'état avec le placement de pôles. Enfin, nous obtenons la réponse suivante, comparée au système en boucle ouverte :



Nous aurions pu ajuster les pôles désirés plus précisément afin d'obtenir une meilleure réponse. Celle obtenue reste néanmoins convaincante.

## 5 Conclusion

Ce bureau d'étude nous aura permis de nous familiariser avec la commande LQR. Nous avons comparé le système en boucle ouverte avec un retour par placement de pôles et une commande LQR. Nous avons pu dans chacun des cas obtenir une bien meilleure réponse qu'en boucle ouverte.

Nous avons néanmoins trouvé la commande LQR bien plus simple à implémenter.







**INSA Toulouse**

135, Avenue de Rangueil  
31077 Toulouse Cedex 4 - France  
[www.insa-toulouse.fr](http://www.insa-toulouse.fr)

Ce document a été écrit avec TeXmaker et compilé avec L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X



MINISTÈRE  
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,  
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR  
ET DE LA RECHERCHE

---

```

% #####Partie
1#####
%Constantes
Ms= 1120/4;
Mu=45;
Ks = 20000;
Kt=150000;
Cs=1000;
Ct=0.0;
%Représentation d'état
A=[0 1 0 -1
   -Ks/Ms -Cs/Ms 0 Cs/Ms
   0 0 0 1
   Ks/Mu Cs/Mu -Kt/Mu -(Cs+Ct)/Mu];

B=[0
   1/Ms
   0
   -1/Mu];

Cst=[0 1 0 0];
Cut=[0 0 0 1];

D=0;
E=[0
   0
   -1
   Ct/Mu];

%Fonction de transfert
%%Caisse Zs/Zr
Sys_Caisse = ss(A,E,Cst,D);
Tf_Caisse = tf(Sys_Caisse);

%%Roue Zu/Zr
Sys_Roue=ss(A,E,Cut,D);
Tf_Roue=tf(Sys_Roue);

%Echellons
stepplot(0.08*Tf_Caisse);
hold on
stepplot(0.08*Tf_Roue);
legend('Caisse', 'Roue');
title('Réponse à un échelon 0.08m en BO');
xlabel('Temps');
ylabel('Amplitude (m)');
grid;
% #####Mise en place de la commande
LQR#####
%Faible déplacement de la roue par rapport à la caisse
%->Variable x1

```

---

---

```

%Confort des passages : vitesse absolue de la roue par rapport à la
caisse
    %->Variable x2
%Tenue de route : La roue doit rester en contact avec le sol
    %->Variable x3
%Aucun critère sur x4
Q=[4*10^8 0 0 0;
    0 10^6 0 0;
    0 0 225*10^10 0
    0 0 0 0];
R=1;
[G,K,lambda]=lqr(A,B,Q,R,0);

Abf=A-B*G; %Matrice du retour d'état en BF

%Ft de la caisse :
Sys_Caisse_LQR=ss(Abf,E,Cst,D);
Sys_Roue_LQR=ss(Abf,E,Cut,D);

%Commande
C=-G;
Sys_Commande=ss(Abf,E,C,D);

%Echellons pour la Caisse
figure
stepplot(0.08*Sys_Caisse_LQR);
hold on
stepplot(0.08*Tf_Caisse);
legend('Caisse LQR','Caisse BO');
title('Réponse à un échelon 0.08m, avec Q donné');
grid;

%Echelon pour la Commande
figure
stepplot(0.08*Sys_Commande)
legend('Commande');
title('Réponse à un échelon 0.08m, LQR, Q donné');
grid;
#####En modifiant Q#####
####Ferme->Faible déplacement de la roue par rapport à la caisse
Q_ferme=[50*4*10^8 0 0 0;
    0 10^6 0 0;
    0 0 225*10^10 0
    0 0 0 0];
R=1;
[G_ferme,K,lambda_2]=lqr(A,B,Q_ferme,R,0);

Abf_ferme=A-B*G_ferme; %Matrice du retour d'état en BF

%Ft de la caisse :
Sys_Caisse_LQR_ferme=ss(Abf_ferme,E,Cst,D);
Sys_Roue_LQR_ferme=ss(Abf_ferme,E,Cut,D);

%Commande

```

---

---

```

C=-G;
Sys_Commande_ferme=ss(Abf_ferme,E,C,D);

%Echellons pour la Caisse
% figure
% hold on
% stepplot(0.08*Sys_Caisse_LQR);
% stepplot(0.08*Sys_Caisse_LQR_ferme);
% legend('Caisse Q origine','Caisse Q ferme');
% title('Réponse à un échelon 0.08m, Q ferme');
% xlabel('Temps (ms)');
% grid;

#####Ajout de confort et diminution de x3
Q_tuned=[10*4*10^8 0 0 0;
          0 120*10^6 0 0;
          0 0 0.7*225*10^10 0
          0 0 0 0];
R=1;
[G_tuned,K,lamba_3]=lqr(A,B,Q_tuned,R,0);

Abf_tuned=A-B*G_tuned; %Matrice du retour d'état en BF

%Ft de la caisse :
Sys_Caisse_LQR_tuned=ss(Abf_tuned,E,Cst,D);
Sys_Roue_LQR_tuned=ss(Abf_tuned,E,Cut,D);

%Commande
C=-G;
Sys_Commande_ferme=ss(Abf_tuned,E,C,D);

%Echellons pour la Caisse
figure
hold on
stepplot(0.08*Sys_Caisse_LQR);
stepplot(0.08*Sys_Caisse_LQR_ferme);
stepplot(0.08*Sys_Caisse_LQR_tuned);
legend('Caisse Q origine','Caisse Q ferme','Caisse Q optimal');
title('Réponse à un échelon 0.08m, comparaison');
xlabel('Temps');
ylabel('Amplitude (m)');
grid;

%Echellons pour la roue
figure
hold on
stepplot(0.08*Sys_Roue_LQR);
stepplot(0.08*Sys_Roue_LQR_ferme);
stepplot(0.08*Sys_Roue_LQR_tuned);
legend('Roue Q origine','Roue Q ferme','Roue Q optimal');
title('Réponse à un échelon 0.08m, comparaison');
xlabel('Temps');
ylabel('Amplitude (m)');
grid;

```

---

---

```
#####Comparaison origine LQR optimal
#####

figure
hold on
stepplot(0.08*Sys_Caisse_LQR_tuned);
stepplot(0.08*Sys_Roue_LQR_tuned);
stepplot(0.08*Tf_Caisse);
stepplot(0.08*Tf_Roue);
legend('Caisse LQR','Roue LQR','Caisse BO','Roue BO');
title('Echellon 0.08m en BO et avec LQR optimal');
xlabel('Temps');
ylabel('Amplitude (m)');
% #####Placement de pôles
#####
%Nous récupérons les TF de roue et caisse obtenue via LQR
p=[-11.4248+59.9577i,-11.4248-59.9577i,-500+0i,-200+0i];
Kpp=place(Sys_Caisse.A, Sys_Caisse.B, p);
Ap=A-B*Kpp;
Sys_Caisse_PP=ss(Ap, E, Cst, D);
figure
hold on
stepplot(0.08*Sys_Caisse_PP);
stepplot(0.08*Sys_Caisse);
legend('Caisse placement de poles','Caisse BO');
title('Echellon 0.08m en BO et avec placement de pôles');
xlabel('Temps');
ylabel('Amplitude (m)');
```